Sobre el orden de contacto entre variedades sumergidas

Javier Lafuente

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Madrid, Spain
javier-lafuente@mat.ucm.es

Dedicado al profesor Enrique Outerelo.

ABSTRACT

Se analiza el concepto de orden de contacto, y se sumerge el fibrado de escamas que describe los contactos de un orden dado, en la Grassmanniana del fibrado de escamas del orden anterior.

2000 Mathematics Subject Classification: 58A20, 53B25.
Key words: Contacto de orden superior, subvariedad, jet, fibrado grassmanniano.

1. Introducción

Se dice que el orden de contacto en un punto p entre dos variedades M y $\overline{M}$ de la misma dimensión $m \geq 1$, sumergidas en una variedad ambiente $\mathcal{E}$ de dimensión $n > m$ es al menos 1, si el punto p está en $M \cap \overline{M}$ y además los espacios tangentes T_pM y $T_p\,\overline{M}$ coinciden.

Hay sin embargo en la literatura diferentes puntos de vista, a la hora de establecer el concepto de *contacto de orden superior*, dependiendo del uso que se quiera dar a tal definición.

Una posibilidad consiste en definir el contacto en p de orden al menos $r \geq 1$ entre M y $\overline{M}$, por la condición de que exista una carta $(x_1 \ldots x_n)$ de $\mathcal{E}$ en torno a p, y parametrizaciones locales $\varphi, \overline{\varphi} : \mathbb{R}^m \to \mathcal{E}$ de M y $\overline{M}$ respectivamente con $\varphi(0) = \overline{\varphi}(0) = p$, de forma que todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r de $x_i \circ \varphi$ y $x_i \circ \overline{\varphi}$ coincidan en el origen.

Otra posibilidad, si queremos evitar las coordenadas, es considerar las inmersiones naturales de los fibrados tangentes TM y $T\overline{M}$ como subvariedades m-dimensionales en el fibrado Grassmaniano $G_m(\mathcal{E})$. Se define entonces el contacto entre M, y $\overline{M}$ de orden al menos 2 en el punto p de $\mathcal{E}$, como un contacto de orden al menos 1 de TM y $T\overline{M}$ en el *punto* $T_pM = T_p\,\overline{M}$ de $G_m(\mathcal{E})$.

El proceso se continua inductivamente para definir ordenes mayores de contacto. Esta construcción que puede ser útil en algunas aplicaciones, tiene el defecto de aumentar exponencialmente las dimensiones de los sucesivos espacios ambiente $G_m(\mathcal{E})$, $G_m(G_m(\mathcal{E}))$, $G_m(G_m(G_m(\mathcal{E})))$ ... etc. (para más detalles ver [1] (págs 1-4)).

Nosotros nos proponemos aquí, sustituir estos espacios ambiente por otros $G^1_m(\mathcal{E}) = G_m(\mathcal{E})$, $G^2_m(\mathcal{E}) \subset G_m(G_m(\mathcal{E}))$, $G^3_m(\mathcal{E}) \subset G_m(G_m(G_m(\mathcal{E})))$ ... etc, que determinan en cierto sentido, la parte relevante de los sucesivas Grassmanianas de $\mathcal{E}$ que intervienen en la definición de los ordenes de contacto.

Construimos pues, los fibrados $G^r_m(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ que denominamos fibrados de escamas de orden r de $\mathcal{E}$. Cada fibra $G^r_m(\mathcal{E}, p)$ está formada esencialmente por todos los tipos de contactos en $p \in \mathcal{E}$ de orden al menos r entre m-variedades sumergidas.

Este punto de vista, forma parte de un trabajo aún en proceso de elaboración, en el que tratamos de exponer una formalización general del método de Cartan de la referencia móvil para la clasificación *geométrica* de variedades sumergidas (siguiendo [1]), en donde el espacio ambiente $\mathcal{E}$ pertenece a una clase de Geometrías de Klein con cierto comportamiento regular respecto a los fibrados de escamas.

En lo que sigue, $\mathcal{E}$ es una variedad diferenciable de dimensión $n > 1$.

2. Elementos infinitesimales auxiliares

Se presentan aquí los elementos infinitesimales de orden superior, que intervienen en la construcción de los fibrados de escamas. La referencia general para este apartado es [2] págs 3-14.

2.1. Vectores tangentes de orden superior.

Dos curvas $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ de la variedad diferenciable $\mathcal{E}$, definen el mismo $r-$jet en $t = 0$, si $\alpha(0) = \beta(0) = a$, y en algún sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$ en torno a a, se verifica para todo k con $1 \leq k \leq r$:

$$\left.\frac{d^k(x_i \circ \alpha)}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k(x_i \circ \beta)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

La propiedad, no depende del sistema local de coordenadas utilizado. La relación anterior es de equivalencia, y denotamos por

$$\left.\frac{d^r\alpha(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \alpha^{(r)}(0) = j^r_0\alpha$$

a la clase de equivalencia definida por la curva α, y se denomina vector tangente de orden r en a. Se denota por $T^r_a\mathcal{E}$ al conjunto de todos ellos. La unión $T^r\mathcal{E} = J^r_1(\mathcal{E})$

constituye el fibrado tangente de orden r sobre $\mathcal{E}$. El vector tangente de orden r definido por α en $t = t_0$ es:

$$j_{t_0}^r \alpha = \alpha^{(r)}(t_0) = \left. \frac{d^r \alpha\,(t + t_0)}{dt^r} \right|_{t=0} \in T_{\alpha(t_0)}^r \mathcal{E}$$

