Teoría de la forma y sistemas dinámicos II

Antonio Giraldo* y **José Manuel R. Sanjurjo***

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
Campus de Montegancedo
Boadilla del Monte
28660 Madrid, Spain
agiraldo@fi.upm.es

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, Spain
Jose_Sanjurjo@mat.ucm.es

Dedicado con afecto al profesor Enrique Outerelo con ocasión de su 65 cumpleaños.

ABSTRACT

En este trabajo expositivo se presentan algunas relaciones entre las dos ramas de las matemáticas mencionadas en el título. En particular, mostramos algunas propiedades cohomológicas de la descomposición "non-saddle" de un ANR compacto. También se presenta un estudio, basado en la teoría de la forma, de los entornos aislantes de conjuntos invariantes aislados, del cual se obtiene una caracterización de los atractores y algunos resultados nuevos sobre dualidad de Lefschetz del índice de Conley. Finalmente estudiamos las ecuaciones de Morse para una descomposición de Morse de un conjunto invariante aislado.

2000 Mathematics Subject Classification: 55P55, 54C56, 37B25, 37B30.
Key words: Teoría de la forma, sistema dinámico, conjunto invariante aislado, conjunto "non-saddle", descomposición de Morse, ecuaciones de Morse.

*Los autores han sido subvencionados por el proyecto BFM 2003-00825.

Introducción

El presente artículo es una continuación de [19] y en él hacemos una exposición conjunta de resultados de los autores, recientemente publicados en otros lugares, que presentamos aquí sin demostración. Todos ellos tienen el nexo común de establecer relaciones entre dos ramas de las matemáticas (las mencionadas en el título del artículo) en principio distantes pero que en años recientes han tenido fructíferas interrelaciones.

Las consideraciones generales que se hacen en la introducción de [19] son válidas en el artículo presente. Asimismo, pueden ser útiles, para la lectura de este artículo, la breve introducción a la teoría de la forma que se hace en [19] y las nociones básicas sobre sistemas dinámicos que allí se exponen. También se puede encontrar una buena exposición de nociones básicas y resultados en teoría de la forma, adaptada para una audiencia general, en el artículo de Kapitanski y Rodnianski [31] (véase [17, 25, 46, 47] para aplicaciones de esta teoría a los sistemas dinámicos). Para más información sobre teoría de la forma recomendamos consultar los libros de Borsuk [6], Cordier y Porter [13], Dydak y Segal [14], Mardešić [34] y Mardešić y Segal [35], y para información sobre sistemas dinámicos sugerimos la monografía de Hale [26] y los libros de Bathia y Szego [2], Robinson [41] y Temam [53].

Otro objetivo del presente artículo es ofrecer referencias bibliográficas sobre algunos de los trabajos más significativos en el mencionado tema, aunque no todos los artículos citados en la bibliografía se tratan en el presente artículo o en [19].

La clave de la utilidad de la teoría de la forma para el estudio de los sistemas dinámicos es el hecho de que espacios con estructura local irregular aparecen no sólo en matemática pura, sino también en la formulación matemática de fenómenos naturales, por ejemplo solenoides o el atractor de Lorenz (véase [54] como una referencia reciente).

Algunos invariantes importantes de la teoría de la forma son la homología de Čech, los grupos de cohomología y los grupos "shape". Estos últimos coinciden con los grupos de homotopía para espacios con buen comportamiento local como poliedros o variedades.

Existe una familia especial de resultados en teoría de la forma llamados teoremas del complemento. Se podría decir que el primero de estos teoremas se debe a Borsuk, que probó que dos continuos en $\mathbb{R}^2$ tienen la misma forma si y sólo si dividen al plano en el mismo número de componentes. Más tarde, Chapman [7] probó que dos compactos (sumergidos apropiadamente) en el cubo de Hilbert tienen la misma forma si y sólo si sus complementos son homeomorfos. Existen otros resultados en dimensión finita [8, 16, 29, 30]. Algunos de aquellos resultados son interpretados en términos de dualidad atractor–repulsor en sistemas dinámicos [21].

Por otra parte, Robinson [42] usa resultados de Geoghegan y Summerhill [16] sobre la forma de compactos finito dimensionales, combinados con otros resultados, para mostrar que existe una ecuación diferencial en un espacio euclídeo, con algunas propiedades dinámicas especiales.

1. Ecuaciones de Morse–Smale de descomposiciones "non-saddle"

La mayoría de los resultados obtenidos en el ámbito de la aplicación de la teoría de la forma a los sistemas dinámicos conciernen a los atractores. Sin embargo, existe una clase más amplia de conjuntos, que contiene a los atractores y a los repulsores, con propiedades similares. Ésta es la clase de los conjuntos "non-saddle". Sus estructuras topológicas han sido estudiadas en [21].

Sea K un conjunto invariante compacto de un flujo $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ en un espacio métrico localmente compacto M. Se dice que K es un conjunto invariante aislado si existe un entorno compacto N de K en M tal que K es el máximo subconjunto invariante de N. En este caso, se dice que N es un entorno aislante para K en M.

Se dice que un conjunto $K \subset M$ es un conjunto "saddle" si existe un entorno U de K tal que todo entorno V de K contiene un punto $x \in V$ con $\gamma^+(x) \not\subset U$ y $\gamma^-(x) \not\subset U$. Se dice que K es "non-saddle" si no es un conjunto "saddle", i.e., si para todo entorno U de K existe un entorno V de K tal que para todo $x \in V$, $\gamma^+(x) \subset U$ o $\gamma^-(x) \subset U$.

Atractores y repulsores son ejemplos de conjuntos "non-saddle".

En [21] (véase también [19]) se demostró el siguiente teorema que caracteriza la forma de los conjuntos "non-saddle". La demostración del teorema usa el hecho de que los ANRs compactos tienen el tipo de homotopía de poliedros finitos [55].

Teorema 1.1 *Sea K un conjunto aislado "non-saddle" del flujo $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, donde M es un* ANR *localmente compacto. Entonces K tiene la forma de un poliedro.*

En general, los conjuntos invariantes aislados no tienen por qué tener la forma de poliedros finitos (véase [21] para algunos ejemplos).

Se dice que un conjunto invariante aislado K es regular si existe un entorno aislante N tal que si $x \in N$, $t \geq 0$ y $xt \in N$ entonces $x[0,t] \subset N$. Esto equivale a decir que las órbitas que abandonan N nunca regresan. El entorno N anterior también recibe el nombre de regular.

En el siguiente teorema [21] se introdujo la noción de dual de un conjunto aislado regular "non-saddle".

Teorema 1.2 *Sea K un conjunto aislado regular "non-saddle" del flujo $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, donde M es un espacio métrico compacto. Sea L el conjunto de todos los puntos $x \in M$ tales que $\omega^+(x) \not\subset K$ y $\omega^-(x) \not\subset K$. Entonces L es también un conjunto aislado regular "non-saddle". Se dice entonces que L es el dual de K.*

Además, L es no vacío si $K \neq M$.

El par (K, L) formado por un conjunto y su dual generaliza la noción de par atractor–repulsor.

Recordamos un último resultado de [21] en el que, aplicando algunos teoremas de complemento clásicos en teoría de la forma de Ivanšić, Sher y Venema [29, 30], se prueba que, bajo condiciones apropiadas, la forma de un conjunto aislado regular "non-saddle" determina completamente la de su dual.

