

TRABAJO DE FIN DE GRADO, SEPTIEMBRE 2013

**TOPOLOGÍA DIFERENCIAL:
GRADO DE BROUWER-KRONECKER**

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

IRENE GONZÁLEZ SAAVEDRA

RESUMEN. In this work we study the *Brouwer-Kronecker degree*, using de Rham cohomology and integration of forms on manifolds. As first applications we deduce two important theorems due to Brouwer: the *fixed point theorem* and the so-called *hairy ball theorem*. But our main motivation are the homotopy groups of spheres $\pi_n(\mathbb{S}^m)$. These groups are all trivial for $n < m$. This is easy and we deduce it using the Sard-Brown theorem. For $n = m$ the Brouwer-Kronecker degree gives the solution: $\pi_m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$, a famous theorem by Hopf which is the central result we prove here. For $n > m$ homotopy groups become much more complicated, except the case $n = 1$ whose elementary computation we include for completeness. Still, degree gives us a method to understand some cases $n > m > 1$ using the *Hopf invariant*. We define this invariant and obtain its basic properties. Using all of this we compute the Hopf invariant of the famous *Hopf fibration*, to conclude that the group $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ is infinite.

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Preliminares	2
3. Grado de Brouwer-Kronecker	9
4. Teoremas de Brouwer	16
5. Teoremas de Hopf	18
6. Grupos de homotopía de las esferas	24
7. Invariante de Hopf	26
Referencias	36

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57R19, 57R35, 58A12.
Parcialmente subvencionado por el Proyecto GAAR MTM2011-22435.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge del estudio de la homotopía de las esferas $\pi_n(\mathbb{S}^m)$, un problema muy complejo para el caso $n > m$, pero asequible si $n \leq m$. Para estudiar este segundo caso vamos a utilizar el grado de una aplicación entre variedades diferenciables de la misma dimensión definido por Brouwer y Kronecker. En la sección 2 recordaremos los conceptos y enumeraremos los resultados básicos estudiados a lo largo del Grado de Matemáticas que son necesarios para la comprensión del trabajo. El concepto central del trabajo, el grado de Brouwer-Kronecker, lo presentamos en la sección 3 con la definición vía la cohomología de de Rham para hilar con la orientación que se ha dado desde el Departamento de Geometría y Topología para los Trabajos de Fin de Grado. Una de las razones de la elección del grado de Brouwer-Kronecker, y no del llamado grado euclídeo, es la posibilidad de demostrar con relativa facilidad algunos teoremas de Brouwer incluidos en la sección 4, como el famoso Teorema del punto fijo 4.2 y el Teorema de la bola despeinada 4.3 sobre campos vectoriales en esferas. La sección 5 contiene uno de los resultados claves del trabajo, el Teorema de Hopf 5.4, que nos permite concluir $\pi^m(M) = \mathbb{Z}$ para cualquier variedad diferenciable M de dimensión m , y en particular $\pi_m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$. En la sección 6 nos centramos en el caso particular de las esferas para estudiar el caso $n < m$ y $n > m = 1$. Por último, para ilustrar la complejidad del caso $n > m \geq 2$ y dar el primer resultado significativo del mismo, en la sección 7 definimos, usando el grado de Brouwer-Kronecker, el invariante de Hopf y lo calculamos para la fibración de Hopf $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$. También demostramos una fórmula de multiplicación que nos permite deducir que $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ es infinito.

2. PRELIMINARES

En esta sección vamos a recordar muy concisamente los conceptos y resultados básicos que vamos a utilizar con el fin de fijar la notación. En su mayor parte estos conceptos ya han sido estudiados en diversas asignaturas del Grado de Matemáticas. Incluimos alguna explicación más específica de nuestros objetivos; para más detalles y demostraciones las referencias generales son [1], [6] y los capítulos preliminares de [5]. Otras referencias utilizadas son [2], [3] y [4].

A. Funciones diferenciables y variedades con borde [1, II.1,II.2]. Empezamos repasando algunos conceptos bien conocidos relativos a funciones diferenciables.

Definición 2.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^p$ un abierto. Decimos que una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^r -diferenciable con $r \geq 1$ si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ existen y son continuas para todo $k \leq r$.

Definición 2.2. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre dos subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ es de clase \mathcal{C}^r , con $r \geq 1$, si para cada punto $x \in X$ existen funciones \mathcal{C}^r -diferenciables $\bar{f}_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq q$, definidas en un entorno abierto U de x tales que $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_q)$ coincide con f en $U \cap X$. Llamamos a \bar{f} extensión de f .

Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es un \mathcal{C}^r -difeomorfismo si es biyectiva y tanto ella como su inversa son de clase r .

En lo sucesivo, *diferenciable* quiere decir \mathcal{C}^r -diferenciable para todo $r \geq 1$. Para tratar problemas topológicos como los de este trabajo es suficiente utilizar aplicaciones diferenciables. Por ello a partir de ahora no consideraremos más el caso \mathcal{C}^r .

Definición 2.3. Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto y sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto suyo. Una *partición diferenciable de la unidad subordinada a \mathcal{U}* es una familia localmente finita de funciones diferenciables $\theta_i : X \rightarrow [0, 1]$ cuyos soportes abiertos $\text{sop}(\theta_i)$ recubren X y tal que $\overline{\text{sop}(\theta_i)} \subset U_i$.

Proposición 2.4. Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^p$. Entonces existe una *partición diferenciable de la unidad* $\{\theta_i : i \in I\}$ subordinada a \mathcal{U} .

Usando particiones se obtiene:

Teorema 2.5 (de extensión de Tietze). Sea X un subconjunto cerrado de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces f tiene una extensión $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Ahora ya podemos definir *variedad con borde*:

Definición 2.6. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ es una *variedad (diferenciable)* si cada punto $x \in M$ tiene un entorno abierto U difeomorfo a un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$. Un difeomorfismo concreto $\mathbf{x} : U \rightarrow V$ se denomina *sistema local de coordenadas* y su inverso $\varphi = \mathbf{x}^{-1}$ se llama *parametrización*. Un *cambio de coordenadas* es una composición $\psi^{-1} \circ \varphi$. Llamamos a m *dimensión* de M (en x).

Habiendo definido las variedades sin borde, ahora ampliamos esta noción definiendo las variedades con borde, para lo que necesitamos el concepto de semiespacio.

Definición 2.7. Un *semiespacio* de \mathbb{R}^m es un subconjunto $\{x \in \mathbb{R}^m : \lambda(x) \geq 0\}$ donde $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal.

El semiespacio modelo es $\{x_1 \geq 0\}$, y cualquier otro se convierte en este mediante un cambio lineal de coordenadas en \mathbb{R}^m .

Definición 2.8. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ es una *variedad (diferenciable) con borde* si cada punto $x \in M$ tiene un entorno abierto U difeomorfo a un abierto V de un semiespacio de \mathbb{R}^m . Un difeomorfismo concreto $\mathbf{x} : U \rightarrow V$ se denomina *sistema local de coordenadas* y su inverso $\varphi = \mathbf{x}^{-1}$ se llama *parametrización*. Un *cambio de coordenadas* es una composición $\psi^{-1} \circ \varphi$. Así mismo, m es la *dimensión* de M .

Para simplificar, en lo sucesivo omitiremos el calificativo *diferenciable* que hemos escrito entre paréntesis en las definiciones de variedad.

B. Derivadas y puntos críticos [1, I.2],[5, II.2,II.3]. Sea M una variedad y sea $x \in M$. Consideramos una parametrización $\varphi : V \rightarrow M$ en x , siendo V un abierto de \mathbb{R}^m o de un semiplano. Sea $a \in V$ tal que $\varphi(a) = x$. φ es un difeomorfismo sobre un entorno de x , luego es una aplicación diferenciable en \mathbb{R}^m con derivada $d_a\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. El espacio lineal $\text{im}(d_a\varphi) \subset \mathbb{R}^n$ no depende de la parametrización escogida.

Definición 2.9. Llamamos *espacio tangente* a M en x al espacio lineal $\text{im}(d_x\varphi)$ y lo denotamos por T_xM .

Si \mathbf{x} es un sistema de coordenadas en un abierto U de M , para $x \in U$ denotaremos

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x = d_x\varphi(e_i) \quad (1 \leq i \leq m).$$

Estos vectores forman una base de T_xM .

Definición 2.10. Sean $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ dos variedades de dimensiones m y n respectivamente. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre ellas y sea x un punto de M . Podemos extender f a una aplicación diferenciable \bar{f} de un entorno abierto de x en \mathbb{R}^p a un entorno de $y = f(x)$ en \mathbb{R}^q . La derivada de esta extensión es $d_x\bar{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Restringiendo, obtenemos una aplicación lineal bien definida

$$d_xf = d_x\bar{f}|_{T_xM} : T_xM \rightarrow T_yN$$

que no depende de la extensión \bar{f} escogida. Llamamos a esta aplicación lineal *derivada de f en x* .

La derivada permite estudiar las propiedades locales de f . Por ejemplo, es bien conocido el teorema de la función inversa para variedades sin borde: *si d_xf es un isomorfismo lineal, entonces f es un difeomorfismo de un entorno de x sobre uno de su imagen*. En el caso de variedades con borde, hay que añadir la condición de que f transforme puntos del borde en puntos del borde, lo que se denomina *invarianza del borde*.

Definición 2.11. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Un punto $x \in M$ se dice que es un *punto crítico* de f si la derivada de f en x , $d_xf : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$, no es sobreyectiva. En caso contrario, se dice que x es un *punto regular* de f .

El conjunto de los puntos críticos de f es cerrado pues la condición de no sobreyectividad de d_xf se puede expresar en un entorno de x con ecuaciones relacionadas con el determinante del jacobiano de f . Consecuentemente, el conjunto de puntos regulares de f es abierto.

Definición 2.12. En la situación anterior, sea $a \in N$. Decimos que a es un *valor crítico* de f si existe un punto crítico $x \in M$ de f con $f(x) = a$. Si a no es un valor crítico, decimos que es un *valor regular* de f .

La propiedad importante de los valores regulares es que sus imágenes inversas son variedades:

Proposición 2.13. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades sin borde, y sea $a \in N$ un valor regular de f , con imagen inversa $f^{-1}(a) \neq \emptyset$. Entonces $f^{-1}(a)$ es una variedad sin borde. Si M tiene borde, y a es un valor regular de f y de $f|_{\partial M}$, entonces $f^{-1}(a)$ es una variedad con borde $\partial f^{-1}(a) = f^{-1}(a) \cap \partial M$. En los dos casos, la imagen inversa tiene dimensión $\dim(M) - \dim(N)$.*

Es importante destacar que en la situación anterior $T_x f^{-1}(a) = \ker(d_xf)$. Es decir, $f = a$ es la ecuación de la imagen inversa, y derivándola obtenemos la ecuación $d_xf = 0$ del espacio tangente a dicha imagen inversa.

También es esencial que hay muchos valores regulares, en el sentido siguiente:

Teorema 2.14 (de Sard-Brown). *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Entonces el conjunto de valores regulares de f es residual en N , es decir, es la intersección numerable de conjuntos abiertos densos de N .*

En particular, por el teorema de Baire, tenemos que *el conjunto de valores regulares de f es denso en N .*

C. Homotopía [5, II.4, II.5], [6, cap.6]. Para aplicar los métodos diferenciales a problemas topológicos debemos recordar los conceptos correspondientes.

Definición 2.15. Una *homotopía* es una aplicación continua $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$. Denotamos $H_t(x) = H(t, x)$. Dos aplicaciones $f, g : M \rightarrow N$ son *homótopas* si existe una homotopía H_t con $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

En \mathbb{R}^n todas las aplicaciones son homótopas, por interpolación lineal. Si tenemos $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define inmediatamente la homotopía $H_t = (1-t)f + tg$. Para esferas se puede a veces adaptar la interpolación:

Proposición 2.16. *Sea M una variedad y sean $f, g : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ dos aplicaciones que no tienen imágenes antipodales, i.e. $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in M$. Entonces*

$$H_t(x) = \frac{tg(x) + (1-t)f(x)}{\|tg(x) + (1-t)f(x)\|}$$

es una homotopía entre $H_0 = f$ y $H_1 = g$. En particular, si f no es sobreyectiva, es nulhomótopa (homótopa a una función constante).

Demostración. Sea $x \in M$. El punto $p = tg(x) + (1-t)f(x)$ está en el segmento que une $f(x)$ con $g(x)$. Como $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a la esfera, $p = 0$ si y solo si son antipodales, que no ocurre por hipótesis. Así, H_t está bien definida. Por último, si existe $q \notin f(M)$, lo anterior da una homotopía entre f y la aplicación constante $g \equiv -q$. \square

Ser homótopas es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones de M en N . Denotamos por $[M, N]$ el conjunto cociente. Para variedades conexas podemos definir el *k-ésimo grupo de homotopía de N* , $\pi_k(N) = [\mathbb{S}^k, N]$ y el *k-ésimo grupo de cohomotopía de M* , $\pi^k(M) = [M, \mathbb{S}^k]$. Como hemos comentado en la introducción demostraremos de manera elemental que $\pi_n(\mathbb{S}^1)$ es trivial, para lo que usaremos el siguiente resultado de elevación:

Proposición 2.17. *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto convexo, y $g : K \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Para cada $x_0 \in K$ y cada $\theta_0 \in \mathbb{R}$ con $h(\theta_0) = g(x_0)$ existe una única aplicación continua $\bar{g} : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: (i) $\pi \circ \bar{g} = g$ y (ii) $\bar{g}(x_0) = \theta_0$.*

Definición 2.18. Una aplicación continua $f : M \rightarrow N$ es *propia* si es cerrada y la preimagen de cualquier punto de N es compacta.

Para el caso de variedades estas dos condiciones son equivalentes a que *la preimagen de todo compacto sea compacta*. Si M es una variedad compacta entonces todas las aplicaciones continuas son propias. Si N es compacta sólo hay aplicaciones propias $M \rightarrow N$ si M también es compacta. Además, si una aplicación diferenciable f es propia, el conjunto R_f de sus valores regulares es abierto.