$T^r\mathcal{E}$ es una variedad diferenciable. De hecho, a partir del sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n) = (x_i)$ se puede construir un sistema de coordenadas para $T^r\mathcal{E}$, $(x_i, x_i^1, \ldots x_i^r)$, en donde se entiende que

$$x_i^k \left(\alpha^{(r)}(0) \right) = \left. \frac{d^k\,(x_i \circ \alpha)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Además el operador T^r es funtorial, en el siguiente sentido:

Si $\phi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ es una aplicación diferenciable queda inducida $\phi_* = \phi^{(r)} : T^r\mathcal{E}_1 \to T^r\mathcal{E}_2$ por la condición:

$$\phi^{(r)} \left(\alpha^{(r)}(0) \right) = (\phi \circ \alpha)^{(r)}\,(0)$$

Además $(\psi \circ \phi)^{(r)} = \phi^{(r)} \circ \psi^{(r)}$ para ψ, ϕ aplicaciones diferenciables entre variedades.

Se construyen así las proyecciones naturales:

$$T^{r+1}\mathcal{E} \to T^r\mathcal{E} \to \cdots \to T^1\mathcal{E} = T\mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

2.2. Fibrados de jets

Si $f, \overline{f} : S \to \mathcal{E}$ son aplicaciones diferenciales entre variedades, diremos que f y $\overline{f}$ definen el mismo jet de orden r en $s \in S$ y escribimos $j_s^r f = j_s^r \overline{f}$, si para alguna parametrización local $(u_1, \ldots u_m)$ de S en torno a s y alguna parametrización local $(x_1 \ldots x_n)$ en torno a $f\,(s)$ en $\mathcal{E}$ se tiene que para todo $j = 1, \ldots n$, todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$:

$$\left. \frac{\partial^{|\alpha|}\,(x_j \circ f)\,(u_1, \ldots u_m)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}} \right|_{u(s)} = \left. \frac{\partial^{|\alpha|}\,\left(x_j \circ \overline{f}\right)(u_1, \ldots u_m)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}} \right|_{u(s)}$$

Esta propiedad es independiente de las parametrizaciones locales tomadas.

En particular tomando $S = \mathbb{R}^m$, si $\mathcal{C}_0^\infty\,(\mathbb{R}^m, \mathcal{E})$ denota al conjunto de las funciones $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathcal{E}$ diferenciables en un entorno del origen, podemos construir el fibrado de Jets

$$J_m^r\,(\mathcal{E}) = \{ j_0^r \varphi : \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\,(\mathbb{R}^m, \mathcal{E}) \}$$

sobre $\mathcal{E}$, con proyección $J_m^r\,(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$, $j_0^r \varphi \to \varphi\,(0)$. Se denota $J_m^r\,(\mathcal{E}, a)$ a la fibra sobre $a \in \mathcal{E}$. Nótese la identidad $J_1^r\,(\mathcal{E}, a) = T_a^r\mathcal{E}$

3. Orden de contacto

Proponemos una definición de orden de contacto (al menos) r en un punto, para dos variedades sumergidas en un mismo espacio ambiente. Se trata de imponer la propiedad de que los espacios tangentes de orden r de ambas variedades coincidan en el punto.

Demostramos que esta definición coincide con otras más habituales, en donde intervienen los jets de orden r de ciertas parametrizaciones de las variedades. Pero llamamos la atención de que el concepto de orden de contacto, es en todo caso, un concepto relativo a las variedades *desparametrizadas*.

3.1. Variedades sumergidas

Una variedad m-dimensional (sumergida) en $\mathcal{E}$ viene definida por una inmersión[1] $f : S \to \mathcal{E}$ donde S es una variedad diferenciable (abstracta) m-dimensional. Dos inmersiones $f_1 : S_1 \to \mathcal{E}$, $f_2 : S_2 \to \mathcal{E}$ se dice definen la misma variedad M (de $\mathcal{E}$), si existe un difeomorfismo $\phi : S_1 \to S_2$ tal que $f_1 = f_2 \circ \phi$. En este caso, denotamos $M = (f_1 : S_1) = (f_2 : S_2)$. A f_1 y f_2 se denominan representaciones paramétricas (o parametrizaciones) de M. Si $\lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es un difeomorfismo, entonces $\lambda(M) = (\lambda \circ f : S)$.

Si la variedad M admite una parametrización $f : S \to \mathcal{E}$ que es incrustamiento[2], entonces todas sus parametrizaciones lo son, y se dice que M es una variedad (sumergida) *regular* en $\mathcal{E}$. En este caso M puede identificarse con la imagen $f(S) = M$ que admite una única estructura de variedad diferenciable (abstracta) que hace a $f : S \to M$ difeomorfismo. La inclusión $M \hookrightarrow \mathcal{E}$ resulta ser entonces la representación paramétrica distinguida. Además la propiedad de ser M variedad regular de $\mathcal{E}$, depende solo del conjunto $M \subset \mathcal{E}$ (para mas detalles consultar [3])

Por otra parte, si $f : S \to \mathcal{E}$ es una variedad de $\mathcal{E}$, para cada $s_0 \in S$, existe un entorno S_0 de s_0 en S tal que $(f : S_0) = M_0$ es variedad regular de $\mathcal{E}$. Como estamos interesados sólo en cuestiones de tipo local, supondremos en adelante que todas las variedades son regulares (o equivalentemente que trabajamos en el entorno regular de un punto). En coordenadas locales locales se tiene el siguiente resultado (ver [3]):