Teorema 1.3 *Sean K_1 y K_2 conjuntos aislados regulares "non-saddle" de los flujos $\varphi_1, \varphi_2 : M\times\mathbb{R} \longrightarrow M$, donde $M = S^n$ o, más generalmente, una n-variedad compacta lineal a trozos. Supongamos que K_1 y K_2 satisfacen las hipótesis del teorema de Ivanšić–Sher–Venema [30] o del teorema de Ivanšić–Sher [29]. Entonces, si $Sh(K_1) = Sh(K_2)$, los conjuntos duales L_1 y L_2 también tienen la misma forma. En particular, si K_1 y K_2 son atractores con la misma forma, entonces sus repulsores duales tienen la misma forma también.*

En esta sección veremos algunas propiedades cohomológicas de la descomposición "non-saddle" de un ANR compacto, M. Mostramos, en particular, algunas desigualdades en el espíritu de las ecuaciones de Morse–Smale para pares atractor–repulsor (véase [9]). Estas desigualdades afectan a los rangos del índice de Conley cohomológico y también a los de un nuevo invariante cohomológico introducido en [20]. En ese mismo artículo se introduce también la noción de descomposición de Morse cíclica y se prueba que estas descomposiciones admiten filtraciones por conjuntos "non-saddle". Estas filtraciones se pueden usar para obtener ecuaciones de Morse–Smale que generalizan las estudiadas por Kapitanski y Rodnianski para una descomposición de Morse de un atractor global [31]. La teoría de la forma juega un papel importante en el cálculo de todos los invariantes numéricos y polinomios que aparecen en estas ecuaciones.

Recomendamos el artículo de Bhatia [1] para más información sobre las propiedades básicas de los conjuntos "non-saddle", y los artículos y libros de Conley [9, 10], Conley y Easton [11], Robbin y Salamon [40], Rybakowski [43] y D. Salamon [45] para información sobre el índice de Conley.

Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ un flujo en un espacio métrico compacto M. Sean K y L conjuntos aislados regulares "non-saddle" del flujo. Se dice que (K, L) es una descomposición "non-saddle" de M si L es el dual de K.

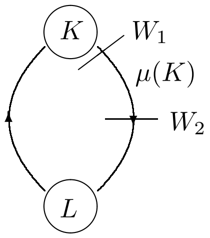
En esta sección veremos un teorema que relaciona la cohomología de M con la de una descomposición "non-saddle". Se aplicará el siguiente lema.

Lema 1.4 *Sea (K, L) una descomposición "non-saddle" de un espacio métrico compacto M. Entonces existe una aplicación*

$$h : M \longrightarrow S^1 = \frac{[-1, 1]}{\{-1, 1\}}$$

tal que $h^{-1}(0) = K$, $h^{-1}([1]) = L$ y $h(xt) < h(x)$, para todo $x \notin K \cup L$ y todo $t > 0$.

Sea ahora (K, L) una descomposición "non-saddle" de M. Consideremos la variedad inestable de K, definida como el conjunto $W^u(K) = \{x \in M \mid \omega^-(x) \subset K\}$. Entonces $h(W^u(K)) = (-1, 0]$. Considérense dos secciones $W_1 = h^{-1}(a)$ $(0 > a > -1)$ y $W_2 = W_1 t_0$ $(t_0 > 0)$



Considérese $\mu(K) = \left(\dfrac{W_1[0,t_0]}{W_1 \cup W_2}, [W_1 \cup W_2]\right)$, donde $\mu(K)$ es un espacio punteado cuyo tipo topológico no depende de las elecciones hechas. De hecho, $\mu(K)$ se puede entender como el espacio punteado $\left(\dfrac{W \times [0,1]}{W \times \{0,1\}}, [W \times \{0,1\}]\right)$, donde W es una sección de $W^u(K) \setminus K$.

Considérese, por otro lado, el índice de Conley $h(L)$ de L. El índice de Conley de un compacto invariante aislado se define como sigue: Sea (N, N_0) un par índice para L en M. Si tomamos el cociente N/N_0 entonces el punto correspondiente a la clase de equivalencia de N_0 se denotará por $*$ (nótese que $N/\emptyset$ se obtiene de N añadiendo el punto aislado $*$, i.e. $N/\emptyset = N \cup \{*\}$). La clase de homotopía (punteada) de $(N/N_0, *)$ es el índice de Conley de L y se denota por $h(L)$ (véase [9] para detalles).

Usando el lema anterior se puede probar el siguiente teorema que relaciona la cohomología de Čech del espacio global M con la de los espacios anteriormente definidos. Denotamos por W_K y W_L las secciones (compactas) de $W^u(K) \setminus K$ y $W^u(L) \setminus L$ respectivamente.

Teorema 1.5 *Sea (K, L) una descomposición "non-saddle" de un ANR métrico compacto, M. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\begin{array}{cccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \check{H}^{n-1}(W_K) \oplus \check{H}^{n-1}(W_L) \\ \longrightarrow & \check{H}^n(M) & \longrightarrow & \check{H}^n(K) \oplus \check{H}^n(L) & \longrightarrow & \check{H}^n(W_K) \oplus \check{H}^n(W_L) \\ \longrightarrow & \check{H}^{n+1}(M) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

En particular, para todo n se tiene

$$\operatorname{rg} \check{H}^n(M) \leq \operatorname{rg} \check{H}^n(K) + \operatorname{rg} \check{H}^n(L) + \operatorname{rg} \check{H}^{n-1}(W_K) + \operatorname{rg} \check{H}^{n-1}(W_L)$$

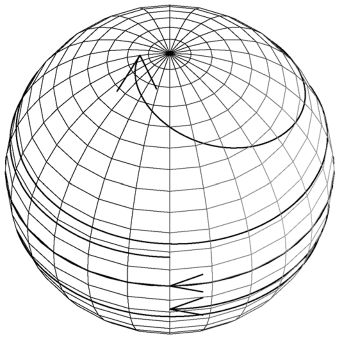
Además, las dos siguiente desigualdades también se cumplen:

$$\operatorname{rg} \check{H}^n(M) \leq \operatorname{rg} \check{H}^n(K) + \operatorname{rg} \check{H}^n(\mu(K)) + \operatorname{rg} \check{H}^n(h(L))$$
$$\operatorname{rg} \check{H}^n(M) \leq \operatorname{rg} \check{H}^n(L) + \operatorname{rg} \check{H}^n(\mu(L)) + \operatorname{rg} \check{H}^n(h(K)).$$

Todos los rangos anteriores son finitos.

Vemos en el siguiente ejemplo que la segunda desigualdad del teorema es óptima.

Ejemplo 1.6 Sea M el cociente de S^2 tras identificar los polos norte y sur, y considérese el flujo en M inducido por el siguiente flujo en S^2



Las órbitas son espirales que vienen del ecuador y convergen en el polo norte para puntos del hemisferio norte, espirales que vienen del polo sur y convergen en el ecuador para puntos del hemisferio sur, los puntos del ecuador forman una órbita periódica y los polos son puntos fijos.

Entonces el conjunto K formado por los dos polos identificados es un conjunto aislado regular "non-saddle" del flujo cuyo conjunto dual es el ecuador L.

En este caso se tienen los siguientes rangos para los grupos de cohomología en la fórmula:

$$\begin{array}{rrr}
\operatorname{rg} \check{H}^2(M) = 1 & \operatorname{rg} \check{H}^1(M) = 1 & \operatorname{rg} \check{H}^0(M) = 1 \\
\operatorname{rg} \check{H}^2(K) = 0 & \operatorname{rg} \check{H}^1(K) = 0 & \operatorname{rg} \check{H}^0(K) = 1 \\
\operatorname{rg} \check{H}^2(\mu(K)) = 1 & \operatorname{rg} \check{H}^1(\mu(K)) = 1 & \operatorname{rg} \check{H}^0(\mu(K)) = 0 \\
\operatorname{rg} \check{H}^2(h(L)) = 0 & \operatorname{rg} \check{H}^1(h(L)) = 0 & \operatorname{rg} \check{H}^0(h(L)) = 0
\end{array}$$

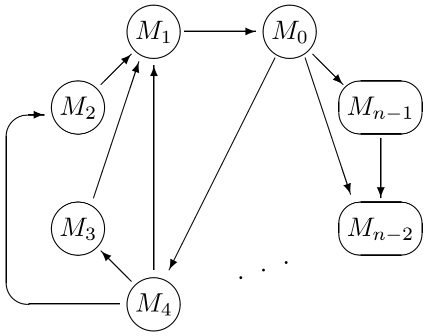
Así, $\operatorname{rg} \check{H}^n(M) = \operatorname{rg} \check{H}^n(K) + \operatorname{rg} \check{H}^n(\mu(K)) + \operatorname{rg} \check{H}^n(h(L))$, en todas las dimensiones. □

Una importante noción en la teoría del índice de Conley es la de descomposición de Morse. La noción clásica no es adecuada para describir comportamientos cíclicos de flujos. Presentamos aquí una noción extendida que puede ser usada en ese contexto. La definición se basa en la noción de descomposición "non-saddle".

Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ un flujo en un ANR compacto M. Una descomposición de Morse cíclica de M es una familia $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ de conjuntos invariantes cerrados tales que $M_i \cap M_j = \emptyset$ si $0 \leq i < j \leq n-1$, $M_n = M_0$, y tales que cualquier $x \in M$ satisface una de las siguientes condiciones:

1. $\omega^+(x) \cup \omega^-(x) \subset M_i$, en cuyo caso $x \in M_i$,

2. $\omega^+(x) \subset M_i$ y $\omega^-(x) \subset M_j$ con $0 \leq i < j \leq n-1$, o
3. $\omega^+(x) \subset M_i$ y $\omega^-(x) \subset M_n$ con $0 < i \leq n-1$.



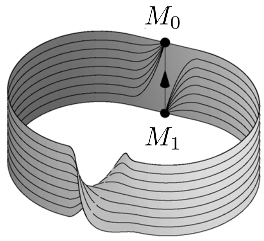
Además, si se define, para todo $i \leq j$:

$$\mathcal{M}_{i,j} = \{x \in M \mid \omega^+(x) \subset M_{i'} \text{ y } \omega^-(x) \subset M_{j'},\ \text{con } i \leq i' \leq j' \leq j\}$$

entonces $\mathcal{M}_{i,j}$ es un conjunto cerrado.

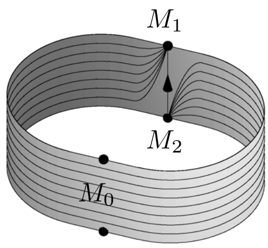
Si $n = 2$ se tiene una descomposición "non-saddle".

Ejemplos 1.7 La condición de que los $\mathcal{M}_{i,j}$ sean conjuntos cerrados no se deduce del resto de las hipótesis. Un ejemplo es el siguiente sistema dinámico en una banda de Moebius



donde M_0 y M_1 son los extremos de la flecha vertical.

Otro ejemplo viene dado por el siguiente flujo en un cilindro



donde M_0 es el conjunto formado por los 2 puntos en la parte delantera de la banda, y M_1 y M_2 son los extremos de la flecha vertical. □

No es difícil ver que, si en la definición anterior sólo a $\mathcal{M}_{0,n-1}$ y $\mathcal{M}_{1,n}$ se les requiere ser conjuntos cerrados, entonces todos los $\mathcal{M}_{i,j}$ son también cerrados.

Teorema 1.8 $\mathcal{M}_{0,0} = M_0, \mathcal{M}_{0,1}, \mathcal{M}_{0,2}, \ldots, \mathcal{M}_{0,n-1}$ *son conjuntos invariantes aislados "non-saddle".*

El siguiente resultado extiende un teorema de Kapitanski y Rodnianski [31] al contexto de las descomposiciones de Morse cíclicas.

Teorema 1.9 *Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ un flujo en un ANR compacto y consideremos una descomposición de Morse cíclica $M_0, M_1, \ldots, M_n$ de M. Entonces la familia*

$$\mathcal{M}_{0,-1} = \emptyset \subset \mathcal{M}_{0,0} \subset \mathcal{M}_{0,1} \subset \mathcal{M}_{0,2} \subset \cdots \subset \mathcal{M}_{0,n} = M$$

es una filtración de M mediante conjuntos aislados "non-saddle" compactos. Asociada a esta filtración se tienen las siguientes ecuaciones (estas ecuaciones son polinomios en una variable t):

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{q=0}^{\infty} t^q \operatorname{rg} \check{H}^q(\mathcal{M}_{0,k}, \mathcal{M}_{0,k-1}) = \sum_{q=0}^{\infty} t^q \operatorname{rg} \check{H}^q(\mathcal{M}_{0,r}) + (1+t)Q^r(t)$$

donde $Q^r(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \sum_{q=1}^{\infty} t^{q-1} \operatorname{rg} \delta^{q,k}$ *para todo $r = 1, 2, \ldots, n$, y*

$$\delta^{q,k} : \check{H}^{q-1}(\mathcal{M}_{0,k-1}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{M}_{0,k}, \mathcal{M}_{0,k-1})$$

es el homomorfismo coborde en la sucesión larga de cohomología del par $(\mathcal{M}_{0,k}, \mathcal{M}_{0,k-1})$.

2. Ecuaciones de Morse y variedades inestables de conjuntos invariantes aislados

Kapitanski y Rodnianski estudiaron en [31] la forma de los atractores de sistemas semidinámicos continuos en espacios métricos y usaron sus resultados para desarrollar una teoría de Morse elemental para atractores. Su enfoque presenta varias ventajas sobre el clásico. En primer lugar, muestran cómo calcular las ecuaciones de Morse para una descomposición de Morse de un atractor global sin hacer uso de pares índice. Su evaluación de los coeficientes se hace en términos de las variedades inestables de los conjuntos de Morse. Esto simplifica de forma significativa el proceso general de cálculo. Además, su enfoque les permite manejar espacios métricos y evoluciones más generales. Finalmente, el uso la teoría de la forma hace innecesarias las hipótesis usuales de finitud de los números de Betti del índice de Conley cohomológico puesto que en la situación considerada por ellos esta finitud es una consecuencia automática de la teoría de la forma.

El objetivo de esta sección es el estudio de bajo qué circunstancias el método de Kapitanski y Rodnianski es aplicable al caso clásico de un conjunto invariante aislado K de un flujo en un espacio métrico localmente compacto.

También se presenta un estudio, basado en la teoría de la forma, de los entornos aislantes de conjuntos invariantes aislados, del cual se obtiene una caracterización de los atractores y algunos resultados nuevos sobre dualidad de Lefschetz del índice de Conley (los primeros resultados en esta dirección se deben a C. McCord).

Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ un flujo en un espacio métrico localmente compacto (en algunas ocasiones pediremos que M sea una variedad diferenciable y φ un flujo C^1).

Si K es un conjunto invariante aislado de M, diremos que un par índice (N, N_0) para K es propio si todo punto x en el conjunto de salida N_0 abandona inmediatamente el entorno N (i.e. si $x[0,t] \not\subset N$ para todo $t > 0$). Por un resultado de McCord [38] siempre existen pares índice propios y pueden ser escogidos con la propiedad adicional de que exista un conjunto compacto $N_0' \subset N$ tal que (N, N_0') sea un conjunto índice propio para K en el flujo inverso.

Si tomamos el cociente N/N_0 y denotamos por $*$ al punto correspondiente a la clase de equivalencia de N_0, el índice de Conley (o índice de homotopía) de K es la clase de homotopía (punteada) de $(N/N_0, *)$, y se denota por $h(K)$, mientras que la forma (punteada) de $(N/N_0, *)$ es el índice de forma, que se denota por $s(K)$. El índice de forma ha sido definido por Robbin y Salamon [40].

El resto de la notación es la usual en la teoría del índice de Conley. En particular se definen los conjuntos asintóticos positivo y negativo de N como

$$N^+ = \{x \in N \mid x[0,\infty) \subset N\}, N^- = \{x \in N \mid x(-\infty, 0] \subset N\}$$

y denotamos $n^+ = N^+ \cap N_0'$ y $n^- = N^- \cap N_0$. La variedad inestable de K es el conjunto $W^u = \{x \in M \mid \omega^-(x) \subset K\}$.

2.1. Teoría de la forma de entornos aislantes

En lo que sigue (N, N_0) denotará un par índice propio para un conjunto invariante aislado, K. Empezamos con un resultado bastante técnico del que se deducirán algunas consecuencias.