Para utilizar aplicaciones diferenciables al estudiar homotopía de aplicaciones continuas, se necesitan dos resultados básicos. El primero es:

Proposición 2.19. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde y $f : X \rightarrow N$ una aplicación continua (propia). Entonces existe una aplicación diferenciable (propia) $g : X \rightarrow N$ (propiamente) homotópa a f .*

Por otra parte, entre aplicaciones diferenciables se define la *homotopía diferenciable*, y se tiene el segundo resultado:

Proposición 2.20. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ localmente cerrado y $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde. Si dos aplicaciones diferenciables $f, g : X \rightarrow N$ son (propiamente) homótopas, entonces lo son mediante una homotopía (propia) diferenciable.*

Esto se demuestra por aproximación. Si se trata de aproximar funciones, solo hacen falta particiones diferenciables de la unidad, pero para aproximar aplicaciones con valores en variedades hacen falta los denominados *entornos tubulares*, que tienen la propiedad importante de que la variedad es retracto diferenciable suyo.

D. Difeotopías [5, II.6]. Vamos ahora a ver la propiedad de *homogeneidad* de las variedades en la forma más fuerte que involucra homotopía.

Definición 2.21. Sea M una variedad. Una *difeotopía* de M es una homotopía $F : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tal que $F_0 = \text{Id}_M$ y todas las aplicaciones F_t son difeomorfismos de M . Decimos que F une la pareja de puntos $x \in M$ y $F_1(x)$. Decimos que F es la *identidad fuera de $K \subset M$* si $F_t(x) = x$ para $x \notin K$.

Observamos que F es una homotopía propia y que preserva las componentes conexas, con lo que muchas veces podemos suponer sin pérdida de la generalidad M conexa.

Teorema 2.22. *Sea M una variedad sin borde. Sean a y b dos puntos de M y sea A un abierto conexo que los contiene. Entonces existe una difeotopía que une a con b y que es la identidad fuera de un compacto $K \subset A$ que es un entorno de ambos puntos.*

De este teorema se deduce una versión similar para colecciones finitas de puntos, si la dimensión es al menos 2:

Corolario 2.23. *Sea M una variedad sin borde de dimensión $m \geq 2$. Sean a_1, \dots, a_p y b_1, \dots, b_p dos colecciones de puntos de M y sea A un abierto conexo que contiene ambas colecciones. Entonces existe una difeotopía que une a_k con b_k para todo $k=1, \dots, p$, que es la identidad fuera de un compacto $K \subset A$.*

E. Orientaciones [1, V.1, V.2], [5, II.7]. Vamos por último a recordar las nociones de orientación de variedades y el concepto de *signo de una función en un punto*, a partir del cual se puede definir el grado de Brouwer-Kronecker.

Una *orientación* ζ de un espacio vectorial E de dimensión finita $m \geq 1$ es una clase de equivalencia de bases de E dada por la relación: *el determinante de la matriz del cambio de base es positivo*. Dada una base $\{v_1, \dots, v_m\}$, denotamos $\zeta = [v_1, \dots, v_m]$ su clase de equivalencia. Hay solo dos orientaciones posibles, a saber ζ y $-\zeta$, llamadas *opuestas*. En el caso $E = \mathbb{R}^m$ hay una *orientación canónica* dada por la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Definición 2.24. Sea M una variedad de dimensión m . Una *orientación en M* es una familia $\zeta_M = \{\zeta_x : x \in M\}$ de orientaciones ζ_x en cada espacio vectorial tangente $T_x M$, tal que cada punto $x \in M$ tiene un entorno abierto U con un sistema de coordenadas x con

$$(*) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_y, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_y \right] = \zeta_y \quad \text{para todo } y \in U.$$

En este caso decimos que el sistema de coordenadas, o la parametrización, es *compatible con la orientación*.

Observamos que la matriz del cambio de base de dos bases $(*)$ dadas por dos parametrizaciones es la matriz jacobiana del correspondiente cambio de coordenadas.

Supongamos que M es conexa y está orientada por ζ . Por continuidad tenemos que la condición $(*)$ se cumple (o no) localmente. Además, si el dominio de coordenadas es conexo, $(*)$ se cumple (o no) en todo el dominio. Por ello, si conocemos la orientación ζ en un punto de M , como lo podemos unir con cualquier otro punto mediante un camino y este recubrirlo con una cadena de dominios de coordenadas conexos, conocemos la orientación en cualquier otro punto de la variedad. Así, M tiene dos posibles orientaciones, ζ y $-\zeta = \{-\zeta_x : x \in M\}$.

Definición 2.25. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades de la misma dimensión. Sea $x \in M$ un punto regular de f tal que $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ es un isomorfismo lineal. Entonces decimos que f *conserva la orientación (resp. invierte)* en $x \in M$ si $d_x f$ lleva bases positivas de $\zeta_{M,x}$ a bases positivas de $\zeta_{N,f(x)}$ (resp. $-\zeta_{N,f(x)}$). Definimos el *signo de f en x*

$$\text{sign}_x(f) = +1 \quad (\text{resp. } -1)$$

El signo coincide con el signo del determinante de la matriz de $d_x f$ respecto a bases positivas de ζ_M y ζ_N .

Ejemplos 2.26. (1) La *aplicación antipodal* $\sigma : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m : x \mapsto -x$ es un difeomorfismo que conserva la orientación si m es impar y la invierte si m es par.

(2) La *simetría respecto de la primera variable*

$$\mathbf{s} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_m)$$

invierte la orientación independientemente de la paridad de m . □

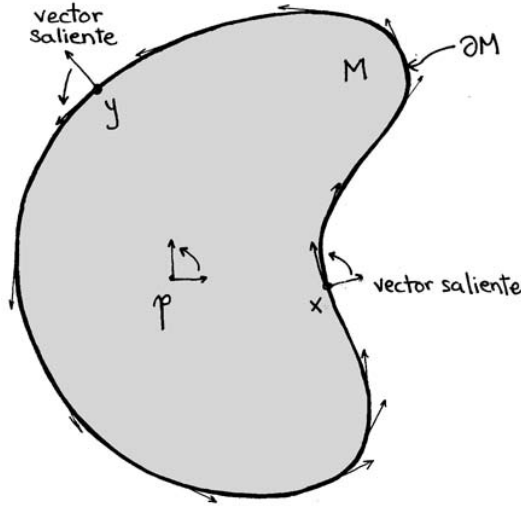
Es claro que si f conserva (invierte) la orientación en un punto, lo hace en todo un entorno conexo suyo, y si además f es un difeomorfismo de variedades conexas, lo hace en toda la variedad.

Proposición 2.27. Sea F_t una difeotopía de una variedad orientada M . Entonces F_t conserva la orientación en M para todo t .

Para terminar hay que prestar especial atención a los bordes. En el caso de que M tenga borde ∂M , los espacios tangentes $T_x M$ tienen una orientación cuando x esté en el borde ∂M . La orientación en un punto del borde está determinada por la de los puntos interiores de un entorno conexo suyo, así que para orientar una variedad con borde basta orientar su interior. Por otra parte:

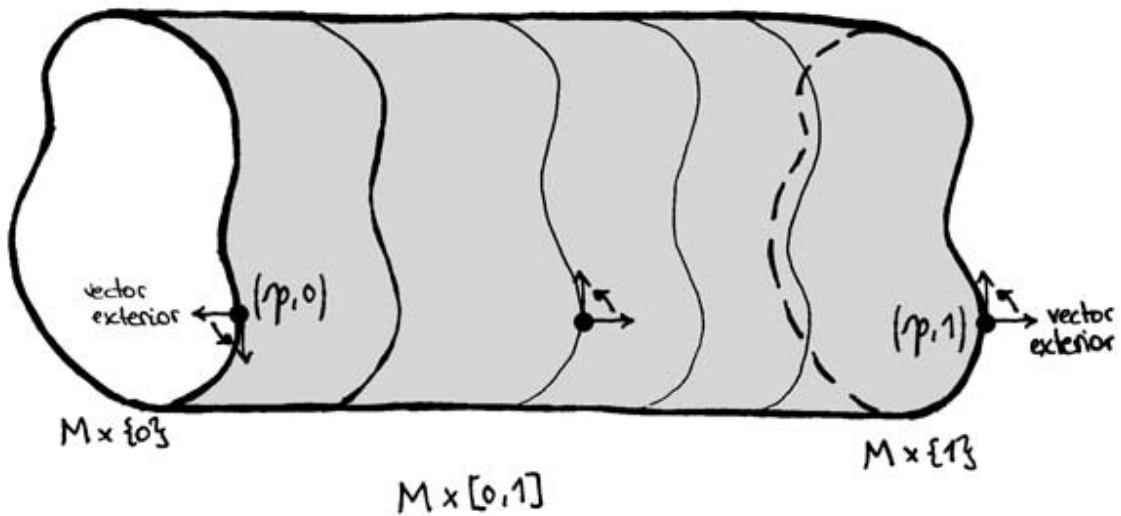
Proposición 2.28. *Sea M una variedad orientada que tiene borde ∂M . Se puede orientar ∂M de la manera siguiente. Sea $x \in \partial M$. Se elige un sistema local de coordenadas $\mathbf{x} : U \rightarrow \{x_1 \geq 0\}$ con $x \in U$ y un vector $u_1 \in T_x M \setminus T_x \partial M$ tal que el vector $d_x \mathbf{x}(u_1) \in \mathbb{R}^m$ tenga su primera coordenada negativa. Entonces se orienta $T_x \partial M$ mediante una base $\{u_2, \dots, u_m\}$ tal que la base $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ da la orientación de $T_x M$.*

Un vector como el u_1 anterior se llama *saliente*. Localmente esto significa que si orientamos el semiespacio $x_1 \geq 0$ con la orientación estándar $[e_1, \dots, e_m]$ entonces su borde, el hiperplano $x_1 = 0$, está orientado con $-[e_2, \dots, e_m]$.



Un ejemplo importante de esto es la orientación de cilindros.

Proposición 2.29. *Sea M una variedad orientada sin borde y consideremos el cilindro $C = [0, 1] \times M$, que es una variedad con borde $\partial C = (\{1\} \times M) \cup (\{0\} \times M)$ (unión disjunta). Se orienta C con el producto de la orientación canónica $[e_1]$ de $[0, 1]$ y la dada ζ_M de M , y la orientación que esto induce en ∂C es ζ_M en $\{1\} \times M$ y $-\zeta_M$ en $\{0\} \times M$.*



Finalmente, será esencial la siguiente construcción:

(2.30) Orientación de imágenes inversas. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades orientadas, N sin borde. Sea $a \in N$ un valor regular de f y de $f|_{\partial M}$, de manera que la imagen inversa $f^{-1}(a)$ es una variedad 2.13 posiblemente con borde $f^{-1}(a) \cap \partial M$. Entonces las orientaciones de M y N inducen una orientación canónica en esa imagen inversa.

El método es el siguiente. Denotemos m, n las dimensiones de M y N , y ζ_M, ζ_N sus orientaciones. Sea $x \in f^{-1}(a)$. El espacio tangente $T_x f^{-1}(a)$ es el núcleo de la derivada $d_x f$, que por tanto induce un isomorfismo lineal $E \rightarrow T_a N$ para cualquier descomposición $T_x M = T_x f^{-1}(a) \oplus E$. Elijamos E con una base v_1, \dots, v_n que $d_x f$ transforme en una base *positiva* de $\zeta_{N,a}$. Entonces consideramos una base u_1, \dots, u_{m-n} de $T_x f^{-1}(a)$ tal que $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_{m-n}$ sea una base *positiva* de $\zeta_{M,x}$, y tomamos en $T_x f^{-1}(a)$ la orientación ξ_x correspondiente a esa base u_1, \dots, u_{m-n} . Esta construcción es consistente y define una orientación ξ en $f^{-1}(a)$. Con un pequeño abuso de notación podemos escribir $\zeta_M = \xi \oplus \zeta_N$. \square

A partir de la definición se obtiene inmediatamente una propiedad útil.

Proposición 2.31. *Sea $f_1 : M_1 \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades orientadas y $g : M_2 \rightarrow M_1$ un difeomorfismo que conserva (resp. invierte) la orientación. Denotamos $f_2 = f_1 \circ g$. Si a es un valor regular de f_1 también lo es de f_2 y g induce por restricción un difeomorfismo de $f_2^{-1}(a)$ sobre $f_1^{-1}(a)$ que conserva (resp. invierte) la orientación de las imágenes inversas.*

3. GRADO DE BROUWER-KRONECKER

Vamos a definir el grado de Brouwer-Kronecker utilizando formas diferenciales y herramientas de integración. Para ello recordemos los conceptos básicos de las formas diferenciales. Una referencia elemental es [1, IV].

Sea M una variedad de dimensión m , orientada y sin borde. Denotamos por $\Gamma_c^k(M)$ el espacio lineal de las formas diferenciales de grado k (k -formas) con soporte compacto. Para $k = 0$, $\Gamma_c^0(M)$ es el conjunto de las funciones diferenciales $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que tienen soporte compacto. Las derivadas de f proporcionan la diferencial $df : x \mapsto d_x f$, que induce el operador $d : \Gamma_c^0(M) \rightarrow \Gamma_c^1(M)$. Este operador se extiende a grados más altos:

Definición 3.1. Para todo $k \geq 0$, al operador $d : \Gamma_c^k(M) \rightarrow \Gamma_c^{k+1}(M)$ se le llama *diferencial exterior* y verifica que $d \circ d = 0$ y

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$$

para cualesquiera r -forma α y s -forma β con $r + s = k$.

Definición 3.2. Una k -forma ω con soporte compacto es *cerrada* si $d\omega = 0$. Se dice ω que es *exacta* si existe alguna $(k - 1)$ -forma α tal que $\omega = d\alpha$.

Tanto el conjunto de las k -formas lineales con soporte compacto exactas como el de las cerradas son subespacios lineales de $\Gamma_c^k(M)$. Como $d \circ d = 0$, toda forma exacta es cerrada, y tiene sentido definir la cohomología:

Definición 3.3. El espacio cociente

$$H_c^k(M, \mathbb{R}) = \frac{\{\omega \in \Gamma_c^k(M) : d\omega = 0\}}{\{\omega \in \Gamma_c^k(M) : \exists \alpha \in \Gamma_c^{k-1}(M) \, d\alpha = \omega\}}$$

es el k -ésimo grupo de cohomología de De Rham de M con soporte compacto.