Proposición 3.1 *Si $f : S \to \mathcal{E}$ es una variedad m-dimensional (sumergida) en $\mathcal{E}$, entonces para cada punto $s \in S$, existen un sistema de coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de $\mathcal{E}$ en torno a $a = f(s)$ con $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\widehat{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ y $x(a) = 0$, y otro $u = (u_1, \ldots, u_m)$ en torno a s con $u(s) = 0$, de forma que las ecuaciones de f son*

$$f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{cases}$$

[1] Es decir, aplicación diferenciable con diferencial inyectiva en cada punto

[2] Es decir, inmersión inyectiva que induce homeomorfismo sobre su imagen

3.2. Orden de contacto

Dado un punto $a = f(s) \in M$, el conjunto $T_a^r M = f^{(r)}(T_s^r S) \subset T_a^r \mathcal{E}$ es independiente del f, S tales que $M = (f : S)$. Las variedades M, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ se dice que tienen un contacto de orden al menos r $(r \geq 0)$ en el punto a, si $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s}) \in M \cap \overline{M}$ y $T_a^r M = T_a^r \overline{M}$, es decir $f^{(r)}(T_s^r S) = \overline{f}^{(r)}\left(T_{\overline{s}}^r \overline{S}\right)$.

Supuesto $n - m = c > 0$, sea $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^c)$ el grafo de ζ es

$$M(\zeta) = \{(u, \zeta(u)) : u \in \mathbb{R}^m\}$$

define en torno a 0 una m-variedad sumergida en $\mathbb{R}^n$. Descomponiendo:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^c = \left\{ x = (\widetilde{x}, \widehat{x}) \middle/ \begin{array}{c} \widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \\ \widehat{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^c \end{array} \right\} \tag{3.1}$$

Observación 3.2 *De forma más general, debemos admitir que el operador "$\sim$" puede obtenerse seleccionando m posiciones de las coordenadas (no necesariamente consecutivas) y el "$\wedge$" las restantes. Sin embargo, por razones de simplicidad siempre exhibiremos la descomposición dada en (3.1).*

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.3 *Sea $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^c)$. Entonces, el orden de contacto en el origen de $M(\zeta)$ y $R^m \times \left\{\widehat{0}\right\}$ es al menos r $(r \geq 0)$ si y solo si $j_0^r \zeta = 0$. Es decir:*

$$T_0^r M(\zeta) = T_0^r \left(\mathbb{R}^m \times \left\{\widehat{0}\right\}\right) \Leftrightarrow j_0^r \zeta = 0$$

Demostración. Obviamente la condición $T_0 M(\zeta) = T_0\left(\mathbb{R}^m \times \left\{\widehat{0}\right\}\right)$ equivale a decir

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0}, \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0$$

En efecto, supongamos $T_0^2 M(\zeta) = T_0^2\left(\mathbb{R}^m \times \left\{\widehat{0}\right\}\right)$. Una curva en $\mathbb{R}^m \times \left\{\widehat{0}\right\}$ por el origen es de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u(t) \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{array} \right. \quad u(0) = \widetilde{0}$$

y por tanto

$$T_0^2\left(\mathbb{R}^m \times \left\{\widehat{0}\right\}\right) = \left\{\left(0, x^{(1)}, x^{(2)}\right) : \widehat{x^1} = \widehat{x^2} = \widehat{0}\right\}$$

Una curva arbitraria por el origen contenida en $M(\zeta)$ tiene por ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u(t) \\ \widehat{x} = \zeta(u(t)) \end{array} \right. \quad u(0) = \widetilde{0}$$

y debemos imponer $\widehat{x}'(0) = \widehat{x}''(0) = \widehat{0}$. Se tiene para $i = 1, \dots, c$

$$0 = \left.\frac{dx_{m+i}}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} \left.\frac{du_j}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} x_j^1$$

donde $x_j^{(1)} = u_j'(0)$ son arbitrarios. Por tanto (como ya sabíamos)

$$\left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0, i = 1, \dots, c, j = 1, \dots, m$$

Por otra parte usando nuevamente la regla de la cadena y suprimiendo los sumandos nulos obtenidos al particularizar en $t = 0$ se tiene

$$0 = \left.\frac{d^2 x_{i+c}}{dt^2}\right|_{t=0} = \sum_{j,h=1}^{m} \left.\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial u_j \partial u_k}\right|_{u=0} x_j^1 x_k^1$$

y como antes se concluye

$$\left.\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial u_j \partial u_k}\right|_{u=0} = 0, i = 1, \dots, c, j, k = 1, \dots, m$$

El razonamiento puede concluirse inductivamente. □

Corolario 3.4 *Sean* $\zeta, \overline{\zeta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^c)$. *Entonces, el orden de contacto en el origen* $\widetilde{0}$ *de* $M(\zeta)$ *y* $M(\overline{\zeta})$ *es al menos* r $(r \geq 0)$ *si y solo si* $j_0^r \zeta = j_0^r \overline{\zeta}$. *Es decir:*

$$T_0^r M(\zeta) = T_0^r M(\overline{\zeta}) \Leftrightarrow j_0^r \zeta = j_0^r \overline{\zeta}$$

Proposición 3.5 *Sean* $f : S \to \mathcal{E}$, $\overline{f} : \overline{S} \to \mathcal{E}$, *m-variedades,con* $f(s) = \overline{f}(\overline{s})$, *existe entonces un difeomorfismo* $\phi : S \to \overline{S}$ *en torno a* s, *con* $\phi(s) = \overline{s}$ *verificando la siguiente propiedad*

$$f^{(r)} T_s^r S = \overline{f}^{(r)} T_{\overline{s}}^r \overline{S} \Longleftrightarrow j_s^r f = j_s^r \left(\overline{f} \circ \phi\right)$$