Teorema 2.1 *Existe una sucesión de aplicaciones $r_k : N \longrightarrow N$ tal que*

a) para todo entorno U de $N^- \cup N_0$ en N existe un índice k_0 tal que $\operatorname{im} r_k \subset U$ *y $r_k \simeq r_{k+1}$ en U para todo $k \geq k_0$. Además, para todo k, r_k es homótopa a la* *identidad i_N y r_k define por restricción una aplicación*

$$r_k|_{N^- \cup N_0} : N^- \cup N_0 \longrightarrow N^- \cup N_0$$

que es homótopa a la identidad $i_{N^- \cup N_0}$. Todas las homotopías son relativas respecto a N_0. Como consecuencia, la inclusión $i : N^- \cup N_0 \longrightarrow N$ define una equivalencia "shape".

b) para todo k, r_k define por restricción aplicaciones

$$r_k|_{N^+} : N^+ \longrightarrow N^+ \text{ y } r_k|_K : K \longrightarrow K$$

tales que para todo entorno V de K en N^+ existe k_0' tal que $r_k(N^+) \subset V$ y $r_k|_{N^+} \simeq r_{k+1}|_{N^+}$ en V para $k \geq k_0'$. Además $r_k|_{N^+}$ y $r_k|_K$ son homótopas a las respectivas identidades i_{N^+} e i_K para todo k. Como consecuencia $Sh(N^+) = Sh(K)$. Un argumento similar para el flujo inverso prueba que $Sh(N^-) = Sh(K)$.

Corolario 2.2 *a) $s(K) = Sh(N^-/n^-, \{*\})$,*

b) K es un atractor si y sólo si la inclusión $i : K \cup \{*\} \longrightarrow N/N_0$ es una equivalencia "shape",

c) si N^- y N^+ son variedades orientables (topológicas) de dimensión d_1 y d_2 con bordes n^- y n^+ respectivamente, entonces el índice de Conley cohomológico k-dimensional de K coincide con el índice de cohomología $(d_2 - d_1 + k)$-dimensional para el flujo inverso (i.e. existe una dualidad entre índices de cohomología para el flujo directo y el flujo inverso).

McCord estableció en [39] un isomorfismo de dualidad entre el índice de Conley homológico de un flujo y el índice de cohomología del flujo inverso. McCord probó su resultado para flujos C^1 definidos en variedades diferenciables orientables con borde mientras que la parte c) del corolario es válida para flujos continuos en espacios métricos localmente compactos si los conjuntos asintóticos son variedades topológicas orientables.

2.2. El índice de forma y la variedad inestable

Robbin y Salamon definieron en [40] una topología para la variedad inestable del conjunto invariante aislado $W^u(K)$ que llamaron intrínseca para distinguirla de la topología extrínseca que $W^u(K)$ hereda del espacio de fases. La topología intrínseca es difícil de ver intuitivamente puesto que está definida en términos del límite de un sistema inverso cuyas aplicaciones son los elementos de cierto semigrupo inducido por el flujo.

Más concretamente, si (N, N_0) es un par índice propio para K, se considera el sistema inverso $((N/N_0)_s, p_{st})$, donde $(N/N_0)_s = N/N_0$ para todo $s \in \mathbb{R}_+$ y si $s \leq t$ entonces $p_{st} : (N/N_0)_t \longrightarrow (N/N_0)_s$ viene definida por

$$p_{st}(x) = \begin{cases} x(t-s) & \text{si } x[0, t-s] \subset N - N_0 \\ * & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde N/N_0 es el punto base de N/N_0

Si tomamos el límite inverso $Z = \lim((N/N_0)_s, p_{st})$ y denotamos por $\star$ el punto en Z cuyas coordenadas son todas el punto base $* \in N/N_0$, entonces existe una aplicación natural $h : Z - \{\star\} \longrightarrow W^u(K)$ definida de la siguiente manera:

Si $\mathbf{x} = (x_s) \in Z - \{\star\}$, tomamos $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $x_t \in N - N_0$. Entonces $h(\mathbf{x}) = x_t t$. Robbin y Salamon probaron que h no depende de la elección de t y que es una biyección continua. Se considera la topología en $W^u(K)$ que hace que h sea un homeomorfismo. Ésta es la topología intrínseca. Finalmente, esta topología no depende de par índice (N, N_0).

2.3. Una descripción de la topología intrínseca

En lo que sigue presentamos una descripción que proporciona una comprensión más intuitiva de la topología intrínseca. Comenzamos definiendo cierta topología en la variedad inestable y después veremos que esta topología es de hecho la topología intrínseca.

Sea A un subconjunto de la variedad inestable. Diremos que A es abierto si para todo $x \in A$ existe $t \geq 0$ y existe un subconjunto A_x con $x \in A_x \subset A$ tales que $A_x(-t)$ es un subconjunto abierto de $N^- - n^-$ (con la topología relativa). Para comprobar que el conjunto de todos estos conjuntos abiertos define una topología sólo tenemos que comprobar que la intersección de dos conjuntos abiertos A y B es abierto.

Sea $x \in A \cap B$, entonces existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ y subconjuntos $A_x \subset A$, $B_x \subset B$ tales que $A_x(-t_1)$ y $B_x(-t_2)$ son subconjuntos abiertos de $N^- - n^-$. Podemos suponer que $t_2 \geq t_1$. Entonces existe un subconjunto abierto C de $N^- - n^-$ tal que $x(-t_2) \in C \subset B_x(-t_2)$ y $C(t_2 - t_1) \subset A_x(-t_1)$. En caso contrario existiría una sucesión x_n de puntos en $N^- - n^-$ tal que $x_n \to x(-t_2)$ y $x_n(t_2 - t_1) \notin N^- - n^-$. Pero esto implicaría que la "aplicación de salida" α satisface la desigualdad $\alpha(x_n) \leq t_2 - t_1$ y por tanto $\alpha(x(-t_2)) \leq t_2 - t_1$ lo que contradice el hecho de que $(x(-t_2))(t_2 - t_1) = x(-t_1) \in N^- - n^-$. Así, el conjunto $C_x = C(-t_2)$ está contenido en $A \cap B$ y $C_x(-t_2) = C$ es abierto en $N^- - n^-$. Esto prueba que $A \cap B$ es abierto.

Denotamos por $W^i(K)$ la variedad inestable con la topología intrínseca y denotemos (provisionalmente) por $W'(K)$ a la variedad inestable con la topología antes definida. Veamos que la aplicación identidad $i : W'(K) \longrightarrow W^i(K)$ es un homeomorfismo y, así, ambas topologías han de ser la misma.

Esto se reduce a probar que $h : Z - \{\star\} \longrightarrow W'(K)$ es un homeomorfismo. Si $\mathbf{x} = (x_s) \in Z - \{\star\}$, consideramos $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $x_t \in N \setminus N_0$ y así $h(\mathbf{x}) = x_t t$. Sea

$A \subset W'(K)$ tal que $x_t t \in A$ y $A(-t)$ es abierto en $N^- \setminus n^-$. Entonces $A(-t) = B \cap (N^- \setminus n^-)$, donde B es un subconjunto abierto de $N \setminus N_0$. Considérese el subconjunto abierto de $Z - \{\star\}$, $C = \Big(B \times \prod_{s \neq t} (N/N_0)_s\Big) \cap (Z - \{\star\})$. Se tiene que $h(C) = A$, y por tanto h es continua. Recíprocamente, si $C = \Big(B \times \prod_{s \neq t} (N/N_0)_s\Big) \cap (Z - \{\star\})$ es un entorno de $\mathbf{x}$ con $x_t \in B \subset N \setminus N_0$, B abierto, entonces $h(C) = A$, donde $A(-t) = B \cap (N^- \setminus n^-)$ y por tanto h es un homeomorfismo.

Es fácil comprobar que la topología que N^- hereda de M coincide con la topología de subespacio de W^i. Obviamente W^i es un espacio métrico localmente compacto y la restricción $\varphi|_{W^i(K)\times\mathbb{R}}$ define un sistema dinámico $W^i(K) \times \mathbb{R} \longrightarrow W^i(K)$.

2.4. K es un repulsor en $W^i(K)$

En el siguiente resultado se presentan algunas propiedades útiles formuladas en términos de la variedad inestable con la topología intrínseca.

