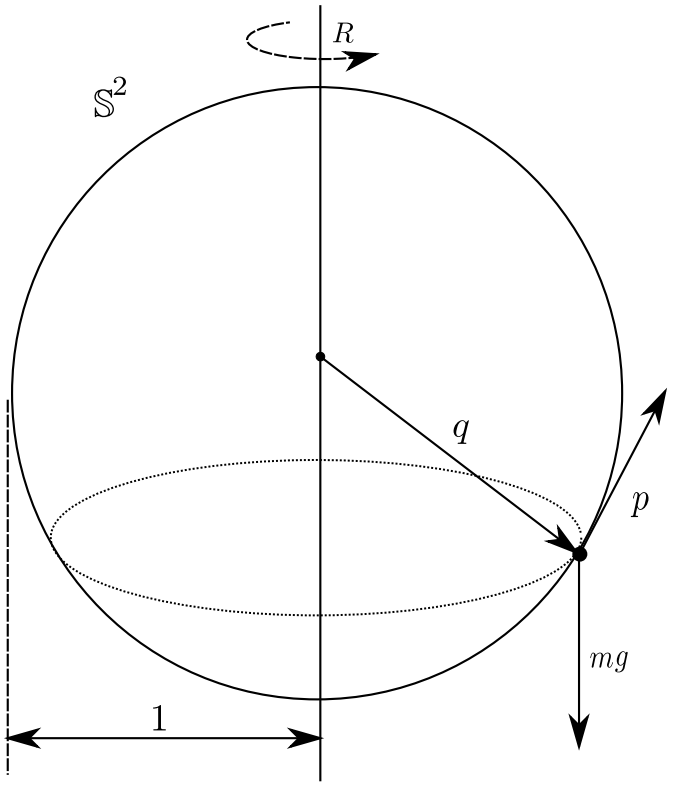
TRABAJO DE FIN DE GRADO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Introducción a la geometría simpléctica y los sistemas integrables

GUILLERMO GALLEGO

JUNIO 2018



Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Dirigido por Jesús M. Ruiz

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el teorema de Arnold-Liouville, que da una condición suficiente para saber si un *sistema mecánico hamiltoniano* es *integrable por cuadraturas*. Con este propósito, definimos y desarrollamos los conceptos necesarios para el teorema, dando unas nociones elementales sobre *geometría simpléctica* y su aplicación a la Mecánica Clásica.

Palabras clave: *Geometría simpléctica, sistemas integrables, teorema de Arnold-Liouville, flujos hamiltonianos, ecuaciones de Hamilton, derivada de Lie, campos dependientes del tiempo.*

Abstract

The main goal of this work is to prove the Arnold-Liouville theorem, which gives a sufficient condition for a *Hamiltonian mechanical system* to be *integrable by quadratures*. To that end we define and develop the concepts involved in the theorem, giving some elementary notions of *symplectic geometry* and its application to Classical Mechanics.

Keywords: *Symplectic geometry, integrable systems, Arnold-Liouville theorem, hamiltonian flows, Hamilton equations, Lie derivative, time-dependent vector fields.*

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 37J05, 37J35, 53D05, 58A05, 70H05

Índice general

Introducción **7**

1. Motivación física. De Newton a Hamilton **9**

2. Preliminares de geometría diferencial **15**
2.1. Derivada de Lie y fórmulas de Cartan 15
2.2. Campos y formas dependientes del tiempo 19
2.3. Lema de Poincaré 21

3. Geometría simpléctica y mecánica hamiltoniana **23**
3.1. Espacios vectoriales simplécticos 23
3.2. Variedades simplécticas 24
3.3. Campos simplécticos y campos hamiltonianos 27
3.4. Corchete de Poisson 29
3.5. Mecánica en variedades simplécticas 31
3.6. Simetrías y leyes de conservación 33

4. Sistemas integrables **37**
4.1. Teorema de Arnold-Liouville 37
4.2. Variables de acción-ángulo 43
4.3. Osciladores armónicos 46
4.4. Movimiento condicionalmente periódico 49
4.5. Sistemas con un grado de libertad 52
4.6. Más sistemas integrables 54

Bibliografía **56**

Introducción

Una *variedad simpléctica* es una variedad diferenciable de dimensión par en la que se define una 2-forma diferencial ω cerrada y no degenerada. La *geometría simpléctica* es el estudio de las variedades simplécticas y es interesante tanto por sus problemas fundamentales como por su aplicación a la Mecánica Clásica (y por extensión al resto de la Física). La forma ω induce una correspondencia entre campos y 1-formas, que nos permite obtener campos tangentes a partir de funciones definidas sobre la variedad. Las variedades simplécticas constituyen entonces una forma natural de visualizar los sistemas mecánicos, ya que las *ecuaciones de Hamilton* interpretan las leyes del movimiento como campos tangentes y, por tanto, intrínsecos a la variedad.

Un *sistema mecánico integrable por cuadraturas* es aquel en el que las ecuaciones del movimiento pueden ser resueltas salvo el cálculo de integrales (cuadraturas) de funciones conocidas, de forma que el problema de estudiar el comportamiento del sistema queda (al menos numéricamente) resuelto. El *teorema de Arnold-Liouville* nos ofrece una forma de saber si un sistema mecánico es integrable por cuadraturas mediante el estudio de la variedad simpléctica que lleva asociado. Tras un desarrollo previo de algunos prerrequisitos de geometría diferencial como son la *derivada de Lie* y los *campos dependientes del tiempo*, y tras afianzar algunos conceptos del álgebra lineal de los *espacios vectoriales simplécticos* (espacios vectoriales en los que se define una forma cuadrática antisimétrica y no degenerada), nos concentramos en el estudio de la geometría simpléctica, para acabar probando los resultados fundamentales que componen la teoría de los sistemas integrables.

Capítulo 1

Motivación física. De Newton a Hamilton

La forma más sencilla de describir el movimiento de un sistema de partículas es mediante el formalismo newtoniano, tomando como postulado fundamental de la mecánica clásica el *principio de determinación*: conocidas en cierto instante las posiciones y las velocidades iniciales de todas las partículas que conforman el sistema, es posible determinar sus posiciones y velocidades en cualquier otro instante.

Matemáticamente, este principio se traduce en la existencia de una función[1], conocida como *fuerza*, $F : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que cumple la llamada *ecuación de Newton*[2]:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t; \alpha),$$

donde n es el número de partículas, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$ es la trayectoria del sistema[3] y α son unos ciertos parámetros constantes de los que puede depender F, como por ejemplo las masas (que siempre consideraremos constantes) o las cargas eléctricas de las diferentes partículas. Para cada sistema concreto, la fuerza se determina experimentalmente. Desde un punto de vista matemático, decimos que la fuerza define un *sistema mecánico newtoniano*. En general, cuando hablemos de los distintos tipos de sistema mecánico, llamaremos a sus ecuaciones diferenciales asociadas (Newton, Euler-Lagrange, Hamilton) *ecuaciones del movimiento* o *dinámica del sistema*.

El formalismo newtoniano ofrece una forma muy simple de entender los sistemas mecánicos, pero tiene la complicación de que es necesario medir y calcular las tres componentes de la posición y de la velocidad de cada partícula que conforma el sistema. Por verlo con un ejemplo, si queremos describir el movimiento de un barco en un viaje transatlántico deberíamos tomar una referencia cartesiana (tal vez el centro de la Tierra y tres ejes perpendiculares) y describir su posición y velocidad en $\mathbb{R}^3$ en términos de esta referencia, cuando lo que parece más sencillo es simplemente entender el barco como una partícula moviéndose en la superficie de $\mathbb{S}^2$ y dar su posición y velocidad en términos de su latitud y longitud. Otro ejemplo lo podemos ver si consideramos el movimiento de una peonza. En este caso, aunque la peonza esté compuesta de cuatrillones de partículas, es posible describir su posición sólo con tres ángulos (el de giro respecto a su eje y los dos de orientación de su eje), o equivalentemente, con la rotación de sus ejes propios respecto a los de una referencia fija exterior (un *sistema de laboratorio*), es decir, con un elemento de SO(3).

De forma más general, podemos considerar sistemas newtonianos sometidos a *ligaduras* entre las partículas que lo conforman. Las posibilidades de movimiento quedan entonces restringidas a un

[1] A lo largo del texto sólo consideraremos funciones diferenciables ($\mathcal{C}^\infty$ si es necesario), no lo especificaremos en lo que sigue.

[2] Esta ecuación es una forma peculiar de la conocida *segunda ley de Newton*: $F = ma$.

[3] A lo largo del texto utilizaremos la notación usual en Física por la que un punto encima de una función dependiente del tiempo indica la derivada temporal: $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. En particular el punto indica que debe existir esa dependencia respecto del tiempo.

subconjunto de $\mathbb{R}^{3n}$. En el caso de que estas ligaduras sean «lo suficientemente buenas» (*holónomas* y *esclerónomas* es el término clásicamente usado en mecánica –esencialmente, que no dependan de las velocidades ni del tiempo–), es posible entenderlas como unas funciones $f_1, \dots, f_r : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$, independientes en todo $x \in \mathbb{R}^{3n}$ ($d_x f_1 \wedge \cdots \wedge d_x f_r \neq 0$), que definen el subconjunto de $\mathbb{R}^{3n}$

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \qquad \vdots \\ f_r(x) = 0. \end{cases}$$

Por el teorema de la función implícita, las ligaduras definen una subvariedad regular $M \subset \mathbb{R}^{3n}$ de dimensión $m = 3n - r$. En Física, a esta M se le suele llamar *espacio de configuración* del sistema y a m su número de *grados de libertad*. Así, llegamos al formalismo lagrangiano.

Un *sistema lagrangiano* (que siempre consideraremos con ligaduras holónomas y esclerónomas e independiente del tiempo) viene dado por una variedad diferenciable M de dimensión m. Si (U, q) es una carta en M, las coordenadas $q = (q_1, \dots, q_m) : U \to \mathbb{R}^m$ suelen llamarse en Física *coordenadas generalizadas* del sistema. Dados $x \in M$ y $v \in T_x M$, las coordenadas de v suelen denotarse $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$ y suelen llamarse *velocidades generalizadas* del sistema. Esto significa en realidad que, en la carta (U, q), $v = \sum_{i=1}^m \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}$. Como el sistema es independiente del tiempo, en este caso no hay t respecto de la que derivar, luego podemos considerar que es sólo una notación, pero es consistente. Si $v = \dot{x}(t)$ tenemos

$$\dot{q}_i = dq_{i,x(t)}(v) = \frac{d}{dt}(q_i \circ x)(t).$$

Un *estado* del sistema lagrangiano vendrá dado por un punto $(x, v) \in TM$, donde x es la posición y v la velocidad del sistema en dicho estado, y una *trayectoria* del sistema vendrá dada por una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & TM \\ t & \longmapsto & (x(t), \dot{x}(t)). \end{array}$$

Vemos que esta trayectoria está asociada a una curva $x : \mathbb{R} \to M$ en el espacio de configuración, que podemos entender como la descripción de las posiciones de las partículas a lo largo del tiempo, mientras que $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ describe sus velocidades.

La dinámica del sistema lagrangiano viene dada por lo que se conoce como el *principio de mínima acción*. Este principio puede deducirse a partir del formalismo newtoniano, imponiendo ciertas condiciones a las fuerzas y a partir del *principio de D'Alembert*, como puede leerse en [7]. Sin embargo, aquí le daremos un enfoque distinto, postulando directamente el principio de mínima acción, al estilo de Landau y Lifshitz [8]:

> «La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el *principio de mínima acción* (o *principio de Hamilton*).»

En primer lugar, el principio de mínima acción afirma que los sistemas lagrangianos que estamos considerando vienen caracterizados por una función $L : TM \to \mathbb{R}$, llamada *lagrangiano* del sistema. Ahora, suponiendo que en los tiempos t_1 y t_2 el sistema ocupa los estados (x_1, v_1) y (x_2, v_2), la trayectoria que describirá el sistema entre los dos estados será aquella que minimice (o más precisamente, que haga extremal) la integral

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t))dt. \tag{1.1}$$

Este funcional S se conoce como la *acción* del sistema.

Utilizando técnicas de cálculo variacional [2], es posible obtener unas ecuaciones diferenciales para las trayectorias que hacen extremales funcionales de la forma de S. Las soluciones de estas ecuaciones

son las trayectorias «reales» del sistema lagrangiano. Tenemos así las *ecuaciones de Euler-Lagrange*, que en coordenadas locales se expresan:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right](t) = 0,$$

para $i = 1, \ldots, m$.

* * *

Dado un sistema newtoniano $F : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$, se define la *energía cinética* como una aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{3n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle v, v\rangle . \end{aligned}$$

Decimos que el sistema es *conservativo* o, equivalentemente que F es una *fuerza conservativa*, si ésta sólo depende de la posición y además es un campo gradiente, es decir, si existe una función $V : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ que cumpla $F(x) = -\nabla V(x)$. Esta V toma el nombre de *energía potencial*. En un sistema newtoniano conservativo podemos ver la ecuación de Newton en la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial T}{\partial v_i}\right|_{\dot{x}(t)}\right) = -\left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_{x(t)}, \quad i = 1, \ldots, 3n.$$

Ahora, escribiendo la función $L(x, v) = T(v) - V(x)$, tenemos

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right]_{(x(t),\dot{x}(t))} = 0, \quad i = 1, \ldots, 3n.$$

Así, podemos ver cualquier sistema newtoniano conservativo como un sistema lagrangiano con $M = \mathbb{R}^{3n}$ y $L = T - V$.

En el caso de una variedad diferenciable cualquiera, debemos tener en cuenta que el producto escalar $\langle u, v\rangle$ deberá ser sustituido por una métrica riemmaniana g. Recordamos que una *métrica riemanniana* en una variedad diferenciable M se define como un tensor $g \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ simétrico y no degenerado, es decir, como una colección de productos escalares

$$g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}, \quad x \in M,$$

que satisface la siguiente condición de *diferenciabilidad*: para cada par X, Y de campos tangentes diferenciables de M la función

$$\begin{aligned} \langle X, Y\rangle : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_x(X_x, Y_x) \end{aligned}$$

es diferenciable. Se llama *variedad riemanniana* a un par (M, g), donde M es una variedad diferenciable y g una métrica riemanniana en M.

Definimos entonces un sistema lagrangiano *natural*, como un par $((M, g), L)$, donde (M, g) es una variedad riemmaniana y $L : TM \to \mathbb{R}$ es de la forma $L = T - V$, con $T : TM \to \mathbb{R}$, $T(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v)$ y $V : M \to \mathbb{R}$ una función[4].

* * *

[4]Aunque $V(x)$ está definida en M, la expresión $L = T - V$ tiene sentido si entendemos V como una función definida en TM con $V(x, v) = V(x)$.

Es una técnica común a la hora de estudiar ecuaciones diferenciales de orden 2

$$f''(x) = F(x, f, f'),$$

realizar un cambio de la forma

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = F(x, f, g), \end{cases}$$

lo que convierte la ecuación original de orden 2 en un sistema de dos ecuaciones de orden 1. Esto ofrece una serie de ventajas prácticas y fundamentales, ya que nos permite ver la ecuación diferencial como un campo y su solución como el flujo correspondiente. La misma idea se puede aplicar para estudiar sistemas lagrangianos.

Sea $((M, g), L)$ un sistema natural. En TM tenemos las coordenadas $(q, \dot{q})$, pero podemos definir otras usando la dualidad asociada a la métrica riemanniana g, es decir, el isomorfismo de Riesz:

$$\begin{aligned} T_xM &\longrightarrow T_xM^* \\ v &\longmapsto g_x(v, \bullet). \end{aligned}$$

En efecto, las formas

$$p_i = g_x\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \bullet\right), \quad i = 1, \dots, m,$$

que se llaman *momentos canónicos conjugados* o simplemente *momentos*, son independientes y forman una base de T_xM^*, de modo que $p = (p_1, \dots, p_m)$ son coordenadas en T_xM. Explícitamente

$$p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right) \mathrm{d}q_j = \sum_{i=1}^{m} g_{ij} \mathrm{d}q_j,$$

es decir, $p_i(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{m} g_{ij}(q)\dot{q}_j$, donde $g_{ij}(q)$ son las componentes de la matriz asociada a g_x en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial q_i}\right\}$. Por tanto

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}) = g_{ij}(q).$$

Así, (q, p) son unas nuevas coordenadas en TM. Ahora, si recordamos que

$$L(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \dot{q}_i g_{ij}(q) \dot{q}_j - V(q),$$

resulta que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(q)\dot{q}_j = p_i(q, \dot{q}).$$

Consideramos ahora una función $H : TM \to \mathbb{R}$, definida a partir del lagrangiano L como su *transformada de Legendre*

$$H = \sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}),$$

con las p relacionadas con las $\dot{q}$ mediante $p_i(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{m} g_{ij}(q)\dot{q}_j$. Derivando a ambos lados de la expresión respecto de $\dot{q}_j$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i + p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

que nos lleva a

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i\right) g_{ij} = 0.$$

Como la matriz de los g_{ij} es regular,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Si derivamos respecto de q_j tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Finalmente, usando la relación recién obtenida,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Para ver cómo será la dinámica del sistema en estas coordenadas, consideramos una trayectoria $(x(t), \dot{x}(t))$, que en las nuevas coordenadas se expresa $(q(t), p(t))$, con $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_m(t))$ y $p_i(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(q(t))\dot{q}_j(t)$. Nótese que aquí el punto sí expresa derivación respecto del tiempo, es decir, que las p dependen de las q. En este caso, por la ecuación de Euler-Lagrange, la segunda de las relaciones anteriores queda:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}(t) = -\frac{\partial L}{\partial q_j}(t) = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)(t) = -\frac{d}{dt}p_j(t) = -\dot{p}_j(t).$$

Obtenemos entonces un sistema de EDOs de orden 1 equivalentes a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t) \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t), \end{cases} \tag{1.2}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Éstas son las *ecuaciones de Hamilton*.

Si queremos dotar de sentido físico a esta función H, conocida como *hamiltoniano* del sistema, consideremos un sistema natural con lagrangiano $L = T - V$. Entonces $p_i = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(q)\dot{q}_j$ y $T(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{2}\dot{q}_i g_{ij}(q)\dot{q}_j$, por tanto

$$H(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{m} p_i(q, \dot{q})\dot{q}_i - L(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^{m} (g_{ij}\dot{q}_j)\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \dot{q}_i g_{ij}\dot{q}_j + V(q) = T(q, \dot{q}) + V(q),$$

Es decir, el hamiltoniano es exactamente $T + V$, la *energía mecánica total* del sistema.

De esta forma, podemos entender la dinámica de un sistema lagrangiano como la definición de un campo tangente al fibrado tangente del espacio de configuración, cuyas curvas integrales contendrán toda la información sobre la evolución temporal del sistema. En coordenadas locales este campo tangente se expresa

$$X = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right).$$

* * *

La siguiente pregunta que cabe hacerse es si será posible construir este campo de forma independiente de las coordenadas a partir de la especificación de un hamiltoniano $H : TM \to \mathbb{R}$. La construcción es sencilla, basta considerar un punto $\zeta \in TM$, con coordenadas (q, p) y la 1-forma α que localmente se expresa

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} p_i \mathrm{d}q_i.$$

Entonces, la 2-forma

$$\omega = \mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i,$$

es cerrada (porque es exacta) y no degenerada.

Usando esta forma se puede construir un isomorfismo lineal, dado $\zeta \in TM$,

$$\begin{array}{rcl} T_\zeta(TM) & \longrightarrow & (T_\zeta(TM))^* \\ \xi & \longmapsto & \omega(\bullet, \xi) = -\omega(\xi, \bullet). \end{array} \tag{1.3}$$

Ahora, si X^H es el campo asociado a $\mathrm{d}H$ por este isomorfismo, es decir, tal que $\mathrm{d}H = \omega(\bullet, X^H)$, es fácil comprobar que en coordenadas locales se expresa tal y como queríamos:

$$X^H = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

En efecto, si $X^H = \sum_{i=1}^{m} \left(a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$ entonces

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, X^H \right) &= \sum_k \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_k \left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial q_j} + b_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \\ &= \sum_{j,k} a_j \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_k \left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q_j} \right) = a_i \\ \omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, X^H \right) &= \sum_k \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_k \left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial q_j} + b_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \\ &= \sum_{j,k} b_j \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_k \left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_j} \right) = -b_i, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_i &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, X^H \right) = \mathrm{d}H \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ b_i &= -\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, X^H \right) = -\mathrm{d}H \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

ya que $\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i$.