Demostración. Usando para f la proposición 3.1, podemos tomar una carta $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de $\mathcal{E}$ en torno a $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s})$ con $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\widehat{x} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ y otra carta $u = (u_1, \dots, u_m)$ en torno a s con $x(a) = 0$, $u(s) = \widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

$$f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{cases}$$

Una carta arbitraria $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m)$ por $\overline{s}$ proporciona unas ecuaciones de $\overline{f}$ de la forma $x = \varphi(\overline{u})$, y necesariamente

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \ldots \varphi_m)}{\partial(\overline{u}_1, \ldots \overline{u}_m)}\right)_{\overline{u}=0} \neq 0$$

puesto que $f_* T_s S = \overline{f}_* T_{\overline{s}}^r \overline{S}$. Podemos construir el difeomorfismo $\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, \ldots \varphi_m)$ en torno al origen que da lugar al difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ que respecto a las cartas u y $\overline{u}$ tiene por ecuaciones:

$$u = \widetilde{\varphi}(\overline{u})$$

y las ecuaciones de $\overline{f} \circ \phi : S \to \mathcal{E}$ son ahora de la forma:

$$\overline{f} \circ \phi = \varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{array} \right.$$

donde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_c)$, ($c = n - m$ es la codimensión) es una aplicación diferenciable $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^c$ en torno al origen, con

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0}$$

Nótese que $f_* T_s S = \overline{f}_* T_{\overline{s}} \overline{S}$ si y solo si

$$\left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0$$

La demostración se concluye ahora usando la proposición 3.3 □

Definición 3.6 *Sean $f : S \to \mathcal{E}$, $\overline{f} : \overline{S} \to \mathcal{E}$, m-variedades, con $f(s) = \overline{f}(\overline{s})$, al difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s) = \overline{s}$ verificando la propiedad*

$$f^{(r)} T_s^r S = \overline{f}^{(r)} T_{\overline{s}}^r \overline{S} \Longleftrightarrow j_s^r f = j_{\overline{s}}^r \left(\overline{f} \circ \phi\right)$$

se dice que está $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado.

Nótese que por la demostración de la proposición 3.5 se ve que ϕ es $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado si y solo si pueden exhibirse sistemas de coordenadas $x = (x_1, \ldots x_n)$ en $\mathcal{E}, u = (u_1, \ldots u_m)$ en S de forma que:

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{array} \right. \; ; \quad \overline{f} \circ \phi : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{array} \right.$$

Corolario 3.7 *Las variedades* $M = (f : S) \to E$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ *tienen orden de contacto al menos* $r \geq 1$ *en un punto* $a \in M \cap \overline{M}$ *si y solo si existe un entorno* $\mathcal{U}$ *de* a *en* $\mathcal{E}$ *coordenado por* $(x_{1,\ldots,}x_n)$, *un abierto* $\mathbb{S}$ *de* $\mathbb{R}^m$ *y* $\zeta, \overline{\zeta} : \mathbb{S} \to \mathcal{E}$ $(i = 1, 2)$ *de forma que* $M \cap \mathcal{U} = (\zeta : \mathbb{S})$, $\overline{M} \cap \mathcal{U} = \left(\overline{\zeta} : \mathbb{S}\right)$, $\overline{\zeta}(0) = \zeta(0) = a$ *y* $j_o^r\zeta = j_o^r\overline{\zeta}$ *es decir, para cada* $j = 1, \ldots, n$, *para todo* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *con* $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$ *se tiene*

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}(x_j \circ \zeta)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^{|\alpha|}\left(x_j \circ \overline{\zeta}\right)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}}\right|_{u=0}$$

4. Fibrados de escamas

Se construye el fibrado $G_m^r(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ de escamas de orden r, cuya fibra en cada punto de $\mathcal{E}$ está constituida por todas las clases de contacto de orden al menos r en el punto, de variedades m-dimensionales. Cuando $r = 1$, obtenemos el fibrado Grassmaniano. Para orden mayor que 1, se sumerge canónicamente en la Grassmaniana del fibrado de escamas de orden anterior.

4.1. Escamas de orden superior.

Fijado $a \in \mathcal{E}$, y $\mathcal{M}_m(a, \mathcal{E})$ es la familia de todas las variedades m-dimensionales sumergidas en $\mathcal{E}$ que contienen al punto a. Entonces

$$G_m^r(\mathcal{E}; a) = \{T_a^r M : M \in \mathcal{M}_m(a, \mathcal{E})\}$$

es la fibra de escamas en a. Un elemento $T_a^r M \in G_m^r(\mathcal{E}; a)$ se llama escama m-dimensional de orden r, en a, y representa una clase, en la relación de equivalencia definida en $\mathcal{M}_m(a, \mathcal{E})$ por el contacto de orden al menos r. La fibra de escamas en a es difeomorfa a la fibra tipo

$$\mathbb{G}_{m,n}^r = G_m^r(\mathbb{R}^n, 0)$$

Usando el corolario 3.4 es inmediata la siguiente proposición:

Proposición 4.1 *Supuesto* $n - m = c > 0$, *la aplicación*

$$J_m^r(\mathbb{R}^c, 0) \to \mathbb{G}_{m,n}^r, j_0^r\zeta \to T_0^r M(\zeta)$$

está bien definida y da lugar a un difeomorfismo sobre un abierto denso de $\mathbb{G}_{m,n}^r$. *En particular* $\mathbb{G}_{m,n}^r$ *es variedad diferenciable localmente difeomorfa a* $J_m^r(\mathbb{R}^c, 0)$.