Teorema 2.3 *a) K es un repulsor global en $W^i(K)$.*

b) Sea S una sección compacta de $W^i(K) - K$ (por ejemplo $S = n^-$) y sea $W^\#$ la variedad inestable truncada (con borde S) consistente en todos los puntos $x \in W^i(K)$ tales que $x \in K$ o existe $t \geq 0$ con $xt \in S$. Entonces $s(K) = Sh(W^\#/\partial W^\#, *)$, donde usamos la notación $\partial W^\#$ para denotar la sección S y $*$ es el punto base $[\partial W^\#]$.

c) Si la forma de K es trivial entonces $s(K) = Sh(\sum(\partial W^\#), *)$, donde $\sum(\partial W^\#)$ denota la suspensión de $\partial W^\#$ y $*$ uno de su vértices.

Nota 2.4 El uso de la topología intrínseca es esencial en el teorema 8; un conjunto invariante aislado no es, en general, un repulsor global para el flujo en su variedad inestable con la topología extrínseca. □

El siguiente corolario, que es una consecuencia inmediata del teorema 8, proporciona una justificación de la observación de Kapitanski y Rodnianski en [31, pág. 223] sobre la definición de índice.

Corolario 2.5 *El índice de Conley de cohomología de K es $\check{H}^q(W^\#, \partial W^\#)$.*

El siguiente resultado se refiere a conjuntos invariantes aislados que admiten un par índice propio (N, N_0) con N regular.

Teorema 2.6 *Si K es un conjunto invariante aislado que admite un par índice propio (N, N_0) con N regular, entonces $W^i(K) = W^u(K)$, esto es, las topologías extrínseca e intrínseca para la variedad inestable de K son la misma.*

Teorema 2.7 *Una condición necesaria y suficiente para que las topologías extrínseca e intrínseca coincidan es que $W^u(K)$ sea localmente compacto y K sea un repulsor global en $W^u(K)$.*

2.5. Ecuaciones de Morse y variedades inestables truncadas

Si tenemos una filtración $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n$ de espacios topológicos compactos entonces existe un método estándar de obtener una ecuación de Morse asociada. Este método, que usa los axiomas de teoría de cohomología elemental, se explica, por ejemplo, en [12]. Resumimos aquí cómo se establece la ecuación de Morse. Primero definimos las series de potencias formales

$$p(t, N_j, N_{j-1}) = \sum_{k \geq 0} r^k(N_j, N_{j-1})t^k$$

y

$$q(t, N_j, N_{j-1}, N_0) = \sum_{k \geq 0} d^k(N_j, N_{j-1}, N_0)t^k,$$

donde $r^k(N_j, N_{j-1}) = \operatorname{rg} \check{H}^k(N_j, N_{j-1})$ y $d^k(N_j, N_{j-1}, N_0)$ es el rango de la imagen del operador coborde $\delta^k : \check{H}^k(N_{j-1}, N_0) \longrightarrow \check{H}^{k+1}(N_j, N_{j-1})$ en la sucesión larga de cohomología del triple (N_j, N_{j-1}, N_0). En las expresiones anteriores todos los grupos de cohomología se suponen de rango finito.

En estas condiciones, Conley y Zehnder [12] probaron que se cumple la siguiente ecuación

$$\sum_{j=1}^{n} p(t, N_j, N_{j-1}) = p(t, N_n, N_0) + (1 + t)Q(t),$$

donde $Q(t) = \sum_{j=2}^{n} q(t, N_j, N_{j-1}, N_0)$.

Si $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ es una descomposición de Morse de K y $K_1 = A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = K$ es la correspondiente sucesión de atractores (i.e. $A_j = \{x \in K \mid \exists i \leq j$ con $\omega^-(x) \subset K_i\}$), Conley y Zehnder probaron que existe una filtración $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n$ de espacios compactos en M tal que (N_j, N_{j-1}) es un par índice para K_j y (N_j, N_0) es un par índice para A_j. Así, en este caso particular, los coeficientes de la ecuación de Morse son

$$\begin{aligned} r^k(N_j, N_{j-1}) &= \operatorname{rg} \check{H}^k(N_j, N_{j-1}) = \operatorname{rg} \check{H}^k(h(K_j)) \\ &= \text{índice de Conley de cohomología de } K_j \end{aligned}$$

y

$$d^k(N_j, N_{j-1}, N_0) = \text{rango de la imagen de } \delta^k : \check{H}^k(h(A_{j-1})) \longrightarrow \check{H}^{k+1}(h(K_j))$$

y tiene sentido adoptar la notación $p(t, h(K_j))$ en lugar de $p(t, N_j, N_{j-1})$ (que refleja el hecho de que $p(t, N_j, N_{j-1})$ depende sólo del índice $h(K_j)$ y no del par índice particular que hayamos usado).

Con esta notación la ecuación de Morse de la descomposición $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ de Morse toma la forma

$$\sum_{j=1}^{n} p(t, h(K_j)) = p(t, h(K)) + (1+t)Q(t).$$

Nos referiremos a esta ecuación como la ecuación de Morse de Conley–Zehnder. Esta ecuación relaciona el índice de Conley de cohomología de K con los índices de Conley de cohomología de una descomposición de Morse de K. Se puede ver como una generalización de la teoría de Morse para tipos de flujos más generales que los flujos gradiente, en espacios más generales que las variedades.

Sea S una sección compacta de $W^i(K)$ y considérese la variedad truncada $W^{\#}$ correspondiente a $\partial W^{\#} = S$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $(W^{\#}, \partial W^{\#}) = (N^-, n^-)$. Por $W_j^{\#}$ representamos al subespacio de $W^{\#}$ que consiste en todos los puntos $x \in W^{\#}$ con $\omega^-(x) \in A_j$. $W_j^{\#}$ es un conjunto compacto y el lema 2 nos permite interpretarlo como la variedad inestable truncada de A_j con $\partial W_j^{\#} = \partial W^{\#} \cap W^i(A_j)$. Con esta notación se formula el siguiente resultado.

Teorema 2.8 *Sea K un conjunto invariante aislado y sea $K_1, \ldots, K_n$ una descomposición de Morse de K con sucesiones de atractores asociadas $A_1 \subset \cdots \subset A_n = K$. Considérese la filtración de variedades inestables truncadas*

$$\partial W^{\#} \subset W_1^{\#} \cup \partial W^{\#} \subset \cdots \subset W_{n-1}^{\#} \cup \partial W^{\#} \subset W_n^{\#} = W^{\#}$$

y supongamos que los grupos

$$\check{H}^q(W_i^{\#} \cup \partial W^{\#}, \partial W^{\#}) \text{ y } \check{H}^q(W_j^{\#} \cup \partial W^{\#}, W_{j-1}^{\#} \cup \partial W^{\#})$$

son de rango finito para $0 \leq q$, $1 \leq i \leq n$ y $2 \leq j \leq n$. Entonces las ecuaciones de Morse asociadas a esta filtración coinciden con las ecuaciones de Morse de Conley–Zehnder de la descomposición. La condición de finitud del rango se cumple automáticamente en los siguientes dos casos: 1) φ es un flujo C^1 en una variedad y 2) φ es un flujo continuo en un ANR localmente compacto y K es un atractor global.

La prueba del teorema 11 hace uso del siguiente lema.

Lema 2.9 *Sea (L, R) una descomposición atractor–repulsor del conjunto invariante aislado K y sea (N, N_0) un par índice propio para K. Entonces existe un entorno N' de L, tal que $N_0 \subset N' \subset N$ y (N', N_0) es un par índice propio para L, y tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

a) (N, N') es un par índice para R (no necesariamente propio), *b) el conjunto asintótico negativo N'^{-} de L en N' coincide con el conjunto*

$$\{x \in N \mid x(-\infty, 0] \subset N \text{ y } \omega^{-}(x) \subset L\},$$

c) $Sh(N, N') = Sh(N^{-} \cup N_0, N'^{-} \cup N_0)$ (donde N^{-} es el conjunto asintótico negativo de K en N).

