

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2015

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA: HOMOLOGÍA SINGULAR

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

MANUEL PULIDO MONROY

ABSTRACT. In this paper we introduce the singular homology theory. First, we develop its main characteristics and properties. Then, we mainly focus on using its power to deduce some important results in topology such as the Brouwer fixed point theorem in arbitrary dimension, the Invariance of Dimension and Domain, or the Jordan-Brouwer separation theorem. We also give a rough idea about simplicial homology and compare it with the singular one. After computing the homology of the spheres, we briefly introduce the degree theory, presenting its main properties and using them to prove the non-existence of a continuous tangent vector field on \mathbb{S}^n and the uniqueness of \mathbb{Z}_2 as a nontrivial group acting freely on \mathbb{S}^n , both when n is even. As a final point, we present a generalization of the Jordan-Brouwer theorem that explains the difference between homology and homotopy: the Alexander horned sphere shows that Schönflies theorem fails in dimension ≥ 3 , but the failure is homotopic, not homologic.

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Definiciones básicas	3
3. Invarianza homotópica	5
4. Tipo de homotopía	8
5. Homología relativa	9
6. Escisión	13
7. Homología de las esferas	18
8. Grado de una aplicación	21
9. Homología simplicial	23
10. Equivalencia entre homología simplicial y singular	25
11. Sucesión exacta de Mayer-Vietoris	28
12. Relación entre el Grupo Fundamental y el primer grupo de homología	30
13. Teorema de Jordan-Brouwer	33
14. Más allá de Jordan-Brouwer	35
Referencias	38

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 55N10, 57N65, 55Q99, 55M25.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de homología surge a finales del siglo XIX como consecuencia de trabajos de matemáticos tales como B. Riemann (1826-1866) o E. Betti (1823-1892). Es en 1895 cuando el matemático francés H. Poincaré (1854-1912) introduce tal concepto en su famoso *Analysis Situs*. Hasta ese momento, los matemáticos se habían limitado a asociar números a espacios topológicos. Es ahí donde tiene lugar la gran revolución que supuso el trabajo de Poincaré, en el que trataba con objetos más complejos. Su gran intuición le permitió introducir, aparte de la homología, otros objetos algebraicos como el grupo fundamental, si bien su forma de hacerlo no tenía el rigor formal que hoy día se utiliza.

A partir de ese momento, se inicia un proceso de *algebrización* en el que participaron ilustres matemáticos como P. S. Alexandroff (1896-1982), E. Noether (1882-1935), J.W. Alexander (1888-1971), S. Lefschetz (1884-1972), L. Vietoris (1891-2002), W. Mayer (1887-1948), S. Eilenberg (1913-1998). Este último fue quien en 1944 introdujo la idea de *homología singular* de una forma muy similar a la que se usa en este momento. Una buena referencia para esta historia es [1].

Esta teoría de homología es la que aquí desarrollaremos (secciones 2-6 y 11). Junto con la *homología simplicial*, son las más comúnmente conocidas. En la sección 9 daremos una idea de la teoría simplicial y veremos en la sección 10 que ambas son equivalentes. Nuestra referencia principal es [3], pero también hemos utilizado [2, 5]. Mencionemos aquí que existe un resultado que axiomatiza la teoría de homología y, en particular, explica la equivalencia de las dos homologías simplicial y singular. Para compararlas digamos que, por una parte, la homología simplicial tiene un carácter geoméricamente más intuitivo, lo que permite que su cálculo sea, en general, más sencillo. Por otra parte, la homología singular tiene la ventaja de ser formalmente más fácil de manipular, aunque requiere un mayor esfuerzo hasta que da realmente sus frutos. En este trabajo, además de introducir la homología singular como tal, la utilizaremos para demostrar importantes resultados topológicos. Esto incluye definir el concepto *grado* de una aplicación continua entre esferas (sección 8).

Como tantas otras veces, resulta realmente sorprendente cómo conceptos que surgen en un contexto muy concreto llegan a ser extremadamente eficientes en otros ajenos a priori. Quizás sea esto lo que hace tan especiales las matemáticas. Es por ello que damos especial importancia no sólo a conocer la homología de determinados espacios, sino a usarla para probar fuertes resultados como el teorema del punto fijo de Brouwer (sección 7 y sección 8), la Invarianza de la Dimensión (sección 7) o la Invarianza del Dominio y del Borde y el teorema de separación de Jordan-Brouwer (sección 13).