Obsérvese que el elemento realmente crucial en la construcción de este campo ha sido la 2-forma ω. Una forma de esas características induce sobre TM la estructura de *variedad simpléctica*. El estudio de las variedades simplécticas y sus propiedades es la *geometría simpléctica*. A partir del capítulo 3 introduciremos el formalismo de la geometría simpléctica, lo que nos permitirá enunciar la *formulación canónica* de la mecánica clásica y resolver alguno de sus problemas.

Capítulo 2

Preliminares de geometría diferencial

2.1. Derivada de Lie y fórmulas de Cartan

Antes de comenzar con el estudio de la geometría simpléctica, conviene recordar el concepto de la derivada de Lie de campos, extenderlo a formas, y obtener una serie de resultados que nos serán útiles más adelante.

Empecemos recordando la definición del corchete de Lie de campos, su estudio detallado puede encontrarse en [6].

Definición 2.1.1. Sea M una variedad diferenciable y $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos diferenciables en M, se define el *corchete de Lie* como la aplicación

$$\begin{array}{rccl} [\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \end{array}$$

donde la composición se entiende si vemos los campos como aplicaciones $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$.

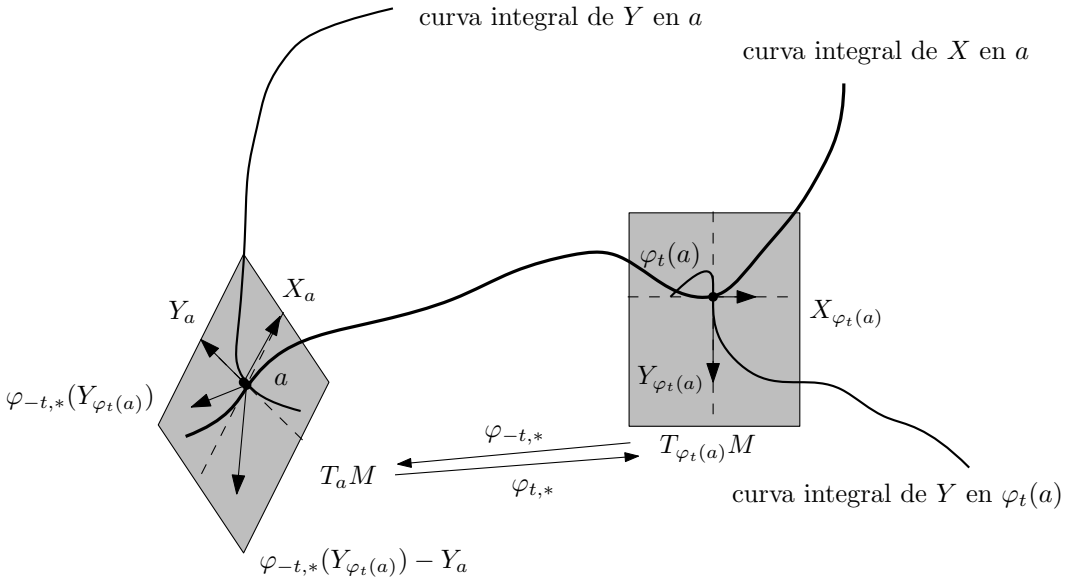


Figura 2.1: Visión geométrica de la derivada de Lie

Recordamos también que podemos ver el corchete de Lie de otra forma equivalente. Sea M una variedad diferenciable, $a \in M$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, φ un flujo en M y X su generador infinitesimal. Entonces

$$[X, Y]_a = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_{-t,*}(Y_{\varphi_t(a)}) - Y_a}{t}.$$

En vista de esta fórmula, se define la *derivada de Lie de Y respecto de X* como $L_XY = [X, Y]$. Por último, recordamos otro resultado muy importante que usaremos posteriormente:

Proposición 2.1.2. *Sea M una variedad diferenciable, sean φ, ψ flujos en M y sean X, Y sus generadores infinitesimales, respectivamente. Entonces los flujos conmutan si y sólo si lo hacen sus generadores infinitesimales (es decir, $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ si y sólo si $[X, Y] = 0$).*

Ya estamos en disposición de dar una definición más general de la derivada de Lie:

Definición 2.1.3. Sean M una variedad diferenciable, X un campo en M, y φ su flujo. Se define la *derivada de Lie respecto de X* como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} L_X : \Gamma^r(M) & \longrightarrow & \Gamma^r(M) \\ \omega & \longmapsto & L_X\omega = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t} \end{array}$$

(es decir, $(L_X\omega)_x = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(x)} - \omega_x}{t}$ para $x \in M$).

Vamos a obtener ahora un par de propiedades de la derivada de Lie.

Proposición 2.1.4. *Sean M una variedad diferenciable, $\omega \in \Gamma^r(M)$, $X, X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$. Se cumple*

$$L_X\omega(X_1, \ldots, X_r) = X\omega(X_1, \ldots, X_r) - \sum_{i=1}^{r} \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_r).$$

Demostración. Vamos a probarlo sólo para el caso en el que ω es una 2-forma para simplificar su lectura. El cálculo general es completamente análogo. En primer lugar,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_t^*\omega)(X_1, X_2) - \omega(X_1, X_2)] = &\lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}[(\varphi_t^*\omega)(X_1, X_2) - \varphi_t^*(\omega(X_1, X_2))]\right] \\ &+ \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}[\varphi_t^*(\omega(X_1, X_2)) - \omega(X_1, X_2)]\right]. \end{aligned}$$

El segundo término de esta expresión es exactamente

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}[\varphi_t^*(\omega(X_1, X_2)) - \omega(X_1, X_2)]\right] = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t\right)(\omega(X_1, X_2)) = X\omega(X_1, X_2),$$

mientras que el primer término, en $x \in M$ es

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}[(\varphi_t^*\omega)(X_1, X_2) - \varphi_t^*(\omega(X_1, X_2))]\right]\Big|_x \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\omega_{\varphi_t(x)}(d_x\varphi_t(X_{1,x}), d_x\varphi_t(X_{2,x})) - \omega_{\varphi_t(x)}(X_{1,\varphi_t(x)}, X_{2,\varphi_t(x)})] \\ &= \lim_{t\to 0} \omega_{\varphi_t(x)} \left[\frac{1}{t}(d_x\varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}), d_x\varphi_t(X_{2,x})\right] \\ &+ \lim_{t\to 0} \omega_{\varphi_t(x)} \left[X_{1,\varphi_t(x)}, \frac{1}{t}(d_x\varphi_t(X_{2,x}) - X_{2,\varphi_t(x)})\right] \\ &= -\omega_x([X, X_1]_x, X_{2,x}) - \omega_x(X_{1,x}, [X, X_2]_x). \end{aligned}$$

Comprobemos que, en efecto

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(d_x\varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}) = [X, X_1]_x,$$

y es análogo para $[X, X_2]_x$. Basta «sacar factor común» a $d_x\varphi_t$, de modo que

$$\tfrac{1}{t}(d_x\varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}) = -d_x\varphi_t \left(\frac{(d_x\varphi_t)^{-1}\left(X_{1,\varphi_t(x)}\right) - X_{1,x}}{t}\right).$$

Ahora, $(d_x\varphi_t)^{-1} = d_{\varphi_t(x)}\varphi_{-t} = \varphi_{-t,*}$ y

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(\varphi_{-t,*}(X_{1,\varphi_t(x)}) - X_{1,x}) = [X, X_1]_x\,.$$

Volviendo a agrupar, tenemos lo que se quería demostrar. □

Proposición 2.1.5. *Sea M una variedad diferenciable y $\alpha \in \Gamma^r(M)$. Se cumple*

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\alpha)(X_1,\dots,X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}X_i\alpha(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{r+1})\\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{r+1}),\end{aligned}$$

donde el circunflejo en un campo quiere decir que este campo se omite.

Demostración. En este caso probaremos solo la identidad más sencilla

$$\mathrm{d}\alpha(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]),$$

válida para el caso en el que α es de grado 1. El caso general es completamente análogo.

En primer lugar, escribimos todo en coordenadas locales:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_i \alpha_i \mathrm{d}\mathtt{x}_i,\ \mathrm{d}\alpha = \sum_{i,j}\mathrm{d}\alpha_i\wedge\mathrm{d}\mathtt{x}_j = \sum_{i,j}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\mathtt{x}_j}\mathrm{d}\mathtt{x}_i\wedge\mathtt{x}_j,\\ X &= \sum_i X_i\frac{\partial}{\partial\mathtt{x}_i},\ [X,Y] = \sum_{i,j}\left(X_i\frac{\partial Y_j}{\partial\mathtt{x}_i} - Y_i\frac{\partial X_j}{\partial\mathtt{x}_i}\right)\frac{\partial}{\partial\mathtt{x}_j}.\end{aligned}$$

Ahora, operando en estas coordenadas:

$$\begin{aligned}\alpha(X) &= \sum_i \alpha_i X_i,\ \mathrm{d}\alpha(X,Y) = \sum_{i,j}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\mathtt{x}_j}(X_jY_i - X_iY_j),\\ \alpha([X,Y]) &= \sum_{i,j}\left(X_i\frac{\partial Y_j}{\partial\mathtt{x}_i} - Y_i\frac{\partial X_j}{\partial\mathtt{x}_i}\right)\alpha_j = \sum_{i,j}\alpha_iX_j\frac{\partial Y_i}{\partial\mathtt{x}_j} - \sum_{i,j}\alpha_iY_j\frac{\partial X_i}{\partial\mathtt{x}_j},\\ X(\alpha Y) &= \sum_{i,j}\alpha_iX_j\frac{\partial Y_i}{\partial\mathtt{x}_j} + Y_iX_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial\mathtt{x}_j},\ Y(\alpha X) = \sum_{i,j}\alpha_iY_j\frac{\partial X_i}{\partial\mathtt{x}_j} + X_iY_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial\mathtt{x}_j}.\end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$X(\alpha(Y)) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]) = \sum_{i,j}Y_iX_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial\mathtt{x}_j} - X_iY_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial\mathtt{x}_j} = \mathrm{d}\alpha(X,Y).$$

□

Antes de seguir, vamos a introducir una nueva operación para formas:

Definición 2.1.6. Sea M una variedad diferenciable y X un campo en M, se define el *producto interior* o *contracción* $i_X : \Gamma^{r+1}(M) \to \Gamma^r(M)$ por

$$i_X\omega(X_1,\dots,X_r) = \omega(X,X_1,\dots,X_r),$$

para $X_1,\dots,X_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Podemos probar ya una serie de fórmulas, debidas a Élie Cartan[1], que nos serán de gran utilidad posteriormente.

Teorema 2.1.7 (Fórmulas de Cartan)**.** *Sea X un campo en una variedad M, y consideramos la derivada de Lie L_X, el producto interior i_X, y la diferencial exterior* d*. Entonces se cumplen las siguientes fórmulas:*

1. $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$, *para todo* $Y \in \mathfrak{X}(M)$,
2. $L_X = \mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}$,
3. $L_X \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ L_X$.

Demostración.

1. Si $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$L_X[(i_Y\omega)(X_1,\ldots,X_r)] = X\omega(Y,X_1,\ldots,X_r) - \sum_{i=1}^{r} \omega(Y,X_1,\ldots,[X,X_i],\ldots,X_r),$$

$$\begin{aligned} i_Y[(L_X\omega)(X_1,\ldots,X_r)] =& X\omega(Y,X_1,\ldots,X_r) \\ & - \sum_{i=1}^{r} \omega(Y,X_1,\ldots,[X,X_i],\ldots,X_r) \\ & - \omega([X,Y],X_1,\ldots,X_r). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega(X_1,\ldots,X_r) =& \omega([X,Y],X_1,\ldots,X_r) \\ =& L_X[(i_Y\omega)(X_1,\ldots,X_r)] \\ & - i_Y[(L_X\omega)(X_1,\ldots,X_r)]. \end{aligned}$$

2. Usando la relación entre el corchete de Lie y la diferencial exterior que obtuvimos antes, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}(i_X\alpha))(X_1,\ldots,X_r) =& \sum_i (-1)^{i-1} X_i \alpha(X,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha(X,[X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i_X(\mathrm{d}\alpha))(X_1,\ldots,X_r) =& \sum_i (-1)^{i} X_i \alpha(X,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \alpha(X,[X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r) \\ & + X\alpha(X_1,\ldots,X_r) + \sum_j (-1)^j \alpha([X,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r). \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}i_X\alpha + i_X\mathrm{d}\alpha)(X_1,\ldots,X_r) =& X\alpha(X_1,\ldots,X_r) \\ & + \sum_j (-1)^j (-1)^{j-1} \alpha(X_1,\ldots,[X,X_j],\ldots,X_r) \\ =& X\alpha(X_1,\ldots,X_r) - \sum_j \alpha(X_1,\ldots,[X,X_j],\ldots,X_r). \end{aligned}$$

3. Utilizando (2) y que $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} L_X \circ \mathrm{d} &= (i_X \circ \mathrm{d}) \circ \mathrm{d} + (\mathrm{d} \circ i_X) \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ i_X \circ \mathrm{d}, \\ \mathrm{d} \circ L_X &= \mathrm{d} \circ (i_X \circ \mathrm{d}) + \mathrm{d} \circ (\mathrm{d} \circ i_X) = \mathrm{d} \circ i_X \circ \mathrm{d}, \end{aligned}$$

luego $L_X \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ L_X$. □

[1] En la literatura, la segunda de estas fórmulas suele llamarse «fórmula mágica de Cartan».

2.2. Campos y formas dependientes del tiempo

Hasta ahora hemos tratado con campos tangentes a una variedad diferenciable, que de forma natural nos dan ecuaciones diferenciales *autónomas* sobre esta variedad. Sin embargo, en algún uso posterior, especialmente en la demostración del teorema de Darboux (teorema 3.2.5), vamos a necesitar tratar ecuaciones *no* autónomas, es decir, ecuaciones diferenciales que dependan de un parámetro extra, generalmente el tiempo. Para ello, es necesario introducir los campos y las formas dependientes del tiempo.

Definición 2.2.1. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y M una variedad diferenciable:

1. Un *campo tangente (diferenciable) dependiente del tiempo* de M es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} X : J \times M & \longrightarrow & TM \\ (t, x) & \longmapsto & (x, X_{t,x}) \end{array}$$

que es diferenciable como aplicación entre variedades.

2. Una *forma diferencial (diferenciable) de grado r dependiente del tiempo* de M es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \alpha : J \times M & \longrightarrow & \Lambda^r(M) \\ (t, x) & \longmapsto & (x, \alpha_{t,x}) \end{array}$$

tal que la función

$$\begin{array}{rcl} \alpha(X_1, \ldots, X_r) : J \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \longmapsto & \alpha_{t,x}(X^t_{1,x}, \ldots, X^t_{r,x}) \end{array}$$

es diferenciable para cualesquiera r campos $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 2.2.2. Un campo y una forma dependientes del tiempo se expresan en una carta $(U, \mathtt{x})$ en la forma

$$X_{t,x} = \sum X_i(t, x) \left.\frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_i}\right|_x$$
$$\alpha_{t,x} = \sum \alpha_i(t, x) \mathrm{d}\mathtt{x}_i|_x.$$

La diferenciabilidad de X y α es equivalente a la de sus componentes X_i, α_i como funciones $J \times U \to \mathbb{R}$.

Tiene sentido decir ahora qué entendemos por derivar una forma respecto al tiempo. Sea α_t una r-forma dependiente del tiempo, la *derivada temporal* de α_t es

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \alpha_t = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha_{t_0+h} - \alpha_{t_0}}{h}.$$

El siguiente teorema nos permite integrar campos dependientes del tiempo. Por brevedad de exposición omitimos la demostración, que puede encontrarse en [9].

Teorema 2.2.3. *Sea $X : J \times M \to TM$ un campo dependiente del tiempo. Existen un abierto $V \subset J \times J \times M$ y una función $\varphi : V \to M$ tal que para cada $s \in J$ y para cada $x \in M$, el conjunto $V^{(s,x)} = \{t \in J | (t, s, x) \in V\}$ es un intervalo abierto que contiene a s y la curva $\gamma : V^{(s,x)} \to M$ definida por $\gamma(t) = \varphi(t, s, x)$ es la única solución maximal al problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X_{(t,\gamma(t))}, \\ \gamma(s) = x. \end{cases}$$

Equivalentemente, podemos ver el problema de valor inicial en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,s,x) = X_{(t,\varphi(t,s,x))}, \\ \varphi(s,s,x) = x. \end{cases}$$

Esta φ recibe el nombre de *flujo dependiente del tiempo*. Nótese que cada $\varphi(t,s,\bullet)$ es una aplicación diferenciable de un abierto de M en M que denotaremos $\varphi_{t,s}$. Aunque aquí no lo detallemos, es sencillo probar que este flujo sigue una *ley de aditividad*: si $(t_1,t_0,x) \in V$ y $(t_2,t_1,\varphi_{t_1,t_0}(x)) \in V$, entonces $(t_2,t_0,x) \in V$ y

$$\varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0}(x) = \varphi_{t_2,t_0}(x).$$

Ahora podemos generalizar la derivada de Lie de formas para campos dependientes del tiempo:

$$L_{X_t}\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{t+h,t}^*\alpha - \alpha}{h},$$

para $x \in M$. Esto nos da una fórmula que nos relaciona la derivada temporal con la derivada de Lie de formas.

Proposición 2.2.4. *Sea $X : J \times M \to TM$ un campo dependiente del tiempo y $\varphi : V \to M$ el flujo dependiente del tiempo asociado. Si α_t es una r-forma dependiente del tiempo, entonces para cualquier $(t_1,t_0,x) \in V$*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} \left(\varphi_{t,t_0}^*\alpha_t\right)_x = \left[\varphi_{t_1,t_0}^* \left(L_{X_{t_1}}\alpha_{t_1} + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} \alpha_t\right)\right]_x.$$

Podemos ver esta fórmula en una notación más compacta:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha_t = \varphi_t^* \left(L_{X_t}\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t\right).$$

Demostración. En primer lugar, probaremos una forma más sencilla, en la que α no depende del tiempo,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} (\varphi_{t,t_0}^*\alpha) = \varphi_{t_1,t_0}^*(L_{X_{t_1}}\alpha).$$

En efecto

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} (\varphi_{t,t_0}\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{t_1+h,t_0}^*\alpha - \varphi_{t_1,t_0}^*\alpha}{h} = \varphi_{t_1,t_0}^* \left(\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{t_1+h,t_1}\alpha - \alpha}{h}\right) = \varphi_{t_1,t_0}^*(L_{X_t}\alpha).$$

Probemos ahora la fórmula general. Tomando un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, consideremos la aplicación $F : (t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon) \times (t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon) \to \Gamma^k(T_xM)$ definida por

$$F(u,v) = (\varphi_{u,t_0}^*\alpha_v)_x.$$

Ahora, por la regla de la cadena

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} F(t,t) = \frac{\partial F}{\partial u}(t_1,t_1) + \frac{\partial F}{\partial v}(t_1,t_1) = \left[\varphi_{t_1,t_0}^*(L_{X_{t_1}}\alpha_{t_1})\right]_x + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} (\varphi_{t_1,t_0}^*\alpha_t)_x.$$

«Sacando factor común» a φ_{t_1,t_0}^*, obtenemos lo que queríamos probar. □

2.3. Lema de Poincaré

En esta sección vamos a probar uno de los resultados fundamentales de cohomología de de Rham, que nos será útil en varias partes a lo largo del texto. Se trata del lema de Poincaré, que afirma que en un abierto *estrellado* toda forma diferencial cerrada es exacta.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea J el intervalo $[0,1]$. Consideremos la familia de aplicaciones

$$\begin{aligned} j_t : M &\longrightarrow J \times M \\ x &\longmapsto (t,x). \end{aligned}$$

Se define el *operador de homotopía* como la aplicación

$$\begin{aligned} h : \Gamma^k(J\times M) &\longrightarrow \Gamma^{k-1}(M) \\ \omega &\longmapsto \int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega \; dt. \end{aligned}$$

Explícitamente, para un punto $(t,x)\in J\times M$,

$$(h\omega)_x(X_1,\dots,X_{k-1}) = \int_0^1 (i_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega)_{(t,x)}(X_1,\dots,X_{k-1})dt = \int_0^1 \omega_{(t,x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1,\dots,X_{k-1}\right)dt.$$

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow \mathrm{d} & & \downarrow \mathrm{d} \\
\Gamma^{k-1}(J\times U) & & \Gamma^{k-1}(U) \\
\downarrow \mathrm{d} & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow \mathrm{d} \\
\Gamma^{k}(J\times U) & & \Gamma^{k}(U) \\
\downarrow \mathrm{d} & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow \mathrm{d} \\
\Gamma^{k+1}(J\times U) & & \Gamma^{k+1}(U) \\
\downarrow \mathrm{d} & & \downarrow \mathrm{d} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Proposición 2.3.1. *El operador de homotopía cumple la relación*

$$\mathrm{d}\circ h + h\circ \mathrm{d} = j_1^* - j_0^*,$$

con las j_t definidas como antes.