Nota 2.10 Como consecuencia del teorema 11 los coeficientes r^q en la ecuación de Morse de Conley–Zehnder toman la forma

$$r^q(N_j, N_{j-1}) = \operatorname{rg} \check{H}^q(h(K_j)) = \operatorname{rg} \check{H}^q(W_j^{\#} \cup \partial W^{\#}, W_{j-1}^{\#} \cup \partial W^{\#}).$$

Los coeficientes d^q son análogamente expresados en términos de la variedad inestable. Si $W^i(K) = W^u(K)$, estas expresiones nos permiten calcular la ecuación de Morse sin hacer uso de pares índice. Recordemos que la igualdad entre las topologías extrínseca e intrínseca puede ser decidida por propiedades de $W^u(K)$ (teorema 10) puramente internas. Si $W^i(K) \neq W^u(K)$ sólo necesitamos un par índice para K (pero no para los conjuntos de Morse K_j o los atractores A_j) para manejar la topología intrínseca de la variedad inestable. Un problema interesante es caracterizar la topología intrínseca sin usar pares índice.

Si usamos el Corolario 2 tenemos una expresión alternativa para los coeficientes r^q como $\operatorname{rg} \check{H}^q(W^{\#}(K_j), \partial W^{\#}(K_j))$. Esta expresión fue obtenida por Kapitanski y Rodnianski [31] para descomposiciones de Morse de atractores globales. □

Presentamos ahora dos ejemplos que ilustran los temas discutidos anteriormente.

Ejemplo 2.11 Consideramos un ejemplo relacionado con las ecuaciones de Lorenz

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

donde σ, r, y b son tres parámetros reales positivos. Según variamos los parámetros, cambia el comportamiento del flujo determinado por las ecuaciones. Consideramos aquí algunos hechos que dependen del parámetro r. Seguimos básicamente la descripción dada por Sparrow [52] (véase también [23] y [54]).

Lorenz [32] mostró que existe un elipsoide acotado E en $\mathbb{R}^3$ en el que todas las trayectorias terminan por entrar. En tiempos $1, 2, 3, \ldots$, la superficie de este elipsoide es llevada por el flujo a superficies $S_1, S_2, S_3, \ldots$ que encierran regiones $E_1, E_2, E_3, \ldots$, etc. Puesto que todas las trayectorias cruzan el borde de E hacia dentro tenemos que $E \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots$, y así $E_\infty = \cap E_i$ es un conjunto globalmente atractivo.

Para $r > 1$ existen tres puntos estacionarios contenidos en E_∞, uno de ellos el origen. Para $1 < r < 24.74\ldots$ los puntos estacionarios c_1 y c_2 distintos del origen son atractores.

La estructura de E_∞ es relativamente simple para $r < 13.926\ldots$, pero en este valor crítico del parámetro r el comportamiento del flujo cambia de una manera importante y, en particular, la variedad estable del origen contiene a la variedad inestable del origen creándose un par de órbitas homoclínicas.

Para valores de r inmediatamente mayores de $13.926\ldots$ estas órbitas homoclínicas desaparecen, pero se crean una cantidad numerable de órbitas periódicas y una cantidad no numerable de órbitas aperiódicas que terminan en el origen, junto con otras órbitas que no existían antes, apareciendo un "conjunto invariante extraño" en E_∞ que contiene al origen pero no a los puntos estacionarios c_1 y c_2 (véanse los capítulos 2 y 3 de [52] para una descripción de este conjunto extraño). Desde el punto de vista de la teoría de la forma, sin embargo, la estructura de E_∞ es muy simple para todos los valores de r. Puesto que E_∞ se expresa como la intersección de una sucesión de regiones E_i encajadas, por un resultado de K. Borsuk [6] la inclusión $i : E_\infty \longrightarrow E$ es una equivalencia "shape" y, por tanto, E_∞ tiene la forma de un punto. Destacamos el hecho de que, al menos para algunos valores de r, E_∞ no es homotópicamente trivial, puesto que existen órbitas que convergen en espiral a c_1 y que están contenidas en una componente conexa por caminos de E_∞ que no contiene c_1 (lo mismo ocurre con c_2).

Considérese la situación para $13.926 < r < 24.74\ldots$. Puesto que c_1 y c_2 son atractores, el conjunto S de todos los puntos $x \in E_\infty$ cuyo ω-límite no está contenido en c_1 o c_2 es un conjunto invariante compacto y los conjuntos $K_1 = \{c_1\}$, $K_2 = \{c_2\}$ y $K_3 = S$ definen una descomposición de Morse de E_∞. Además, S contiene al conjunto invariante extraño. Vamos a calcular las ecuaciones de Morse de esta descomposición.

La sucesión de atractores es $A_1 = \{c_1\}$, $A_2 = \{c_1, c_2\}$, $A_3 = E_\infty$ y la filtración de variedades inestables truncadas es $\partial W^\# = \emptyset$, $W_1^\# \cup \partial W^\# = \{c_1\}$, $W_2^\# \cup \partial W^\# = \{c_1, c_2\}$, $W_3^\# = W^\# = E_\infty$. Como se dijo antes, E_∞ tiene forma trivial y por tanto su cohomología de Čech (aunque no necesariamente su cohomología singular) es la de un punto. Entonces tenemos que $p(t, W_3^\#, \partial W^\#) = 1$. Los polinomios $p(t, W_1^\# \cup \partial W^\#, \partial W^\#)$ y $p(t, W_2^\# \cup \partial W^\#, W_1^\# \cup \partial W^\#)$ son también iguales a la constante 1. Así, sólo tenemos que calcular $p(t, W_3^\# \cup \partial W^\#, W_2^\# \cup \partial W^\#)$. Para esto basta calcular los grupos de cohomología $\check{H}^k(E_\infty\{c_1, c_2\})$ i.e. los índices de Conley de cohomología de S. Esto se puede hacer usando la sucesión larga de cohomología del par $(E_\infty, \{c_1, c_2\})$:

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^{k-1}(E_\infty) \longrightarrow \check{H}^{k-1}(\{c_1, c_2\}) \longrightarrow \check{H}^k(E_\infty, \{c_1, c_2\}) \longrightarrow \cdots$$

De aquí se deduce que el único grupo no trivial es $\check{H}^1(E_\infty, \{c_1, c_2\}) = \mathbb{Z}$. Así, las ecuaciones de Morse de la descomposición toman la forma de la siguiente identidad:

$$t + 2 = 1 + (1 + t)Q(t)$$

Cuando $r = 24.74\ldots$, el flujo experimenta una bifurcación de Hopf. Para valores mayores de r los puntos estacionarios c_1 y c_2 no son estables y el conjunto invariante extraño se convierte en un atractor.

Existe, sin embargo, un periodo de transición para $24.06\cdots < r < 24.74\ldots$ en el que el conjunto extraño es ya atractivo y c_1 y c_2 son todavía atractores. El atractor extraño, o atractor de Lorenz, L, debe ser un subconjunto propio del conjunto compacto S estudiado anteriormente e induce una descomposición natural atractor–repulsor $\{L, R\}$ de S, donde $R = \{x \in S \mid \omega^+(x) \nsubseteq L\}$. El comportamiento dinámico de R es no trivial desde el punto de vista de la teoría del índice de Conley. De hecho, podemos obtener algo de información sobre R si usamos la sucesión atractor–repulsor para los índices de Conley de cohomología de esta descomposición (véase [9]):

$$\cdots \longrightarrow CH^{k-1}(S) \longrightarrow CH^{k-1}(L) \longrightarrow CH^k(R) \longrightarrow \cdots,$$

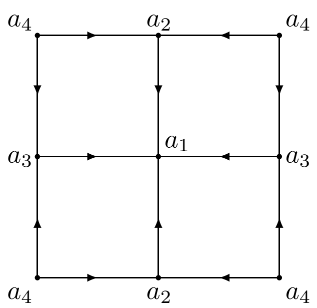
donde conocemos los índices de cohomología de S y también $CH^0(L) = \mathbb{Z}$. De esto se deduce que el rango del índice de Conley de cohomología $CH^1(R)$ es al menos 1.