En la sección 11 veremos el hecho relevante de que el primer grupo de homología es el abelianizado del grupo fundamental. En general, los grupos de homotopía, incluso de orden superior, presentan un carácter más intuitivo que los grupos de homología, que por contra son de naturaleza más elemental como teoría. Hay que decir que la homotopía es más fina para distinguir espacios. Por ejemplo, como explicaremos en la sección 14, el complemento de la esfera cornuda de Alexander no es homeomorfo al complemento de la esfera estándar: el primero no es simplemente conexo y el segundo sí. Aún así la homología es muy a menudo suficiente: nos permite distinguir esferas, la dimensión topológica, el borde topológico.

2. DEFINICIONES BÁSICAS

En \mathbb{R}^m , un n -símplice es el menor conjunto convexo que contiene a $n+1$ puntos v_0, \dots, v_n tales que los vectores $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ son linealmente independientes. La notación que usaremos para referirnos a un n -símplice de esa forma es $[v_0, \dots, v_n]$. Para $n \geq 0$ denotamos

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i\}.$$

Para n bajos: Δ^0 es un punto, Δ^1 es un segmento, Δ^2 un triángulo, Δ^3 un tetraedro... Con la notación anterior, Δ^n es el n -símplice $[v_0, \dots, v_n]$ donde v_i es el extremo del vector unitario de la cordenada $(i + 1)$ -ésima. Además, denotaremos por $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ al $(n - 1)$ -símplice que se obtiene al eliminar el punto v_i .

Definición 2.1. Dado un espacio topológico X , un n -símplice singular es una aplicación continua

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X.$$

En lo que sigue, si no hay lugar a confusión, utilizaremos los nombres n -símplice y n -símplice singular indistintamente.

Definimos el grupo $C_n(X)$ de n -cadenas singulares como el grupo abeliano libre generado por los n -símplices singulares, cuyos elementos son sumas formales

$$\sum_i k_i \sigma_i \text{ con } k_i \in \mathbb{Z}.$$

Definición 2.2. Definimos el operador borde $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

para n -símplices singulares σ , y por linealidad, podemos extenderlo a un homomorfismo de grupos $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$:

$$\partial_n \left(\sum_i k_i \sigma_i \right) = \sum_i k_i \partial_n(\sigma_i).$$

Si no hay lugar a confusión, denotaremos el operador borde ∂_n como ∂ .

El siguiente lema, aunque es sencillo, marca la clave en la definición de los grupos de homología.

Lema 2.3. El operador borde es nilpotente: $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = 0$.

Demostración. Dado $\sigma \in C_n$, aplicando ∂_n te tiene que

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]},$$

y aplicando ahora ∂_{n-1} ,

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \sum_i (-1)^i \partial_{n-1}(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}) = \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]} = 0. \end{aligned}$$

□

Tenemos, por tanto, la siguiente situación algebraica:

$$\cdots \rightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

donde $\partial_n(\partial_{n+1}) = 0$. Una sucesión de este tipo se denomina *complejo de cadenas*. (Nótese que hemos extendido la sucesión con un 0 a la derecha).

Definimos ahora los siguientes subgrupos de $C_n(X)$:

$$Z_n(X) = \ker(\partial_n) = \{\alpha \in C_n(X) : \partial_n(\alpha) = 0\},$$

$$B_n(X) = \text{im}(\partial_{n+1}) = \{\beta \in C_n(X) : \beta = \partial_{n+1}(\beta') \text{ para algún } \beta' \in C_{n+1}(X)\}.$$

Los elementos de $Z_n(X)$ se denominan *ciclos* y los de $B_n(X)$ *bordes*.

A partir de 2.3, se tiene que $B_n(X) \subset Z_n(X)$, lo que nos permite definir:

Definición 2.4. En un espacio topológico X , se define el *n -ésimo grupo de homología* (o *grupo de homología de dimensión n*) como

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X).$$

Proposición 2.5. Sea $\{X_k\}$ la familia de componentes conexas por caminos de X . Hay un isomorfismo de $H_n(X)$ con $\bigoplus_k H_n(X_k)$.