Consideremos el m -ésimo grupo de cohomología $H_c^m(M, \mathbb{R})$. Como M no tiene borde, el teorema de Stokes implica

$$\int_M d\alpha = 0,$$

es decir, que la aplicación lineal

$$\int_M : H_c^m(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \int_M \omega$$

está bien definida. Si M es conexa, es un isomorfismo. Esto es, de hecho, un teorema de Análisis, pues se traduce mediante particiones de la unidad en que *una función diferenciable en \mathbb{R}^m con soporte compacto e integral nula es la divergencia de un campo en \mathbb{R}^m con soporte compacto.*

Vamos a pasar ahora a definir el grado de Brouwer-Kronecker. Sean M y N dos variedades de dimensión m , conexas, orientadas y sin borde. Toda aplicación diferenciable propia $f : M \rightarrow N$ induce una aplicación lineal

$$f^* : \Gamma_c^k(N) \rightarrow \Gamma_c^k(M) : \omega \mapsto f^*\omega.$$

Estas aplicaciones *pull-back* son compatibles con las operaciones de formas y el diferencial, de manera que inducen homomorfismos en los grupos de cohomología, que también denotamos por f^* . En particular para el m -ésimo grupo obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(N, \mathbb{R}) & \xrightarrow{f^*} & H_c^m(M, \mathbb{R}) \\ \int_N \downarrow & & \downarrow \int_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{R} \end{array}$$

cuyas flechas verticales son isomorfismos por ser M y N conexas.

Teorema 3.4. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable propia entre variedades de dimensión m , orientadas y sin borde, N conexa. Entonces hay un entero d tal que*

$$\int_M f^*\omega = d \cdot \int_N \omega$$

para toda m -forma ω con soporte compacto sobre N . Además, para todo valor regular $a \in N$ de f se tiene

$$d = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f) \quad (0 \text{ si } f^{-1}(a) = \emptyset).$$

Demostración. Para la demostración podemos suponer M conexa. En efecto, si denotamos M_i las componentes conexas de M , y admitimos el resultado para las restricciones $f|_{M_i}$, entonces

$$\int_M f^* \omega = \sum_i \int_{M_i} f|_{M_i}^* \omega = \sum_i d_i \int_N \omega = d \cdot \int_N \omega$$

con $d = \sum_i d_i$. La afirmación para los valores regulares se sigue también, pues $f^{-1}(a)$ es la unión disjunta de las imágenes inversas $f|_{M_i}^{-1}(a)$.

Así pues, suponemos M conexa para poder utilizar el diagrama anterior de los grupos de cohomología. Como la aplicación inducida f^* es lineal, en el diagrama citado $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ha de ser la multiplicación por un número real d y por la conmutatividad del diagrama obtenemos

$$\int_M f^* \omega = d \cdot \int_N \omega$$

para toda m -forma ω con soporte compacto en N . Por el teorema de Sard-Brown el conjunto de valores regulares de f es denso en N , luego podemos tomar a un valor regular de f . Queremos ver que

$$d = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f),$$

lo que es equivalente a ver

$$(*) \quad \int_M f^* \omega = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f) \int_N \omega$$

para una m -forma ω con integral no nula. Además, esto ya muestra que d es un número entero.

Vamos a construir esta m -forma ω . Como a es un valor regular, su preimagen es finita. Primero la suponemos no vacía, con lo que $f^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_r\}$ y f es un difeomorfismo local en a , con lo que existen abiertos $W' \subset N$ y $U'_i \subset M, i = 1, \dots, r$, disjuntos que contienen a a, x_1, \dots, x_r , respectivamente. Por ser f propia, es cerrada, así que $f(M \setminus \bigcup_{i=1}^r U'_i)$ es un conjunto cerrado que no contiene a a , con lo que existe un entorno abierto W de a tal que

$$W \cap f(M \setminus \bigcup_{i=1}^r U'_i) = \emptyset.$$

Tomamos la componente conexa V que contiene a a del abierto $W \cap R_f$. Como

$$V \cap f(M \setminus \bigcup_{i=1}^r U'_i) = \emptyset,$$

tenemos que $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^r U'_i$. Definimos $U_i = f^{-1}(V) \cap U'_i$, para $i = 1, \dots, r$. Nótese que U_i es conexo para todo i , pues V es un subconjunto conexo de W' difeomorfo a cada U'_i , lo que implica que $\text{sign}_x(f)$ es constante en cada U_i . Además, $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r U_i$.

Ahora sustituimos V por un entorno abierto conexo de a difeomorfo a \mathbb{R}^m , de forma que siga conteniendo a a , esto es posible pues M no tiene borde. Sea $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ un difeomorfismo. Entonces la forma diferencial

$$\psi^*(\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m),$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ es una función diferenciable con la propiedad

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 2, \end{cases}$$

puede extenderse por 0 a toda la variedad N . Así obtenemos una m -forma con integral no nula que denotamos por ω . Vamos a comprobar que se cumple la igualdad (*).

Por construcción, el soporte de ω está contenido en V , luego, utilizando un cambio de variables con el difeomorfismo ψ , tenemos

$$\int_N \omega = \int_V \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx_1 \dots dx_m \neq 0.$$

Por otro lado, el soporte de $f^*\omega$ está contenido en $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r U_i$, así que tenemos

$$\int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^r \int_{U_i} f^*\omega = \sum_{i=1}^r \sigma_i \int_V \omega,$$

donde $\sigma_i = \pm 1$ dependiendo de si $f|_{U_i}$ conserva o no la orientación en el abierto conexo U_i , con $i = 1, \dots, r$. Por definición de signo y como $x_i \in U_i$ para cada $i = 1, \dots, r$, tenemos

$$\sigma_i = \text{sign}_{x_i}(f),$$

y obtenemos (*):

$$\int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^r \sigma_i \int_V \omega = \sum_{i=1}^r \text{sign}_{x_i}(f) \int_V \omega = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f) \int_V \omega.$$

Ahora supongamos que $f^{-1}(a) = \emptyset$, entonces

$$\sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f) = 0$$

y en consecuencia el lado derecho de la igualdad (*) se anula. Tenemos que probar que $\int_M f^*\omega = 0$ para una m -forma ω . Como f es propia, $\text{im}(f) \subset N$ es cerrado, luego existe un entorno abierto V de a tal que $\text{im}(f) \cap V = \emptyset$. Construimos ω como en el caso anterior a partir de este V y obtenemos que $\text{im}(f) \cap \text{sop}(\omega) = \emptyset$, con lo que $f^*\omega \equiv 0$ y

$$\int_M f^*\omega = 0,$$

obteniendo la igualdad deseada. \square

Definición 3.5. Al entero d dado por el teorema anterior lo llamamos *grado de Brouwer-Kroneker* (o simplemente *grado*) de f y lo denotamos por $\text{deg}(f)$.

Ejemplos 3.6. (1) Calculemos el grado de la *aplicación antipodal* $\sigma : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m : x \mapsto -x$, que depende de la paridad de la dimensión. El elemento de volumen ω de la esfera \mathbb{S}^m tiene soporte compacto la propia esfera, así que, como su integral es no nula, podemos usarlo para calcular el grado. Para ello recordemos que en $x_{m+1} \neq 0$ se tiene la expresión

$$\omega = \frac{(-1)^m}{x_{m+1}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

de manera que en $x_{m+1} \neq 0$ se tiene

$$\sigma^*\omega = \frac{(-1)^m}{-x_{m+1}} d(-x_1) \wedge \cdots \wedge d(-x_m) = (-1)^{m+1} \frac{(-1)^m}{x_{m+1}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = (-1)^{m+1} \omega,$$

y por continuidad, la igualdad se cumple en toda la esfera. Así:

$$\int_M \sigma^*\omega = \int_{\mathbb{S}^m} (-1)^{m+1} \omega = (-1)^{m+1} \int_{\mathbb{S}} \omega.$$

En conclusión, $\deg(\sigma) = (-1)^{m+1}$ es $+1$ o -1 según m sea impar o par, es decir, σ conserva la orientación si y solo si m es par. \square

(2) Ahora calcularemos el grado de la *simetría respecto de la primera variable*

$$\mathbf{s} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Usamos la misma forma de volumen. En $x_{m+1} \neq 0$ se tiene

$$\mathbf{s}^*\omega = \frac{(-1)^m}{x_{m+1}} d(-x_1) \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_m = -\omega,$$

y así:

$$\int_M \mathbf{s}^*\omega = \int_{\mathbb{S}^m} -\omega = - \int_{\mathbb{S}} \omega.$$

En conclusión, $\deg(\mathbf{s}) = -1$ y vemos que en este caso no depende de la paridad, con lo que la orientación se invierte siempre. \square

Los ejemplos anteriores simplemente recuerdan cómo se comportan estas aplicaciones respecto de la orientación [2.26](#).

Pasemos a establecer las tres propiedades fundamentales del grado.

Proposición 3.7 (Invarianza por homotopía). *Sean M, N dos variedades de dimensión m , orientadas y sin borde, N conexa, y sea $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$ una homotopía diferenciable propia. Entonces*

$$\deg(H_0) = \deg(H_1).$$

Demostración. Sea ω una m -forma con soporte compacto en N . Consideramos la m -forma $H^*\omega$ sobre $[0, 1] \times M$. Por las propiedades de la diferencial exterior, tenemos que $dH^*\omega = H^*d\omega$. Como m es la dimensión de N , $d\omega = 0$, así que

$$0 = \int_{[0,1] \times M} H^*d\omega = \int_{[0,1] \times M} dH^*\omega.$$

Ahora bien, el borde $\partial([0, 1] \times M)$ es la unión disjunta de dos copias de M con diferente orientación [2.29](#), con lo que, utilizando el teorema de Stokes para calcular la última integral, tenemos

$$0 = \int_{[0,1] \times M} dH^*\omega = \int_M H_1^*\omega - \int_M H_0^*\omega.$$

Así,

$$\deg(H_0) \int_N \omega = \int_M H_0^*\omega = \int_M H_1^*\omega = \deg(H_1) \int_N \omega.$$

Como esta igualdad se verifica para cualquier m -forma diferencial ω con soporte compacto, tenemos que $\deg(H_0) = \deg(H_1)$. \square

Proposición 3.8 (Teorema del borde). *Sea X una variedad de dimensión $m+1$, orientada y con borde $\partial X = Y$, y sea N una variedad de dimensión m conexa, orientada y sin borde. Sea también $H : X \rightarrow N$ una aplicación diferenciable propia. Entonces*

$$\deg(H|_Y) = 0.$$

Demostración. Por la definición de grado, $d = \deg(H|_Y)$ es el entero tal que para toda m -forma ω con soporte compacto sobre N se cumple

$$\int_Y H|_Y^* \omega = d \int_N \omega.$$

Ahora, $d = 0$ si y solo si

$$\int_Y H|_Y^* \omega = 0$$

para toda m -forma ω . Como $\partial X = Y$, utilizando el teorema de Stokes, tenemos

$$\int_Y H|_Y^* \omega = \int_X dH|_Y^* \omega = \int_X H|_Y^* d\omega.$$

Como ω es una m -forma sobre N que tiene dimensión m , $d\omega = 0$, luego la integral se anula y obtenemos el resultado. \square

Proposición 3.9 (Fórmula de la multiplicación). *Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ dos aplicaciones diferenciables propias entre variedades orientadas, de la misma dimensión y sin borde, donde además N y P son conexas. Entonces*

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

Demostración. Por definición de grado, queremos ver que para toda m -forma diferencial ω con soporte compacto en P se tiene

$$\int_M (g \circ f)^* \omega = \deg(f) \deg(g) \int_P \omega.$$

Sea ω una m -forma diferencial con soporte compacto sobre P . Utilizando la definición de aplicación *pull-back* y que $g^* \omega$ es una m -forma con soporte compacto sobre N (por ser g propia), calculamos la integral

$$\int_M (g \circ f)^* \omega = \int_M f^*(g^* \omega) = \deg(f) \int_N g^* \omega = \deg(f) \deg(g) \int_P \omega$$

como queríamos probar. \square

El grado y sus propiedades se pueden extender a aplicaciones continuas arbitrarias en virtud del siguiente resultado:

Proposición 3.10. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua entre dos variedades de dimensión m , orientadas y sin borde, N conexa. Entonces todas las aplicaciones diferenciables propias $g : M \rightarrow N$ que sean propiamente homótopas a f tienen el mismo grado. En particular dos aplicaciones diferenciables propiamente homótopas tiene el mismo grado.*

Demostración. Sean $g, g' : M \rightarrow N$ dos aplicaciones diferenciables propiamente homótopas a f , concatenando las homotopías obtenemos que son propiamente homótopas entre ellas y, por la proposición 2.20 lo son por una homotopía propia diferenciable. Se deduce de 3.7 que tienen el mismo grado. \square

Como toda aplicación continua propia es propiamente homótopa a una diferenciable (2.19), la siguiente definición es consistente:

Definición 3.11. En las hipótesis anteriores, el *grado* de f , que denotamos $\deg(f)$, es el grado de cualquier aplicación diferenciable propiamente homótopa a f .

Veamos ahora las propiedades del grado para funciones continuas, que las hereda del grado para funciones diferenciables.

Proposición 3.12. (1) (Invarianza por homotopía) *Sean M, N dos variedades de dimensión m , orientadas y sin borde, N conexa, y sea $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$ una homotopía propia. Entonces*

$$\deg(H_0) = \deg(H_1).$$

(2) (Teorema del borde) *Sea X una variedad de dimensión $m + 1$, orientada y con borde $\partial X = Y$, y sea N una variedad de dimensión m conexa, orientada y sin borde. Sea $H : X \rightarrow N$ una aplicación propia. Entonces*

$$\deg(H|_Y) = 0.$$

(3) (Fórmula de la multiplicación) *Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ dos aplicaciones propias entre variedades de dimensión m , orientadas y sin borde, N y P conexas. Entonces*

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

Demostración. Para (1), sean f' y g' dos aplicaciones diferenciables propiamente homótopas a H_0 y H_1 , respectivamente. Entonces f' y g' son propiamente homótopas, y tienen el mismo grado por 3.10. Así

$$\deg(H_0) = \deg(f') = \deg(g') = \deg(H_1).$$

Para (2), sea H' una aplicación diferenciable propiamente homótopa a H (que existe por 2.20). Como Y es cerrado, $H'|_Y$ es una aplicación propia y restringiendo la homotopía es propiamente homótopa a $H|_Y$, con lo que

$$\deg(H|_Y) = \deg(H'|_Y) = 0,$$

en virtud del teorema del borde para aplicaciones diferenciables 3.8.