Ejemplo 2.12 Definimos ahora un flujo en el toro 3-dimensional $T^3 = T \times S^1$, donde T es el toro de dimensión 2. En T, consideramos las ecuaciones (escritas en $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \varepsilon_1 \sin(2\pi\theta_1)\\ \dot{\theta}_2 &= \varepsilon_2 \sin(2\pi\theta_2)\end{aligned}$$

para $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2\pi}$. Las variables son tomadas modulo 1.

El flujo $\varphi_1 : T \times \mathbb{R} \longrightarrow T$ determinado por las ecuaciones tiene cuatro puntos fijos $a_1 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $a_2 = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $a_3 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $a_4 = (0, 0)$ que son, respectivamente, un atractor, dos puntos de silla puntos y un repulsor



Consideramos también un flujo $\varphi_2 : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ que consiste en dos órbitas que van de un repulsor b_1 a un atractor b_2.

Tomamos ahora el flujo producto $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 : T^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow T^3$.

El conjunto compacto $K = T \times \{b_1\}$ es un conjunto invariante aislado (de hecho, un repulsor) y los puntos $m_1 = (a_1, b_1)$, $m_2 = (a_2, b_1)$, $m_3 = (a_3, b_1)$, $m_4 = (a_4, b_1)$ son fijos. Estos puntos definen una descomposición de Morse de K, $K_1 = \{m_1\}$, $K_2 = \{m_2\}$, $K_3 = \{m_3\}$, $K_4 = \{m_4\}$. La sucesión de atractores $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4$ consiste topológicamente en un punto, una circunferencia, el wedge de dos circunferencia y un toro respectivamente. La filtración asociada de variedades inestables truncadas es $\partial W^{\#} \subset W_1^{\#} \cup \partial W^{\#} \subset W_2^{\#} \cup \partial W^{\#} \subset W_3^{\#} \cup \partial W^{\#} \subset W_4^{\#} = W^{\#}$, donde $\partial W^{\#}$ es topológicamente el producto $T \times \{-1, 1\}$ y $W_i^{\#}$ es (también topológicamente) el producto $A_i \times I$ (con I el intervalo $[-1, 1]$).

De aquí deducimos que el índice de forma $s(K)$ es la forma (punteada) de una suspensión del toro con los dos vértices identificados. Entonces los índices de cohomología de K, $CH^k(K) = \check{H}^k(W^{\#}, \partial W^{\#})$ se pueden calcular fácilmente y el correspondiente polinomio $p(t, W^{\#}, \partial W^{\#})$ es $t^3 + 2t^2 + t$. También deducimos de la filtración de variedades inestables truncadas que el índice de forma de K_1 es la forma punteada de una circunferencia, $s(K_2)$ y $s(K_3)$ son la forma punteada de S^2 y $s(K_4)$ es la forma punteada de S^3. De aquí obtenemos inmediatamente los grupos de cohomología $\check{H}^k(W_j^{\#} \cup \partial W^{\#}, W_{j-1}^{\#} \cup \partial W^{\#})$ y los polinomios $p(t, W_j^{\#} \cup \partial W^{\#}, W_{j-1}^{\#} \cup \partial W^{\#})$. Las ecuaciones de Morse toman la forma

$$t^3 + 2t^2 + t = t^3 + 2t^2 + t + (1 + t)Q(t)$$

y así $Q(t) = 0$.

2.6. El índice de Conley para semiflujos

El índice de Conley de conjuntos invariantes aislados de flujos es una importante herramienta en los problemas de perturbación que incluyan ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, para aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales es necesario extender la teoría a semiflujos en espacios métricos no localmente compactos. Esta tarea ha sido abordada por Rybakowski, quien presenta en su libro [43] una exposición unificada de sus resultados. En lo que sigue adoptaremos la terminología y definiciones de ese libro.

En esta sección veremos como algunos de los resultados previos pueden ser generalizados a este contexto, aunque tendremos que imponer ciertas condiciones restrictivas para poder trabajar a este nivel generalidad. Haremos uso del resultado de Kapitanski y Rodnianski [31] sobre la forma de atractores de semiflujos en espacios métricos generales.

Considérese un sistema semidinámico continuo (o semiflujo) $\varphi : M \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$, donde M es un espacio métrico. Supongamos que K es un conjunto invariante aislado compacto en M (recordemos que invariante significa que para todo $x \in K$ existe una solución completa σ por x tal que $\sigma(\mathbb{R}) \subset K$). Supongamos también que K es admisible (i.e. existe un entorno aislante N de K, llamado entorno aislante admisible, tal que para cualquier sucesión $x_n \subset N$ y cualquier sucesión creciente de tiempos

$t_n \to \infty$ con $x_n[0,t_n] \subset N$ la sucesión $x_n t_n$ tiene una subsucesión convergente). Denotemos por $W^u(K)$ al conjunto de todos los puntos $x \in M$ para los que existe una solución negativa $\sigma : (-\infty, 0] \longrightarrow M$ con $\omega^-(\sigma) \subset K$. Tenemos entonces un semiflujo $\varphi\mid_{W^u(K)}: W^u(K) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow W^u(K)$ definido por restricción de φ.

En lo que sigue sólo consideraremos compactos invariantes aislados K para los que se cumple que el semiflujo en la variedad inestable, $\varphi\mid_{W^u(K)}$, es de dos sentidos.

Esto significa que para todo punto x en la variedad inestable existe exactamente una solución negativa σ_x^- por x con $\omega^-(\sigma) \subset K$ y que si definimos $\varphi(x,t) = \sigma_x^-(t)$ para tiempos negativos podemos extender el semiflujo a un flujo $W^u(K) \times \mathbb{R} \longrightarrow W^u(K)$.

La topología intrínseca en $W^u(K)$ puede ser definida exactamente en la misma forma que en el caso de los flujos usando bloques aislantes admisibles (N, N_0) (véase [43, pág. 9]) para K en lugar de pares índice propios. Sólo tenemos que precisar aquí que la condición de admisibilidad implica que el conjunto N^- de los x en N tales que existe una solución negativa a través de x contenida en N es un subconjunto compacto de $W^u(K)$. Denotaremos también por $W^i(K)$ a la variedad inestable con la topología intrínseca.

El siguiente resultado se puede demostrar exactamente de la misma forma que los resultados correspondientes en el caso de los flujos.

Teorema 2.13 *a) K es un repulsor global en $W^i(K)$.*

b) Una condición necesaria y suficiente para que las topologías extrínseca e intrínseca coincidan es que $W^u(K)$ sea localmente compacto y K sea un repulsor global en $W^u(K)$.

El siguiente teorema juega un papel importante en la demostración del siguiente resultado sobre el índice de forma para semiflujos.

Teorema 2.14 (Kapitanski y Rodnianski) *Sea $\varphi : M \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$ un sistema semidinámico continuo con un atractor global compacto $\mathcal{U}$. Supongamos que el sistema tiene un punto de equilibrio $z \in \mathcal{U}$. Entonces la inclusión $i : (\mathcal{U}, z) \longrightarrow (M, z)$ induce una equivalencia "shape" de espacios punteados.*

Para poder aplicar el teorema 13 necesitamos imponer a K la condición de admisibilidad adicional de tener un bloque aislante (N, N_0) tal que N/N_0 es metrizable.

Teorema 2.15 *a) Sea S una sección compacta de $W^i(K)\setminus K$ (por ejemplo, $S = n^-$) y denotemos por $W^\#$ la variedad inestable truncada (con borde S) que consiste en todos los puntos $x \in W^i(K)$ tales que $x \in K$ o existe $t \geq 0$ con $xt \in S$. Entonces $s(K) = Sh(W^\#/\partial W^\#, *)$, donde usamos la notación $\partial W^\#$ para denotar la sección S y $*$ es el punto base $[\partial W^\#]$.*

b) Si la forma de K es trivial entonces $s(K) = Sh(\sum(\partial W^\#), *)$, donde $\sum(\partial W^\#)$ denota la suspensión de $\partial W^\#$ y $*$ uno de su vértices.