Demostración. Se tiene, de hecho, un isomorfismo $C_n(X) \cong \bigoplus_k C_n(X_k)$. En efecto, por ser Δ^n conexo por caminos y σ una aplicación continua, se tiene que $\sigma(\Delta^n)$ es conexo por caminos. Por tanto, para cada n -símplice singular, $\sigma(\Delta^n) \subset X_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Así, cada n -cadena c se descompone de forma única en la suma $c = \sum_k c_k$, donde c_k es una n -cadena en X_k □

Proposición 2.6. Si X es no vacío y conexo por caminos, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Como consecuencia, para cualquier espacio X , $H_0(X)$ es la suma directa de \mathbb{Z} tantas veces como componentes conexas por caminos formen X .

Demostración. Tenemos $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = C_0(X)/B_0(X)$. Definimos un homomorfismo $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ por $\varepsilon(\sum_i k_i \sigma_i) = \sum_i k_i$. Como X es no vacío, ε es sobreyectivo. Basta, por tanto, probar que $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1 = B_0(X)$ y por el primer teorema de isomorfía tendremos el resultado.

Sea $\sigma \in C_1(X)$. Como un 1-símplice es un camino, se tiene que $\varepsilon \partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{[v_0]}) = 1 - 1 = 0$. Por tanto $\text{im } \partial_1 \subset \ker \varepsilon$. Recíprocamente, supongamos que $\varepsilon(\sum_i k_i \sigma_i) = \sum_i k_i = 0$. Cada σ_i es un 0-símplice, es decir, un punto de X . Sea $\tau_i : I \rightarrow X$ un camino desde un punto base fijado $x_0 = \sigma_0(\Delta^0)$ hasta $\sigma_i(v_0)$. Podemos ver τ_i como un 1-símplice, $\tau_i : [v_0, v_1] \rightarrow X$ y por tanto tenemos que $\partial(\tau_i) = \sigma_i - \sigma_0$. Así, $\partial(\sum_i k_i \tau_i) =$

$\sum_i k_i \sigma_i - \sum_i k_i \sigma_0 = \sum_i k_i \sigma_i$, ya que $\sum_i k_i = 0$. En consecuencia, $\sum_i k_i \sigma_i$ es un borde, y queda probado así que $\ker \varepsilon \subset \text{im } \partial_1$.

La segunda parte de la proposición es consecuencia inmediata de este resultado y la proposición precedente. \square

El siguiente ejemplo muestra el cómputo de los grupos de homología de todas las dimensiones, en el caso particular de un espacio finito.

Ejemplo 2.7. Sea X un espacio finito y supongamos que $\text{Card}(X) = d$. Entonces,

$$H_n(X) = 0 \text{ para } n > 0 \text{ y } H_0(X) \cong \mathbb{Z}^d$$

Por 2.5, basta probarlo para el caso $d = 1$. En ese caso, para cada n hay un único n -símplice σ_n , y en consecuencia cada $C_n(X) \cong \mathbb{Z}$. Por otro lado, se tiene que $\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$ es una suma de $n + 1$ términos que es 0 si n es impar y σ_{n-1} si n es par distinto de 0. Por tanto, tenemos el siguiente complejo de cadenas

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donde la aplicación borde va alternando entre isomorfismo y la aplicación idénticamente cero, excepto para el último \mathbb{Z} . Por tanto, todos los grupos son triviales excepto $H_0(X)$.

A menudo es útil disponer de una versión un poco diferente de la homología para la que un punto tiene grupo de homología trivial para todo $n \geq 0$. Se denomina *homología reducida* y la representaremos por $\tilde{H}_n(X)$.

Definición 2.8. Sean $X \neq \emptyset$ y $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo definido como en la demostración de 2.6. Consideremos el complejo de cadenas aumentado

$$\cdots \rightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Denotamos $\tilde{Z}_0(X) = \ker(\varepsilon)$. Como $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, podemos definir $\tilde{H}_0(X) = \tilde{Z}_0(X)/B_0(X)$ y obviamente $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ para $n > 0$.