Para (3), consideramos dos aplicaciones diferenciales f' y g' propiamente homótopas a f y g , mediante homotopías propias F_t y G_t , respectivamente. Entonces la composición $G_t \circ F_t$ es una homotopía propia entre $g \circ f$ y $g' \circ f'$. Entonces por el resultado para aplicaciones diferenciables 3.9, tenemos

$$\deg(g \circ f) = \deg(g' \circ f') = \deg(g') \cdot \deg(f') = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

\square

4. TEOREMAS DE BROUWER

Proposición 4.1. *Sea M una variedad orientada con borde $\partial M = N$. Entonces N no es un retracto propio de M , es decir, no hay ninguna aplicación propia $\rho : M \rightarrow N$ cuya restricción a N sea la identidad.*

Demostración. Reducción al absurdo. Supongamos que existe tal retracción $\rho : M \rightarrow N$. Sea N' una componente conexa de N y M' la componente conexa de M que la contiene. Por ser ρ una retracción tenemos

$$N' = \rho(N') \subset \rho(M') \subset N$$

de lo que deducimos, al ser M' abierto en M , que

$$N' = \rho(M') = M' \cap N = \partial M'.$$

Además, $\rho|_{M'}$ es propia porque M' es cerrado en M . Por el teorema del borde 3.12 con $X = M'$, $Y = \partial M'$ y $H = \rho|_{M'}$ tenemos

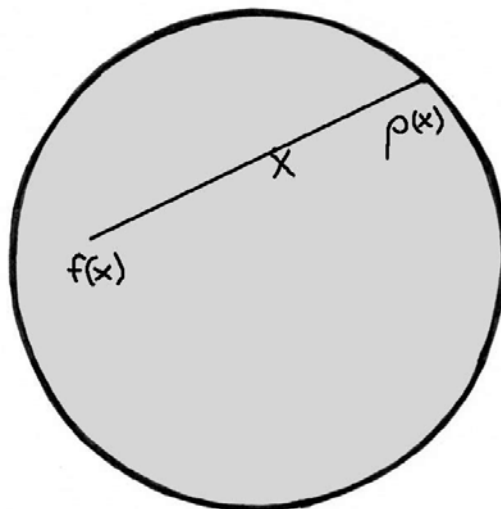
$$0 = \deg(H|Y) = \deg(\rho|_{N'}) = \deg(\text{Id}_{N'})$$

lo que es imposible ya que $\deg(\text{Id}_{N'}) = 1$. □

Ahora vamos a probar un famoso teorema:

Teorema 4.2 (del punto fijo de Brouwer). *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ homeomorfo a la bola cerrada. Entonces toda aplicación continua $f : M \rightarrow M$ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Es suficiente probar el resultado siendo $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$ la bola unidad, que es una variedad compacta con borde $\partial M = \mathbb{S}^m$, pues, considerando las aplicaciones de este caso compuestas con el homeomorfismo, obtendremos el resultado general. Reducción al absurdo. Supongamos que existe $f : M \rightarrow M$ continua y sin puntos fijos. Definimos la aplicación $\rho : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ como se muestra en la figura



con $\rho(x) = x + \lambda(f(x) - x)$ tomando

$$\lambda(x) = \frac{\|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle \pm \sqrt{(\|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle)^2 - \|x\|^2 \|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2} > 0$$

de forma que $\|\rho(x)\| = 1$. Esta aplicación es propia y su restricción a ∂M es la identidad, es decir, tenemos que $\mathbb{S}^m = \partial M$ es un retracto propio de M en contradicción con la proposición anterior. Por tanto, f debe tener al menos un punto fijo. \square

Por último vamos a ver otro teorema importante:

Proposición 4.3 (de la esfera despeinada de Brouwer). *Una esfera $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ tiene un campo vectorial tangente continuo que no se anula en ningún punto si y solo si m es impar.*

Demostración. Si m es impar, entonces $m + 1 = 2k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Consideramos el campo vectorial tangente

$$\xi_x = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}) \in T_x \mathbb{S}^m.$$

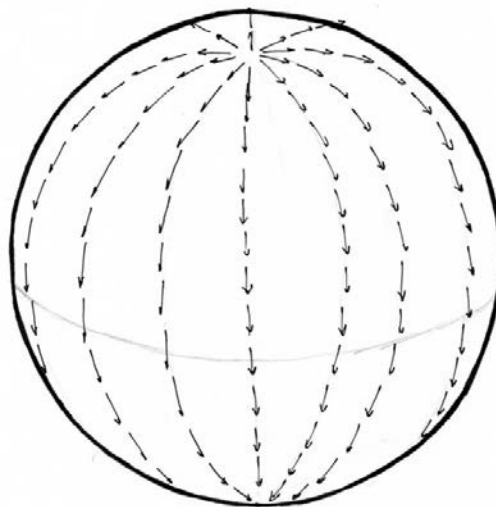
Este campo es claramente diferenciable y no se anula.

Ahora, para m par, supongamos que existe un campo vectorial continuo en \mathbb{S}^m , $x \mapsto \xi_x \in T_x \mathbb{S}^m$, que no se anula. Dividiendo entre su norma podemos suponer que es unitario. Es decir, tenemos una aplicación continua $\mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ tal que $\langle x, \xi_x \rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{S}^m$. Gracias a esta condición tenemos que

$$H_t(x) = \cos(\pi t)x + \text{sen}(\pi t)\xi_x$$

es una homotopía bien definida, con lo que $\text{deg}(H_0) = \text{deg}(H_1)$. La aplicación H_0 es la identidad, con lo que $\text{deg}(H_0) = 1$, y $H_1(x) = -x$ es la aplicación antipodal y como m es par $\text{deg}(H_1) = -1$ por 3.6. Contradicción. Por tanto, todo campo vectorial continuo tangente a una esfera de dimensión par se anula en algún punto. \square

Un ejemplo de un campo vectorial con dos ceros sobre la esfera \mathbb{S}^2 es:



5. TEOREMAS DE HOPF

En esta sección analizamos las clases de homotopía de una variedad en una esfera de la misma dimensión. Antes de pasar al teorema de Hopf veamos algunos resultados previos referentes a aplicaciones sobre esferas que necesitaremos para el teorema.

Proposición 5.1. *Sea $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ la esfera unidad. Entonces para todo entero d existe una aplicación diferenciable $f_d : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado d .*

Demostración. Para $d = 0$ tenemos que las aplicaciones constantes tienen grado 0.

Consideramos ahora $d \geq 1$. Vamos a construir una aplicación f_d con grado d . Todo punto $x \in \mathbb{S}^m$ se puede escribir como

$$x = (x_1, x_2; x') = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta; x') \quad \text{donde } \rho = \sqrt{1 - \|x'\|^2},$$

con lo que podemos definir el giro

$$g_d(x) = (\rho \cos(d\theta), \rho \sin(d\theta); x').$$

Para eliminar el parámetro θ sabemos que podemos escribir

$$\cos(d\theta) = P_d(\cos \theta, \sin \theta), \quad \sin(d\theta) = Q_d(\sin \theta, \cos \theta),$$

donde P_d y Q_d son polinomios homogéneos de grado d . Así tenemos

$$\begin{aligned} g_d(x) &= (\rho P_d(\frac{1}{\rho}x_1, \frac{1}{\rho}x_2), \rho Q_d(\frac{1}{\rho}x_1, \frac{1}{\rho}x_2); x') \\ &= (\frac{1}{\rho^d} P_d(x_1, x_2), \frac{1}{\rho^d} Q_d(x_1, x_2); x'). \end{aligned}$$

Observamos que g_d no está definida para $\|x'\| = 1$. Para arreglar este contratempo redefinimos $\tilde{\rho} = \sqrt{1 - \lambda(\|x'\|^2)}$, donde $\lambda(t)$ es una función que cumple

$$\lambda(t) \begin{cases} = t & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ < t & \text{si } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Con este nuevo $\tilde{\rho}$ obtenemos la aplicación diferenciable

$$\tilde{g}_d(x) = (\frac{1}{\tilde{\rho}^d} P_d(x_1, x_2), \frac{1}{\tilde{\rho}^d} Q_d(x_1, x_2); x').$$

Por último, para que su imagen esté contenida en la esfera unidad, tenemos que normalizar y así definimos $f_d = \tilde{g}_d / \|\tilde{g}_d\| : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ (podemos dividir por la norma porque seno y coseno no se pueden anular a la vez).

Veamos ahora que f_d tiene efectivamente grado d . Sea $a = (1, 0; 0) \in \mathbb{S}^m$. Supongamos $f_d(x) = a$. Entonces $x' = 0$ y $\rho = 1 = \tilde{\rho}$, así que

$$(1, 0; 0) = f_d(x) = g_d(x) = (\cos(d\theta), \sin(d\theta); 0),$$

luego los posibles valores de θ son $\theta_k = 2\pi \frac{k}{d}$, $0 \leq k < d$. Así tenemos las d preimágenes

$$x_k = (\cos \theta_k, \sin \theta_k; 0).$$

En un entorno suficientemente pequeño de $x' = 0$, $\tilde{\rho} = \rho$ es diferenciable, así que podemos utilizar la parametrización

$$x = (x_1, x_2; x') \mapsto (\theta, x'),$$

que es compatible con la orientación canónica de la esfera. Así, la expresión local es

$$f_d = g_d : (\theta, x') \mapsto (d\theta, x').$$

Tenemos entonces que f_d es un difeomorfismo que conserva la orientación, con lo que

$$\deg(f_d) = \sum_{x \in f_d^{-1}(a)} \text{sign}_x(f_d) = \sum_{k=0}^{d-1} \text{sign}_{x_k}(f_d) = \sum_{k=0}^{d-1} (+1) = d.$$

Para el caso $d = -1$, consideramos la simetría $\mathbf{s} : x \mapsto (-x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$ que tiene $\deg(f_{-1}) = -1$, 3.6.

Por último, para el caso $d < 0$ definimos $f_d = \mathbf{s} \circ f_{-d}$ y, por cómo se calcula el grado de la composición 3.9, tenemos

$$\deg(f_d) = \deg(\mathbf{s}) \cdot \deg(f_{-d}) = (-1)(-d) = d.$$

□

Ahora vamos a demostrar el resultado anterior, pero con una variedad compacta arbitraria como variedad de origen.

Proposición 5.2. *Sea M una variedad compacta, orientada y sin borde de dimensión m . Para cada entero d hay una aplicación diferenciable $h_d : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado d .*

Demostración. Observamos que basta con encontrar $h : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado ± 1 . Ni siquiera hay que precisar qué signo, pues componiendo con $f_{\pm d}$ de la proposición anterior obtenemos $h_d = f_{\pm d} \circ h$ con grado d (de nuevo 3.9). Vamos a definir $h : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de forma que el polo norte $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^m$ sea un valor regular con una única preimagen, con lo que ciertamente su grado es $+1$ o -1 . Sea U un abierto de M difeomorfo a \mathbb{R}^m y consideremos la función diferenciable no negativa

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

Identificamos U con \mathbb{R}^m para definir $h : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ mediante

$$h(x) = \begin{cases} (0, \dots, 0, -1) & \text{si } x \notin U, \\ \left(\frac{2\tau(x)x}{\tau(x)^2 + \|x\|^2}, \frac{\tau(x)^2 - \|x\|^2}{\tau(x)^2 + \|x\|^2} \right) & \text{si } x \in U, \end{cases}$$

donde $\tau(x) = \mu(\|x\|^2)$. Esta aplicación está bien definida pues para $x \in U$ con $\|x\| \geq 1$ tenemos $\tau(x) = 0$ y $h(x) = (0, \dots, 0, -1)$. Por otra parte, utilizando la proyección estereográfica π desde el polo sur $(0, \dots, 0, -1)$ para $x \in U$ con $\tau(x) \neq 0$, tenemos

$$h(x) = \pi^{-1}\left(\frac{x}{\tau(x)}\right).$$

Por ello, h es el difeomorfismo π^{-1} para $\tau(x) = 1$, i.e., para $\|x\| \leq \frac{1}{2}$. Además, $x = 0$ es la única preimagen del polo norte, pues $\tau(x)^2 - \|x\|^2 = \tau(x)^2 + \|x\|^2$ si y solo si $x = 0$. □

Ahora vamos a ver una herramienta para estudiar la clase de homotopía de una aplicación con valores en una esfera utilizando la proyección estereográfica. Esto será esencial para demostrar el teorema de Hopf.

(5.3) Simplificación homotópica de aplicaciones con valores en esferas. Sea M una variedad de dimensión m , orientada y sin borde.

(1) Fijemos un abierto $U \subset M$ difeomorfo a \mathbb{R}^m y un punto $c \in U \equiv \mathbb{R}^m$. Sea $h : U \rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{p_S\}$ una aplicación diferenciable tal que $h(x) = p_N$ con $\|x - c\| < \frac{3}{2}$ si y solo si $x = c$.

Utilizamos la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ desde el polo sur de la esfera $p_S = (0, \dots, 0, -1)$ para identificar el abierto $\mathbb{S}^m \setminus \{p_S\} \subset \mathbb{S}^m$ con \mathbb{R}^m y el polo norte $p_N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^m$ con el origen $0 \in \mathbb{R}^m$. Esto permite identificar $\pi \circ h$ con h , es decir, ver h como una aplicación con valores en \mathbb{R}^m , de manera que las preimágenes de p_N son los ceros de h . Así, h no tiene ceros en la bola $\|x - c\| < \frac{3}{2}$.

Queremos definir una extensión diferenciable $\bar{h} : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de h que sea $\equiv p_S$ en todo $M \setminus U$. Esto no se puede hacer del todo, pero se consigue que: (i) $\bar{h} = h$ en un entorno de c , y (ii) $\bar{h} \equiv p_S$ fuera de otro entorno. Siempre con nuestra identificación $U \equiv \mathbb{R}^m$, el primer entorno es la bola de centro c y radio $\frac{1}{2}$ y el segundo la bola de centro c y radio 1. Esta \bar{h} se denomina *extensión antipodal*.