Y en consecuencia se tiene:

Corolario 4.2 *El espacio de escamas* $G_m^r(\mathcal{E}; a)$ *tiene estructura natural de variedad diferenciable, y*

$$G_m^r(\mathcal{E}) = \cup_{a \in \mathcal{E}} G_m^r(\mathcal{E}; a) \to \mathcal{E}$$

tiene estructura natural de fibrado sobre $\mathcal{E}$. Es el fibrado m-escamas de orden r sobre $\mathcal{E}$ (con fibra tipo $\mathbb{G}^r_{m,n}$).

Si $f : S \to \mathcal{E}$ donde S es una variedad diferenciable m-dimensional, para cada $s \in S$, denotamos $g^r_s f = f^{(r)}(T^r_s S) \in G^r_m(\mathcal{E}, f(s))$.

Así si $\overline{f} : \overline{S} \to \mathcal{E}$ es otra variedad escribir $g^r_s f = g^r_{\overline{s}}\overline{f}$ equivale a decir que tienen contacto de orden al menos r.

Proposición 4.3 *Fijada la variedad $f : S \to \mathcal{E}$ se considera la aplicación $g^r f : S \to G^r_m(\mathcal{E})$, $s \to g^r_s f$* .Si $\overline{f} : \overline{S} \to \mathcal{E}$ *es otra variedad se tiene:*

1. *Si $\phi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo, entonces*
$$g^r_s\left(\overline{f} \circ \phi\right) = g^r_s\left(\overline{f}\right) \circ \phi \tag{4.1}$$

2. *Si $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es una inmersión entre variedades (de dimensiones $> m$) y $g^r_s f = g^r_{\overline{s}}\overline{f}$ entonces $g^r_s(\Phi \circ f) = g^r_{\overline{s}}\left(\Phi \circ \overline{f}\right)$*

Por tanto la inmersión $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ induce de forma natural una inmersión $G^r_m\Phi : G^r_m(\mathcal{E}) \to G^r_m(\mathcal{E}')$, definida sin ambigüedad por

$$\left(G^r_m\Phi\right)\left(T^r_a M\right) = T^r_{\Phi(a)}\Phi(M)$$

con la propiedad funtorial correspondiente

$$G^r_m(\Psi \circ \Phi) = G^r_m\Phi \circ G^r_m\Psi$$

para $\Psi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$, $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ inmersiones entre variedades. En particular, si Φ es difeomorfismo, entonces $G^r_m\Phi$ lo es.

4.2. Grassmanianas

Nótese que $G^1_m(\mathcal{E}; a) = \{T_a M : M \in \mathcal{M}_m(a, \mathcal{E})\}$ es exactamente la grassmaniana $\mathbb{G}_m(T_a\mathcal{E})$ de m-planos de $T_a\mathcal{E}$. Veamos como pueden darse parametrizaciones locales del fibrado grassmanniano $G^1_m(\mathcal{E})$

La fibra modelo $\mathbb{G}^1_{m,n} = \mathbb{G}_m(\mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m(n-m)$. Una m-étupla $(X_1, \ldots X_m)$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ (linealmente independiente) puede describirse por las columnas de una matriz $n \times m$ de rango máximo m

$$(X_1, \ldots X_m) = X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

denotando por $[X] \in \mathbb{G}^r_{m,n}$ el $m-$plano generado por X se tiene

$$[X] = [Y] \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ no singular con } XA = Y$$

escribiendo

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widehat{X} \end{pmatrix} \text{ con } \widetilde{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix}, \widehat{X}=\begin{pmatrix} x_{m+1,1} & \cdots & x_{m+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

y suponiendo $\det \widetilde{X} \neq 0$ tenemos

$$[X]=\begin{bmatrix} I \\ \widehat{X}\widetilde{X}^{-1} \end{bmatrix} \text{ con I= matriz identidad en } \mathbb{R}^{m\times m}$$

Llamando $k = n - m$ La aplicación

$$\mathbb{R}^{(n-m)\times n} \ni Z \to \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{G}^r_{m,n}$$

constituye una parametrización (no global!) de $\mathbb{G}^1_{m,n}$. Otras parametrizaciones análogas se obtienen por selección de otros menores de rango máximo.

Con este criterio, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema de coordenadas locales para $\mathcal{E}$ entonces es posible construir a partir de él, un sistema de coordenadas (x, X) , con $X = (x_{i\lambda}) = 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \lambda \leq n - m$ en $G^1_m(\mathcal{E})$ donde para $\sigma \in \mathbb{G}_m(T_a\mathcal{E})$ es $x(\sigma) = x(a)$ y

$$\sigma = Span\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a \begin{pmatrix} I \\ X(\sigma) \end{pmatrix}\right)$$

Proposición 4.4 *a) Si* $f : S \to \mathcal{E}$ es *$m-$variedad, entonces* $g^1f : S \to G^1_m(\mathcal{E})$ *es $m-$variedad.*

b) Si $f, \widetilde{f} : S \to \mathcal{E}$ *son $m-$variedades, se tiene para* $k \geq 1$,

$$j^{k+1}_s f = j^{k+1}_s \widetilde{f} \Longrightarrow j^k_s\left(g^1f\right) = j^k_s\left(g^1\widetilde{f}\right)$$