Cabe ahora preguntarse cuál es la relación entre $H_0(X)$ y $\tilde{H}_0(X)$. Como $\tilde{Z}_0(X)$ es un subgrupo de $Z_0(X) = C_0(X)$, se tiene que $\tilde{H}_0(X)$ es un subgrupo de $H_0(X)$. Más aún, se tiene que $\tilde{H}_0(X)$ es el núcleo de la aplicación inducida $\varepsilon_* : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $[\alpha] \mapsto \varepsilon(\alpha)$, puesto que las clases de homología de $\tilde{H}_0(X)$ están representadas por los elementos de $C_0(X)$ que se anulan para ε . Por tanto, $H_0(X)/\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo, $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Teniendo esto en cuenta junto con 2.7, se tiene que si X está formado por un solo punto, $H_0(X) = \mathbb{Z} = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$, lo cual implica que $\tilde{H}_n(X) = 0$ para todo $n \geq 0$.

3. INVARIANZA HOMOTÓPICA

Hasta ahora hemos visto que dado un espacio topológico X , le podemos asociar una sucesión de grupos $H_n(X)$. En esta sección, veremos que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos induce un homomorfismo $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ de tal manera que ciertas propiedades topológicas de f se reflejan en propiedades algebraicas de f_* .

Dada una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, podemos componerla con un n -símplice $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ de tal forma que, por ser f continua, la composición $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ es un n -símplice en Y . De esta manera, podemos extender por linealidad esta composición a n -cadenas y tener así definido un homomorfismo inducido $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$.

Una propiedad importante que satisface este homomorfismo es que conmuta con el operador borde. En efecto,

$$(f_{\#} \circ \partial)(\sigma) = f_{\#} \left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right) = \sum_i (-1)^i f_{\#}(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}) = (\partial \circ f_{\#})(\sigma).$$

Un homomorfismo que conmuta con el operador borde se denomina *homomorfismo de cadenas*.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

que es conmutativo por la propiedad que vimos anteriormente.

Es inmediato ver que $f_{\#}$ manda ciclos a ciclos y bordes a bordes. En efecto, si α es un ciclo, $\partial(\alpha) = 0$, con lo que $\partial(f_{\#}(\alpha)) = f_{\#}(\partial(\alpha)) = 0$. Por otra parte, si $\beta = \partial(\beta')$, entonces $f_{\#}(\beta) = f_{\#}(\partial(\beta')) = \partial(f_{\#}(\beta'))$. Se tiene, por tanto, que $f_{\#}$ induce un homomorfismo $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Dos propiedades importantes, aunque evidentes, que muestran que los grupos de homología son un funtor de la categoría de espacios topológicos en la categoría de grupos abelianos son:

- (1) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ para una composición de aplicaciones $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$
- (2) $\text{Id}_* = \text{Id}$

Se deduce que un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos induce un isomorfismo de grupos $H_n(X) \cong H_n(Y)$

Pasamos ahora a dar el primer resultado sustancial, pero antes introducimos una definición previa:

Definición 3.1. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son *homótopas* ($f \sim g$) si existe una aplicación continua $H : I \times X \rightarrow Y$ tal que $H(0, x) = f(x)$ y $H(1, x) = g(x)$.

Teorema 3.2. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones homótopas. Entonces inducen el mismo homomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Demostración. Dado el producto $\Delta^n \times I$, llamamos $[v_0, \dots, v_n] = \Delta^n \times \{0\}$ y $[w_0, \dots, w_n] = \Delta^n \times \{1\}$. Sea $H : X \times I \rightarrow Y$ una homotopía de f a g , es decir, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. Definiremos un homomorfismo $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ que llamaremos *operador prisma*. Veremos que este operador satisface

$$\partial \circ P = g_{\#} - f_{\#} - P \circ \partial.$$

Con esto, la prueba del teorema es fácil. En efecto, si $\alpha \in C_n(X)$ es un ciclo, como $\partial(\alpha) = 0$, se tiene que

$$g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha) = (\partial \circ P)(\alpha) + (P \circ \partial)(\alpha) = (\partial \circ P)(\alpha) = \partial(P(\alpha)).$$

Por tanto, $g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha)$ es un borde, o sea que $g_{\#}(\alpha)$ y $f_{\#}(\alpha)$ determinan la misma clase de homología, lo cual implica que $f_*(\alpha) = g_*(\alpha)$.