Demostración. Sea $\omega\in\Gamma^k(J\times M)$. Directamente, usando la fórmula de Cartan,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\circ h + h\circ \mathrm{d})(\omega_{(t,x)}) &= \mathrm{d}\left(\int_0^1 (i_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega)_{(t,x)}dt\right) + \int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}}(\mathrm{d}\omega_{(t,x)})dt \\
&= \int_0^1 (\mathrm{d}\circ i_{\frac{\partial}{\partial t}} + i_{\frac{\partial}{\partial t}}\circ \mathrm{d})(\omega)_{(t,x)}dt \\
&= \int_0^1 (L_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega)_{(t,x)}dt = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\omega\right)_{(t,x)} dt \\
&= \omega_{(1,x)} - \omega_{(0,x)} = \omega_{j_1(x)} - \omega_{j_0(x)} \\
&= (j_1^*\omega)_x - (j_2^*\omega)_x.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.3.2. Un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice *estrellado* si, para cada $x \in U$ y para cada $t \in J$, $tx \in U$.

Por ejemplo, son conjuntos estrellados las bolas centradas en 0 o el propio $\mathbb{R}^n$. Podemos considerar entonces el *retracto de deformación*

$$\begin{aligned} r : J \times U &\longrightarrow U \\ (t, x) &\longmapsto tx, \end{aligned}$$

que es una aplicación diferenciable que cumple $r \circ j_0 = r(0, \bullet) \equiv 0$ y $r \circ j_1 = r(1, \bullet) = \mathrm{id}_U$.

Teorema 2.3.3 (Lema de Poincaré)**.** *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto estrellado, entonces toda forma diferencial cerrada en U es exacta. En otras palabras, para todo $k \in \mathbb{N}$, $H^k(U) = 0$.*

Demostración. Sea $\omega \in \Gamma^k(U)$. Sea r el retracto de deformación y $\tilde{h}$ la aplicación inducida por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^k(U) & \xrightarrow{r^*} & \Gamma^k(J \times U) \\ & \searrow^{\tilde{h}} & \downarrow h \\ & & \Gamma^{k-1}(U). \end{array}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(\tilde{h}\omega) &= h(r^*\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(hr^*\omega) = h \circ \mathrm{d}(r^*\omega) + \mathrm{d} \circ h(r^*\omega) \\ &= j_1^*(r^*\omega) - j_0^*(r^*\omega) = (r \circ j_1)^*\omega - (r \circ j_0)^*\omega \\ &= \omega - 0 = \omega. \end{aligned}$$

Ahora, si ω es cerrada, entonces $\mathrm{d}(\tilde{h}\omega) = \omega$, luego ω es exacta. □

Corolario 2.3.4. *Para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$. Es decir, en $\mathbb{R}^n$ toda forma cerrada es exacta.*

Corolario 2.3.5. *Si $n \geq 3$, entonces $H^2(\mathbb{S}^n) = 0$.*

Demostración. Si ω es una 2-forma en $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, $x \in \mathbb{S}^n$ y U es un disco entorno de x. Por el lema de Poincaré, existe una 1-forma α definida en U tal que $\omega = \mathrm{d}\alpha$ en U. Sea θ una función meseta que valga 1 en un entorno $V \subset U$ de x relativamente compacto de U y 0 fuera de U. La forma

$$\omega_1 = \omega - \mathrm{d}(\theta\alpha)$$

es cerrada con soporte compacto en $\mathbb{S}^n \backslash \{x\}$, que es difeomorfa, por proyección estereográfica φ, a $\mathbb{R}^n$. De nuevo por el lema de Poincaré, existe una 1-forma β de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{d}\beta = \varphi^*\omega_1$. Con todo esto, tenemos

$$\omega = \mathrm{d}\left(\theta\alpha + \left(\varphi^{-1}\right)^* \beta\right).$$

Por tanto, ω es exacta en $\mathbb{S}^n$ y $H^2(\mathbb{S}^n) = \{0\}$. □

Capítulo 3

Geometría simpléctica y mecánica hamiltoniana

3.1. Espacios vectoriales simplécticos

En esta sección repasamos algunos conceptos de álgebra lineal necesarios para estudiar geometría simpléctica. Introduciremos la noción de *espacio vectorial simpléctico* y veremos algunas de sus propiedades. Muchos de los resultados aquí expuestos pueden leerse más desarrollados en [5].

Definición 3.1.1. Un *espacio vectorial simpléctico* es un par ordenado (V, ω), donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y

$$\omega : V \times V \to \mathbb{R}$$

es una forma bilineal antisimétrica no degenerada.

Clasificación de formas bilineales antisimétricas

1. Sean ω una forma bilineal antisimétrica sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces exsiste una base respecto de la cual la matriz asociada a ω es

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   donde I_n es la matriz identidad $n \times n$ y $n \leq \frac{1}{2}\dim(V)$.

2. Si (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita, entonces $\dim(V) = 2n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, se dice que $\mathcal{B} \subset V$ es una *base simpléctica* de V si la matriz asociada a ω en $\mathcal{B}$ es

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Podemos ver la forma bilineal ω de matriz asociada J_n como una 2-forma alternada en V. Si $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$ es una base simpléctica y $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ es su base dual, entonces es inmediato comprobar que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \wedge \varphi_i.$$

4. Llamaremos *n-ésima forma simpléctica estándar* a la forma $\Omega_n : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ de matriz asociada J_n en la base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$. Llamaremos *espacio simpléctico estándar* $2n$*-dimensional* a $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_n)$. Deducimos también de lo anterior que todo espacio vectorial simpléctico de dimensión $2n$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_n)$.

Aplicaciones simplécticas

Sean (V,ω) y (V',ω') espacios vectoriales simplécticos. Decimos que una aplicación lineal $f : V \to V'$ es *simpléctica* si

$$\omega'(f(v), f(w)) = \omega(v, w)$$

para cualesquiera $v, w \in V$. En otras palabras $f^*\omega' = \omega$.

Ahora, si $w \neq 0$ y $f(v) = 0$, entonces $\omega(v, w) = 0$ y, como ω es no degenerada, $v = 0$, de modo que $\ker f = \{0\}$. Es decir, toda aplicación simpléctica es inyectiva.

En el caso en que V y V' tienen la misma dimensión, entonces f es un isomorfismo que lleva una base simpléctica de (V,ω) a una base simpléctica de (V',ω').

El grupo simpléctico

Sea (V,ω) un espacio vectorial simpléctico de dimensión $2n$. El conjunto de las aplicaciones lineales simplécticas de V en V es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2n)$. Este grupo se conoce como *n-ésimo grupo simpléctico real* y se denota por $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Asignando a cada $f \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ su matriz asociada A en una base simpléctica fijada, el grupo simpléctico se puede representar por medio de las matrices $2n \times 2n$ que cumplen

$$J_n = A^t J_n A.$$

Estas matrices se dicen *matrices simplécticas*. De aquí deducimos inmediatamente, por un razonamiento análogo al que haríamos para matrices ortogonales, que todas las matrices simplécticas tienen determinante 1 o -1. Sin embargo, podemos probar un resultado aún más fuerte sobre el grupo simpléctico: su *subgrupo especial* (es decir, el subgrupo de las aplicaciones de determinante 1) coincide con él mismo.

Proposición 3.1.2. *Toda aplicación lineal simpléctica tiene determinante* 1.

Demostración. Si Ω_n es la forma simpléctica canónica, entonces $\Lambda = \Omega_n \wedge \overset{(n)}{\cdots} \wedge \Omega_n$ es una forma de grado máximo, luego, por el teorema del determinante, $f^*(\Lambda) = \det(f)\Lambda$. Ahora, como f es simpléctica,

$$f^*(\Lambda) = (\Omega_n \circ f) \wedge \overset{(n)}{\cdots} \wedge (\Omega_n \circ f) = \Omega_n \wedge \overset{(n)}{\cdots} \wedge \Omega_n = \Lambda.$$

Por tanto, $\det(f) = 1$. □

3.2. Variedades simplécticas

Una vez repasados los conceptos básicos de la geometría lineal simpléctica, estamos preparados para entender lo que son las *variedades simplécticas* y estudiar las propiedades que exhiben.

Definición 3.2.1. Una *variedad simpléctica* es un par (M,ω) donde M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y $\omega \in \Gamma^2(M)$ es una 2-forma cerrada y no degenerada (para todo $x \in M$, ω_x es no degenerada).

De la propia definición de variedad simpléctica podemos ya deducir unas cuantas restricciones para lo que puede y lo que no puede ser una variedad simpléctica. En primer lugar, claramente todas tienen que tener dimensión par, ya que lo hemos impuesto por definición, aunque venía motivado del hecho de que solo en dimensión par podemos tener matrices antisimétricas no degeneradas. Veamos entonces un primer ejemplo de variedad simpléctica, a parte del ya estudiado espacio simpléctico estándar, al que trivialmente se le puede dotar de la estructura de variedad simpléctica.

Ejemplo 3.2.2. Podemos dar un ejemplo de variedad simpléctica si consideramos la esfera $\mathbb{S}^2$ y su forma de área ω, que es cerrada por ser de grado máximo. Si vemos $\mathbb{S}^2$ sumergida en $\mathbb{R}^3$ como la esfera de radio 1 y consideramos el radio vector ν en cada punto de la esfera con coordenadas (x, y, z), la expresión concreta de esta forma en este punto es

$$\omega = \det(\nu, \bullet, \bullet) = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

En efecto, como en la esfera unidad

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} x\omega &= x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x\mathrm{d}x(-y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}y) \\ &= x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (-y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) \wedge (-y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}y) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \end{aligned}$$

y, por un cálculo análogo

$$y\omega = -(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

y

$$z\omega = (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Como el miembro de la derecha de cada una de estas expresiones sólo se anula en el plano tangente a la esfera en los puntos en los que se anula el correspondiente x, y o z de la izquierda, tenemos que la forma ω nunca es nula en la esfera.

También se puede ver cómo se expresa esta forma en coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \cos\phi \sin\theta \\ y = \sin\phi \cos\theta \\ z = \cos\theta. \end{cases}$$

Tenemos entonces

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -\sin\phi \sin\theta \mathrm{d}\phi + \cos\phi \cos\theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \cos\phi \sin\theta \mathrm{d}\phi + \sin\phi \cos\theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z = -\sin\theta \mathrm{d}\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = \sin\phi \sin^2\theta \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\cos\phi \sin^2\theta \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta. \end{cases}$$

Finalmente

$$\omega = -(\cos^2\phi \sin^3\theta + \sin^2\phi \sin^3\theta + \sin\theta \cos^2\theta)\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta = -\sin\theta \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta,$$

que es la forma de área típica en coordenadas esféricas.

Vamos a obtener ahora algunas condiciones que tienen que cumplir las variedades simplécticas que se deducen directamente de la definición.

Proposición 3.2.3. *Toda variedad simpléctica es orientable.*

Demostración. Como ω es no degenerada, $\omega^n = \omega \wedge \overset{(n)}{\cdots} \wedge \omega$ es una forma de grado máximo nunca nula, luego la variedad es orientable. □

A esta ω^n se le suele llamar *volumen de Liouville* de M ya que, aunque aquí no lo desarrollemos, está relacionada con el elemento de volumen en M si definieramos en ésta una estructura riemanniana.

Proposición 3.2.4. *Si (M,ω) es una variedad simpléctica compacta y sin borde, entonces su segundo grupo de cohomología de de Rham $H^2(M)$ es no trivial: ω no es exacta.*

Demostración. Consideramos en M el volumen de Liouville ω^n. Ahora, si $\omega = \mathrm{d}\alpha$, entonces $\omega^n = \mathrm{d}(\alpha \wedge \omega^{n-1})$. Por el teorema de Stokes

$$\int_M \omega^n = \int_M \mathrm{d}(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M = \varnothing} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Pero M es compacta y ω^n es una forma diferencial de grado máximo, luego $\int_M \omega^n$ no puede ser igual a 0. Por tanto, ω es cerrada y no es exacta, luego $[\omega] \neq 0$ y $H^2(M) \neq \{0\}$. □

Como consecuencia del resultado anterior, las esferas de dimensión superior a 2 no admiten una estructura simpléctica ya que $H^2(\mathbb{S}^n) = 0$ si $n \geq 3$.

Teorema de Darboux

Prosiguiendo el estudio de las variedades simplécticas más allá de la propia definición nos encontramos con un resultado muy fuerte, central en toda la geometría simpléctica: las formas simplécticas son localmente constantes. Esto establece una diferenciación clara con la geometría riemanniana, donde existen invariantes locales, como la curvatura, de modo que pedir a una métrica riemanianna que sea localmente constante es como pedirle a la variedad que sea localmente plana. Sin embargo, en geometría simpléctica la situación es distinta ya que no hay invariantes locales.

Teorema 3.2.5 (Darboux)**.** *Sean M una variedad diferenciable y ω una 2-forma cerrada y no degenerada en M. Entonces, para todo $x \in M$ existe una carta (U,φ) en x tal que $\varphi^*\omega$ tiene coeficientes constantes.*

Demostración. Como se trata de una cuestión local, podemos suponer que estamos en $\mathbb{R}^{2n}$. Sea $\omega_1 = \omega_x$, que tiene coeficientes constantes, y sea

$$\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega = \omega + t(\omega_1 - \omega),$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Como $\omega_{t,x} = \omega_x$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ω_t es no degenerada en x. Por tanto, si J es un intervalo abierto acotado tal que $[0,1] \in J$, existe un entorno $U \subset M$ de x en el que ω_t es no degenerada para cada $t \in \bar{J}$. Ahora, como $\omega_1 - \omega$ es cerrada, por el Lema de Poincaré existirá una 1-forma α en tal que $\omega_1 - \omega = \mathrm{d}\alpha$. Además, podemos asumir $\alpha_x = 0$.

Ahora, por ser ω_t no degenerada, da un isomorfismo entre campos y 1-formas (de forma análoga a como vimos en la sección 1): para $t \in J$, podemos definir el campo dependiente del tiempo X_t tal que $i_{X_t}\omega_t = -\alpha$ y además $X_{t,x} = 0$ por ser $\alpha_x = 0$. Ahora, si $\varphi : V \to U$ es el flujo dependiente del tiempo asociado a X, entonces $\varphi(t,0,x) = x$ para todo $t \in J$, luego $J \times \{0\} \times \{x\} \subset V$. Como V es abierto en $J \times J \times M$ y $[0,1]$ es compacto, existe un entorno U_0 de x tal que $[0,1] \times \{0\} \times U_0 \subset V$.

Por tanto, si $\varphi_t = \varphi(t,0,\bullet)$ para cada $t \in [0,1]$ se sigue, por la proposición 2.2.4 y por las fórmulas de Cartan,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) &= \varphi_t^*(L_{X_t}\omega_t) + \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) = \varphi_t^*(i_{X_t}\mathrm{d}\omega_t + \mathrm{d}i_{X_t}\omega_t) + \varphi_t^*(\omega_1 - \omega)\\ &= \varphi_t^*(0 - \mathrm{d}\alpha + \omega_1 - \omega) = 0.\end{aligned}$$

De modo que $\varphi_1^*\omega_1 = \varphi_0^*\omega_0 = \omega$. Por tanto, $\varphi_{1,*}$ es simpléctica, luego es un isomorfismo, lo que implica que φ_1 es un difeomorfismo local. Así, reduciendo el entorno si es necesario, encontramos la carta que estábamos buscando: basta tomar $\varphi = \varphi_1^{-1}$, y $\varphi^*\omega = \omega_1$ tiene coeficientes constantes. □

Corolario 3.2.6. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica. Para cada $x \in M$ existe un entorno U de x y unas coordenadas $(q,p) = (q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ en x tales que*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i.$$

Una carta $(U,(q,p))$ de este tipo se llama carta de Darboux.

Demostración. Basta tomar la carta (U,φ), dada por el teorema de Darboux, para la cual la forma $\varphi^*\omega$ es constante. Tomamos ahora la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, que diagonaliza $\varphi^*\omega$ a la forma Ω_n, y las coordenadas $\mathtt{x} = (q,p)$ para las cuales el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^{2n} \\ & \searrow^{\mathtt{x}} & \downarrow A \\ & & \mathbb{R}^{2n}. \end{array}$$

Entonces en la carta $(U,\mathtt{x})$ podemos escribir $\omega = \mathtt{x}^*\Omega_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$. □

Simplectomorfismos

Para terminar la sección, vamos a estudiar lo que podríamos tomar como morfismos en una categoría de las variedades simplécticas: aplicaciones diferenciables que preserven las 2-formas.

Definición 3.2.7. Sean (M,ω) y (M',ω') variedades simplécticas y $f : M \to M'$ una aplicación diferenciable. Decimos que f es un *simplectomorfismo* si $f^*\omega' = \omega$, es decir, si para cada $x \in M$, $(d_x f)^*\omega'_{f(x)} = \omega_x$. Equivalentemente, f es un simplectomorfismo si la aplicación lineal $d_x f : T_xM \to T_{f(x)}M'$ es simpléctica.

Una propiedad básica de los simplectomorfismos es que preservan las cartas de Darboux.

Proposición 3.2.8. *Sean (M,ω) y (M',ω') variedades simplécticas y $f : M \to M'$ una aplicación diferenciable. Entonces f es un simplectomorfismo si y sólo si, para cada $x \in M$, si $(U,(q,p))$ es una carta de Darboux en $f(x)$, entonces $(f^{-1}(U),(q\circ f, p\circ f))$ es una carta de Darboux en x.*

Demostración. Basta darse cuenta de que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(p_i\circ f)\wedge \mathrm{d}(q_i\circ f) = \sum_{i=1}^{n} f^*(\mathrm{d}p_i\wedge \mathrm{d}q_i) = f^*\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i\wedge \mathrm{d}q_i\right) = f^*\omega'$$

es igual a ω si y sólo si f es un simplectomorfismo.

□

Enunciamos también una consecuencia inmediata de la definición de simplectomorfismo:

Proposición 3.2.9. *Los simplectomorfismos preservan el volumen de Liouville ω^n.*

3.3. Campos simplécticos y campos hamiltonianos

Sea (M,ω) una variedad simpléctica. Análogamente a lo visto en la sección 1 y en la demostración del teorema de Darboux, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \longrightarrow & (T_xM)^* \\ \xi & \longmapsto & \omega(\bullet,\xi), \end{array}$$

es un isomorfismo lineal entre campos y 1-formas. Resulta que a cada campo X le podemos asignar la forma $-i_X\omega$. Veremos enseguida como esta propiedad, junto con la fórmula de Cartan nos va a permitir obtener resultados muy interesantes.

En primer lugar, observemos que si f_t es una familia uniparamétrica de simplectomorfismos y X es su generador infinitesimal, entonces

$$L_X\omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t^*\omega = 0.$$

En la otra dirección también es cierto, si X es un campo con $L_X\omega = 0$, su flujo φ es una familia uniparamétrica de simplectomorfismos. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(x)}) &= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{\varphi_{t+h}(x)} - \varphi_t^*\omega_{\varphi_t(x)}}{h}\\ &= \varphi_t^*\left(\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_h^*\omega_{\varphi_h(\varphi_t(x))} - \omega_{\varphi_t(x)}}{h}\right)\\ &= \varphi_t^*((L_X\omega)_{\varphi_t(x)}) = \varphi_t^*(0) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(x)} = \omega_x$.