(2) Para definir \bar{h} , utilizamos un truco parecido al de la demostración de 5.2:

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} (0, \dots, 0, -1) & \text{fuera de la bola } \|x - c\| < \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{2\tau(x)h(x)}{\tau(x)^2 + \|h(x)\|^2}, \frac{\tau(x)^2 - \|h(x)\|^2}{\tau(x)^2 + \|h(x)\|^2} \right) & \text{en la bola } \|x - c\| < \frac{3}{2}, \end{cases}$$

con una función diferenciable no negativa

$$\tau(x) = \mu(\|x - c\|^2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x - c\| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } \|x - c\| \geq 1. \end{cases}$$

Obsérvese que el denominador de \bar{h} no se anula, porque en $\|x - c\| < \frac{3}{2}$ el único cero de h es c , y $\tau(c) = 1$. Claramente $\bar{h}(x) = p_S$ para $\|x - c\| \geq 1$. Además, para $x \in U$ con $\tau(x) \neq 0$ tenemos

$$\pi(\bar{h}(x)) = \frac{h(x)}{\tau(x)},$$

y por tanto $\bar{h} = h$ en la bola de centro c y radio $\frac{1}{2}$. Por otra parte $\bar{h}(x) = p_N$ si y solo si $\|x - c\| < \frac{3}{2}$ y $h(x) = 0$, es decir, $x = c$.

(3) Veamos que h y \bar{h} no tienen imágenes antipodales en $\|x - c\| < \frac{3}{2}$, lo que nos interesa por la proposición 2.16. Supongamos que las tuvieran:

$$\left(\frac{2\tau(x)h(x)}{\tau(x)^2 + \|h(x)\|^2}, \frac{\tau(x)^2 - \|h(x)\|^2}{\tau(x)^2 + \|h(x)\|^2} \right) = - \left(\frac{2h(x)}{1 + \|h(x)\|^2}, \frac{1 - \|h(x)\|^2}{1 + \|h(x)\|^2} \right)$$

con $\|x - c\| < \frac{3}{2}$. Igualando las últimas componentes resulta que $\|h(x)\|^2 = \tau(x)$, y en particular $h(x) \neq 0$. Así, al igualar las otras componentes, podemos simplificar $2h(x)$ y queda

$$\frac{\tau(x)}{\tau(x)^2 + \|h(x)\|^2} = \frac{-1}{1 + \|h(x)\|^2}.$$

Esto es imposible pues $\tau \geq 0$.

(4) Denotamos $L = d_c h$. Entre $L - L(c)$ y h podemos definir la siguiente homotopía

$$H_t(x) = \begin{cases} \frac{h(tx + (1-t)c)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ L(x - c) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

En efecto, solo hay que comprobar la continuidad. Para ello denotamos h_i las componentes de h y L_i las de L , de modo que $L_i = d_c h_i$. Escribimos $u = t(x - c)$, y de la definición de derivada resulta

$$\frac{h_i(c + u) - h_i(c) - L_i(u)}{\|u\|} = \frac{h_i(c + t(x - c)) - tL_i(x - c)}{|t|\|x - c\|} \rightarrow 0$$

para $u \rightarrow 0$. Si $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$, efectivamente $u \rightarrow 0$ y $\|x - c\|$ está acotado. En consecuencia,

$$\left| \frac{h_i(tx + (1 - t)c)}{t} - L_i(x - c) \right| = \frac{|h_i(c - t(x - c)) - tL_i(x - c)|}{|t|} \rightarrow 0.$$

Como L_i es continua, existen los límites

$$\lim_{(t, x_0) \rightarrow (0, x_0)} \frac{h_i(tx + (1 - t)c)}{t} = L_i(x_0 - c),$$

y la homotopía es continua.

(5) Supongamos que L es un isomorfismo lineal. Entonces c es el único cero de $L(x - c)$, y ya sabíamos que era el único de $h(x)$ en $\|x - c\| < \frac{3}{2}$. De esto resulta que $H_t(x) = 0$ con $\|x - c\| < \frac{3}{2}$ si y sólo si $x = c$. Por tanto podemos aplicar el procedimiento de extensión antipodal a H_t para obtener \overline{H}_t . Es claro que al sustituir h por H_t en todo el proceso, se obtiene continuidad respecto de las dos variables (t, x) , con lo que \overline{H}_t es una homotopía. La homotopía es entre la extensión antipodal $\overline{L - L(c)}$ de $H_0 = L - L(c)$ y la extensión antipodal \overline{h} de $H_1 = h$. Además:

$$\overline{H}_t(x) \equiv p_S \quad \text{fuera de la bola } \|x - c\| < 1.$$

(6) Ahora distinguimos el signo positivo o negativo del determinante del isomorfismo lineal L . Elegimos una aplicación lineal A cuyo determinante tenga el mismo signo: la identidad I o la simetría S respecto de la primera variable. Sabemos que las matrices $m \times m$ son puntos del espacio $\mathbb{R}^{m \times m}$ y que el abierto $\det = 0$ tiene dos componentes conexas: $\det > 0$ y $\det < 0$. Así, L y A están en la misma componente conexa y existe una aplicación continua $t \mapsto A_t$ de forma que $A_0 = L$, $A_1 = A$ y $\det(A_t) \neq 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Resulta que $B_t = A_t - A_t(c)$ solo se anula en c y podemos definir su extensión antipodal \overline{B}_t . Así obtenemos una homotopía entre la extensión antipodal de $\overline{B}_0 = L - L(c)$ y la de $\overline{B}_1 = A - A(c)$. Combinada con la homotopía de (5), tenemos que \overline{h} es homótopa a la extensión antipodal de $A - A(c)$, que denotamos h^* . Por construcción, h^* es la extensión antipodal de

$$\begin{cases} \text{la traslación } x - c & \text{si } d_c h \text{ tiene determinante positivo, y} \\ \text{la simetría } S(x) - S(c) & \text{si } d_c h \text{ tiene determinante negativo.} \end{cases}$$

En particular, $h^* \equiv p_S$ fuera de $\|x - c\| < 1$.

(7) Para terminar, comparemos dos extensiones antipodales del tipo anterior, h_1^* y h_2^* correspondientes a dos puntos c_1 y c_2 tales que $c_2 = S(c_1)$ y $\text{sign}_{c_2} h_2 = -\text{sign}_{c_1} h_1$. Resulta que

$$h_1^*(x) = h_2^*(S(x)).$$

En efecto, la condición de los signos significa que una extensión es de la traslación y la otra de la simetría, por ejemplo h_1^* la traslación y h_2^* la simetría. Ponemos $z = S(x)$, con lo

que $x = S(z)$. Ahora observamos que como S es una isometría, $\|x - c_1\| = \|z - c_2\|$. Donde las extensiones antipodales son $\equiv p_S$ la cosa es trivial, así que sea $\|x - c_1\| = \|z - c_2\| < 1$. Entonces

$$\tau_1(x) = \mu(\|x - c_1\|^2) = \mu(\|z - c_2\|^2) = \tau_2(z) \neq 0,$$

y calculando explícitamente:

$$\begin{aligned} h_1^*(x) &= \left(\frac{2\tau_1(x)\|x - c_1\|^2}{\tau_1(x)^2 + \|x - c_1\|^2}, \frac{\tau_1(x)^2 - \|x - c_1\|^2}{\tau_1(x)^2 + \|x - c_1\|^2} \right) \\ &= \left(\frac{2\tau_2(z)\|S(z) - S(c_2)\|^2}{\tau_2(z)^2 + \|S(z) - S(c_2)\|^2}, \frac{\tau_2(z)^2 - \|S(z) - S(c_2)\|^2}{\tau_2(z)^2 + \|S(z) - S(c_2)\|^2} \right) \\ &= h_2^*(z) = h_2^*(S(x)). \end{aligned}$$

□

Pasamos ahora a la demostración del resultado principal:

Teorema 5.4 (de Hopf). *Sea M una variedad de dimensión m conexa, compacta, orientada y sin borde. Dos aplicaciones continuas $f, g : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ que tienen el mismo grado de Brouwer-Kronecker son homótopas.*

Demostración. Supongamos $d = \deg(f) = \deg(g) \geq 0$ (resp. $-d = \deg(f) = \deg(g) \leq 0$). En virtud de 2.19 podemos suponer que f y g son diferenciables. Fijemos un dominio de coordenadas $U \subset M$ difeomorfo a \mathbb{R}^m por un difeomorfismo que conserve la orientación y d puntos $c_1, \dots, c_d \in U$ (ninguno si $d = 0$). Con la identificación $U \equiv \mathbb{R}^m$, esos puntos se toman de la forma

$$c_i = (3(s + i), 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, d,$$

para un entero positivo s suficientemente grande.

A partir de ahora, nos concentramos en f para construir una aplicación \tilde{f} homótopa a f que solo dependerá del grado d y del entero s elegido.

(a) Sea a un valor regular de f . Si a no es el polo norte $p_N \in \mathbb{S}^m$ consideramos una difeotopía F_t de \mathbb{S}^m que una a con p_N (2.22). Como $F_t \circ f$ es una homotopía, podemos reemplazar $f = F_0 \circ f$ por $F_1 \circ f$. Puesto que $F_1(a) = p_N$ y F_1 es un difeomorfismo, p_N es un valor regular de $F_1 \circ f$. Todo esto significa que podemos suponer que p_N es un valor regular de f .

En esta situación, p_N tiene $2r + d$ preimágenes de forma que en $r + d$ de ellas f tiene signo positivo (resp. negativo) y en r de ellas lo tiene negativo (resp. positivo). Con este r determinamos s : debe ser $s \geq r$. Ahora tomamos los siguientes $2r$ puntos $p_1, q_1, \dots, p_r, q_r \in U \equiv \mathbb{R}^m$

$$p_k = (3k, 0, \dots, 0), \quad q_k = (-3k, 0, \dots, 0) \quad k = 1, \dots, r.$$

Por el corolario 2.23 existe una difeotopía F_t que une los puntos p_k, c_i con $r + d$ puntos $F_1(p_k), F_1(c_i) \in f^{-1}(p_N)$ en los que el signo de f es positivo (resp. negativo) y los puntos q_k con r puntos $F_1(q_k) \in f^{-1}(p_N)$ en los que el signo de f es negativo (resp. positivo). Reemplazando $f = f \circ F_0$ por $f \circ F_1$, que es una aplicación homótopa a f , conseguimos que p_N sea un valor regular con preimágenes p_k, q_k, c_i .

(b) Tras toda esta preparación podemos aplicar la extensión antipodal a f como sigue. Para tratar los puntos q_k, p_k, c_i más cómodamente los renombramos a partir de ahora a_ℓ . Como distan entre sí al menos 3, cada a_ℓ es la única preimagen de p_N con $\|x - a_\ell\| < \frac{3}{2}$, y podemos definir las extensiones antipodales \bar{h}_ℓ según 5.3 con todas las propiedades que allí se obtenían. Esas extensiones son todas $\equiv p_S$ fuera de las bolas disjuntas $\|x - a_\ell\| < 1$, luego se pegan obteniendo $\bar{h} : M \rightarrow \mathbb{S}^m$.

Las aplicaciones f y \bar{h} no tienen imágenes antipodales. En efecto, si $\|x - a_\ell\| < 1$ para algún a_ℓ , las imágenes $f(x)$ y $\bar{h}(x) = \bar{h}_\ell(x)$ no son antipodales por 5.3(3), y si $\|x - a_\ell\| \geq 1$ para todos los a_ℓ , entonces $f(x) \neq p_N$ y $\bar{h}(x) = p_S$ no son antipodales. Así pues, resulta de la proposición 2.16 que f y \bar{h} son homótopas.

Por otra parte, según 5.3(6), cada $\bar{h}_\ell : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ es homótopa a una aplicación diferenciable $h_\ell^* : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ con las propiedades que allí se detallan. Una de ellas es que, como las \bar{h}_ℓ , también las h_ℓ^* son $\equiv p_S$ fuera de $\|x - a_\ell\| < 1$, así que se pegan para obtener una aplicación diferenciable $h^* : M \rightarrow \mathbb{S}^m$. De igual manera se pegan las homotopías entre las \bar{h}_ℓ y las h_ℓ^* para concluir que \bar{h} , y por tanto f , es homótopa a h^* .

(c) Finalmente, escribamos las propiedades de h^* que nos interesan. En primer lugar se desprende de lo anterior que:

(i) $h^* \equiv p_S$ fuera de las bolas de radio 1 centradas en los puntos p_k, q_k, c_i ,

y la condición 5.3(7) se convierte en

(ii) $h^*(x_1, y) = h^*(-x_1, y)$ para $x = (x_1, y)$ en la bola de centro p_k y radio 1.

La condición (ii) permite definir la siguiente homotopía:

$$H_t(x_1, y) = \begin{cases} h^*(t, y) & \text{si } |x_1| \leq t, \\ h^*(x_1, y) & \text{si } |x_1| \geq t, \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 3r+1.$$

Como $H_t \equiv -p_N$ fuera de $-3r-1 \leq x_1 \leq 3(s+d)+1$, $\|y\| \leq 1$, podemos extenderla a $M \supset U \equiv \mathbb{R}^m$, así que tenemos $H_0 = h^*$. En esta situación la aplicación \tilde{f} buscada es:

$$\tilde{f} = H_{3d+1} = \begin{cases} h^*(x) & \text{en las bolas de radio 1 centradas en los } c_i, \\ p_S & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Evidentemente \tilde{f} es homótopa a h^* , y como ésta lo es a f , también \tilde{f} es homótopa a f . Como h^* en las bolas de centros c_i es la extensión antipodal de las traslaciones $x - c_i$, resulta que \tilde{f} solo depende de d y de s .