Dado $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -símplice, consideramos la composición $H \circ (\sigma \times \text{Id}) : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$ y definimos

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}.$$

A partir de la definición se tiene que

$$\begin{aligned} (\partial \circ P)(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]}. \end{aligned}$$

Los sumandos con $i = j$ son

$$\sum_i (-1)^{2i} H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, w_i, \dots, w_n]} + \sum_i (-1)^{2i+1} H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, \hat{w}_i, \dots, w_n]}.$$

Cada sumando de la forma $H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, w_i, \dots, w_n]}$ se anula con uno de la forma $H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, \hat{w}_{i-1}, w_i, \dots, w_n]}$ para $1 \leq i \leq n$, luego queda

$$H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n]} - H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n]}.$$

Ahora se tiene que $g_{\#}(\sigma) = H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n]}$ y $f_{\#}(\sigma) = H \circ (\sigma \times \text{Id}) \Big|_{[v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n]}$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} P(\partial(\sigma)) &= \sum_j (-1)^j P(\sigma \Big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]}) = \sum_{j < i} (-1)^j (-1)^{i-1} H \circ (\sigma \times \text{Id})(\sigma \Big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}) \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^j (-1)^i H \circ (\sigma \times \text{Id})(\sigma \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]}). \end{aligned}$$

Luego tenemos la igualdad que queríamos. \square

A una aplicación como P que cumple que $\partial \circ P + P \circ \partial = g_{\#} - f_{\#}$ se le llama *homotopía de cadenas*.

De la misma manera, una aplicación $f : X \rightarrow Y$ también induce un homomorfismo $f_* : \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$. Este hecho es evidente para $n > 0$ y para $n = 0$ se tiene por cumplirse que $f_{\#} \circ \varepsilon = \varepsilon \circ f_{\#}$, donde $f_{\#} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es la identidad. Además, 3.2 se sigue verificando para la homología reducida.

4. TIPO DE HOMOTOPÍA

Un concepto importante en topología es el de *tipo de homotopía*. Tener el mismo tipo de homotopía es más débil que ser homeomorfos, pero a veces los invariantes topológicos del tipo de homotopía son los más útiles.

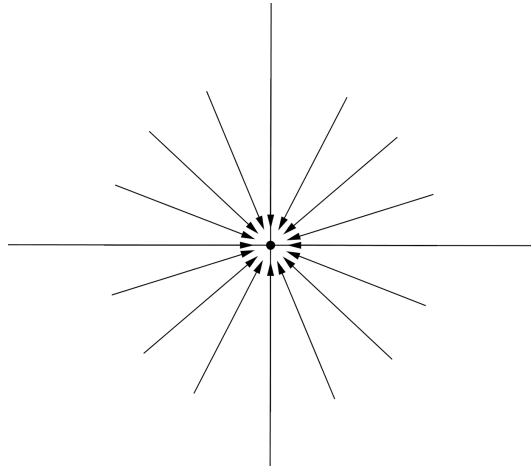
Definición 4.1. Dos espacios X e Y tienen el mismo *tipo de homotopía* (lo denotaremos por $X \simeq Y$) si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ es homótopa a la identidad $\text{Id}_X : X \rightarrow X$, y $f \circ g$ es homótopa a la identidad $\text{Id}_Y : Y \rightarrow Y$. Estas dos aplicaciones se denominan *equivalencias homotópicas*.

El ejemplo más importante de equivalencia homotópica es el *retracto de deformación*.

Definición 4.2. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto suyo. A es un *retracto* si existe una aplicación continua, que llamaremos *retracción*, $r : X \rightarrow A$ tal que $r|_A = \text{Id}$. Si, además, $i \circ r \sim \text{Id}_X$, donde $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión, entonces A es un *retracto de deformación*. Obsérvese que como $r \circ i = \text{Id}_A$, se tiene que r e i son equivalencias homotópicas. En el caso particular de que Y sea un punto, se dice que X es *contráctil*.

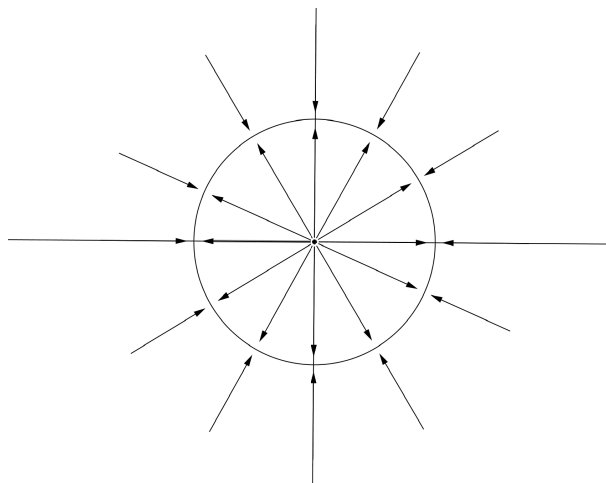
Observación 4.3. Se puede demostrar que si X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, entonces existe un tercer espacio Z del que ambos son retractos de deformación [3, 0.21, p. 16]. Esto muestra la importancia de los retractos.