Por otro lado, aplicando la fórmula de Cartan

$$L_X\omega = i_X(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(i_X\omega) = \mathrm{d}(i_X\omega),$$

ya que ω es cerrada. Por tanto, si X es un campo tangente a una variedad simpléctica, $L_X\omega = 0$ si y sólo si $i_X\omega$ es cerrada. Todo esto nos lleva a dar la siguiente definición:

Definición 3.3.1. Sea (M,ω) una variedad simpléctica. Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice *simpléctico*, si $L_X\omega = 0$ o, equivalentemente, si $i_X\omega$ es una 1-forma cerrada. El conjunto de los campos simplécticos de (M,ω) se denota por $\mathfrak{X}_\omega(M)$.

En el caso en que X sea un campo simpléctico y además $i_X\omega$ sea exacta, existe una función $F : M \to \mathbb{R}$ con $i_X\omega = -\mathrm{d}F$. Denotamos entonces $X = X^F$ y decimos que X^F es un *campo hamiltoniano* con hamiltoniano F.

Localmente, si tomamos una carta de Darboux en un punto $x \in M$, podemos escribir $x = (q_1,\dots,q_n,p_1,\dots p_n)$ y una función $F : M \to \mathbb{R}$ como $F(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$. Tenemos entonces

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i,$$

de modo que el campo de hamiltoniano F tiene la forma

$$X^F = \sum_{i=1}^n X_{q_i}^F\frac{\partial}{\partial q_i} + X_{p_i}^F\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Ahora,

$$\mathrm{d}F = -i_{X^F}\omega = -\sum_{i,j=1}^n \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q_i\left(X_{q_j}^F\frac{\partial}{\partial q_j} + X_{p_j}^F\frac{\partial}{\partial p_j},\bullet\right) = \sum_{i=1}^n X_{q_i}^F\mathrm{d}p_i - X_{p_i}^F\mathrm{d}q_i.$$

Por tanto, las componentes del campo son $X_{q_i}^F = \frac{\partial F}{\partial p_i}$ y $X_{p_i}^F = -\frac{\partial F}{\partial q_i}$. Si consideramos ahora las curvas integrales $(q_1(t),\dots,q_n(t),p_1(t),\dots,p_n(t))$ del campo X^F, obtenemos ecuaciones de Hamilton con hamiltoniano F, tal y como las vimos en la sección 1

$$\begin{cases}\dot{q}_i(t) &= \frac{\partial F}{\partial p_i}(t)\\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial F}{\partial q_i}(t),\end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Cabe preguntarse ahora cuándo los campos simplécticos y los campos hamiltonianos coincidirán. Esto es fácil de ver. Si consideramos las aplicaciones $F \mapsto X^F$ y $X \mapsto [i_X\omega]$, nótese que existe una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$\mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{X^\bullet} \mathfrak{X}_\omega(M) \xrightarrow{[i_\bullet\omega]} H^1(M),$$

donde precisamente $\ker([i_\bullet\omega]) = \mathrm{im}(X^\bullet)$ es el conjunto de campos hamiltonianos. Si $H^1(M) = 0$ (en particular, si M es simplemente conexo), entonces todo campo simpléctico es hamiltoniano. Como consecuencia, todo campo simpléctico es localmente hamiltoniano. Es decir, si X es un campo simpléctico, en todo punto $x \in M$ podemos tomar un entorno U simplemente conexo en el que hay una función $F : U \to M$ tal que $-i_X\omega = \mathrm{d}F$ en U.

3.4. Corchete de Poisson

Podemos emplear los campos hamiltonianos para definir una nueva estructura en las variedades simplécticas, el *corchete de Poisson*. En esta sección veremos que toda variedad simpléctica es una *variedad de Poisson*.

Definición 3.4.1. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $F, G : M \to \mathbb{R}$. Se define el *corchete de Poisson de F y G* como la función

$$\{F, G\}(x) = (X^F G)(x),$$

para cada $x \in M$.

Proposición 3.4.2. *Sean $F, G : M \to \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $\{F, G\} = \mathrm{d}G(X^F) = \omega(X^F, X^G)$ *y*
2. $\left[X^F, X^G\right] = X^{\{F,G\}}$.

Demostración.

1. $\{F, G\} = X^F(G) = \mathrm{d}G(X^F) = -i_{X^G}\omega(X^F) = -\omega(X^G, X^F) = \omega(X^F, X^G)$.
2. Por las fórmulas de Cartan:

$$\begin{aligned} i_{[X^F, X^G]}\omega &= L_{X^F}(i_{X^G}\omega) - i_{X^G}(L_{X^F}\omega) \\ &= \mathrm{d}i_{X^F}i_{X^G}\omega + i_{X^F}\mathrm{d}i_{X^G}\omega - i_{X^G}\mathrm{d}i_{X^F}\omega - i_{X^G}i_{X^F}\mathrm{d}\omega \\ &= \mathrm{d}(\omega(X^G, X^F)) - i_{X^F}(\mathrm{d}(\mathrm{d}G)) + i_{X^G}(\mathrm{d}(\mathrm{d}F)) - i_{X^G}i_{X^F}(0) \\ &= \mathrm{d}\{G, F\} = -i_{X^{\{G,F\}}}\omega = i_{X^{\{F,G\}}}\omega. \end{aligned}$$

□

Localmente, si tomamos una carta de Darboux (q, p) en un punto $x \in M$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \{F, G\} = \mathrm{d}G(X^F) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial G}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right). \end{aligned}$$

Ésta es la forma del corchete de Poisson que se suele ver en mecánica clásica. Observamos también las relaciones

$$\begin{cases} \{F, q_i\} & = \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \{F, p_i\} & = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Éstas son precisamente las componentes del campo X^F. Si ahora consideramos las curvas integrales de F, podemos ver que las ecuaciones de Hamilton toman una forma más simple

$$\begin{cases} \dot{q}_i & = \{F, q_i\} \\ \dot{p}_i & = \{F, p_i\}. \end{cases}$$

De aquí también obtenemos lo que se conoce como las *relaciones de conmutación canónicas*:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Recíprocamente, si $(U, (q, p))$ es una carta en un punto $x \in M$ tal que, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ y $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, entonces es una carta de Darboux. En efecto, como todos los corchetes de Poisson entre las coordenadas son constantes, entonces $[X^{q_i}, X^{q_j}] = [X^{p_i}, X^{p_j}] = [X^{q_i}, X^{p_j}] = 0$, de modo que los campos $X_{p_1}, \ldots, X_{p_n}, X_{q_1}, \ldots, X_{q_n}$ son coordenados. Esto es, reduciendo el entorno si es preciso, existen unas coordenadas $(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ tales que $X^{p_i} = \frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_i}$ y $X^{q_i} = -\frac{\partial}{\partial \mathtt{y}_i}$. Ahora,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_j}\right) = \omega\left(X^{p_i}, X^{p_j}\right) = \{p_i, p_j\} = 0,$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial \mathtt{y}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathtt{y}_j}\right) = -\omega\left(X^{q_i}, X^{q_j}\right) = -\{q_i, q_j\} = 0$$

y

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathtt{y}_j}\right) = \omega\left(X^{p_i}, -X^{q_j}\right) = -\{p_i, q_j\} = -\delta_{ij}.$$

De modo que la carta $(U, (\mathtt{x}, \mathtt{y}))$ es de Darboux. Ahora,

$$\mathrm{d}q_i = -i_{X^{q_i}}\omega = i_{\frac{\partial}{\partial \mathtt{y}_i}}\omega = \mathrm{d}\mathtt{x}_i$$

y

$$\mathrm{d}p_i = -i_{X^{p_i}}\omega = -i_{\frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_i}}\omega = \mathrm{d}\mathtt{y}_i,$$

luego $\mathtt{x}_i = q_i$ e $\mathtt{y}_i = p_i$ (salvo tal vez una constante). Por tanto, la carta $(U, (q, p))$ es de Darboux.

Veamos ahora las propiedades del corchete de Poisson.

Proposición 3.4.3. *La aplicación* $\{,\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *que a cada par de funciones le asigna su corchete de Poisson cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es bilineal,*
2. *es antisimétrica,*
3. *cumple la identidad de Jacobi*

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0,$$

4. *y cumple la regla de Leibniz*

$$\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\},$$

es decir, $\{A, \bullet\}$ *es una derivación.*

En particular, las propiedades 1-3 nos dicen que $(\mathcal{C}^\infty(M), \{,\})$ es un *álgebra de Lie*. Al añadir la propiedad 4 decimos que es un *álgebra de Poisson*.

Demostración. La demostración de 1 y 2 es inmediata del hecho de que $\{F, G\} = \omega(X^F, X^G)$ y de la linealidad de $X^\bullet$.

Para probar 3 tenemos

$$\begin{aligned}\left[X^A, X^B\right](C) &= X^A \circ X^B(C) - X^B \circ X^A(C) = X^A(\{B, C\}) - X^B(\{A, C\}) \\ &= \{A, \{B, C\}\} - \{B, \{A, C\}\}.\end{aligned}$$

Mientras que

$$\left[X^A, X^B\right](C) = X^{\{A,B\}}(C) = \{\{A, B\}, C\}.$$

Tenemos entonces

$$\{\{A, B\}, C\} = \{A, \{B, C\}\} - \{B, \{A, C\}\} = -\{\{B, C\}, A\} - \{\{C, A\}, B\}.$$

Pasando el segundo término al otro lado obtenemos la identidad de Jacobi.

La regla de Leibniz (4) es inmediata porque $\{A, \bullet\}(x) = X^A_x$ es una derivación. □

En general, si en una variedad diferenciable M consideramos el conjunto de funciones $\mathcal{C}^\infty(M)$ y lo dotamos de la estructura de álgebra de Poisson mediante un corchete $\{,\}$, decimos que el par $(M, \{,\})$ es una *variedad de Poisson*. Podemos reducir el enunciado de la proposición anterior simplemente a afirmar que *toda variedad simpléctica es de Poisson*.

3.5. Mecánica en variedades simplécticas

Una vez estudiadas las estructuras básicas de las variedades simplécticas, veamos cómo éstas plantean el marco natural en el que estudiar la mecánica clásica, dando lo que se denomina el *formalismo hamiltoniano*.

En general, un sistema mecánico se compone de tres partes: un conjunto de *estados* o configuraciones, cuyos elementos contienen toda la información posible sobre el sistema en cierto instante, un conjunto de *observables*, cantidades medibles del sistema, que «extraen» la información sobre éste, y una *ley de evolución temporal*, que nos dice cómo se comportará el sistema a tiempos futuros. En el caso de la mecánica hamiltoniana, estas partes se pueden dar en el contexto de la geometría simpléctica, a saber, un *sistema mecánico hamiltoniano* se compone de:

Estados El conjunto de estados de un sistema hamiltoniano viene dado por una variedad simpléctica (M, ω), comúnmente llamada *espacio de fases*.

Observables Los observables del sistema son las funciones $\mathcal{C}^\infty(M)$, que además forman un álgebra de Poisson, como vimos en la sección anterior.

Evolución temporal La ley de evolución temporal está determinada por una función $H : M \to \mathbb{R}$ (característica de cada sistema), llamada *hamiltoniano del sistema*. Las trayectorias del sistema seguirán las curvas integrales del campo X^H, luego, localmente, son solución de las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases}\dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t), \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t).\end{cases}$$

O, en su forma más compacta

$$\begin{cases}\dot{q}_i(t) = \{H, q_i(t)\}, \\ \dot{p}_i(t) = \{H, p_i(t)\}.\end{cases}$$

El flujo φ^H generado por X^H se llama *flujo hamiltoniano* del sistema y contiene toda la información sobre su comportamiento. El hamiltoniano H también determina la evolución temporal de los observables, según la *ecuación de Liouville*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\varphi_t^H(x)) = \{H, F\}(x).$$

De manera más formal, podemos definir un *sistema hamiltoniano* simplemente como un par (M, H), donde $M = (M, \omega)$ es una variedad simpléctica y $H : M \to \mathbb{R}$ una función.

Teorema de recurrencia de Poincaré

Como todos los campos hamiltonianos son simplécticos, los flujos hamiltonianos preservan la forma ω y en particular el volumen de Liouville ω^n. Este resultado se conoce clásicamente como el *teorema de Liouville*. A la vista de esto, los sistemas hamiltonianos tendrán una de las características más importantes de los sistemas que preservan el volumen, el *teorema de recurrencia de Poincaré*[1]:

Proposición 3.5.1 (Teorema de recurrencia de Poincaré)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de volumen finito y sea $g : D \to D$ que preserva el volumen euclídeo. Entonces, para cualquier $U \subset D$ abierto, hay un punto $x \in D$ y un $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tal que $g^n(x) \in U$.*

Demostración. Consideramos la familia $\{g^n U | n \in \mathbb{N}\}$. Todos estos conjuntos tienen el mismo volumen (mayor que 0, pues U es abierto) y, si no se cortaran en ningún punto, D tendría volumen infinito. Por tanto, existen $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$ tal que

$$g^k U \cap g^l U \neq \varnothing,$$

luego $A = g^{k-l}U \cap U \neq \varnothing$. Entonces, dado $y \in A$, existen $x \in U$ y $n = k - l$ tal que $y = g^n(x) \in U$. □

Ejemplo 3.5.2. Sea D una circunferencia y g la rotación de ángulo α. Si $\alpha = 2\pi(m/n)$, entonces g^n es la identidad y el resultado es obvio. Pero, si α es un múltiplo irracional de 2π, entonces, por el teorema de recurrencia de Poincaré, para todo $x \in D$ y para todo $\delta > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(x) \in B_\delta(x)$. De aquí se sigue que, dado $x \in D$, el conjunto $\{g^k(x) | k \in \mathbb{N}\}$ es denso en D. Más adelante veremos una aplicación de este ejemplo a mecánica hamiltoniana.

Transformaciones canónicas

Para terminar la sección, vamos a ver cómo se comportan las ecuaciones de Hamilton mediante cambios de coordenadas:

Proposición 3.5.3. *Sean M, M' variedades simplécticas y $H : M' \to \mathbb{R}$. Si $f : M \to M'$ es una aplicación diferenciable, entonces*

$$f^* i_{X^H} \omega' = i_{X^{H \circ f}} \omega.$$

Demostración. Basta hacer los cálculos,

$$f^* i_{X^H} \omega' = f^* \mathrm{d}H = \mathrm{d}H \circ f_* = \mathrm{d}(H \circ f) = i_{X^{H \circ f}} \omega.$$

□

Vamos a buscar entonces cambios de coordenadas que mantengan las ecuaciones de Hamilton invariantes, es decir, que al escribir las ecuaciones en las nuevas coordenadas se obtengan precisamente las ecuaciones de Hamilton del mismo hamiltoniano, expresado en las nuevas coordenadas.

[1] En inglés *Poincaré recurrence theorem*. Nótese que aquí la palabra «recurrencia» no toma el significado habitual en matemáticas (por ejemplo en «construcción de sucesiones por recurrencia»), que se traduce del inglés *recursion*. El diccionario Oxford define *recursion* como *"the repeated application of a recursive procedure or definition"*. Por otro lado, define *recurrence* como *"the fact of ocurring again"*, que podría traducirse también como «repetición» o «reaparición».

Definición 3.5.4. Sean (M, H) un sistema hamiltoniano y $f : M \to M$ una aplicación diferenciable. Decimos que f es una *transformación canónica* si deja las ecuaciones de Hamilton invariantes, es decir, si $X^H = f_* X^{H\circ f}$.

Proposición 3.5.5. *Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $f : M \to M$ un difeomorfismo local. Son equivalentes:*

1. *f es un simplectomorfismo,*
2. *para todo $H : M \to \mathbb{R}$, f es una transformación canónica del sistema (M, H),*
3. *f deja invariante el corchete de Poisson, es decir, para cualesquiera $F, G \in \mathcal{C}^\infty(M)$,*

$$\{F, G\} \circ f = \{F \circ f, G \circ f\}.$$

Demostración.

1 $\implies$ 2. En primer lugar, por una comprobación inmediata se tiene que si f es un difeomorfismo local, para cualquier forma λ, y para cualquier campo X,

$$f^* i_X \lambda = i_{(f_*)^{-1}X} f^* \lambda.$$

Como f es un simplectomorfismo, $f^*\omega = \omega$, luego, si aplicamos la proposición 3.5.3,

$$i_{X^{H\circ f}}\omega = f^*(i_{X^H}\omega) = i_{(f_*)^{-1}X^H} f^*\omega = i_{(f_*)^{-1}X^H}\omega$$

por tanto $(f_*)^{-1}X^H = X^{H\circ f}$, de modo que $X^H = f_* X^{H\circ f}$, es decir, f es una transformación canónica de (M, H).

2 $\implies$ 1. Si $f_* X^{H\circ f} = X^H$ para todo $H : M \to \mathbb{R}$, entonces, de nuevo por la proposición 3.5.3 y por la fórmula anterior,

$$i_{X^H}\omega = i_{f_* X^{H\circ f}}\omega = (f^*)^{-1}(i_{X^{H\circ f}} f^*\omega) = (f^*)^{-1} f^*(i_{X^H} f^*\omega) = i_{X^H} f^*\omega.$$

Luego $f^*\omega = \omega$ y f es un simplectomorfismo.

3 $\iff$ 2. Tenemos,

$$\{F, G\} \circ f(x) = X^G_{f(x)}(F) = \left((f_*)^{-1} X^G\right)_x (F \circ f)$$

$$\{F \circ f, G \circ f\} = X^{G\circ f}(F \circ f).$$

Por tanto, $\{F, G\} \circ f = \{F \circ f, G \circ f\}$ para cualesquiera F, G si y sólo si $f_* X^{G\circ f} = X^G$, para todo G. □

3.6. Simetrías y leyes de conservación

En esta sección damos la noción de *cantidad conservada* o *integral primera* de un sistema hamiltoniano y estudiamos la relación que tiene con las simetrías del sistema, mediante el mecanismo descubierto por Emmy Noether, que constituye una de las ideas centrales a toda la Física.

Definición 3.6.1. Sea (M, H) un sistema hamiltoniano. Una función $F : M \to \mathbb{R}$ se dice que es una *integral primera* del sistema o una *cantidad conservada* si es constante a lo largo del flujo hamiltoniano. Esto es, si

$$F(\varphi_t^H(x)) = F(x)$$

para todo $t \geq 0$ y para todo $x \in M$.

El primer ejemplo de integral primera es el propio hamiltoniano.

Proposición 3.6.2 (Ley de conservación de la energía)**.** *H es una integral primera del sistema hamiltoniano (M, H).*

Demostración. Basta hallar la derivada de H en la dirección de X^H y ver que es 0. En efecto, dado $x \in M$,

$$\frac{d}{dt} H\left(\varphi_t^H(x)\right) = d_{\varphi_t^H(x)} H(X^H_{\varphi_t(x)}) = \omega(X^H_{\varphi_t(x)}, X^H_{\varphi_t(x)}) = 0,$$

ya que $d_x H = \omega(\bullet, X^H_x)$ y ω es antisimétrica. □

Veamos ahora como el corchete de Poisson, ecuación de Liouville mediante, juega un papel central en todo este asunto. En efecto, de la ecuación de Liouville obtenemos inmediatamente lo siguiente:

Proposición 3.6.3. *Una función $F : M \to \mathbb{R}$ es una integral primera de (M, H) si y sólo si $\{H, F\}$ (equivalentemente, $\{F, H\}$) es idénticamente nula.*

Además, si conocemos algunas integrales primeras, la identidad de Jacobi nos permite obtener otras nuevas:

Proposición 3.6.4 (Teorema de Poisson)**.** *Si F_1, F_2 son integrales primeras de (M, H), entonces $\{F_1, F_2\}$ es también una integral primera de (M, H).*

Demostración. Por la identidad de Jacobi,

$$\{\{F_1, F_2\}, H\} = \{F_1, \{F_2, H\}\} + \{F_2, \{H, F_1\}\} = 0,$$

ya que F_1, F_2 son integrales primeras. □

Veamos ahora el resultado principal de esta sección, que relaciona integrales primeras con simetrías.