Demostración. a) Por la proposición 3.1 existen un sistema de coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de $\mathcal{E}$ en torno a $a = f(s)$ con $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\widehat{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ y $x(a) = 0$, y otro $u = (u_1, \ldots, u_m)$ en torno a s con $u(s) = \widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

$$f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{cases}$$

Tomando las coordenadas (x, X) para $G^1_m(\mathcal{E})$ como en el apartado 4.2 se concluye que las ecuaciones de $g^1f : S \to G^1_m(\mathcal{E})$ en estas coordenadas son

$$g^1f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \\ X = 0 \end{cases}$$

y por tanto $g^1 f : S \to G_m^1(\mathcal{E})$ es m-variedad.

b) Tomando para f las coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de $\mathcal{E}$ en torno a $a = f(s)$ y las $u = (u_1, \ldots, u_m)$ en torno a s del apartado a) al ser $j_s^1 f = j_s^1 \widetilde{f}$ se concluye como en la proposición 3.1 que las ecuaciones de $\widetilde{f}$ en estas coordenadas es de la forma

$$\widetilde{f} = \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{cases}$$

donde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_c)$, $(c = n - m)$ es una aplicación diferenciable $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ en torno al origen, con

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0}, \left.\frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha}\right|_{u=0} = 0$$

Las ecuaciones en las coordenadas (x, X) y u de $g^1 \widetilde{f}$ son

$$g^1 \widetilde{f} \colon \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \\ X = D\zeta \end{cases}, \text{ con } D\zeta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \zeta_c}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \zeta_c}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$j_s^{k+1} f = j_s^{k+1} \widetilde{f} \Leftrightarrow j_0^{k+1} \zeta = 0 \Leftrightarrow j_0^k (D\zeta) = 0 \Leftrightarrow j_s^k \left(g^1 f\right) = j_s^k \left(g^1 \widetilde{f}\right)$$

□

En particular, hemos demostrado también:

Corolario 4.5 *Sean* $f : S \to \mathcal{E}$, $\overline{f} : \overline{S} \to \mathcal{E}$ *m-variedades, tales que* $g_s^1 f = g_{\overline{s}}^1 \overline{f}$ *y sea* $\phi : S \to \overline{S}$ *un difeomorfismo* $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$*-adaptado (según Definición 3.6). Entonces también* ϕ *está* $\left[g_s^1 f = g_{\overline{s}}^1 \overline{f}\right]$*-adaptado, es decir:*

$$g_s^k \left(g^1 f\right) = g_{\overline{s}}^k \left(g^1 \overline{f}\right) \Rightarrow j_s^k \left(g^1 f\right) = j_s^k \left(g^1 \left(\overline{f} \circ \phi\right)\right)$$

Corolario 4.6 *Para* $k \geq 1$ *son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) $g_s^{k+1} f = g_{\overline{s}}^{k+1} \overline{f}$

ii) $g_s^k \left(g^1 f\right) = g_{\overline{s}}^k \left(g^1 \overline{f}\right)$

Demostración. Sea $\phi : S \to \overline{S}$ un difeomorfismo $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado (según la definición 3.6)

$$\begin{array}{l} g_s^{k+1} f = g_{\overline{s}}^{k+1} \overline{f} \\ \Updownarrow \text{Prop.3.5} \\ j_s^{k+1} f = j_s^{k+1} \left(\overline{f} \circ \phi\right) \\ \Updownarrow \text{Prop.4.4 b) y (4.1)} \\ j_s^k \left(g^1 f\right) = j_s^k \left(g^1 \left(\overline{f} \circ \phi\right)\right) = j_s^k \left(g^1 \left(\overline{f}\right) \circ \phi\right) \\ \Updownarrow \text{Cor.4.5} \\ g_s^k \left(g^1 f\right) = g_{\overline{s}}^k \left(g^1 \overline{f}\right) \end{array}$$

□

Proposición 4.7 *La aplicación* $G_m^{k+1}(\mathcal{E}) \to G_m^k\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)$ *definida por* $g_s^{k+1}f \to g_s^k\left(g^1 f\right)$ *(para* $f : S \to \mathcal{E}$ *, m-variedad) está bien definida y sumerge canónicamente a* $G_m^{k+1}(\mathcal{E})$ *como subvariedad de* $G_m^k\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)$*.*

Demostración. La aplicación $G_m^{k+1}(\mathcal{E}) \to G_m^k\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)$ definida por $g_s^{k+1}f \to g_s^k\left(g^1 f\right)$ está bien definida ya que si $g_s^{k+1}f = g_{\overline{s}}^{k+1}\overline{f}$ para otra $\overline{f} : \overline{S} \to \mathcal{E}$, entonces por la proposición 3.5 existe un difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s) = \overline{s}$ verificando la propiedad $j_s^{k+1}f = j_s^{k+1}\left(\overline{f} \circ \phi\right)$ y por la proposisción 4.4 b) es $j_s^k\left(g^1 f\right) = j_s^k\left(g^1\left(\overline{f} \circ \phi\right)\right) = j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right) \circ \phi\right)$, y esto implica que $g_s^k\left(g^1 f\right) = g_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right) \circ \phi\right) = g_{\phi(s)}^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\right)$

En lo que sigue los indices i, j varían de 1 a n. Mientras que α, β varían de 1 a m, y los λ, μ de 1 a $c = n - m$.