Ejemplos 4.4. (1) Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se denomina *convexo* si para cada dos puntos $x_1, x_2 \in E$ el segmento que los une está contenido en E , es decir, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in E$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Se verifica que cualquier subconjunto convexo es contráctil. En efecto, sea $x_0 \in E$. Definimos $r(x) = x_0$ para todo $x \in E$. La homotopía viene dada por $H(x, t) = tx + (1 - t)r(x) = tx + (1 - t)x_0$, que obviamente es continua y está bien definida por ser E convexo. Además, $H(x, 1) = \text{Id}$ y $H(x, 0) = x_0 = r(x)$. Por tanto, son ejemplos de espacios contráctiles \mathbb{R}^n o \mathbb{D}^n .



(2) Un concepto que generaliza al de convexidad es el de *conjunto estrellado*. Un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se llama *estrellado* si existe un punto en F de forma que el segmento que lo une con cualquier otro punto de F está contenido en el conjunto. Mediante el mismo razonamiento que antes se llega a que todo conjunto estrellado es contráctil.

(3) La esfera \mathbb{S}^{n-1} es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Primero, la retracción $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ está bien definida, pues 0 no está en el dominio, y la homotopía viene dada por $H(x, t) = tx + (1 - t)r(x) = tx + (1 - t)\frac{x}{\|x\|}$.



(4) En consecuencia, \mathbb{S}^{n-1} tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^n \setminus \{a, b\}$, con $a, b \in \mathbb{S}^n$. Esto se deduce de (3) teniendo en cuenta que $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n .

En general, el problema de determinar si dos espacios son del mismo tipo de homotopía no es fácil. Más adelante veremos, por ejemplo, que \mathbb{S}^n no es contráctil y que \mathbb{S}^{n-1} no es un retracto de \mathbb{D}^n .

Corolario 4.5. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo inducido $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \sim \text{Id}_X$ y $f \circ g \sim \text{Id}_Y$. Entonces, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{Id}_{X*}$, y $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \text{Id}_{Y*}$, lo que implica que f_* es un isomorfismo. \square

Ejemplo 4.6. A partir de 2.7 y 4.5 conocemos los grupos de homología (reducida) de cualquier espacio contráctil, en particular, de \mathbb{R}^n y \mathbb{D}^n : son todos triviales.

5. HOMOLOGÍA RELATIVA

El concepto principal de esta sección es el de *homología relativa*, que relaciona la homología de un espacio X con la de un subespacio suyo $A \subset X$. Denotamos $C_n(X, A)$ al cociente $C_n(X)/C_n(A)$. El operador borde cumple que $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$, por lo que induce un homomorfismo que llamaremos operador borde cociente $\partial'_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ que con abuso de notación denotaremos como el operador borde normal. Obviamente la propiedad $\partial \circ \partial = 0$ la hereda de $C_n(X)$, por lo que podemos definir el *grupo de homología relativa* $H_n(X, A) = \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1})$.

Al igual anteriormente, se tiene aquí también la invarianza por homotopía. Una aplicación $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ que cumple que $f(A) \subset B$ induce un homomorfismo entre sus complejos de cadenas y posteriormente entre sus grupos de homología. Como el homomorfismo $f_\# : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ manda $C_n(A)$ a $C_n(B)$, tenemos el homomorfismo inducido

entre complejos de cadenas de pares $f_{\sharp} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$. Además la conmutatividad de f_{\sharp} con ∂ se sigue cumpliendo al heredarse del caso general. Por tanto, se tiene un homomorfismo inducido $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$. A partir de aquí, es necesario comprobar que dos aplicaciones $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ que son homótopas inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología relativa. Si retomamos la demostración de 3.2, vemos que el operador prisma cumple que $P(C_n(A)) \subset C_{n+1}(B)$, luego podemos definir de la misma manera un operador prisma $P : C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(Y, B)$ y la relación $\partial \circ P + P \circ \partial = g_{\sharp} - f_{\sharp}$ se sigue manteniendo, de donde se tiene que se cumple la propiedad que queríamos.