Proposición 3.6.5 (Teorema de Noether)**.** *Sea (M, H) un sistema hamiltoniano y $F : M \to \mathbb{R}$. Si H es constante a lo largo del flujo de X^F, entonces F es una integral primera de (M, H).*

Demostración. Como H es constante a lo largo de X^F, es una integral primera de (M, F), luego $\{H, F\} = \{F, H\} = 0$ y F es una integral primera de (M, H). □

Otra forma de ver este mismo teorema es la siguiente:

Proposición 3.6.6 (Otra forma del teorema de Noether)**.** *Sea (M, ω) una variedad simpléctica conexa y sean X^F y X^G campos hamiltonianos en M. Los dos campos conmutan (y, por tanto, lo hacen los flujos que generan) si y sólo si $\{F, G\}$ es constante.*

Demostración. Si $\{F, G\} = a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left[X^F, X^G\right] = X^{\{F,G\}} = X^a = 0,$$

y recíprocamente

$$\mathrm{d}\{F, G\} = \omega(\bullet, X^{\{F,G\}}) = \omega(\bullet, \left[X^F, X^G\right]).$$

□

Para entender bien qué son las «simetrías» del sistema consideremos la siguiente definición:

Definición 3.6.7. Sea (M, H) un sistema hamiltoniano y G un grupo. Sea $\mathrm{Diff}(M)$ el grupo de difeomorfismos de M. Una *G-simetría* del sistema (M, H) es una acción

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathrm{Diff}(M) \\ g &\longmapsto \varphi_g, \end{aligned}$$

tal que $H \circ \varphi_g = H$.

Ahora, consideremos el caso en que G sea un grupo de Lie y φ una G-simetría diferenciable de un sistema hamiltoniano (M, H). Si g_t es un subgrupo uniparamétrico de G entonces g_t lleva asociado por la acción un flujo completo $\varphi_t = \varphi_{g_t}$. En el caso en que φ_t sea un flujo generado por un hamiltoniano $F : M \to \mathbb{R}$, entonces, por el teorema de Noether, F es una cantidad conservada del sistema (M, H). La mejor forma de ilustrar estas ideas es con ejemplos:

Ejemplo 3.6.8 (Conservación del momento lineal)**.** Consideremos un sistema hamiltoniano cuyo espacio de fases es el espacio simpléctico estándar $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_n)$. Decimos que el sistema es *invariante por traslaciones* si la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (y, (q, p)) &\longmapsto (q + y, p) \end{aligned}$$

del grupo $G = (\mathbb{R}^n, +)$ sobre $\mathbb{R}^{2n}$ es una G-simetría del sistema. Fijo ahora $y \in \mathbb{R}^n$, si consideramos el flujo

$$\varphi_t(q, p) = (q + yt, p),$$

el hamiltoniano del sistema es invariante bajo este flujo. Busquemos ahora un posible hamiltoniano para φ_t. Para ello, hallemos su generador infinitesimal

$$X_y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(q, p) = (y, 0) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Ahora, si F es el hamiltoniano asociado (suponiendo que exista) tenemos que

$$\mathrm{d}F = -i_{X_y}\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i) \left(\bullet, \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathrm{d}p_i.$$

De modo que la cantidad conservada es $F = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \langle y, p \rangle$. Como esto es cierto para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, en particular lo es para los vectores e_i de la base canónica, de modo que, para cada $i = 1, \ldots, n$, p_i es una cantidad conservada y, en general, el *momento lineal* $p = (p_1, \ldots, p_n)$ se conserva. De esta forma, hemos visto como la simetría bajo traslaciones lleva asociada la conservación del momento lineal.

Ejemplo 3.6.9 (Conservación del momento angular)**.** De nuevo, consideremos un sistema hamiltoniano cuyo espacio de fases es el espacio simpléctico estándar, en este caso 6 dimensional $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \Omega_3)$. Decimos que el sistema es *invariante por rotaciones* si la acción

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (R, (q, p)) &\longmapsto (R(q), R(p)) \end{aligned}$$

del grupo de rotaciones $G = \mathrm{SO}(3)$ con la operación de composición, es una G-simetría del sistema. Consideremos ahora el grupo uniparamétrico de rotaciones en torno al eje OZ, que matricialmente se representa como

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, a este grupo uniparamétrico le podemos asociar el flujo

$$\varphi_\phi(q,p) = (A(\phi)q, A(\phi)p),$$

cuyo generador infinitesimal será, por la regla de la cadena

$$X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\phi=0} \varphi_\phi(q,p) = (\hat{A}q, \hat{A}p),$$

con

$$\hat{A} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\phi=0} A(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que

$$X = -q_2\frac{\partial}{\partial q_1} + q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Luego,

$$-i_X\Omega_3 = -q_2\mathrm{d}p_1 + q_1\mathrm{d}p_2 + p_2\mathrm{d}q_1 - p_1\mathrm{d}q_2.$$

Definimos ahora el *momento angular* como la función $L : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ dada por el producto vectorial $L(q,p) = q \times p$, de modo que su componente k-ésima es $L_k(q,p) = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} q_i p_j$, donde ϵ_{ijk} es la paridad de (i,j,k) como permutación de $(1,2,3)$. Ahora,

$$\mathrm{d}L_3 = \mathrm{d}(q_1p_2 - q_2p_1) = -q_2\mathrm{d}p_1 + q_1\mathrm{d}p_2 + p_2\mathrm{d}q_1 - p_1\mathrm{d}q_2 = -i_X\Omega_3.$$

De modo que, aplicando el teorema de Noether, la simetría del sistema bajo las rotaciones en torno al eje OZ lleva asociada una conservación de la tercera componente del momento angular L_3. Podemos hacer un cálculo análogo para los casos de las rotaciones en torno a los ejes OX y OY, de forma que obtendríamos la conservación de las componentes L_1 y L_2, o, de otra manera, como sabemos ya que el sistema es invariante bajo rotaciones, podemos tomar directamente el eje OZ como la dirección del momento angular. Finalmente, llegaríamos a que la simetría bajo rotaciones lleva asociada la conservación del momento angular.

Capítulo 4

Sistemas integrables

4.1. Teorema de Arnold-Liouville

A la hora de estudiar sistemas dinámicos, una cuestión interesante a plantearse, con consecuencias prácticas y también de carácter fundamental, es si las ecuaciones del sistema podrán ser «integradas», es decir, si podrán ser resueltas mediante integrales («cuadraturas») de funciones conocidas. Decimos entonces que una ecuación diferencial es *integrable por cuadraturas* si es posible escribir su solución general en términos de sumas, productos, composiciones e integrales de funciones conocidas.

En 1885, Joseph Liouville encontró una condición necesaria para que las ecuaciones de Hamilton de ciertos sistemas hamiltonianos fueran (localmente) integrables por cuadraturas. Décadas más tarde, con la introducción del formalismo geométrico y topológico al estudio de los sistemas dinámicos se descubrirían muchas más cosas interesantes sobre los sistemas que cumplían la condición que Liouville propuso. Destaca especialmente en todo este estudio la teoría de los toros invariantes desarrollada por Vladimir Arnold en 1963. Nace así la teoría de los *sistemas integrables*, cuyos resultados más básicos constituyen el *teorema de Arnold-Liouville*.

Definición 4.1.1. Sea (M, H) un sistema hamiltoniano con $\dim(M) = 2n$. Decimos que (M, H) es *integrable (en el sentido de Liouville)* si existen $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que

1. son *funcionalmente independientes*, es decir, $\mathrm{d}F_{1,x} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}F_{n,x} \neq 0$ para casi todo punto[1] $x \in M$,
2. están *en involución*, esto es, $\{F_i, F_j\} = 0$ para cada $i, j = 1, \dots, n$, y
3. los campos X^{F_i} son completos para cada $i = 1, \dots, n$.

En particular, si $F_1 = H$, todas las funciones $F_1, \dots, F_n$ son integrales primeras del sistema.

Si escribimos $F : M \to \mathbb{R}^n$ con $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. Los puntos $x \in M$ en los que $\mathrm{rango}(\mathrm{d}F_x) = n$ se llaman *puntos regulares* del sistema. Los puntos que no son regulares se llaman *puntos críticos*. Si $x \in M$ es un punto crítico, $F(x)$ se llama *valor crítico*. Por tanto, llamamos *valores regulares* a los valores que no son críticos, es decir, a aquellos $a \in \mathbb{R}^n$ tales que si $a = F(x)$, entonces x es un punto regular. Si Σ es el conjunto de los puntos críticos, el conjunto de los valores críticos $F(\Sigma) \in \mathbb{R}^n$ se llama *diagrama de bifurcación* del sistema. Nótese que, por el teorema de Sard[2], el diagrama de bifurcación tiene medida nula.

Observación 4.1.2. De la definición y de la conservación de la energía directamente se deduce que todo sistema con un grado de libertad (y cuyo hamiltoniano sea regular en casi todo punto) es

[1] Como aquí en principio no estamos considerando ninguna medida, con *para casi todo punto* queremos decir en un conjunto *residual* o *comagro*, esto es, que su complementario sea *magro*. Un conjunto se dice *magro* o *de primera categoría de Baire* si es unión numerable de conjuntos diseminados, esto es, de conjuntos cuya adherencia tiene interior vacío. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es diseminado pero sí es magro en $\mathbb{R}$.

[2] El teorema de Sard afirma que si Σ denota el conjunto de puntos críticos de una función $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, con $k \geq \max\{n - m + 1, 1\}$ entonces su imagen $f(\Sigma)$ tiene medida nula.

integrable en el sentido de Liouville. Asimismo, un sistema con dos grados de libertad que tenga una cantidad conservada independiente de la energía también será integrable en el sentido de Liouville, ya que las cantidades conservadas dan 0 al evaluar el corchete de Poisson de cada una de ellas con el hamiltoniano.

Teorema 4.1.3 (Arnold-Liouville)**.** *Sea (M, H) un sistema integrable en el sentido de Liouville con $F_1(= H), \dots, F_n$ las integrales primeras en involución. Sea a un valor regular y el conjunto de nivel $F^{-1}(a)$. Sea M_a una componente conexa de $F^{-1}(a)$. Entonces:*

1. *M_a es una variedad diferenciable invariante bajo el flujo del sistema y $\omega|_{M_a} = 0$.*
2. *M_a es difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ para cierto $0 \leq k \leq n$. En particular, si M_a es compacta, M_a es difeomorfa al toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. En este caso, se dice que M_a es un* toro de Liouville.
3. *Podemos tomar unas coordenadas $w = (w_1, \dots, w_n)$ en M_a de manera que existen unas velocidades constantes $v = (v_1, \dots, v_n)$ tales que $\dot{w}(t) = v$.*

Demostración. En primer lugar, como F tiene rango máximo en cada punto de M_a, por el teorema de la función implícita M_a es una subvariedad regular de M de dimensión $2n - n = n$. Como M es una variedad simpléctica, para cada $i = 1, \dots, n$, podemos definir el campo $X_i = X^{F_i}$. Al ser las $\mathrm{d}F_i$ linealmente independientes los campos X_i son linealmente independientes. Además, por 3.4.2, como para cada $i, j = 1, \dots, n$ $\{F_i, F_j\} = 0$, tenemos que $[X_i, X_j] = 0$ y que $\omega(X_i, X_j) = 0$. Por esto mismo, la derivada de la función F_i en la dirección de X_j es 0, luego los campos X_j son tangentes a M_a.

De aquí sacamos varias conclusiones:

1. M_a es invariante con respecto a cada uno de los n flujos hamiltonianos generados por cada función F_i (luego, en particular lo será respecto del generado por F_1).
2. Como, para cada $x \in M_a$, los vectores $X_1|_x, \dots, X_n|_x$ forman una base de $T_x M_a$, ω se anula en $T_x M_a$.
3. M_a es una variedad diferenciable de dimensión n con n campos conmutativos dos a dos y linealmente independientes en todo punto de M_a.

Esto prueba la parte 1 del teorema. Para continuar, necesitamos probar un lema previo.

Lema 4.1.4. *Sea N una variedad diferenciable de dimensión n conexa tal que existen campos $X_1, \dots, X_n$ en N completos y linealmente independientes y tales que, para $i \neq j$, $[X_i, X_j] = 0$. Entonces N es difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.*

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, n$, sea g_i el flujo completo generado por X_i. Como para todo $i \neq j$, $[X_i, X_j] = 0$, entonces g_i conmuta con g_j, es decir, $g_{i,t} g_{j,s}(x) = g_{j,s} g_{i,t}(x)$, para todo $x \in N$.

Así, podemos definir una acción de $\mathbb{R}^n$ en N que a cada $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ le asigna $g_t : N \to N$, con $g_t = g_{1,t_1} \cdots g_{n,t_n}$. Por conmutar los flujos, $g_{t+s} = g_t g_s$. Ahora, fijo $x_0 \in N$, definimos

$$\begin{array}{rccc} g_\bullet(x_0) : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & N \\ t & \longmapsto & g_t(x_0). \end{array}$$

Veamos que esta $g_\bullet(x_0)$ es sobreyectiva. Como los campos son linealmente independientes, $d_t g_\bullet(y)$ es un isomorfismo lineal para todo $t \in \mathbb{R}^n$ y para todo $y \in N$ y, por el teorema de la función inversa, $g_\bullet(y)$ es un difeomorfismo local. Ahora, dado $x \in N$, tomamos una curva γ en N que una x y x_0. Para cada $y \in \gamma$, por ser $g_\bullet(y)$ un difeomorfismo local, existe un entorno U de y tal que $g_\bullet(y)$ da un difeomorfismo entre U y un entorno $W \in \mathbb{R}^n$ centrado en 0. Por ser γ compacta, podemos tomar entonces una sucesión finita de entornos $U_0, \dots, U_r$ que recubran γ tales que $x_0 \in U_0$ y $x \in U_r$ y tales que existan unos puntos $x_1, \dots, x_r$ pertenecientes a $U_1, \dots, U_r$, respectivamente, con $x_r = x$, de forma que $g_\bullet(x_i)$ dé un difeomorfismo entre un entorno $W_i \subset \mathbb{R}^n$ centrado en 0 y U_i. Tomemos ahora unos puntos $y_1, \dots, y_r$ pertenecientes a $U_0 \cap U_1, \dots, U_{r-1} \cap U_r$, respectivamente. Entonces, para cada $i = 1, \dots, r$, $y_i = g_{s_i}(x_{i-1}) = g_{t_i}(x_i)$, para ciertos $s_i, t_i \in \mathbb{R}^n$, luego $x_i = g_{s_i - t_i}(x_{i-1})$. Por tanto,

$$x = x_r = g_{s_r - t_r}(x_{r-1}) = g_{s_r - t_r + s_{r-1} - t_{r-1} + \cdots + s_1 - t_1}(x_0).$$

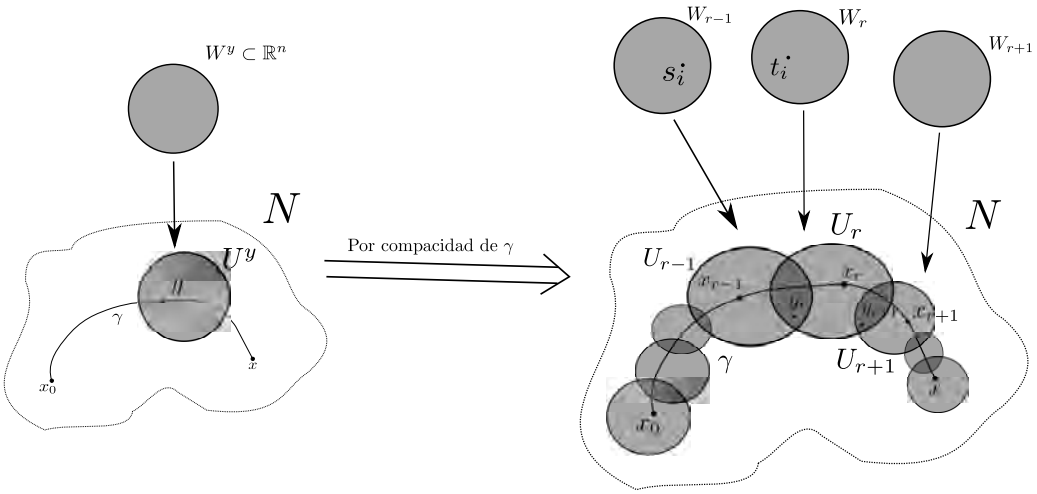


Figura 4.1: Idea de la demostración de que g es sobreyectiva.

Tenemos entonces que $g_\bullet(x_0) : \mathbb{R}^n \to N$ es un difeomorfismo local sobreyectivo, luego es una identificación diferenciable. Denotamos

$$\Gamma := \{t \in \mathbb{R}^n \mid g_t(x_0) = x_0\},$$

que es un subgrupo de $(\mathbb{R}^n, +)$ ya que, dados $t, s \in \Gamma$,

$$g_{s+t}(x_0) = g_s g_t(x_0) = g_s(x_0) = x_0$$

y

$$g_{-t}(x_0) = g_{-t} g_t(x_0) = x_0.$$

Además, Γ no depende de la elección de x_0, en efecto, si $x = g_s(x_0)$ y $t \in \Gamma$, entonces

$$g_t(x) = g_{t+s}(x_0) = g_s g_t(x_0) = g_s(x_0) = x.$$

Ahora, por la propiedad universal del cociente, si $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ denota la proyección natural, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g_\bullet(x_0)} & N \\ \downarrow \pi & \nearrow_{\tilde{g}_\bullet(x_0)} & \\ \mathbb{R}^n/\Gamma, & & \end{array}$$

da un difeomorfismo $\tilde{g}_\bullet(x_0) : \mathbb{R}^n/\Gamma \to N$. Más aún, como Γ no depende de la elección de x_0, si tomamos $x \in N$ distinto de x_0, $\tilde{g}_\bullet(x) : \mathbb{R}^n/\Gamma \to N$ también es un difeomorfismo. Ahora, si $x = g_s(x_0)$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\bullet(x)^{-1}(x_0) - \tilde{g}_\bullet(x_0)^{-1}(x_0) &= \tilde{g}_\bullet(x)^{-1}(g_{-s}(x)) - \tilde{g}_\bullet(x_0)^{-1}(g_0(x_0)) \\ &= \tilde{g}_\bullet(x)^{-1}(\tilde{g}_{\pi(-s)}(x)) - \tilde{g}_\bullet(x_0)^{-1}(\tilde{g}_{\pi(0)}(x_0)) \\ &= \pi(-s) - \pi(0) = \pi(-s) - 0 = \pi(-s). \end{aligned}$$

De modo que el difeomorfismo $\tilde{g}_\bullet(x_0) : \mathbb{R}^n/\Gamma \to N$ es independiente salvo traslaciones de la elección del punto x_0.

Para concluir la demostración del lema, queremos probar que $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es difeomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Si $\Gamma = \{0\}$, entonces $g_\bullet(x_0) : \mathbb{R}^n \to N$ es un difeomorfismo y habríamos terminado. Supongamos que $\Gamma \neq \{0\}$. Como $g_\bullet(x_0)$ es un difeomorfismo local, existe un entorno $V \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tal que $\Gamma \cap V = \{0\}$. Es más, si $t \in \Gamma$, $s \in V \backslash \{0\}$ y $x \in N$,

$$g_{t+s}(x) = g_s g_t(x) = g_s(x) \neq x.$$

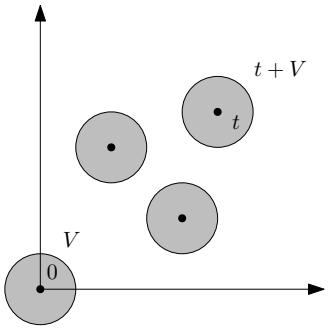


Figura 4.2: Idea de que Γ es discreto.

Luego Γ es un conjunto discreto. Nótese también que Γ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Antes de continuar, es necesario probar el siguiente lema:

Lema 4.1.5. *Todo subgrupo no trivial, cerrado y discreto* Γ *de* $\mathbb{R}^n$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}^k$ *para algún* $k \in \{1, \dots, n\}$. *Es decir, existen* $e_1, \dots, e_k \in \Gamma$ *linealmente independientes tales que*

$$\Gamma = \{n_1 e_1 + \cdots + n_k e_k \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k\}.$$

Demostración. Sea $e_0 \in \Gamma$, $e_0 \neq 0$. Como Γ es discreto, $\Gamma \cap D(0, \|e_0\|)$ (donde $D(a, r)$ denota el disco cerrado de centro a y radio r) es finito. De estos puntos consideramos aquellos que están en $L(e_0)$ [3] y de estos escogemos el más cercano, que llamaremos e_1.