Probemos que la aplicación $G_m^2(\mathcal{E}) \to G_m^1\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)$ definida por $g_s^2 f \to g_s^1\left(g^1 f\right)$ es inmersión:

A partir de un sistema de coordenadas $(x_i) = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de $\mathcal{E}$ donde $\widetilde{x} = (x_\alpha)$ $\widehat{x} = \left(x^\lambda\right)$ en torno a $a = f(s)$ puede construirse un sistemas de coordenadas en $G_m^2(\mathcal{E})$ de la forma $\left(\left(x_a, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right), \left(x_{\alpha\beta}^\lambda\right)_{\alpha \leq \beta}\right)$, de manera que fijado un sistema de coordenadas $u = (u_\alpha)$ en S en torno a s respecto al cual f tiene por ecuaciones

$$f : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \end{cases}$$

Así $g^1 f$ y $g^2 f$ se escriben

$$g^1 f : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \end{cases}, g^2 f : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ x_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{\partial^2 \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \end{cases} \tag{4.2}$$

Por otra parte, las coordenadas $\left(\left(x_\alpha, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right)\right)$ de $G_m^1(\mathcal{E})$ permiten fabricar por reiteración coordenadas en $G_m^1\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)$, que las denotamos por

$$\left(\left(y_\alpha, y^\lambda\right), \left(y^{\lambda\gamma}\right), \left(y_\alpha^{\lambda\gamma}\right)\right),$$

de forma que para una inmersión $F : S \to G_m^1(\mathcal{E})$ general con ecuaciones

$$F : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \zeta_{\lambda\gamma}(u_\alpha) \end{cases}$$

las ecuaciones de $g^1F : S \to G^1_m \left(G^1_m(\mathcal{E})\right)$ sean:

$$g^1F : \begin{cases} y_\alpha = u_\alpha \\ y^\lambda = \zeta_\lambda (u_\alpha) \\ y^{\lambda\gamma} = \zeta_{\lambda\gamma}(u_\alpha) \\ y^\lambda_\alpha = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ y^{\lambda\gamma}_\alpha = \frac{\partial^2 \zeta_{\lambda\gamma}}{\partial u_\alpha} \end{cases}$$

En particular $g^1\left(g^1 f\right)$ tendrá ecuaciones de la forma:

$$g^1\left(g^1 f\right) : \begin{cases} y_\alpha = u_\alpha \\ y^\lambda = \zeta_\lambda (u_\alpha) \\ y^{\lambda\gamma} = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\gamma} \\ y^\lambda_\alpha = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ y^{\lambda\gamma}_\alpha = \frac{\partial^2 \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\gamma} \end{cases} \tag{4.3}$$

Así teniendo en cuenta (4.2) y (4.3) las ecuaciones locales de la aplicación $G^2_m(\mathcal{E}) \to G^1_m\left(G^1_m(\mathcal{E})\right)$, $g^2_s f \to g^1_s\left(g^1 f\right)$

$$\left(\left(x_\alpha, x^\lambda\right), \left(x^\lambda_\alpha\right), \left(x^\lambda_{\alpha\beta}\right)_{\alpha\leq\beta}\right) \to \left(\left(y_\alpha, y^\lambda\right), \left(y^{\lambda\gamma}\right), \left(y^\lambda_\alpha\right), \left(y^{\lambda\gamma}_\alpha\right)_{\alpha\leq\beta}\right)$$

queda

$$y_\alpha = x_\alpha, y^\lambda = x^\lambda, y^{\lambda\gamma} = x^\lambda_\gamma, y^\lambda_\alpha = x^\lambda_\alpha, y^{\lambda\gamma}_\alpha = x^\lambda_{\alpha\gamma}$$

y los elementos $G^1_m\left(G^1_m(\mathcal{E})\right)$ que *son* escamas de orden 2 se caracterizan por la condición

$$y^{\lambda\gamma} = y^\lambda_\gamma$$

Este argumento se generaliza fácilmente para un valor de k arbitrario, en donde las ecuaciones finales de la transformación $G^{k+1}_m(\mathcal{E}) \to G^k_m\left(G^1_m(\mathcal{E})\right)$ serían:

$y_\alpha = x_\alpha$	$y^\lambda = x^\lambda$	$y^{\lambda\gamma} = x^\lambda_\gamma$	$y^\lambda_\alpha = x^\lambda_\alpha$
$y^{\lambda\gamma}_\alpha = x^\lambda_{\alpha\gamma}$	$\ldots$	$y^\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = x^\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$	$y^{\lambda\gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = x^\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_k\gamma}$

y efectivamente dan lugar a una inmersión (local). $\square$

4.3. Escamas y grassmanianas

Veremos que el fibrado de escamas $G^{r+1}_m(\mathcal{E})$ de orden $r+1$, puede sumergirse canónicamente en la grassmaniana de las escamas de orden anterior $G^1_m(G^r(\mathcal{E}))$ gracias a la identificación $g^1(g^r f) = g^{r+1} f$. La formalización de este hecho viene establecida en el siguiente teorema:

Teorema 4.8 *a) Si $f : S \to \mathcal{E}$ es $m-$variedad, entonces $g^r f : S \to G_m^r(\mathcal{E})$ es $m-$variedad.*

b) Sean $f, \widetilde{f} : S \to \mathcal{E}$, definiendo m-variedades. Se tiene la implicación

$$j_s^{r+1} f = j_s^{r+1} \widetilde{f} \Longrightarrow j_s^1 (g^r f) = j_s^1 \left(g^r \widetilde{f}\right)$$

c) Hay una inmersión canónica:

$$G_m^{r+1}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^1(G_m^r(\mathcal{E}))$$

definida según el esquema

$$g_s^{r+1} f \to g_s^1 (g^r f)$$

para cada m-variedad $f : S \to \mathcal{E}$

Demostración. Se hace por inducción sobre r. La prueba del Teorema para $r = 1$ está ya concluida:

a) Ver la proposición 4.4 a).

b) Ver la proposición 4.4 b).

c) Ver el corolario 4.6 para $k = 1$.