Terminada la construcción para f , hagamos la análoga para obtener una aplicación \tilde{g} homótopa a g . Claramente podemos elegir el s de f suficientemente grande para que valga también con g , y por tanto $\tilde{g} = \tilde{f}$. Así, f es homótopa a $\tilde{f} = \tilde{g}$, que lo es a g , luego concluimos que f y g son homótopas. \square

Ya sabíamos que el grado se conserva por homotopía (3.12), luego tenemos que, con M como en el teorema, dos aplicaciones continuas $M \rightarrow \mathbb{S}^m$ tienen el mismo grado si y solo si son homótopas. Como por la proposición 5.1 las hay de todos los grados, concluimos:

Corolario 5.5. *Sea M una variedad de dimensión m conexa, compacta, orientada y sin borde. Entonces*

$$\pi^m(M) = \mathbb{Z}.$$

En particular, $\pi_m(\mathbb{S}^m) = \pi^m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$.

6. GRUPOS DE HOMOTOPÍA DE LAS ESFERAS

Después del teorema de Hopf, el siguiente paso es analizar las clases de homotopía de las aplicaciones continuas de una variedad en una esfera de dimensión distinta. Si la dimensión es mayor, la conclusión es fácil:

Proposición 6.1. *Sea N una variedad conexa de dimensión $n < m$. Toda aplicación continua $f : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ es nulhomótopa, esto es $\pi^m(N) = 0$. En particular $\pi_n(\mathbb{S}^m) = \pi^m(\mathbb{S}^n) = 0$.*

Demostración. Por aproximación, f es homótopa a una aplicación diferenciable, luego podemos simplemente suponer que f es diferenciable. Entonces, por el teorema de Sard-Brown 2.14, f no es suprayectiva, y ya vimos (2.16) que en ese caso f es nulhomótopa. \square

Así pues, se trata de estudiar aplicaciones $N \rightarrow \mathbb{S}^m$ cuando N tiene dimensión $n > m$. Para empezar es fácil producir muchos ejemplos de aplicaciones no homótomas:

Ejemplo 6.2. Sea M una variedad conexa sin borde de dimensión m , y sea $N = M \times \mathbb{S}^n$. Para cada entero d elegimos una aplicación diferenciable $f_d : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado d y definimos $F_d : M \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ por $F_d(x, y) = f_d(x)$. Resulta que dos de estas aplicaciones no son homótomas. En particular, $\pi^m(N) = [N, \mathbb{S}^m]$ es infinito.

En efecto, si $H_t(x, y)$ es una homotopía con $H_0 = F_d$ y $H_1 = F_{d'}$, entonces fijando $y = b \in \mathbb{S}^n$ obtenemos una nueva homotopía $H'_t(x) = H_t(x, b)$ con $H'_0 = f_d$ y $H'_1 = f_{d'}$. En consecuencia, f_d y $f_{d'}$ tienen que tener el mismo grado, es decir, $d = d'$. \square

Pero el problema general de determinar exactamente el conjunto $[N, \mathbb{S}^m]$ es un problema abierto muy difícil, ya cuando N es una esfera. Sólo para $m = 1$ se puede dar la solución elemental:

Proposición 6.3. *Todas las aplicaciones continuas $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$, $n > 1$, son nulhomótomas. Es decir, $\pi_n(\mathbb{S}^1) = \{0\}$ para $n > 1$.*

Demostración. Consideremos la función exponencial

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta),$$

que es un difeomorfismo local: su restricción a cualquier intervalo abierto de amplitud $\leq 2\pi$ es difeomorfismo. Vamos a utilizar el resultado de elevación 2.17. Probaremos ese mismo resultado para las esferas \mathbb{S}^n con $n > 2$, que no son conjuntos convexos, pero sí simplemente conexos. El enunciado se seguirá inmediatamente: dada $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^1$ se considera una elevación $\bar{f} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (es decir, $h \circ \bar{f} = f$) y $H_t(x) = h(t\bar{f}(x))$ es una homotopía con H_0 constante y $H_1 = f$.

Sea pues $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua de la que queremos construir una elevación $\bar{f} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Para ello fijamos $x_0 \in \mathbb{S}^m$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ con $h(\theta_0) = f(x_0)$. Por

definición, $\overline{f}(x_0) = \theta_0$, y para definir la imagen $\overline{f}(x)$ de otro punto $x \in \mathbb{S}^m$ procedemos como sigue. Consideramos un camino $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^m$ con $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x$. Por el resultado de elevación para el convexo $K = [0, 1]$, la aplicación $f \circ \sigma$ tiene una única elevación $\overline{f \circ \sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\overline{f \circ \sigma}(0) = \theta_0$ y ponemos $\overline{f}(x) = \overline{f \circ \sigma}(1)$. Tenemos que demostrar que esta definición no depende de la elección de σ .

Sea τ otro camino de x_0 a x con la correspondiente elevación $\overline{f \circ \tau}$. Queremos comprobar que $\overline{f \circ \sigma}(1) = \overline{f \circ \tau}(1)$. Como \mathbb{S}^m es simplemente conexo, existe una homotopía $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^m$ con extremos fijos entre σ y τ , es decir:

$$H(0, u) = \sigma(u), \quad H(1, u) = \tau(u), \quad H(t, 0) = x_0, \quad H(t, 1) = x.$$

De nuevo por el resultado de elevación, ahora para $K = [0, 1] \times [0, 1]$, la aplicación $f \circ H$ tiene asociada $\overline{f \circ H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\overline{f \circ H}(0, 0) = \theta_0$. Ahora observamos:

(1) $\overline{f \circ H}(0, u)$ es una elevación de $f \circ H(0, u) = f \circ \sigma(u)$ con $\overline{f \circ H}(0, 0) = \theta_0$. Por tanto $\overline{f \circ H}(0, u) = \overline{f \circ \sigma}(u)$.

(2) $\overline{f \circ H}(t, 0)$ es una elevación de $f \circ H(t, 0) \equiv f(x_0)$, luego por la unicidad de las elevaciones, tiene que ser constante: $\overline{f \circ H}(t, 0) \equiv \overline{f \circ H}(0, 0) = \theta_0$.

(3) $\overline{f \circ H}(t, 1)$ es una elevación de $f \circ H(t, 1) \equiv f(x)$, luego por la unicidad de las elevaciones, tiene que ser constante: $\overline{f \circ H}(t, 1) \equiv \overline{f \circ H}(0, 1)$.

(4) $\overline{f \circ H}(1, u)$ es una elevación de $f \circ H(1, u) = f \circ \tau(u)$, y por (2) es $\overline{f \circ H}(1, 0) = \theta_0$. Así tiene que ser $\overline{f \circ H}(1, u) = \overline{f \circ \tau}(u)$.

En suma, de (1), (3) y (4) deducimos lo que interesa:

$$\overline{f \circ \sigma}(1) \stackrel{(1)}{=} \overline{f \circ H}(0, 1) \stackrel{(3)}{=} \overline{f \circ H}(1, 1) \stackrel{(4)}{=} \overline{f \circ \tau}(1).$$

Esto prueba que \overline{f} está bien definida. Que es continua resulta inmediatamente de la igualdad $h \circ \overline{f} = f$, pues h es homeomorfismo local. \square

A la vista de este resultado y siguiendo el comportamiento de la homología, podría creerse que $\pi_n(\mathbb{S}^m) = 0$ para $n > m$. Sin embargo, esto no es así: para sorpresa de la comunidad matemática del momento, Hopf encontró una aplicación $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ no nul-homótopa. Para ilustrar la misteriosa naturaleza de los grupos de homotopía de la esferas basta analizar la tabla siguiente:

		$\pi_n(\mathbb{S}^m)$												
		$n \rightarrow$												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
m \downarrow	1	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	
	3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	
	4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	
	5	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{30}	
	6	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	
	7	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0	
	8	0	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	

La diagonal de esta tabla, los grupos $\pi_m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$, se ha obtenido en el corolario 5.5 del teorema de Hopf 5.4. Los ceros debajo de la diagonal son la proposición 6.1 (que se ha demostrado utilizando el teorema de Sard-Brown). Los ceros de la primera línea son la proposición 6.3. El resto de la tabla sigue algunas pautas de formación cuya naturaleza escapa a este trabajo. Sin embargo, sí podemos explicar rigurosamente mediante el grado por qué el grupo $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ es infinito. Dedicamos a esto la sección siguiente.

7. INVARIANTE DE HOPF

Vamos a definir el invariante de Hopf, una variante del grado para aplicaciones entre esferas de ciertas dimensiones. Primero, fijemos notaciones. Consideremos la esfera unidad n -dimensional $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $n \geq 3$, y los polos norte y sur $P_N = (0, \dots, 0, 1)$ y $P_S = (0, \dots, 0, -1)$, respectivamente, y sea $\phi : \mathbb{S}^n \setminus \{P_S\} \rightarrow T_p\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica desde el polo sur. Sea $U \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ el abierto definido por las inequaciones $x \neq y$, $x \neq P_S$, $y \neq P_S$, y consideremos la aplicación diferenciable

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} : (x, y) \mapsto \frac{\phi(y) - \phi(x)}{\|\phi(y) - \phi(x)\|}.$$

Nosotros queremos estudiar la aplicación $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ con $n = 2m - 1$, $m \geq 2$.

Proposición 7.1. *Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ una aplicación diferenciable. Si f es sobreyectiva, sean $a, b \neq f(P_S)$ dos valores regulares de f . Entonces $f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \subset U$ es una variedad de dimensión $2m - 2$ compacta, orientada y sin borde, y la restricción de Φ a dicha variedad es una aplicación diferenciable $\phi_{a,b}$ cuyo grado no depende de a y b .*

Demostración. La preimagen de un valor regular es una variedad de dimensión $m - 1$, por 2.13, luego el producto $f^{-1}(a) \times f^{-1}(b)$ es una variedad orientada 2 de dimensión $2m - 2$ para a y b valores regulares de f . Como las preimágenes $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ son compactas, disjuntas y no contienen al polo sur, la variedad producto está contenida en el abierto U , así que el grado $\deg(\phi_{a,b})$ está definido. Veamos ahora que $\deg(\phi_{a,b})$ no depende de a . De forma análoga se demuestra que tampoco depende de b . Sea $a' \neq f(P_S)$ otro valor regular de f distinto de b , y sea F_t una difeotopía en \mathbb{S}^m que deja fijos b y $f(P_S)$ y que es la identidad fuera de un entorno W de a y a' tal que $F_1(a') = a$, posible gracias al teorema de difeotopía 2.22.

Primero supongamos que a' y a están suficientemente cerca, i.e., que podemos tomar $W \subset R_f$, lo que implica que a es un valor regular de la aplicación diferenciable $H_t(x) = F_t(f(x))$, pues si $a = H_t(x) = F_t(f(x))$, con lo que $f(x) \in W \subset R_f$ y x es un punto regular de f . Así obtenemos que $d_x f$ es sobreyectiva y como F_t es un difeomorfismo, la derivada $d_x H_t = d_{f(x)F_t} \circ d_x f$ es sobreyectiva. En consecuencia, también a es un valor regular de $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ y de su restricción al borde, y por 2.13 $H^{-1}(a)$ es una variedad compacta tal que

$$P_S \notin H_t^{-1}(a) \quad y \quad H_t^{-1}(a) \cap f^{-1}(b) = \emptyset \quad \forall t.$$

Para probar la primera condición, si $a = H_t(P_S) = F_t(f(P_S))$, entonces $f(P_S) \in W$, contradicción con la elección de W . Para la segunda, si $a = H_t(x) = F_t(f(x))$, entonces $f(x) \in W$, pero $b \notin W$, así que $f(x) \neq b$.

Así, la aplicación diferenciable

$$\bar{\Phi} : X = H^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{S}^{2m-2} : (t, x, y) \mapsto \frac{\phi(y) - \phi(x)}{\|\phi(y) - \phi(x)\|}$$

está bien definida. Por el teorema del borde 3.8 tenemos que

$$0 = \deg(\bar{\Phi}|_{\partial X}), \quad \text{donde } \partial X = \partial H^{-1}(a) \times f^{-1}(b).$$

Notamos que $\partial H^{-1}(a)$ es la unión disjunta de $\{0\} \times f^{-1}(a)$ y $\{1\} \times f^{-1}(a')$ con diferente orientación en cada parte. Por tanto, ∂X consiste en la unión disjunta de $\{0\} \times f^{-1}(a) \times f^{-1}(b)$ y $\{1\} \times f^{-1}(a') \times f^{-1}(b)$ con diferente orientación en cada parte. Por definición, $\bar{\Phi}$ se restringe a $\phi_{a,b}$ en la primera componente y a $\phi_{a',b}$ en la segunda. Con lo que ya teníamos, concluimos

$$0 = \deg(\bar{\Phi}|_{\partial X}) = \deg(\phi_{a,b}) - \deg(\phi_{a',b}).$$

Ahora supongamos a' un valor regular arbitrario de f y sea F_t una difeotopía como la anterior, pero ahora no sabemos si a es valor regular de $H_t = F_t \circ f$. Por el teorema de Sard-Brown 2.14, hay un valor regular a_1 de H y de su restricción al borde cercano a a tal que $F_1^{-1}(a_1) = a'_1$ está cercano a a' . Por el caso anterior tenemos

$$\deg(\phi_{a,b}) = \deg(\phi_{a_1,b}) \quad \text{y} \quad \deg(\phi_{a',b}) = \deg(\phi_{a'_1,b}).$$

Por el caso anterior para $H^{-1}(a_1)$ en el lugar de $H^{-1}(a)$ tenemos que $\deg(\phi_{a'_1,b}) = \deg(\phi_{a_1,b})$. Y obtenemos el resultado

$$\deg(\phi_{a,b}) = \deg(\phi_{a',b}).$$

□

Gracias a esta proposición el invariante de Hopf estará bien definido:

Definición 7.2. Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ una aplicación diferenciable. Si f no es sobreyectiva definimos $H(f) = 0$. Si f es sobreyectiva consideramos dos valores regulares de f , $a, b \neq f(-p)$ y definimos $H(f) = \deg(\phi_{a,b})$. El entero $H(f)$ se denomina *invariante de Hopf*.

Observamos que si m es impar el invariante de Hopf se anula. En efecto, podemos factorizar $\phi_{a,b}$ como sigue:

$$\phi_{a,b} : f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \xrightarrow{\tau} f^{-1}(b) \times f^{-1}(a) \xrightarrow{\phi_{b,a}} \mathbb{S}^{2m-2} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{S}^{2m-2},$$

donde τ es la permutación $(x, y) \mapsto (y, x)$ y σ es la aplicación antipodal $z \mapsto -z$. Los grados de τ y σ son $\deg(\tau) = (-1)^{(m-1)^2} = 1$ y $\deg(\sigma) = -1$. Para la antipodal ya lo hicimos en el ejemplo 3.6.