Si existieran algún $e \in \Gamma$ y algún $m \in \mathbb{Z}$ tal que $e \in (me_1, (m+1)e_1)$, entonces $e - me_1 \in \Gamma \cap L(e_0)$ estaría más cerca de 0 que e_1. Por tanto,

$$\Gamma \cap L(e_0) = e_1\mathbb{Z}.$$

Si no hay puntos de Γ fuera de $L(e_1)$ hemos terminado, Γ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. En caso contrario, dado $e \in \Gamma \backslash L(e_1)$, proyectamos ortogonalmente e sobre $L(e_1)$. Esta proyección cae exactamente sobre un intervalo $\Delta = [me_1, (m+1)e_1)$ para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Sea C el cilindro cerrado de eje Δ y de radio igual a la distancia entre Δ y e. $C \cap \Gamma$ es finito, y de sus puntos, sea e_2 el más cercano a Δ que no esté en Δ. Entonces, para cualquier otro $f \in \Gamma$, la distancia entre f y $L(e_1)$ es mayor que la distancia entre e_2 y $L(e_1)$.

En efecto, si existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que la proyección ortogonal de f cae sobre $[le_1, (l+1)e_1)$, entonces $f' = f - le_1 + me_1 \in C$ y la distancia entre f' y $L(e_1)$ es menor que la distancia entre e_2 y $L(e_1)$, lo que nos lleva a una contradicción.

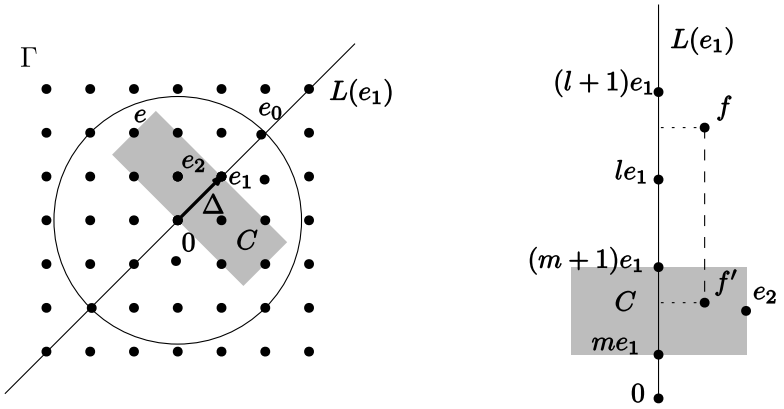


Figura 4.3: Idea de la demostración del lema.

[3] Aquí $L(x)$ denota la envoltura lineal de x.

Ahora, $\{n_1e_1 + n_2e_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ forma una red discreta en $L(e_1, e_2)$. Además, si existiera un $e \in L(e_1, e_2) \cap \Gamma$ que no perteneciese a la red, podríamos tomar $m_1 = [\langle e, e_1\rangle]$, $m_2 = [\langle e, e_2\rangle]$ (donde $[\bullet]$ denota la parte entera). Entonces, $e - m_1e_1 - m_2e_2$ estaría más cerca de $L(e_1)$ que e_2. Por tanto, esta red es exactamente $L(e_1, e_2) \cap \Gamma$.

Procedemos ahora por inducción, supongamos que existen $e_1, \dots, e_k$ linealmente independientes tales que $\{n_1e_1 + \cdots + n_ke_k \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k\} = L(e_1, \dots, e_k) \cap \Gamma$ y que existe $e \in \Gamma$ tal que $e \notin L(e_1, \dots, e_k)$. Análogamente, la proyección ortogonal de e sobre $L(e_1, \dots, e_k)$ cae sobre un hipercubo $\Delta = [m_1e_1, (m_1 + 1)e_1) \times \cdots \times [m_ke_k, (m_k + 1)e_k)$. Si C denota el conjunto de los puntos cuyas proyecciones ortogonales caen en Δ y son más o igualmente cercanos a Δ que e, entonces $C \cap \Gamma$ es finito. Sea e_{k+1} el más cercano a Δ de estos puntos, que no esté en Δ. Para cualquier otro $f \in \Gamma$, la distancia entre f y $L(e_1, \dots, e_k)$ es mayor que entre e_2 y $L(e_1, \dots, e_k)$, por un razonamiento completamente análogo al caso bidimensional.

Por tanto, $\{n_1e_1 + \cdots + n_{k+1}e_{k+1} \mid (n_1, \dots, n_{k+1}) \in \mathbb{Z}^{k+1}\}$ forma una red discreta en $L(e_1, \dots, e_{k+1})$ y, de forma análoga al caso anterior, esta red agota los puntos de $\Gamma \cap L(e_1, \dots, e_{k+1})$. Finalmente, sea k el mínimo número natural tal que no existe $e \in \Gamma \backslash L(e_1, \dots, e_k)$. Evidentemente, sabemos que este k existe porque $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces Γ es isomorfo a $\mathbb{Z}^k$. □

Terminamos ahora la demostración del Lema 4.1.4.

Sea k el número de generadores de Γ y sea la proyección natural

$$\begin{aligned} \varpi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x, y) &\longmapsto (\exp(x), y), \end{aligned}$$

donde la función

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{T}^k \cong \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \\ (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_k}), \end{aligned}$$

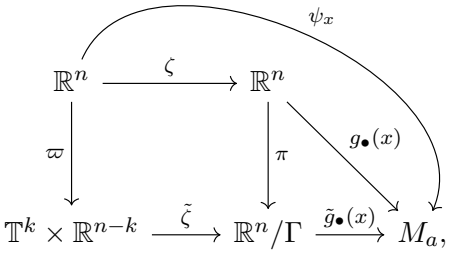
denota el recubridor universal de $\mathbb{T}^k$. El núcleo de este homomorfismo de grupos ϖ es precisamente el subgrupo $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{R}^n$ generado por los k primeros vectores de la base canónica.. Sean $e_1, \dots, e_k$ los generadores de Γ y sea $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal que mande el i-ésimo vector de la base canónica a e_i. Entonces, la aplicación $\tilde{\zeta}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo es un difeomorfismo,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{R}^n & & \\ \downarrow{\scriptstyle \varpi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & \searrow{\scriptstyle g_\bullet(x_0)} & \\ \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & \mathbb{R}^n/\Gamma & \xrightarrow{\tilde{g}_\bullet(x_0)} & N, \end{array}$$

y compuesto con $\tilde{g}_\bullet(x_0)$ da el difeomorfismo buscado. □

Volvemos ahora a la demostración del teorema de Arnold-Liouville. Aplicamos directamente el lema 4.1.4 con $N = M_a$ (considerando los campos $X_i = X^{F_i}$ ya definidos, escogiendo un punto $x \in M_a$ y construyendo $g_\bullet(x)$ como en la demostración del lema) y tenemos que M_a es difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ para cierto $k = 0, \dots, n$. En particular, si M_a es compacta, entonces $k = n$ y $M_a \cong \mathbb{T}^n$. Hemos probado entonces la parte 2 del teorema. Además, el difeomorfismo $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to M_a$ está bien descrito por el diagrama anterior.

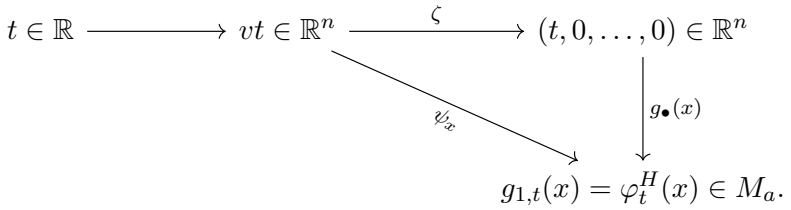
Podemos considerar entonces la parametrización $\psi_x : \mathbb{R}^n \to M_a$ dada por el diagrama



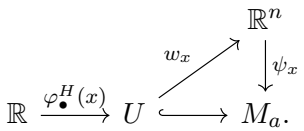
Sea el vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\zeta(v) = (1, 0, \ldots, 0)$. Tomemos ahora un flujo rectilíneo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto vt, \end{aligned}$$

y veamos su comportamiento en el diagrama



Tenemos entonces que $\varphi_t^H(x) = \psi(vt)$, de modo que podemos tomar una carta (U, w_x) con $U \subset M_a$ abierto relativo, $x \in U$, tal que el siguiente diagrama conmute



Por tanto, $w(t) = w(\varphi_t^H(x)) = vt$, luego $\dot{w}(t) = v$. Nótese que al ser arbitraria la elección del punto x en el toro de Liouville M_a, la elección de las coordenadas w en el toro está determinada salvo por una constante. Es decir, podemos elegir el valor $w_0 = w(0)$. Como el flujo hamiltoniano deja M_a invariante, queda descrito por las ecuaciones

$$\begin{cases} F(t) = a \\ w(t) = w_0 + vt. \end{cases}$$

Esto prueba la parte 3 y por tanto concluye la demostración del teorema. □

Observación 4.1.6. Para finalizar la sección vamos a hacer un pequeño comentario sobre la completitud de los campos. Recordemos de la definición 4.1.1 que una de las cosas que exigíamos a un sistema para que fuera integrable en el sentido de Liouville es que los campos X^{F_i} fueran completos. Sin embargo, en la demostración del teorema de Arnold-Liouville hemos usado algo ligeramente más débil: sólo necesitamos que los campos sean completos en el conjunto de nivel M_a. En particular, si nos encontramos ante un toro de Liouville, es decir, si M_a es compacta, entonces todos los campos son completos en M_a.

Una garantía segura de la completitud de los campos es que M fuera compacta. Sin embargo en la mayoría de los casos con sentido físico esto no se cumple, pues M suele ser un fibrado tangente, que claramente no es compacto. Por otra parte, el resultado expuesto en [10] asegura que un campo hamiltoniano X^G es completo en toda la variedad si G es propia, esto es, si la imagen inversa de un compacto por G es un conjunto compacto y si G está acotada inferiormente. De nuevo, esto no aporta gran cosa, pues si las F_i son propias, entonces $F^{-1}(a)$ es compacto y otra vez estaríamos exigiendo que todos los conjuntos de nivel fueran toros de Liouville, aunque esta vez al menos no requerimos que M sea compacta.

4.2. Variables de acción-ángulo

Vamos a ver el resultado que, junto con el teorema de Arnold-Liouville (y de hecho, en gran parte de la literatura incluido dentro de éste) constituye el núcleo de la teoría de sistemas integrables. En el caso en que M_a sea compacta y, por tanto, un toro de Liouville, vamos a ver que es posible encontrar un entorno de este toro y unas coordenadas (variables de acción-ángulo) en este entorno que nos permitan integrar el sistema por cuadraturas.

Las variables de acción-ángulo fueron introducidas originalmente por Delaunay en 1860 para estudiar el movimiento de la Luna y más tarde, a principios del siglo XX, usadas por los físicos para estudiar el átomo de Bohr. Sería Schwarzschild quien acuñara esa terminología en 1916. La demostración del teorema de las variables de acción-ángulo se atribuye a Mineur en 1936.

Teorema 4.2.1 (Variables de acción-ángulo)**.** *Seguimos en las hipótesis del teorema 4.1.3. En el caso en que M_a sea compacta, existe un entorno $U \subset M$ de M_a difeomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ (un* entorno tubular[4]*) y un sistema de coordenadas de Darboux (ϕ, F) (llamadas* variables de acción-ángulo*) en U tales que, en cada toro de U, las ϕ_i son coordenadas angulares y las F_i son constantes.*

Observación 4.2.2. La consecuencia inmediata de este teorema es que en los entornos tubulares las ecuaciones de Hamilton quedan resueltas por cuadraturas. En efecto, al ser (ϕ, F) coordenadas de Darboux, podemos escribir las ecuaciones de Hamilton en la forma

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial F_i}, \\ \dot{F}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i}. \end{cases}$$

Ahora, como las F_i son constantes en los toros, se tiene $\dot{F}_i = 0$, de modo que $\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0$ luego el hamiltoniano no depende de las coordenadas ϕ. Por tanto, las frecuencias $\nu_i = \dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial F_i}$ sólo dependen de las coordenadas F, luego son constantes en cada toro. Así, las ecuaciones quedan integradas en la forma

$$\begin{cases} F_i(t) = F_i(0), \\ \phi_i(t) = \phi_i(0) + \nu_i(F(0))t. \end{cases}$$

Demostración.

Construcción del entorno tubular

En primer lugar, hay que obtener el entorno tubular U. Como M_a es un conjunto compacto de puntos regulares existe un entorno W de M_a con todos sus puntos regulares de manera que $M_a \subset W \subset \overline{W}$ y tal que $F|_W$ sea abierta. Por tanto, $V = F(W) \subset \mathbb{R}^n$ es un entorno abierto de a. Ahora, para cada $b \in V$, existe al menos una componente conexa M_b de $F^{-1}(b)$ que interseca a W en algún punto. Si M_b está contenida en W entonces es compacta y por tanto es un toro de Liouville. En caso contrario, existe un punto $x_b \in M_b \cap (\overline{W} \setminus W)$.

Supongamos entonces que existe una sucesión (b_k) de valores en V tal que $b_k \to a$ con $M_{b_k} \cap (\overline{W} \setminus W) \neq \varnothing$. Entonces existe una sucesión convergente (x_{b_k}) con cada $x_{b_k} \in M_{b_k} \cap \overline{W} \setminus W$. Ahora, si llamamos $x_0 = \lim_k x_{b_k}$ entonces $x_0 \in \overline{W} \setminus W$ y por continuidad $F(x_0) = \lim_k F(x_{b_k}) = \lim_k b_k = a$, de modo que $x_0 \in M_a \subset W$ y llegamos a una contradicción. Por tanto existe una bola $B \subset \mathbb{R}^n$ centrada en a tal que el toro de Liouville $M_b \subset W \subset \overline{W}$ para cada $b \in B$.

Podemos considerar entonces el abierto

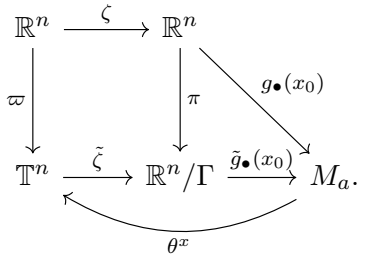
$$U = F^{-1}(B) = \bigcup_{b \in B} M_b,$$

que es una unión de toros de Liouville. Ahora, análogamente a la demostración del teorema de Arnold-Liouville fijamos $x \in M_a$ y consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} g_\bullet(x) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_a \\ (t_1, \ldots, t_n) &\longmapsto \varphi_{t_1}^{F_1} \cdots \varphi_{t_n}^{F_n}(x), \end{aligned}$$

[4]Nótese que aquí estamos suponiendo que M_a no está en el borde de M, en cuyo caso procederíamos análogamente para obtener un entorno difeomorfo a $\mathbb{H}^n \times \mathbb{T}^n$.

que está bien definida por conmutar los flujos, y el difeomorfismo $\theta^x : M_a \to \mathbb{T}^n$ inducido por el diagrama



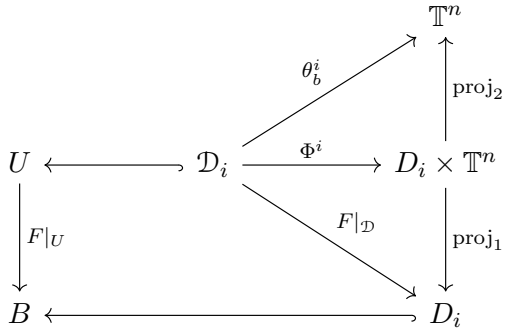
Concretamente, $\theta^x = \bar{\zeta}^{-1} \circ (\tilde{g}_\bullet(x))^{-1}$. Igual que antes, la construcción de este difeomorfismo depende de la elección del punto $x \in M_a$. Concretamente, como $\bar{\zeta}$ no depende de la elección del punto, el cambio del difeomorfismo al cambiar de un punto $x_0 \in M_a$ a otro $x = g_t(x_0)$ será un parámetro que solo depende de los dos puntos y del toro M_a,

$$s_{x,x_0}(a) = \theta^x - \theta^{x_0} = \bar{\zeta} \circ (\tilde{g}_\bullet(x)^{-1} - \tilde{g}_\bullet(x_0)^{-1}) = \bar{\zeta} \circ (\pi(-t)).$$

Como $F|_U$ tiene derivada sobreyectiva en todos los puntos, es localmente una proyección lineal, es decir, cada punto $x \in U$ tiene un entorno abierto $\mathcal{D}$ difeomorfo a un producto $D \times \mathbb{T}^n$ de manera que $F|_{\mathcal{D}}$ es, salvo ese difeomorfismo, la proyección sobre la primera componente $D \times \mathbb{T}^n \to D \subset B$. Esto significa que podemos elegir $x_b \in M_b$ diferenciablemente en función de $b \in D$. Tenemos así un recubrimiento abierto $U = \bigcup_i \mathcal{D}^i$ y para cada i tenemos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi^i : \mathcal{D}^i &\longrightarrow D^i \times \mathbb{T}^n \\ x &\longmapsto (F(x), \theta^i_{F(x)}(x)), \end{aligned}$$

donde la i indica que el difeomorfismo $\theta^i_b = \theta^{x_i}_b$ se define usando $x^i_b \in M_b$ para $b \in D^i$. Esto último garantiza que θ^i_b depende diferenciablemente de b y en consecuencia Φ^i es diferenciable.



Vamos a construir globalmente un difeomorfismo $\Phi : U \to B \times \mathbb{T}^n$. Tomamos ahora una partición diferenciable de la unidad $\alpha_i : B \to [0,1]$ subordinada a los D^i. Definimos

$$\Phi(x) = \left(F(x), \sum_i \alpha_i(F(x)) \theta^i_{F(x)}(x) \right).$$

Esta suma es localmente finita, y en un entorno de x se reduce a los índices j tales que $F(x) \in D_j$; trabajamos en la intersección de esos D_j. Antes hemos visto que si $x \in D_i \cap D_j$ entonces

$$\theta^j_{F(x)} - \theta^i_{F(x)} = s_{ij}(F(x))$$

es un parámetro que sólo depende de $F(x)$. Resulta que

$$\sum_j \alpha_j(F(x)) \theta^j_{F(x)}(x) = \sum_j \alpha_j(F(x)) \theta^i_{F(x)}(x) + \sum_j \alpha_j(F(x)) s_{ij}(F(x)) = \theta^i_{F(x)}(x) + c_i(F(x)).$$

Estas son coordenadas angulares porque la última constante c_i sólo depende de $F(x)$ y además la aplicación Φ es diferenciable. En realidad, si $\theta^i_{F(x)}$ estaba definido por una elección de cierto punto $x^i_{F(x)} \in M_{F(x)}$, ahora lo hemos cambiado por traslación, para obtener el difeomorfismo global. Hemos probado entonces que $\Phi : U \to B \times \mathbb{T}^n$ es un difeomorfismo.

Construcción de las variables angulares

Procedamos ahora a hallar las variables de acción-ángulo. Sea $\pi : U \cong B \times \mathbb{T}^n \to B$ la proyección canónica. Entonces $\pi^{-1}(x)$ es un toro invariante para cada $x \in B$. En cada uno de estos toros, consideramos $X_i = X^{F_i}$ y (F, θ) las coordenadas antes obtenidas. Por la construcción de las coordenadas θ, la relación entre los campos $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ y los X_k vendrá mediada por ζ, que es un isomorfismo lineal constante en cada toro de Liouville. Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k,$$

donde las a_{ik} son funciones constantes en cada toro de Liouville.

Como ω se anula en el toro, no tiene términos en $\mathrm{d}\theta_i \wedge \mathrm{d}\theta_j$ y los términos en $\mathrm{d}F_i \wedge \mathrm{d}\theta_j$ serán

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial F_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\omega\left(\frac{\partial}{\partial F_i}, X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\mathrm{d}F_k\left(\frac{\partial}{\partial F_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\delta_{ik} = a_{ji}.$$

Por tanto, ω es de la forma

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\mathrm{d}F_i \wedge \mathrm{d}\theta_j + \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\mathrm{d}F_k \wedge \mathrm{d}F_l,$$

con b_{kl} unas ciertas funciones. Además, como ω es cerrada, al diferenciar, cada término correspondiente a $\mathrm{d}\theta_k \wedge \mathrm{d}F_i \wedge \mathrm{d}F_j$ debe anularse. Este término es exactamente

$$\frac{\partial a_{kj}}{\partial F_i} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial F_j} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k}.$$

El término $\frac{\partial a_{kj}}{\partial F_i} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial F_j}$ no depende de las variables angulares, luego las $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k}$ son constantes al variar los ángulos θ_k. Como las variables θ_k son angulares, las b_{ij} deben ser periódicas, pero como las $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k}$ son constantes en las variables angulares, las b_{ij} son constantes.