Corolario 2.16 *El índice de Conley de cohomología de K es $\check{H}^q(W^\#, \partial W^\#)$.*

Una importante situación en la que el índice de Conley cohomológico aparece (y entonces se puede utilizar el corolario 3) es en las ecuaciones de Morse para semiflujos en espacios métricos establecidas por Rybakowski y Zehnder [44]. La parte 2) del teorema puede ser útil en la determinación de los "grupos críticos" de un punto crítico aislado, que se usan para probar las desigualdades de Morse bajo la condición de Palais–Smale (véase Mawhin y Willem [37]). En [43] se prueba que estos grupos coinciden con los índices de cohomología del punto que, según nuestro teorema, son los grupos de cohomología de la suspensión de la sección $\partial W^\#$ de la variedad inestable.

Referencias

[1] N.P. Bhatia: *Attraction and nonsaddle sets in dynamical systems.* J. Diff. Equations **8** (1970), 229–249.

[2] N.P. Bhatia, G.P. Szego: *Stability theory of dynamical systems.* Grundlehren der Math. Wiss. **161**, Springer-Verlag, Berlin 1970.

[3] S.A. Bogatyi, V.I. Gutsu: *On the structure of attracting compacta.* (Russian) Differentsial'nye Uravneniya **25** (1989), 907–909.

[4] K. Borsuk: *Theory of Retracts.* Monografie Matematyczne **44**, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1967.

[5] ———: *Concerning homotopy properties of compacta.* Fund. Math. **62** (1968), 223–254.

[6] ———: *Theory of shape.* Monografie Matematyczne **59**, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1975.

[7] T.A. Chapman: *On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape.* Fund. Math. **76** (1972), 181–193.

[8] ———: *Shapes of finite-dimensional compacta.* Fund. Math. **76** (1972), 261–276.

[9] C.C. Conley: *Isolated invariant sets and the Morse index.* CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **38**, AMS, Providence, R.I., 1976.

[10] ———: *The gradient structure of a flow.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8*** (1988), 11–26.

[11] C.C. Conley, R.W. Easton: *Isolated invariant sets and isolating blocks.* Transactions AMS **158** (1971), 35–61.

[12] C.C. Conley, E. Zehnder. *Morse-type index theory for flows of periodic solutions for Hamiltonian equations.* Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 207–253.

[13] J.M. Cordier, T. Porter: *Shape theory. Categorical methods of approximation.* Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd, Chichester 1989.

[14] J. Dydak, J. Segal: *Shape theory: An introduction.* Lecture Notes in Math. **688**, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[15] B.M. Garay: *Strong cellularity and global asymptotic stability.* Fund. Math. **138** (1991), 147–154.

[16] R. Geoghegan, R. Summerhill: *Concerning the shapes of finite-dimensional compacta*. Transactions AMS **179** (1973), 281–292.

[17] A. Giraldo, J.M.R. Sanjurjo: *On the global structure of invariant regions of flows with asymptotically stable attractors*. Math. Z. **232** (1999), 739–746.

[18] ———: *Generalized Bebutov systems: a dynamical interpretation of shape*. J. Math. Soc. Japan **51** (1999), 937–954.

[19] ———: *Teoría de la Forma y Sistemas Dinámicos*. En *Contribuciones Matemáticas (Homenaje a Joaquín Arregui Fernández),* 155–182, Editorial Complutense, Madrid 2000.

[20] ———: *Morse–Smale equations of non-saddle decompositions*. Topology Appl. **140** (2004), 69–80.

[21] A. Giraldo, M.A. Morón, F.R. Ruiz del Portal, J.M.R. Sanjurjo: *Some duality properties of non-saddle sets*. Topology Appl. **113** (2001), 51–59.

[22] M. Gobbino: *Topological properties of attractors for dynamical systems*. Topology **40** (2001), 279–298.

[23] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1983.

[24] B. Günther: *Construction of differentiable flows with prescribed attractor*. Topology Appl. **62** (1995), 87–91.

[25] B. Günther, J.Segal: *Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron*. Proceedings AMS **119** (1993), 321–329.

[26] J.K. Hale: *Asymptotic behavior of dissipative systems*Mathematical Surveys and Monographs **25**, AMS, Providence, R.I., 1988.

[27] H.M. Hastings: *Shape theory and dynamical systems*. En *The structure of attractors in dynamical systems* (N.G.Markley and W.Perizzo, eds.), 150–160, Lecture Notes in Math. **668**.

[28] S.T. Hu: *Theory of Retracts*. Wayne State Univ. Press, Detroit 1967.

[29] I. Ivanšić, R.B. Sher: *A complement theorem for continua in a manifold*. Topology Proc. **4** (1979), 437–452.

[30] I. Ivanšić, R.B. Sher, G.A.Venema: *Complement theorems beyond the trivial range*. Illinois J. Math. **5** (1981), 209–220.

[31] L. Kapitanski, I. Rodnianski: *Shape and Morse theory of attractors*. Commun. Pure Appl. Math. **53** (2000), 218–242.

[32] E.N. Lorenz: *Deterministic non-periodic flows*. J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130–141.

[33] S. Mardešić: *Pairs of compacta and trivial shape*. Transactions AMS **189** (1974), 329–336.

[34] ———: *Strong shape and strong homology*. Springer, Berlin 1999.

[35] S. Mardešić, J. Segal. *Shape theory. The inverse system approach*. North-Holland Mathematical Library **26** North-Holland, Amsterdam/New York 1982.

[36] ———: *History of shape theory and its applications to general topology.* En *Handbook of the history of General Topology, vol. 3,* 1145–1177, Kluwer 2001.

[37] J. Mawhin, M. Willem: *Critical point theory and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag, New York 1989.

[38] C. McCord: *Mappings and homological properties in the Conley index theory.* Ergod. Th. Dynam. Sys. **8** (1988) Charles Conley Memorial Volume, 175–198.

[39] ———: *Poincaré-Lefschetz duality for the homology Conley index.* Transactions AMS **329** (1992), 233–252.

[40] J.W. Robbin, D. Salamon: *Dynamical systems, shape theory and the Conley index.* Ergod. Th. Dynam. Sys. **8*** (1988), 375–393.

[41] J.C. Robinson: *Infinite dimensional dynamical systems.* Texts in Appl. Math., Cambridge University Press, 2001.

[42] ———: *Global attractors: topology and finite dimensional dynamics.* J. Dyn. Diff. Eq. **11** (1999), 557–581.

[43] K.P. Rybakowsky: *The homotopy index and partial differential equations.* Universitext, Springer-Verlag, Berlin/New York 1987.

[44] K.P. Rybakowsky, E.A. Zehnder: *A Morse equation in Conley's index theory for semiflows on espacios métricos.* Ergod. Th. Dynam. Sys. **5** (1985), 123–143.

[45] D. Salamon: *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets.* Transactions AMS **291** (1985), 1–41.

[46] J.M.R. Sanjurjo: *Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape groups.* Proc. London Math. Soc. (3) **69** (1994), 330–344.

[47] ———: *On the structure of uniform attractors.* J. Math. Anal. Appl. **192** (1995), 519–528.

[48] ———: *Lusternik-Schnirelmann category and Morse decompositions.* Mathematika **47** (2000), 299–305.

[49] ———: *Morse equations and unstable manifolds of isolated invariant sets.* Nonlinearity **16** (2003), 1435–1448.

[50] R.B. Sher: *Complement theorems in shape theory.* En *Shape theory and geometric topology* (S.Mardešić and J.Segal, eds.), Lecture Notes in Math. **870**, Springer-Verlag, Berlin 1981.

[51] E.H. Spanier: *Algebraic Topology.* McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1966.

[52] C. Sparrow: *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors.* Applied Math. Sciences **41**, Springer-Verlag, New York/Berlin 1982.

[53] R. Temam: *Infinite Dimensional dynamical systems in Mechanics and Physics.* Springer–AMS **68,** 1988.

[54] W. Tucker: *The Lorenz attractor exists.* C.R. Acad. Sci. Paris, **328** I (1999), 1197–1202.

[55] J.E. West: *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution of a conjecture of Borsuk.* Annals of Math. **106** (1977), 1–18.