Para la permutación τ se procede de esta manera. Tomamos base positiva de $T_p f^{-1}(a) \times T_q f^{-1}(b)$ formada a partir de bases positivas de cada espacio tangente

$$\{u_1, \dots, u_{m-1}\} \subset T_p f^{-1}(a), \quad \{v_1, \dots, v_{m-1}\} \subset T_q f^{-1}(b)$$

Explícitamente, la base

$$\mathcal{B}_{p,q} = \{(u_1, 0), \dots, (u_{2m-1}, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_{2m-1})\} \subset T_p \mathbb{S}^{2m-1} \times T_q \mathbb{S}^{2m-1},$$

que se transforma en la base

$$\mathcal{B}' = \{(0, u_1), \dots, (0, u_{m-1}), (v_1, 0), \dots, (v_{m-1}, 0)\}.$$

Ahora en $T_q f^{-1}(b) \times T_p f^{-1}(a)$ consideramos la base

$$\mathcal{B}_{q,p} = \{(v_1, 0), \dots, (v_{m-1}, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_{m-1})\} \subset T_q f^{-1}(b) \times T_p f^{-1}(a),$$

de manera que el grado de τ viene dado por el determinante de cambio de esta base \mathcal{B}' a la base $\mathcal{B}_{q,p}$. Pero ese cambio de base consiste en permutar cada vector $(v_i, 0)$ con todos los $(0, u_j)$ para llevarlo detrás de ellos. Así tenemos $m - 1$ cambios de signo para cada $i = 1, \dots, m - 1$, y en total

$$\deg(\tau) = (-1)^{(m-1)^2}.$$

Una vez calculados estos grados, resulta:

$$H(f) = \deg(\phi_{a,b}) = \deg(\sigma) \cdot \deg(\phi_{b,a}) \cdot \deg(\tau) = -\deg(\phi_{b,a}) = -H(f),$$

y así $H(f) = 0$.

Ahora veamos que el invariante de Hopf es efectivamente invariante por homotopía. Para ello vamos a utilizar una notación nueva. Sean $f, g : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ dos aplicaciones diferenciables homótopas. Para f habíamos considerado ya $\phi_{a,b} : f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{S}^{2m-2}$. Ahora denotamos por $\phi_{a,b}^{A,B} : A^{-1}(a) \times B^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{S}^{2m-2} : (x, y) \mapsto \frac{\phi(y) - \phi(x)}{\|\phi(y) - \phi(x)\|}$, donde $A, B = f, g$.

Proposición 7.3. *Sean $f, g : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ dos aplicaciones diferenciables homótopas. Entonces, $H(f) = H(g)$.*

Demostración. Como $[0, 1] \times \mathbb{S}^{2m-1}$ es compacto, la homotopía H entre f y g , que podemos suponer diferenciable, es uniformemente continua, con lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|H_t(x) - H_s(x)\| < \frac{1}{2} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{S}^{2m-1} \text{ y } |t - s| < \varepsilon.$$

Como $[0, 1]$ es compacto, es suficiente probar que para $0 < |t - s| < \varepsilon$, H_t y H_s tienen el mismo tipo invariante de Hopf. Es decir, podemos asumir

$$\|H_t(x) - H_s(x)\| < \frac{1}{2} \quad \text{para todo } x, t, s.$$

El resultado es trivial si $H(f) = H(g) = 0$, así que supongamos que una de las dos aplicaciones es sobreyectiva, por ejemplo f . Como en la demostración anterior, vamos a utilizar un argumento referente al borde para demostrar

$$\deg(\phi_{a,b}^{f,f}) = \deg(\phi_{a,b}^{g,f}),$$

y análogamente

$$\deg(\phi_{a,b}^{g,g}) = \deg(\phi_{a,b}^{g,f}).$$

Nótese que el único problema es si están bien definidas las aplicaciones diferenciables

$$\bar{\Phi} : X = H^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{S}^{2m-2} : (t, x, y) \mapsto \frac{\phi(y) - \phi(x)}{\|\phi(y) - \phi(x)\|}$$

y

$$\bar{\Psi} : Y = g^{-1}(a) \times H^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{S}^{2m-2} : (x, t, y) \mapsto \frac{\phi(y) - \phi(x)}{\|\phi(y) - \phi(x)\|}.$$

Pero esto se verifica si $\|a - b\| \geq \frac{1}{2}$ y ni a ni b pertenecen a $H([0, 1] \times \{P_S\})$, lo que es posible por el teorema de Sard-Brown al ser $m \geq 2$.

En el caso de que g no sea sobreyectiva, podemos tomar $a \notin g(\mathbb{S}^{2m-1})$ de forma que $\partial H^{-1}(a) = \{0\} \times f^{-1}(a)$ y obtenemos

$$H(f) = \deg(\phi_{a,b}^{f,f}) = \deg(\bar{\Phi}|_{\partial X}) = 0 = H(g),$$

que es lo que queríamos probar. \square

Necesitamos aún otro resultado sobre el invariante de Hopf:

Proposición 7.4. Sean $g : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ y $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ dos aplicaciones diferenciables. Entonces

$$H(f \circ g) = H(f) \cdot \deg(g)$$

Demostración. Si m es impar, tenemos $H(f \circ g) = H(f) = 0$ y la igualdad se cumple. Si f no es sobreyectiva, tampoco lo es $f \circ g$ y de nuevo los dos invariantes de Hopf se anulan y hemos terminado. Supongamos entonces que m es par y que f es sobreyectiva. Para simplificar la notación suponemos a partir de ahora $m = 2$; además este es el m que usaremos después. Distinguimos varios casos en función de $\deg(g) = d$ para probar

$$H(f \circ g) = H(f) \cdot d.$$

Observemos que tanto el grado como el invariante de Hopf son invariantes por homotopía, podemos considerar funciones homótopas a f y g cuando lo necesitemos. Recordemos que, por el teorema de Hopf 5.4, una aplicación $g' : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ es homótopa a g si y solo si tiene su mismo grado.

Caso $d = 0$. Entonces g es homótopa a una aplicación g' constante. Componiendo una tal homotopía con f , tenemos que $f \circ g$ es homótopa a la aplicación $f \circ g'$, que es constante, luego

$$H(f \circ g) = H(f \circ g') = 0 = H(f) \cdot d.$$

Caso $d = 1$. Por lo dicho anteriormente, g es homótopa a la identidad en \mathbb{S}^{2m-1} , con lo que $f \circ g$ es homótopa a f y

$$H(f \circ g) = H(f) = H(f) \cdot d.$$

Caso $d = -1$. Podemos suponer que g es la simetría respecto a la primera variable x_1 , que tiene grado -1 como g . Además, consideramos la simetría g' respecto de la primera variable en \mathbb{S}^2 . Utilizaremos las ecuaciones de la proyección estereográfica [1, II.1, II.2] y la notación de la demostración de la proposición 7.3. Dados dos valores regulares a y b de f , por ser g difeomorfismo también lo son de $f \circ g$. Claramente $g((f \circ g)^{-1}(a)) = f^{-1}(a)$ y denotaremos g_a la restricción de g a $(f \circ g)^{-1}(a)$; análogamente definimos g_b . Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) & \xrightarrow{\phi_{a,b}^{f,f}} & \mathbb{S}^2 \\ \uparrow g_a \times g_b & & \uparrow g' \\ g^{-1}f^{-1}(a) \times g^{-1}f^{-1}(b) & \xrightarrow{\phi_{a,b}^{f \circ g, f \circ g}} & \mathbb{S}^2. \end{array}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} g' \phi_{a,b}^{f,f}(g(x), g(y)) &= g' \left(\frac{\phi g(x) - \phi g(y)}{\|\phi g(x) - \phi g(y)\|} \right) \\ &= \frac{g' \phi g(x) - g' \phi g(y)}{\|g' \phi g(x) - g' \phi g(y)\|}, \end{aligned}$$

pues g' es una isometría lineal. Ahora,

$$\begin{aligned} g' \phi g(x) &= g \phi(-x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= g' \left(\frac{-x_1}{1+x_4}, \frac{x_2}{1+x_4}, \frac{x_3}{1+x_4} \right) \\ &= \left(\frac{x_1}{1+x_4}, \frac{x_2}{1+x_4}, \frac{x_3}{1+x_4} \right) = \phi(x). \end{aligned}$$

Con esto deducimos

$$g' \phi_{a,b}^{f,f}(g(x), g(y)) = \frac{\phi(x) - \phi(y)}{\|\phi(x) - \phi(y)\|} = \phi_{a,b}^{f \circ g, f \circ g}(x, y).$$

Así obtenemos

$$H(f \circ g) = \deg(g') \cdot H(f) \cdot \deg(g_a \times g_b) = \deg(g) \cdot H(f) \cdot \deg(g_a \times g_b).$$

Queda ver para terminar este caso que $\deg(g_a \times g_b) = 1$. Pero por 2.31 sabemos que tanto g_a como g_b invierten la orientación y por tanto su producto cartesiano la conserva. Como es un difeomorfismo su grado es $+1$.

Caso $d > 1$. Podemos suponer que g es diferenciable, que el polo norte $p_N = (0, 0, 1)$ es un valor regular suyo con $g^{-1}(0, 0, 1) = \{c_1, \dots, c_d\}$ y que existe un entorno V de p_N tal que $g^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^d U_i$, donde U_i es un entorno abierto de c_i y $g|_{U_i}$ es un difeomorfismo que conserva la orientación. También podemos suponer dados abiertos V_i que no contengan al polo sur p_S con $\bar{U}_i \subset V_i$, de forma que entre las proyecciones estereográficas sobre \mathbb{R}^2 desde el polo sur de cada dos de ellos haya una recta y que $g \equiv p_S = (0, 0, -1)$ fuera de los U_i . Denotamos por g_i a la aplicación que coincide con g en V_i y envía el resto al polo sur p_S . Por construcción, cada g_i está bien definida y $\deg(g_i) = 1$.

Sean $a, b \in \mathbb{S}^2$ dos puntos regulares de f con $a, b \neq f(p_S) = f(g(p_S))$. Utilizando una difeotopía podemos suponer que todos los puntos de $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ están en V y así son valores regulares de $f \circ g$. Por tanto

$$(f \circ g)^{-1}(a) = \bigcup_{i=1}^d g_i^{-1}(f^{-1}(a)), \quad (f \circ g)^{-1}(b) = \bigcup_{i=1}^d g_i^{-1}(f^{-1}(b))$$

y podemos empezar a calcular el invariante

$$H(f \circ g) = \deg(\phi_{a,b}^{f \circ g, f \circ g}) = \sum_{i,j=1}^d \deg(\phi_{a,b}^{f \circ g_i, f \circ g_j}).$$

Por como hemos escogido los V_i , para $i \neq j$ hay una recta entre las proyecciones de V_i y V_j . Recordemos ahora la definición de

$$\phi_{a,b}^{f \circ g_i, f \circ g_j} : (f \circ g_i)^{-1}(a) \times (f \circ g_j)^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{S}^2 : (x, y) \mapsto \frac{\phi(y) - \phi(x)}{\|\phi(y) - \phi(x)\|}.$$

Vemos que para ningún par de puntos (x, y) de $V_i \times V_j$ tendremos una dirección $\phi(y) - \phi(x)$ paralela a la recta que separa sus proyecciones, con lo que esta aplicación no puede ser sobreyectiva sobre \mathbb{S}^2 y por tanto tiene grado 0.

Así, el cálculo del grado queda

$$H(f \circ g) = \sum_{i=1}^d \deg(\phi_{a,b}^{f \circ g_i, f \circ g_i}) = \sum_{i=1}^d H(f \circ g_i) = \sum_{i=1}^d H(f) = d \cdot H(f)$$

aplicando el caso $d = 1$ pues cada g_i tiene grado 1.

Caso $d < -1$. Tomamos g igual que en el apartado anterior, pero esta vez $g|_{U_i}$ invierte la orientación, con lo que $\deg(g_i) = -1$, para todo $i = 1, \dots, d$ y de forma análoga obtenemos el resultado.

□

Empecemos ya con la fibración de Hopf.

Definición 7.5. Sea $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la multiplicación de números complejos si $m = 2$, de cuaterniones para $m = 4$ y de octoniones en el caso $m = 8$, definimos la *fibración de Hopf* f mediante

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m : (x, y) \mapsto (\|x\|^2 - \|y\|^2, 2F(x, y)).$$

Vamos a calcular el invariante de Hopf para el caso $m = 2$, aunque el resultado también se cumple en los otros dos casos. En este caso, $m = 2$, tenemos una *fibración en circunferencias*, según iremos comprobando.