Si ahora definimos $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathrm{d}F_i$ y $\beta = \sum_{i,j=1}^{n} b_{kl}\mathrm{d}F_k \wedge \mathrm{d}F_l$, podemos escribir

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \wedge \mathrm{d}\theta_j + \beta.$$

Como las a_{ij} y las b_{ij} son constantes en cada toro invariante podemos ver las α_i y β como formas en B, es decir, existe una 1-formas $\tilde{\alpha}_i$ y una 2-forma $\tilde{\beta}$ en B tales que $\alpha_i = \pi^*\tilde{\alpha}_i$ y $\beta = \pi^*\tilde{\beta}$. De aquí tenemos

$$0 = \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}(\alpha_j \wedge \mathrm{d}\theta_j) + \mathrm{d}\beta = \sum_{j=1}^{n} \pi^*\mathrm{d}\tilde{\alpha_j} \wedge \mathrm{d}\theta_j + \pi^*\mathrm{d}\tilde{\beta}$$

de donde concluimos que $\mathrm{d}\tilde{\alpha}_i = 0$ y $\mathrm{d}\tilde{\beta} = 0$. Aplicando el lema de Poincaré, existen unas funciones I_i y una 1-forma γ en B tales que $\tilde{\alpha}_i = \mathrm{d}I_i$ y $\tilde{\beta} = \mathrm{d}\gamma$.

Definimos ahora las *variables de acción* $J_i = I_i \circ \pi = \pi^* I_i$, que cumplen que $\mathrm{d}J_i = \alpha_i$. Tenemos entonces

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}J_i \wedge \mathrm{d}\theta_i + \pi^*\mathrm{d}\gamma.$$

En el sistema de coordenadas (F, θ), la matriz asociada a ω es de la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial J_i}{\partial F_j} & 0 \\ b_{ij} & -\frac{\partial J_i}{\partial F_j} \end{pmatrix}.$$

Como ω es regular, el determinante de esta matriz es distinto de cero, luego $\det\left(\frac{\partial J_i}{\partial F_j}\right) \neq 0$. Por tanto, el cambio $(F, \theta) \mapsto (J, \theta)$ viene dado por un difeomorfismo y (J, θ) es un sistema de coordenadas.

Ahora, si escribimos $\gamma = \sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}I_i$, para algunas funciones $f_i : B \to \mathbb{R}$, entonces podemos tomar unas nuevas coordenadas

$$\phi_i = \theta_i + f_i \circ \pi.$$

Nótese que para cada $b \in B$ y para cada $x \in M_b$ el valor de $f_i \circ \pi(x) = f_i(b)$ sólo depende de b, de modo que las nuevas variables difieren de las anteriores en un valor constante en cada toro de Liouville luego siguen siendo coordenadas angulares en cada M_b. En estas nuevas coordenadas

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{d}J_i \wedge \mathrm{d}\phi_i = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}J_i \wedge \mathrm{d}\theta_i + \sum_{i=1}^n \mathrm{d}(I_i \circ \pi) \wedge \mathrm{d}(f_i \circ \pi) = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}J_i \wedge \mathrm{d}\theta_i + \pi^* \mathrm{d}\gamma = \omega.$$

Por tanto, hemos encontrado unas coordenadas de Darboux (ϕ, F), con las F_i constantes en cada toro invariante y con las ϕ_i coordenadas angulares en estos toros. □

Observación 4.2.3. Nótese que, en particular, hemos probado que en el entorno tubular U podemos escribir $\omega = \mathrm{d}\lambda$, con $\lambda = \sum_{i=1}^n J_i \mathrm{d}\phi_i$. Si tomamos las curvas γ_i parametrizadas por las coordenadas ϕ_i (dando una sola vuelta), podemos hallar

$$\int_{\gamma_i} \lambda = J_i \int_{\gamma_i} \mathrm{d}\phi_i = 2\pi J_i,$$

de modo que

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \lambda.$$

Esta será la forma general de las variables de acción en los ejemplos que estudiaremos a continuación. También esto sugiere una prueba alternativa para el teorema de las variables de acción-ángulo; de hecho es así como se construyen en los textos clásicos, por ejemplo en [2].

4.3. Osciladores armónicos

Para aclarar algunas de las ideas detrás de la teoría de sistemas integrables, vamos a considerar uno de los ejemplos más sencillos pero más ilustrativos, el oscilador armónico.

Oscilador armónico con un grado de libertad

Empezamos considerando el oscilador armónico con un grado de libertad. El espacio de fases del sistema será el espacio simpléctico estándar 2-dimensional, $(\mathbb{R}^2, \Omega_1)$ con las coordenadas de Darboux canónicas (q, p). El hamiltoniano vendrá dado por la función

$$H(q, p) = \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}\nu^2 q^2,$$

con ν una constante que representa la frecuencia de oscilación. Las ecuaciones de Hamilton son entonces

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t) = p(t) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(t) = -\nu^2 q(t). \end{cases}$$

Estas ecuaciones se pueden integrar fácilmente, si tomamos como condición inicial $(q(0), p(0)) = (a, 0)$, tenemos

$$\begin{cases} q(t) = a\cos\nu t \\ p(t) = -\nu a \sin\nu t. \end{cases}$$

Ahora, recordemos que el hamiltoniano del sistema es una cantidad conservada, por tanto podemos considerar las variedades M_E de energía constante, que, por el teorema de Arnold-Liouville serán topológicamente circunferencias invariantes bajo el flujo del sistema, ya que el único punto crítico del hamiltoniano es su mínimo $(q, p) = (0, 0)$. En efecto, las curvas de energía constante vienen dadas por la ecuación

$$E = \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}\nu^2 q^2,$$

que define una elipse de semiejes $\sqrt{2E}$ y $\frac{\sqrt{2E}}{\nu}$. El flujo en las curvas de energía constante toma la forma

$$\begin{cases} q(t) = \frac{\sqrt{2E}}{\nu}\cos\nu t \\ p(t) = -\sqrt{2E}\sin\nu t. \end{cases}$$

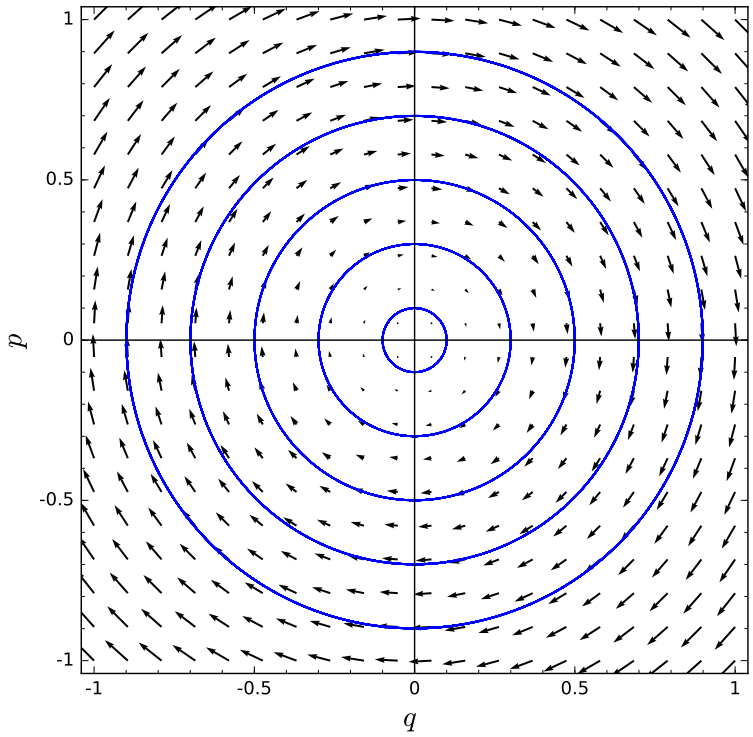


Figura 4.4: Espacio de fases del oscilador armónico junto al campo y a las curvas de energía constante. En este caso $k = m = 1$, de modo que las curvas de energía constante son circunferencias de radio $\sqrt{2E}$.

Ahora, si tomamos unas coordenadas «polares» (E, ϕ), donde ϕ es la coordenada angular en cada una de estas elipses, la dinámica del sistema queda mucho más simplificada:

$$\begin{cases} E(t) = E(0) \\ \phi(t) = \phi(0) - \nu t. \end{cases}$$

Sin embargo, ¿será canónica la transformación $(q, p) \to (E, \phi)$? Para ello, veamos cómo se comporta la forma $\Omega_1 = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ con el cambio

$$\begin{cases} q(E, \phi) = \frac{\sqrt{2E}}{\nu}\cos\phi \\ p(E, \phi) = \sqrt{2E}\sin\phi. \end{cases}$$

Tenemos entonces

$$\begin{cases} \mathrm{d}q = \frac{1}{\nu\sqrt{2E}}\cos\phi \mathrm{d}E - \frac{\sqrt{2E}}{\nu}\sin\phi \mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}p = \sqrt{\frac{1}{2E}}\sin\phi \mathrm{d}E + \sqrt{2E}\cos\phi \mathrm{d}\phi, \end{cases}$$

y

$$\Omega_1 = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q = -\tfrac{1}{\nu}\mathrm{d}E \wedge \mathrm{d}\phi.$$

Por tanto, si definimos la *variable de acción*, $J = -\frac{E}{\nu}$, entonces $\Omega_1 = \mathrm{d}J \wedge \mathrm{d}\phi$ y (ϕ, J) son unas coordenadas de Darboux.

Para tratar de dar sentido físico a esta variable J, consideremos el área A_E de la región S_E encerrada por la curva de energía constante M_E. Por la fórmula del área de la elipse

$$A_E = \pi\sqrt{2E}\sqrt{\frac{2E}{\nu^2}} = 2\pi\frac{E}{\nu} = -2\pi J.$$

Observemos ahora que como Ω_1 es la forma de área en $\mathbb{R}^2$,

$$A_E = \int_{S_E}\Omega_1 = \int_{S_E}\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q = \int_{M_E} p\mathrm{d}q,$$

donde hemos usado el teorema de Stokes y el hecho de que $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q = \mathrm{d}(p\mathrm{d}q)$. De modo que podemos redefinir la variable de acción en la forma

$$J = -\frac{1}{2\pi}\int_{M_E} p\mathrm{d}q.$$

Este será el aspecto que tengan las variables de acción-ángulo en general para sistemas con un grado de libertad. Regresando ahora a las coordenadas originales, tenemos

$$\begin{cases} q(\phi, J) = \sqrt{-\frac{2J}{\nu}}\cos\phi \\ p(\phi, J) = \sqrt{-2\nu J}\sin\phi. \end{cases}$$

Oscilador armónico con n grados de libertad

Para estudiar un caso de dimensión superior, podemos considerar el sistema formado por n osciladores armónicos o, equivalentemente, un oscilador armónico con n grados de libertad. El hamiltoniano del sistema será

$$H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n) = H_1(q_1,p_1)+\cdots+H_n(q_n,p_n) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+\nu_i^2q_i^2).$$

Este sistema es integrable en el sentido de Liouville. Basta tomar $F = (H_1, H_2, \dots, H_n)$, ya que

$$\{H_i, H_j\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_j}{\partial q_k} - \frac{\partial H_j}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\right) = 0$$

y las componentes de F son independientes en casi todo punto de $\mathbb{R}^{2n}$.

Ahora, dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $M_a = F^{-1}(a)$ vendrá dado por

$$\begin{cases} p_1^2+\nu_1^2q_1^2 = 2a_1 \\ p_2^2+\nu_2^2q_2^2 = 2a_2 \\ \qquad\vdots \\ p_n^2+\nu_n^2q_n^2 = 2a_n, \end{cases}$$

que son las ecuaciones de un toro n-dimensional. Cada una de las ecuaciones $p_i^2 + q_i^2 = 2a_i$ da, en el plano (q_i, p_i), una elipse $C_{a,i}$ de semiejes $\sqrt{2a_i}$ y $\frac{\sqrt{2a_i}}{\nu}$, de modo que $M_a = C_{a,1} \times \cdots \times C_{a,n}$. Nótese que en este caso los valores críticos son precisamente aquellos a con varias componentes iguales, de forma que los puntos críticos formarán toros de dimensión menor.

Consideremos $\gamma_{a,i}$ lazos en cada elipse $C_{a,i}$. Definimos las variables de acción

$$J_i(a) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{a,i}} \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q_k = -\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{a,i}} p_i \mathrm{d}q_i = -\frac{a_i}{\nu_i}.$$

Consideremos ahora las variables angulares ϕ_i a lo largo de cada $C_{i,a}$. Podemos tomar entonces las nuevas coordenadas (ϕ, J), con

$$J_i(q,p) = J_i(F(q,p)) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{F(q,p),i}} p_i \mathrm{d}q_i = -\frac{H_i(q,p)}{\nu_i},$$

y $\phi(q,p)$ las variables angulares en el toro $M_{F(q,p)}$. Si la carta (ϕ, J) es de Darboux, las ecuaciones de Hamilton pueden integrarse por cuadraturas. Esto se debe a que $H = \sum_{i=1}^{n} H_i(J,\phi) = -\sum_{i=1}^{n} \nu_i J_i$, de modo que, por las ecuaciones de Hamilton,

$$\begin{cases} \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0, \\ \dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = -\nu_i. \end{cases}$$

Las ecuaciones de Hamilton quedan entonces integradas en la forma

$$\begin{cases} J_i(t) = J_i(0) \\ \phi_i(t) = \phi_i(0) - \nu_i t. \end{cases}$$

Este tipo de flujo en el toro se llama *movimiento condicionalmente periódico*, ya que, dependiendo de los valores de las frecuencias ν_i, las trayectorias serán cerradas y periódicas o serán densas en cada toro de Liouville. En la siguiente sección profundizaremos en este tema.

4.4. Movimiento condicionalmente periódico

Una vez tenemos a nuestra disposición el teorema de Arnold-Liouville, sabemos que el flujo en los toros de Liouville será muy sencillo. En esta sección vamos a estudiar el flujo en estos toros y obtendremos un teorema muy importante sobre este tipo de sistemas.

En primer lugar, consideremos un 2-toro de Liouville. Sea (ϕ_1, ϕ_2) un punto en el toro y su trayectoria bajo el flujo hamiltoniano $\gamma(t) = \varphi_t(\phi_1, \phi_2) = (\phi_1 + \nu_1 t, \phi_2 + \nu_2 t)$. Si $\nu_1/\nu_2 = m/n$ es racional, entonces

$$\gamma\left(\frac{2n\pi}{\nu_2}\right) = (\phi_1 + 2m\pi, \phi_2 + 2n\pi) = (\phi_1, \phi_2).$$

Es decir, a cierto tiempo la trayectoria «se cierra». Estas órbitas se dicen *periódicas*.

Sin embargo, si ν_2/ν_1 es irracional, dado un ángulo α y tomando T tal que $\alpha = \phi_1 + \nu T$, entonces podemos tomar $T_n = T + 2n\pi/\nu_1$, $\alpha = \phi_1 + \nu_1(T_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} g : \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ \phi & \longmapsto & \phi + 2\pi\frac{\nu_2}{\nu_1}, \end{array}$$

es una rotación de ángulo un múltiplo irracional de 2π en la circunferencia del toro de ángulo α. Entonces, como ya vimos por el teorema de recurrencia de Poincaré (teorema 3.5.1), $\{g^n(\phi) | n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$. Como esto es válido para todo α y se cumple

$$\gamma(T_n) = (\alpha, g^n(\phi_2) + \nu_2 T),$$

tenemos que $\{\gamma(t)|t \in \mathbb{R}\}$ es denso en el toro. Este tipo de órbitas se llaman *cuasiperiódicas*. Una forma sencilla de visualizar esto es mediante las *figuras de Lissajous*

$$L_\nu = \{(\cos t, \cos \nu t)|t \in \mathbb{R}\},$$

ver figura 4.5.

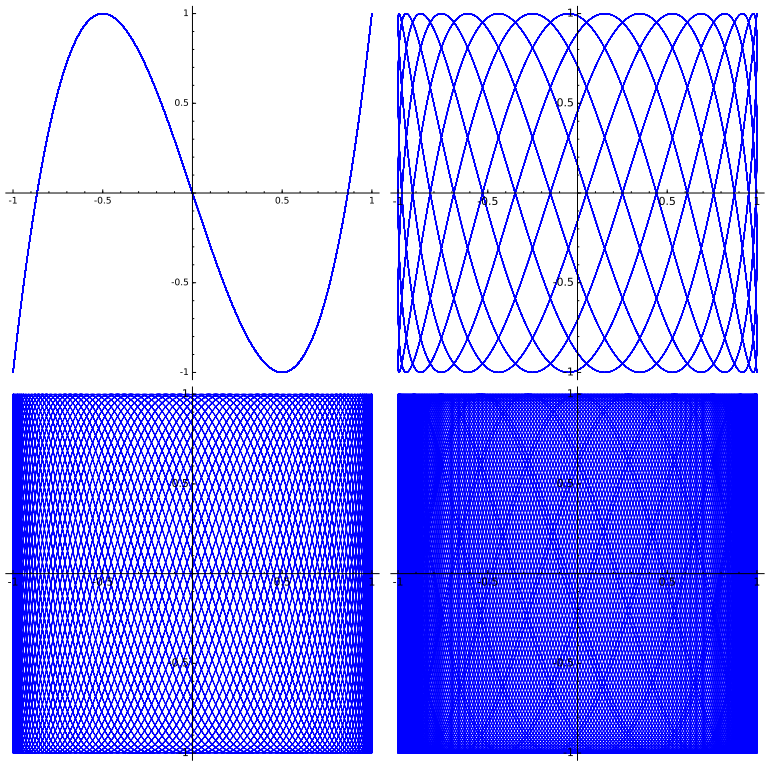


Figura 4.5: Figuras de Lissajous para $\nu = 3$, 3,1, 3,14, y 3,1416, $t \in (0, 128\pi)$ con pasos de 0,01.

Vamos a generalizar ahora estas ideas al caso n-dimensional.

Definición 4.4.1. Sean $\mathbb{T}^n$ el toro n-dimensional y $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ coordenadas angulares. Se entiende por un *movimiento condicionalmente periódico* en el toro el flujo uniparamétrico dado por

$$\phi(t) = \phi(0) + \nu t$$

con $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *frecuencias* constantes en el toro. Las frecuencias ν se dicen *independientes* si, para cada $k \in \mathbb{Z}^n$, $\langle k, \nu \rangle = 0$ si y sólo si $k = 0$.

Definición 4.4.2. Sea $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ una función integrable Riemann,

1. El *promedio espacial* de f en $\mathbb{T}^n$ es el número

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi_1, \ldots, d\phi_n.$$

2. El *promedio temporal* de f en $\mathbb{T}^n$ es la función

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \to \infty} \int_0^T f(\phi_0 + \nu t) dt,$$

definida en los puntos ϕ_0 en los que exista el límite.