Supuesto probado el Teorema, para $r \geq 1$, probemos el Teorema para $r + 1$. Tenemos

a) Si $f : S \to \mathcal{E}$ es $m-$variedad, entonces por la proposición 4.4 a) $g^1 f : S \to G_m^1(\mathcal{E})$ es variedad. Por la hipótesis de inducción y la proposición 4.7. se tiene que $g^r\left(g^1 f\right) = g^{r+1} f : S \to G_m^{r+1}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^r\left(G^1(\mathcal{E})\right)$ es variedad.

b) Sean $f, \widetilde{f} : S \to \mathcal{E}$, definiendo m-variedades. Tenemos:

$$\begin{gathered}
j_s^{r+2} f = j_s^{r+2} \widetilde{f} \\
\Downarrow \text{Prop.4.4 b)} \\
j_s^{r+1}\left(g^1 f\right) = j_s^{r+1}\left(g^1 \widetilde{f}\right) \\
\Downarrow \text{Hip. Induc.} \\
j_s^1\left(g^r\left(g^1 f\right)\right) = j_s^1\left(g^r\left(g^1 \widetilde{f}\right)\right) \\
\Downarrow \text{Prop.4.7} \\
j_s^1\left(g^{r+1} f\right) = j_s^1\left(g^{r+1} \widetilde{f}\right)
\end{gathered}$$

c) Por la hipótesis de inducción tenemos para $1 \leq k \leq r$ la inclusión $g_s^{k+1} f \to g_s^1\left(g^k f\right)$

$$G_m^{k+1}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^1\left(G_m^k(\mathcal{E})\right), g_s^{k+1} f \to g_s^1\left(g^k f\right)$$

que da lugar, por la proposición 4.3, a la inclusión

$$\begin{gathered}
G_m^{r-k}\left(G_m^{k+1}(\mathcal{E})\right) \hookrightarrow G_m^{r-k}\left(G_m^1\left(G_m^k(\mathcal{E})\right)\right) \\
g_s^{r-k}\left(g^{k+1} f\right) \to g_s^{r-k}\left(g^1\left(g^k f\right)\right)
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Por la proposición 4.7 tenemos

$$\begin{array}{c} G_m^{r-k+1}\left(G_m^k(\mathcal{E})\right) \hookrightarrow G_m^{r-k}\left(G_m^1\left(G_m^k(\mathcal{E})\right)\right) \\ g_s^{r-k+1}\left(g^k f\right) \to g_s^{r-k}\left(g^1\left(g^k f\right)\right) \end{array}$$

lo cual significa que la imagen de la inclusión (4.4) cae en $G_m^{r-k+1}\left(G_m^k(\mathcal{E})\right)$ y se tienen así la cadena de inmersiones canónicas

$$G_m^{r+1}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^r\left(G_m^1(\mathcal{E})\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_m^{r-k}\left(G_m^{k+1}(\mathcal{E})\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_m^1\left(G_m^r(\mathcal{E})\right) \quad (4.5)$$

definidas según el esquema

$$g_s^{r+1} f \to g_s^r\left(g^1 f\right) \to \cdots \to g_s^{r-k}\left(g^{k+1} f\right) \to \cdots \to g_s^1\left(g^r f\right)$$

Nuevamente por la proposición 4.7 tenemos

$$G_m^{r+2}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^{r+1}\left(G_m^1(\mathcal{E})\right) \quad (4.6)$$

Aplicando (4.5) en el paso inicial $g^1 f : S \to G^1(\mathcal{E})$ y teniendo en cuenta (4.6) se tiene:

$$\begin{array}{l} G_m^{r+2}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^{r+1}\left(G_m^1(\mathcal{E})\right) \hookrightarrow G_m^r\left(G_m^1\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)\right) \hookrightarrow \\ \cdots \hookrightarrow G_m^{r-k}\left(G_m^{k+1}\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_m^1\left(G_m^r\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)\right) \end{array}$$

y por composición queda una inmersión $G_m^{r+2}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^1\left(G_m^r\left(G_m^1(\mathcal{E})\right)\right)$ con $g_s^{r+2} f \to g_s^1\left(g^r\left(g^1 f\right)\right) = g_s^1\left(g^{r+1} f\right)$, (la última igualdad justificada de nuevo por la proposición 4.7), y tenemos ya la inmersión:

$$G_m^{r+2}(\mathcal{E}) \hookrightarrow G_m^1\left(G_m^{r+1}(\mathcal{E})\right), g_s^{r+2} f \to g_s^1\left(g^{r+1} f\right)$$

□

Observación 4.9 *Es ahora inmediato probar directamente (por inducción) la equivalencia entre la definición de orden de contacto dada en el apartado 3.2, y la indicada al final de la Introducción (y expuesta en [1] (págs 1-4)).*

References

[1] G.R. Jensen: *Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces.* Lecture Notes in Math. **15**, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[2] L.A. Cordero, C.T.J. Dodson, M. de León: *Differential geometry of frame bundles.* Kluwer Academic Publishers, 1989.

[3] F.W. Warner: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Co., 1971.