Proposición 7.6. *El invariante de Hopf de la fibración de Hopf $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es 1.*

Demostración. Primero calculemos las ecuaciones de la fibración de Hopf teniendo en cuenta que las de la multiplicación de números complejos F son

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1y_1 - x_2y_2, x_2y_1 + x_1y_2).$$

Hemos definido $f(x, y) = (\|x\|^2 - \|y\|^2, 2F(x, y))$ con lo que las ecuaciones son

$$(x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2, 2(x_1y_1 - x_2y_2), 2(x_2y_1 + x_1y_2)).$$

Veamos que los polos norte $p_N = (0, 0, 1)$ y sur $p_S = (0, 0, -1)$ de \mathbb{S}^2 son valores regulares de f . Primero calculemos sus preimágenes,

$$\begin{cases} f^{-1}(p_N) &= \mathbb{S}^3 \cap \{x_1y_1 - x_2y_2 = 0, x_2y_1 + x_1y_2 = -\frac{1}{2}\} = \mathbb{S}^3 \cap \{y_1 = x_2, y_2 = x_1\}, \\ f^{-1}(p_S) &= \mathbb{S}^3 \cap \{x_1y_1 - x_2y_2 = 0, x_2y_1 + x_1y_2 = \frac{1}{2}\} = \mathbb{S}^3 \cap \{y_1 = -x_2, y_2 = -x_1\}. \end{cases}$$

La derivada $d_{(x,y)}f : T_{(x,y)}\mathbb{S}^3 \rightarrow T_{f(x,y)}\mathbb{S}^2$ de f en una pareja genérica de puntos es la restricción de la aplicación lineal $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de matriz

$$L = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2y_1 & -2y_2 \\ 2y_1 & -2y_2 & 2x_1 & -2x_2 \\ 2y_2 & 2y_1 & 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

y en los puntos preimagen de p_N y p_S obtenemos las matrices de rango 3

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_2 & -2x_1 \\ 2x_2 & -2x_1 & 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_2 & 2x_1 \\ -2x_2 & 2x_1 & 2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2x_2 & 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Por tanto

$$\dim \ker(d_{(x,y)}f) = \dim (T_{(x,y)}\mathbb{S}^3 \cap \ker L) \leq \dim(\ker L) = 1,$$

y resulta que

$$\dim \operatorname{im}(d_{(x,y)}f) = \dim T_{(x,y)}\mathbb{S}^3 - \dim \ker(d_{(x,y)}f) \geq 3 - 1 = 2.$$

Por tanto la derivada $d_{(x,y)}f$ es sobreyectiva y tanto p_N como p_S son valores regulares de f . Así, $f^{-1}(p_N)$ y $f^{-1}(p_S)$ son variedades orientadas. Claramente ninguna contiene al polo sur $P_S \in \mathbb{S}^3$, luego podemos utilizar la proyección estereográfica $\phi : \mathbb{S}^3 \setminus \{P_S\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ como dominio de coordenadas para ambas.

Veamos que mediante la proyección estereográfica $\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ desde el polo sur las dos imágenes inversas $f^{-1}(p_N)$ y $f^{-1}(p_S)$ se transforman en elipses. Sustituyendo en las ecuaciones de ϕ las ecuaciones de los puntos de las preimágenes tenemos las ecuaciones

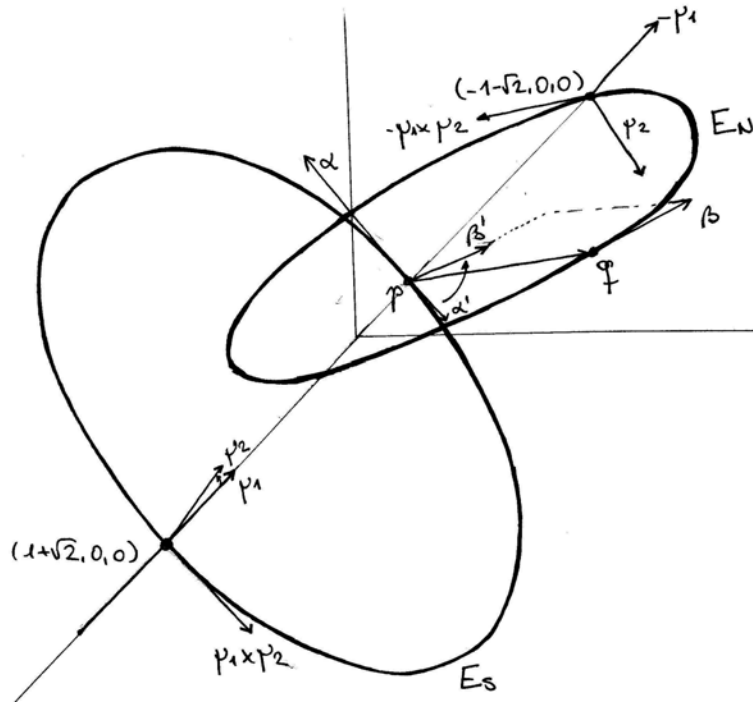
$$\left(\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1} \right)$$

para la preimagen del polo norte p_N y

$$\left(\frac{x_1}{1-x_1}, \frac{x_2}{1-x_1}, -\frac{x_2}{1-x_1} \right)$$

para la del polo sur p_S . Es decir, las elipses

$$E_N : \begin{cases} v - w = 0, \\ (u + 1)^2 + 2v^2 = 2, \end{cases} \quad E_S : \begin{cases} v + w = 0, \\ (u - 1)^2 + 2v^2 = 2. \end{cases}$$



Vamos a ver ahora qué orientación heredan estas elipses como imágenes inversas. Como carta en las preimágenes ya estamos utilizando la proyección estereográfica ϕ , que invierte la orientación. En la imagen \mathbb{S}^2 tomamos para E_N la carta de la proyección estereográfica desde el polo sur, que conserva la orientación. Llamando

$$(u, v, w) = \left(\frac{x_1}{1+y_2}, \frac{x_2}{1+y_2}, \frac{y_1}{1+y_2} \right)$$

y utilizando la expresión de la inversa de la proyección estereográfica tenemos que f viene dada por

$$g = \frac{1}{8}(4u^2 + 4v^2 - 4w^2 - (1 - t^2)^2, 8uw - 4v(1 - t^2))$$

donde

$$t^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad \text{y} \quad \delta = (1 + t^2)^2 + 4u(1 - t^2) + 8vw.$$

Entonces la elipse $E_N = \phi(f^{-1}(p_N))$ viene dada por

$$E_N : \begin{cases} \frac{1}{\delta}(4u^2 + 4v^2 - 4w^2 - (1 - t^2)^2) = 0, \\ \frac{1}{\delta}8uw - 4v(1 - t^2) = 0, \end{cases}$$

con lo que los gradientes μ_1 y μ_2 de esas expresiones, respectivamente, son perpendiculares a la elipse E_N . Así, su producto vectorial $\mu_1 \times \mu_2$ determina la orientación de la elipse si $d_{p_N}g$ los lleva a una base negativa de \mathbb{R}^2 , pues solo una de las parametrizaciones invierte la orientación. Pero

$$\det(d_{p_S}g(\mu_1), d_{p_S}g(\mu_2)) = \det(\langle \mu_i, \mu_j \rangle)_{i,j=1}^2 = \|\mu_1\|^2 \|\mu_2\|^2 - \langle \mu_1, \mu_2 \rangle^2 > 0,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Como la base es positiva, la orientación viene dada por $-\mu_1 \times \mu_2$. Para ver qué orientación es, basta coger un punto, por ejemplo,

$(-1 - \sqrt{2}, 0, 0)$ y calcular los gradientes en ese punto con los datos

$$\begin{cases} u = -1 - \sqrt{2} < 0, & v = w = 0, & t^2 = u^2 = 3 + 2\sqrt{2} > 0, \\ \delta = (1 + u^2)^2 + 4u(1 - u^2) = (1 + u^2)^2 + 8u^2 > 0. \end{cases}$$

Resulta

$$\mu_1 = \frac{1}{\delta}(8u(1 + u), 0, 0) = (+, 0, 0), \quad \mu_2 = \frac{1}{\delta}(0, -8u, 8u) = (0, +, -)$$

y la orientación viene dada por

$$-\mu_1 \times \mu_2 = \frac{1}{\delta^2}(0, -, -).$$

Para calcular los vectores en sí, tomamos los gradientes de la primera expresión de E_N , que son $(0, 1, -1)$ y $(2(u + 1), 4v, 0) = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$. Su producto escalar es $(0, -2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ que da la misma orientación que $-\mu_1 \times \mu_2$, pues ambos son tangentes a la elipse y su producto escalar es positivo.

Análogamente para E_S , tomamos en \mathbb{S}^2 la proyección estereográfica desde el polo norte en \mathbb{R}^2 , que invierte la orientación. Llamando

$$(u, v, w) = \left(\frac{x_1}{1 - y_2}, \frac{x_2}{1 - y_2}, \frac{y_1}{1 - y_2} \right)$$

y utilizando la expresión de la inversa de la proyección estereográfica tenemos que f viene dada por

$$h = \frac{1}{\delta}(4u^2 + 4v^2 - 4w^2 - (t^2 - 1)^2, 8uw - 4v(t^2 - 1))$$

donde

$$t^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad \text{y} \quad \delta = (1 + t^2)^2 - 4u(t^2 - 1) - 8vw.$$

Entonces la elipse $E_S = \phi(f^{-1}(p_S))$ viene dada por

$$E_S : \begin{cases} \frac{1}{\delta}(4u^2 + 4v^2 - 4w^2 - (t^2 - 1)^2) = 0, \\ \frac{1}{\delta}8uw - 4v(t^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

con lo que los gradientes μ_1 y μ_2 de esas expresiones, respectivamente, son perpendiculares a la elipse E_S . Así, su producto vectorial $\mu_1 \times \mu_2$ determina la orientación de la elipse, pues $d_{p_N}h$ los lleva a una base positiva de \mathbb{R}^2 :

$$\det(d_{p_N}h(\mu_1), d_{p_N}h(\mu_2)) = \det(\langle \mu_i, \mu_j \rangle)_{i,j=1}^2 = \|\mu_1\|^2 \|\mu_2\|^2 - \langle \mu_1, \mu_2 \rangle^2 > 0,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Para ver qué orientación es basta coger un punto, por ejemplo, $(1 + \sqrt{2}, 0, 0)$ y calcular los gradientes en ese punto con los datos

$$u = 1 + \sqrt{2} > 0, \quad v = w = 0, \quad t^2 - 1 = u^2 - 1 = 2u > 0, \quad \delta > 0.$$

Resulta

$$\mu_1 = \frac{1}{\delta}(8(1 - u)u, 0, 0) = (-, 0, 0) \mu_2 = \frac{1}{\delta}(0, -4(1 - u^2), 8u) = (0, 8u, 8u) = (0, +, +)$$

y la orientación viene dada por

$$\mu_1 \times \mu_2 = \frac{1}{\delta^2}(0, +, -).$$

Para calcular los vectores en sí, tomamos los gradientes de la primera expresión de E_a , que son $(0, 1, 1)$ y $(2(u - 1), 4v, 0) = (2\sqrt{2}, 0, 0)$. Su producto escalar es $(0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ que da la misma orientación que $\mu_1 \times \mu_2$, pues ambos son tangentes a la elipse y su producto escalar es positivo.

Por último, calculemos el grado de la aplicación

$$\Lambda : E_S \times E_N \rightarrow \mathbb{S}^2 : (p, q) \mapsto \frac{q - p}{\|q - p\|}.$$

La derivada de esta aplicación en el punto (p, q) consiste en la aplicación lineal $(\alpha, \beta) \mapsto \beta - \alpha$, proyectar luego en el plano perpendicular a $q - p$ y escalar por el factor $1/\|q - p\|$. Tomamos p, q y α, β como en el dibujo. Al estar E_N contenida en el plano $v - w = 0$ y E_S en $v + w = 0$, tenemos que $\Lambda^{-1}(\Lambda(p, q)) = \{(p, q)\}$; con lo que solo hay que comprobar que los vectores

$$d_{(p,q)}\Lambda(\alpha, 0) = \alpha' \quad \text{y} \quad d_{(p,q)}\Lambda(\beta, 0) = \beta'$$

forman una base positiva de $T_{\Lambda(p,q)}\mathbb{S}^2$ con la orientación canónica. Este es el plano perpendicular a $q - p$ por cómo es la derivada de Λ , así que es una base positiva si y solo si

$$\det(q - p, \alpha', \beta') > 0$$

pero esto está claro en el dibujo. Además, que el determinante sea no nulo significa que $\Lambda(p, q)$ es un valor regular de Λ y por tanto

$$\deg(\Lambda) = 1.$$

Con todo esto obtenemos el resultado, pues como $\phi_{p_N, p_S} = \Lambda \circ (\phi|_{f^{-1}(p_N)} \times \phi|_{f^{-1}(p_S)})$, es

$$H(f) = \deg(\phi_{p_N, p_S}) = \deg(\Lambda) \cdot \deg(\phi|_{f^{-1}(p_N)} \times \phi|_{f^{-1}(p_S)}) = 1.$$

Para concluir esto, solo hay que recordar que por 2.31 $\phi|_{f^{-1}(p_N)}$ invierte la orientación (como hace ϕ), y lo mismo hace $\phi|_{f^{-1}(p_S)}$ con lo que el producto la conserva y $\deg(\phi|_{f^{-1}(p_N)} \times \phi|_{f^{-1}(p_S)}) = 1$. \square

Inmediatamente deducimos:

Corolario 7.7. *Para cada entero d existe una aplicación diferenciable $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ cuyo invariante de Hopf es d . En consecuencia, $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ es infinito.*

Demostración. Para cada entero d existe una aplicación diferenciable $g_d : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ de grado d . Entonces, si denotamos $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la fibración de Hopf, tenemos por 7.4

$$H(f \circ g) = H(f) \deg(g_d) = d.$$

Por 7.3, estas aplicaciones no pueden ser homótopas, luego $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ es infinito. \square

Claramente, la última demostración también muestra que los grupos $\pi_7(\mathbb{S}^4)$ y $\pi_{15}(\mathbb{S}^8)$ son infinitos, si admitimos que las otras dos fibraciones de Hopf tienen invariante 1. Sin embargo, hay una diferencia significativa, pues estos dos últimos grupos tienen torsión, mientras que $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ no. En efecto, se tiene

$$\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}, \quad \pi_7(\mathbb{S}^4) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12} \quad \pi_{15}(\mathbb{S}^8) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{96}$$

(los dos primeros grupos ya estaban en la tabla de la sección anterior). En otras palabras, *el invariante de Hopf determina la clase de homotopía en $\pi_3(\mathbb{S}^2)$, pero no en los otros casos.*

REFERENCIAS

- [1] J.M. GAMBOA, J.M. RUIZ: *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*. 2, 3, 6, 9, 29
Sanz y Torres, Madrid 2006.
- [2] I. MADSEN, J. TORNEHAVE: *From Calculus to Cohomology*. 2
Cambridge University Press, Cambridge 1999.
- [3] J. MILNOR: *Topology from the differentiable viewpoint*. 2
Princeton University Press, Princeton 1997.
- [4] E. OUTERELO, J.M. RUIZ: *Topología diferencial*. 2
Addison-Wesley, Madrid 1988.
- [5] E. OUTERELO, J.M. RUIZ: *Mapping degree theory*. 2, 3, 5, 6
AMS, Providence 2009.
- [6] E. OUTERELO, J.M.^A SÁNCHEZ ABRIL: *Elementos de topología*. 2, 5
Sanz y Torres, Madrid 2008.