Teorema 4.4.3 (Teorema de los promedios)**.** *Si $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann y las frecuencias ν son independientes, el promedio temporal está bien definido en todo el toro $\mathbb{T}^n$ y coincide en todo punto con el promedio espacial.*

Demostración. En primer lugar, consideramos funciones de la forma $e^{i\langle k,\phi\rangle}$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Si $k = 0$, entonces $\bar{f} = f = f^* = 1$. Si $k \neq 0$, $\bar{f}$ es una integral a periodos en funciones trigonométricas, luego es igual a 0. Por otra parte

$$\int_0^T e^{i\langle k,\phi_0+\nu t\rangle}dt = e^{i\langle k,\phi_0\rangle}\int_0^T e^{i\langle k,\nu\rangle t}dt = e^{i\langle k,\phi_0\rangle}\frac{e^{i\langle k,\nu\rangle T}-1}{i\,\langle k,\nu\rangle}.$$

Por tanto, el promedio temporal será

$$\lim_{T\to\infty}\frac{e^{i\langle k,\phi_0\rangle}}{i\,\langle k,\nu\rangle}\frac{e^{i\langle k,\nu\rangle T}-1}{T} = 0.$$

Como los promedios dependen linealmente de f, también coincidirán para los polinomios trigonométricos

$$f = \sum_{|k|<N} f_k e^{i\langle k,\nu\rangle}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, si f es continua y real por el teorema de Weierstrass podemos aproximarla por un polinomio trigonométrico P que cumpla $|f - P| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Sean $P_1 = P - \frac{1}{2}\varepsilon$, $P_2 = P + \frac{1}{2}\varepsilon$ entonces

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}(P_2 - P_1)d\phi = \frac{1}{(2\pi)^n}\varepsilon(2\pi)^n = \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, si f es real e integrable Riemann, entonces existen dos funciones continuas f_1, f_2 tales que $f_1 < f < f_2$ y $\int_{\mathbb{T}^n}\frac{1}{(2\pi)^n}(f_2 - f_1)d\phi < \frac{1}{3}\varepsilon$. Tomando ahora P_1, P_2 polinomios trigonométricos tales que $P_1 < f_1 < f_2 < P_2$ y $\int_{\mathbb{T}^n}\frac{1}{(2\pi)^n}(P_i - f_i)d\phi < \frac{1}{3}\varepsilon$, para $i = 1, 2$, entonces

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}(P_2 - P_1)d\phi = \frac{1}{(2\pi)^n}\varepsilon(2\pi)^n = \varepsilon.$$

Por último, para cada $\varepsilon > 0$ existen dos polinomios trigonométricos P_1, P_2 tales que $P_1 < f < P_2$ y $\bar{P}_2 - \bar{P}_1 < \varepsilon$. Ahora, como $f < P_2$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\phi(t))dt < \frac{1}{T}\int_0^T P_2(\phi(t))dt,$$

luego

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\phi(t))dt - \bar{f}\right| < \left|\frac{1}{T}\int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{f}\right| < \left|\frac{1}{T}\int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{P}_2\right| + |\bar{P}_2 - \bar{f}|.$$

Pero, como $P_1 < f < P_2$, por la monotonía de la integral $\bar{P}_1 < f < \bar{P}_2$, luego $|\bar{P}_2 - \bar{f}| < |\bar{P}_2 - \bar{P}_1| < \varepsilon$. Además, como P_2 es un polinomio trigonométrico existe un T_0 tal que, si $T > T_0$

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{P}_2\right| < \varepsilon.$$

Finalmente, obtenemos lo que queríamos probar

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\phi(t))dt - \bar{f}\right| < \left|\frac{1}{T}\int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{P}_2\right| + |\bar{P}_2 - \bar{f}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

luego $f^*(\phi_0) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\phi(t))dt = \bar{f}$. □

Corolario 4.4.4. *Si las frecuencias son independientes, entonces, para todo $\phi_0 \in \mathbb{T}^n$,*

$$\{\phi(t) = \phi_0 + \nu t | t \in \mathbb{R}\}$$

es denso en el toro $\mathbb{T}^n$.

Demostración. En caso contrario, podemos tomar un abierto D del toro que no tiene ningún punto de la trayectoria $\phi(t)$. Construimos la función

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \notin D \\ \frac{(2\pi)^n}{\int_D d\phi} & \text{si } \phi \in D. \end{cases}$$

Claramente, $\bar{f} = 1$, pero $f^*(\phi_0) = 0$, lo que contradice el teorema de los promedios. □

Corolario 4.4.5. *Sea $D \subset \mathbb{T}^n$ un conjunto medible Jordan. Sea $A_D = \{t \in \mathbb{R} | \phi(t) \in D\}$ (que también es medible Jordan) y sea $\tau_D(T) = \int_0^T \chi_{A_D}(t)dt$, donde χ_A denota la función característica del conjunto A. Entonces*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\mathrm{Vol}(D)}{(2\pi)^n}.$$

Demostración. Nótese que $\int_0^T \chi_D(\phi(t))dt = \int_0^T \chi_{A_D}(t)dt = \tau_D(t)$ y $\bar{\chi}_D = (2\pi)^{-n}\mathrm{Vol}(D)$. Aplicando el teorema de los promedios

$$\bar{\chi}_D = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \chi_D(\phi(t))dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\tau_D(T)}{T}.$$

Por tanto, $\frac{\mathrm{Vol}(D)}{(2\pi)^n} = \bar{\chi}_D = \lim_{T\to\infty} \frac{\tau_D(T)}{T}$, como queríamos probar. □

4.5. Sistemas con un grado de libertad

En esta sección damos algunas generalidades sobre los sistemas hamiltonianos con un grado de libertad que, como ya hemos visto, son todos integrables en el sentido de Liouville. Uno de los ejemplos más característicos es el péndulo simple, que estudiamos a continuación.

El péndulo simple

Consideramos un péndulo de masa $m = 1$ cuya «cuerda» es una barra rígida de masa despreciable y longitud 1. El espacio de configuración del péndulo es entonces la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ y su espacio de fases será el fibrado tangente de $\mathbb{S}^1$, que no es otra cosa que un cilindro. Tomando como coordenada generalizada el ángulo ϕ de desviación del péndulo respecto de la vertical, el hamiltoniano viene dado por

$$H(\phi, p) = \frac{1}{2}p^2 - g\cos\phi,$$

donde g es la aceleración gravitatoria y hemos tomado el centro como origen de energía potencial. Como podemos ver en la figura 4.6 las trayectorias son cerradas, luego cada curva de energía constante es compacta. Para estudiar los puntos críticos, nótese que $\mathrm{d}H$ es distinta de 0 en todo punto exceptuando los casos $(\phi = 0, p = 0)$ y $(\phi = \pi, p = 0)$, que corresponden a puntos de equilibrio (el primero, estable, el segundo, inestable) donde la trayectoria es sólo un punto. La curva que aparece punteada en la figura, de ecuación

$$g = H(\phi, p) = \frac{1}{2}p^2 - g\cos\phi,$$

corresponde al punto de equilibrio y a dos trayectorias que tienden asintóticamente al punto de equilibrio inestable. Este conjunto no es un toro de Liouville ya que contiene al punto crítico $(\pi, 0)$. Estas trayectorias son matemáticamente factibles aunque su realización práctica parezca una tarea imposible. Las curvas que quedan dentro de la curva punteada corresponden a movimientos de oscilación en torno al punto de equilibrio estable, mientras que las que quedan fuera corresponden a movimientos de rotación del péndulo alrededor de su centro.

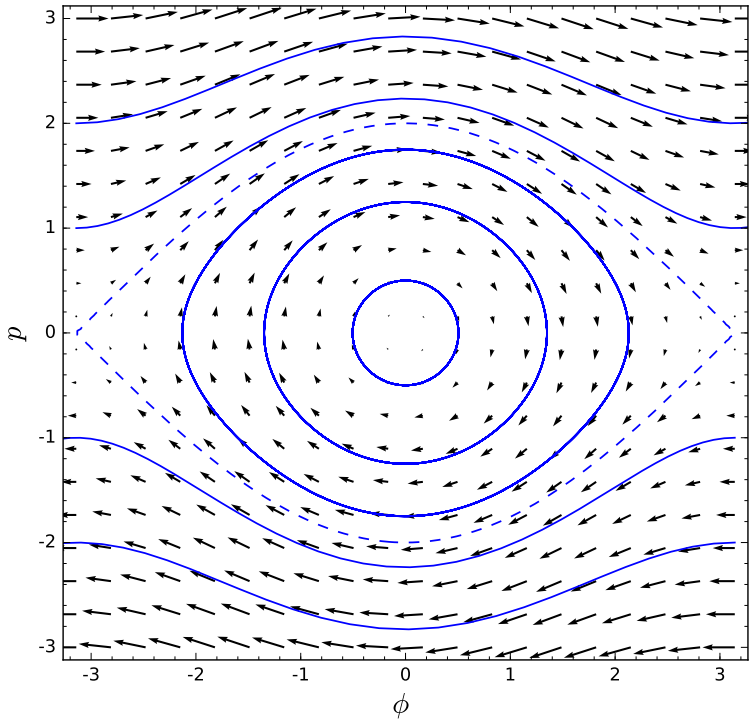


Figura 4.6: Espacio de fases del péndulo junto al campo hamiltoniano y las curvas de nivel. Nótese que el lado derecho ($\phi = \pi$) está identificado con el lado izquierdo ($\phi = -\pi$), ya que se trata de un cilindro.

Puntos críticos de los sistemas con un grado de libertad

Los dos tipos de punto crítico que presenta el péndulo simple se conocen como *centros*, para el $(0, 0)$ y *sillas*, para el $(\pi, 0)$. Podemos probar que, de hecho esos son los únicos tipos de punto crítico que puede presentar un sistema hamiltoniano en $\mathbb{R}^2$. En efecto, supongamos que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio de un sistema hamiltoniano. Podemos escribir las ecuaciones de Hamilton en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix},$$

de modo que su versión linealizada en torno al $(0, 0)$ será

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} \end{pmatrix} \right|_{(q,p)=(0,0)} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = J_1 B \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

De la simetría de la matriz de segundas derivadas B y de las propiedades de la matriz J_1, tenemos que A ha de cumplir la condición

$$A^t J_1 + J_1 A = 0.$$

Las matrices que cumplen esta condición forman el álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ del grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$.

Proposición 4.5.1. *Si α es un autovalor de una matriz $A \in \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ con multiplicidad algebraica k, entonces $-\alpha$ es también un autovalor de A con la misma multiplicidad. Si $\alpha = 0$ entonces su multiplicidad es par.*

Demostración. Los autovalores son los ceros del polinomio característico $P(\alpha) = \det(\alpha I - A)$. Por tanto, basta probar que $\det(\alpha I - A) = \det(\alpha I + A)$. Esto se ve de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \det(\alpha I - A) = \det(-\alpha J_1^2 - J_1 B) = \det J_1 \det(-\alpha J_1 - B) \\ &= \det(-\alpha J_1 - B)^t = \det(\alpha J_1 - B) = \det(\alpha I - J_1^{-1} B) \\ &= \det(\alpha I + J_1 B) = \det(\alpha I + A). \end{aligned}$$

□

Por tanto, los autovalores de A son imaginarios, opuestos o ambos cero, luego el punto crítico $(0,0)$ solo puede ser un centro (en el caso de autovalores imaginarios) o un punto de silla (en el caso de autovalores reales opuestos). Como consecuencia de esto tenemos que el sistema hamiltoniano no puede tener puntos *asintóticamente estables*, lo que tal vez era de esperar a la vista de la conservación de la energía y del teorema de Liouville: los puntos asintóticamente estables funcionarían como «fuentes» o «sumideros» del área de Liouville.

4.6. Más sistemas integrables

Cuando estudiamos sistemas con varios grados de libertad, la integrabilidad requiere de la existencia de cantidades conservadas adicionales. Como ya vimos en el apartado de simetrías y leyes de conservación, una forma útil de encontrar cantidades conservadas es observar las simetrías del sistema, siguiendo el mecanismo de Noether. En esta sección veremos dos ejemplos donde podemos ver directamente esta relación entre las simetrías y la integrabilidad del sistema.

El péndulo esférico

Un péndulo esférico consiste en una partícula (aquí supondremos de masa $m = 1$) enganchada por una barra rígida de masa despreciable y de longitud 1 a un punto del espacio y bajo la acción de la gravedad. Es decir, es como un péndulo simple, solo que no está restringido a oscilar en un solo plano, sino que puede moverse libremente, ver figura 4.7.

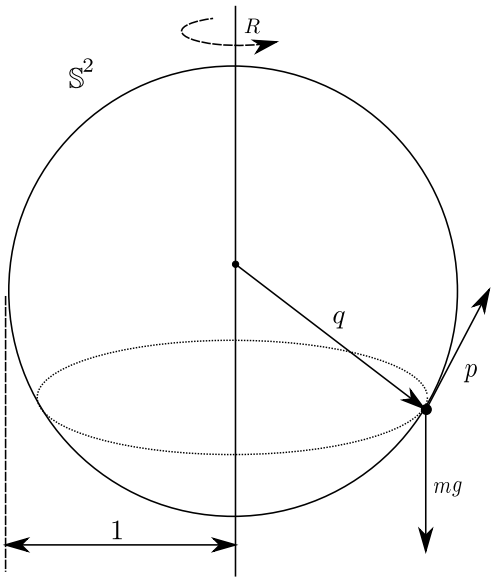


Figura 4.7: Péndulo esférico

Podemos considerar el sistema inmerso en $\mathbb{R}^3$, de modo que el espacio de fases en principio será el espacio simpléctico estándar 6-dimensional $(\mathbb{R}^6, \Omega_3)$. Ahora, la ligadura del péndulo restringe el movimiento espacial a una esfera de radio 1, y las velocidades serán siempre tangentes a esta esfera. De este modo, el espacio de fases será

$$M = \left\{(q,p) \in \mathbb{R}^6 : ||q|| = 1, \langle q,p\rangle = 0\right\},$$

que claramente es difeomorfo al fibrado tangente de la esfera, $T\mathbb{S}^2$. La forma simpléctica en M será simplemente la restricción de Ω_3 a M. El hamiltoniano será la restricción a M de la función

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q,p) &\longmapsto \tfrac{1}{2m}||p||^2 + mgq_3, \end{aligned}$$

donde q_3 es la componente vertical del vector $q = (q_1, q_2, q_3)$.

Observemos ahora que el sistema es invariante bajo las rotaciones en torno a la vertical. En efecto, si $R \in \mathrm{SO}(3)$ es una rotación en torno a la vertical, como la tercera componente no varía respecto de las rotaciones en torno a la vertical y las rotaciones preservan la norma,

$$H(R(q), R(p)) = \tfrac{1}{2m}||R(p)||^2 + mgq_3 = \tfrac{1}{2m}||p||^2 + mgq_3 = H(q,p).$$

Por tanto, la tercera componente del momento angular $L_3 = q_1p_2 - q_2p_1$ es una cantidad conservada del sistema (M, H). Como $\dim(M) = 4$ y hemos encontrado una cantidad conservada del sistema a parte del propio hamiltoniano, no es difícil comprobar que H y L_3 son independientes para casi todo punto, luego el sistema (M, H) será integrable en el sentido de Liouville.

El potencial central

Consideremos el caso genérico de una partícula moviéndose en el espacio sujeta a una fuerza central, es decir, dirigida siempre hacia el origen y cuyo valor dependa solo de la distancia de la partícula a este. Un ejemplo típico sería el de una partícula moviéndose en un potencial coulombiano $V(r) = -k/r$ (por ejemplo, la Tierra alrededor del Sol). El espacio de fases del sistema es el espacio simpléctico estándar 6-dimensional $(\mathbb{R}^6, \Omega_3)$ y el hamiltoniano viene dado por la función

$$H(q,p) = \tfrac{1}{2m}||p||^2 + V(||q||).$$

Claramente, el sistema es invariante bajo rotaciones ya que, si $R \in \mathrm{SO}(3)$ es una rotación, entonces, como las rotaciones preservan la norma

$$H(R(q), R(p)) = \tfrac{1}{2m}||R(p)||^2 + V(||R(q)||) = \tfrac{1}{2m}||p||^2 + V(||q||) = H(q,p).$$

Como consecuencia, se conserva el momento angular $L = q \times p$. En particular, se conservarán $L^2 = \langle L, L\rangle$ y $L_3 = q_1p_2 - q_2p_1$. Ahora, si calculamos el corchete de Poisson

$$\left\{L^2, L_3\right\} = \sum_{i=1}^{3} \left\{L_i^2, L_3\right\} = \sum_{i=1}^{3} 2L_i \left\{L_i, L_3\right\},$$

por la regla de Leibniz. Como $\{L_3, L_3\} = 0$, tenemos

$$\left\{L^2, L_3\right\} = 2L_1 \left\{L_1, L_3\right\} + 2L_2 \left\{L_2, L_3\right\}.$$

Basta entonces hallar

$$\{L_1, L_3\} = \left\{q_2p_3 - q_3p_2, q_1p_2 - q_2p_1\right\},$$

que, usando la linealidad del corchete de Poisson y la identidad de Jacobi y teniendo en cuenta que $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ podemos desarrollar hasta llegar a

$$\{L_1, L_3\} = -p_3q_1 \{q_2, p_2\} - q_3p_1 \{p_2, q_2\} = +p_3q_1 - q_3p_1 = -L_2.$$

Un cálculo análogo muestra que $\{L_2, L_3\} = L_1$, de modo que

$$\{L^2, L_3\} = -2L_1L_2 + 2L_2L_1 = 0.$$

Por tanto, H, L^2 y L_3 son 3 funciones en involución y además es posible comprobar que son independientes en casi todo punto de $\mathbb{R}^6$, de modo que el sistema (M, H) es integrable en el sentido de Liouville.

El hecho de que el momento angular L sea perpendicular a q y a p y se conserve permite restringir el movimiento en el espacio físico al plano perpendicular a L. Teniendo en cuenta los valores máximo y mínimo de la energía potencial V se puede mostrar que el movimiento estará comprendido en una corona circular (ver figura 4.8). En general la órbita de un punto por el flujo hamiltoniano llena por completo la susodicha corona, pero el *teorema de Bertrand* afirma que en dos casos especiales todos los movimientos acotados se dan en curvas (1-variedades) cerradas. Estos son aquellos en los que $V(r)$ es proporcional a $1/r$ (potencial coulombiano) o a r^2 (oscilador armónico isótropo). Cabe preguntarse entonces si esto se debe a la existencia de una integral primera adicional (una «simetría oculta»), independiente de las ya obtenidas, que restrinja el movimiento aún más, a alguna subvariedad de los toros de Liouville; los sistemas que cumplen esto se llaman *superintegrables*. Efectivamente, tanto el potencial coulombiano como el oscilador armónico isótropo son superintegrables. En el caso del potencial coulombiano $V(r) = -k/r$ la cantidad conservada adicional es el *vector de Laplace-Runge-Lenz*, definido por

$$A = p \times L - \frac{mk}{r} q.$$

En el caso del oscilador armónico isótropo $V(r) = kr^2$ existe una matriz 2×2 simétrica conservada, el *tensor de Fradkin*, de componentes

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(p_i p_j + k q_i q_j),$$

con $i, j = 1, 2$. La traza de la matriz es la energía $\frac{1}{2m}(||p||^2 + kr^2)$ y la componente de fuera de la diagonal $F = A_{12} = \frac{1}{2}(p_1p_2 + kq_1q_2)$ es precisamente la cantidad conservada adicional, independiente de la energía y el momento angular.

Fue precisamente la observación de una aparente excepción a esta ley, la precesión del perihelio de Mercurio, la que supuso uno de los «fallos» de la mecánica clásica a finales del siglo XIX. Si el perihelio de Mercurio precedía de tal forma llenaba toda la corona en la que su órbita está contenida no podía estar sometido al potencial $V(r) = -k/r$, tal y como predecía la ley de gravitación universal; de estarlo, formaría un sistema superintegrable y la órbita debería ser una curva cerrada. Este enigma no sería resuelto hasta la formulación de la teoría de la Relatividad General. El caso de Mercurio ya no podía ser explicado por la gravedad newtoniana y era necesario considerar correciones relativistas para entender su movimiento.

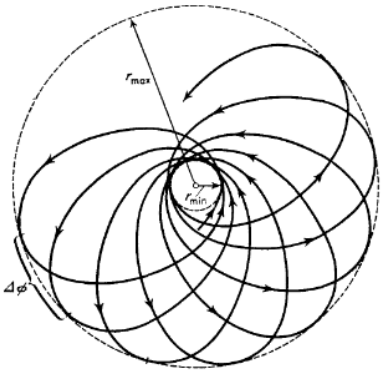


Figura 4.8: Movimiento en la corona circular (Fuente: [8]).

Bibliografía

[1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings, 1978.

[2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989. 10, 46

[3] Michèle Audin. *Torus actions on Symplectic Manifolds*. Birkhäuser, 2012.

[4] A. V. Bolsinov and A.T. Fomenko. *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification*. CRC Press, 2004.

[5] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, and J.M. Ruiz. *Álgebra lineal (vol. 2)*. Sanz y Torres, 2010. 23

[6] J.M. Gamboa and J.M. Ruiz. *Introducción al estudio de las Variedades Diferenciables*. Sanz y Torres, 2016. 15

[7] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 2011. 10

[8] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica (vol. 1): Mecánica*. Reverté, 1985. 10, 56

[9] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2003. 19

[10] Mircea Puta. The completeness of some Hamiltonian vector fields on a Poisson manifold. *An. Univ. Timisoara Ser. Mat.-Inform*, 32:93–98, 1994. 42

[11] Florian Scheck. *Mechanics: from Newton's laws to deterministic chaos*. Springer Science & Business Media, 2010.

[12] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.