Nuestro objetivo es relacionar los grupos de homología de X , A y (X, A) mediante el siguiente resultado. Para ello, necesitamos un marco puramente algebraico:

Definición 5.1. Una sucesión de homomorfismos

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \rightarrow \cdots$$

se denomina *exacta* si $\ker(\alpha_n) = \text{im}(\alpha_{n+1})$ para todo n .

La inclusión $\text{im}(\alpha_{n+1}) \subset \ker(\alpha_n)$ quiere decir que, en particular, una sucesión exacta es un complejo de cadenas. La otra inclusión hace que los grupos de homología de dicho complejo de cadenas sean triviales.

Una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

se llama *exacta corta*.

Teorema 5.2. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces existe una sucesión exacta en la que intervienen X , A y (X, A) :

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots \rightarrow 0.$$

Para llegar a ella, abordaremos la cuestión de una forma general, utilizando únicamente argumentos de álgebra homológica. Después de obtener el resultado de esta forma general, lo particularizaremos para obtener la sucesión exacta que nos interesa. Consideremos un diagrama conmutativo como el siguiente, donde intervienen tres complejos de cadenas $A = (A_n)$, $B = (B_n)$ y $C = (C_n)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

que cumple que las filas son complejos de cadenas y las columnas sucesiones exactas cortas. Un diagrama de este tipo se denomina *sucesión exacta corta de complejos de cadenas*.

Vamos definir una aplicación $\partial_* : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ de forma que tengamos una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

Tomamos $c \in C_n$ un ciclo, es decir, $\partial(c) = 0$. Como j es sobreyectiva, existe $b \in B_n$ tal que $c = j(b)$. Como $j(\partial(b)) = \partial(j(b)) = \partial(c) = 0$, se tiene que $\partial(b) \in \ker(j) = \text{im}(i)$, luego existe un $a \in A_{n-1}$, que es único por ser i inyectiva, tal que $\partial(b) = i(a)$. Finalmente, a es un ciclo, puesto que $i(\partial(a)) = \partial(i(a)) = \partial(\partial(b)) = 0$ y por la inyectividad de i , implica que $\partial(a) = 0$. Así pues, dado $[c] \in H_n(C)$ definimos $\partial_*[c] = [a] \in H_{n-1}(A)$.

El diagrama siguiente ayuda a seguir el *diagram chasing*, que es como se denomina en inglés esta técnica habitual en álgebra homológica.

$$\begin{array}{ccccc} & & a & \xrightarrow{\partial} & 0 \\ & & \downarrow i & & \\ b & \xrightarrow{\partial} & \partial(b) & \xrightarrow{\partial} & 0 \\ \downarrow j & & \downarrow j & & \\ c & \xrightarrow{\partial} & 0 & & \end{array}$$

Falta ver que ∂_* está bien definida. Para ello es necesario ver dos aspectos:

(1) La elección de b no influye en el a final. Sea $b' \in B_n$ tal que $j(b') = c$. Se tiene por tanto que $j(b' - b) = 0$, es decir, $b' - b \in \ker(j) = \text{im}(i)$. Entonces, existe un único $a' \in A_n$ tal que $b' - b = i(a')$, o sea, $b' = b + i(a')$. Así, $\partial(b') = \partial(b) + \partial i(a') = i(a) + \partial i(a') = i(a + \partial(a'))$, con lo que llegamos a un elemento de la misma clase de homología de a .

(2) La imagen de $[c]$ no depende de la elección del candidato de la clase de homología. Sea $c' \in C_n$ tal que $[c] = [c']$. Entonces, existe $c'' \in C_{n+1}$ tal que $\partial(c'') = c' - c$, lo cual implica que $c' = c + \partial(c'')$. Como j es sobreyectiva, $c'' = j(b')$ para algún $b' \in B_{n+1}$, con lo que $c' = c + \partial(c'') = j(b) + \partial j(b') = j(b + \partial(b'))$. Pero entonces, $\partial(b + \partial(b')) = \partial(b) + \partial\partial(b') = \partial(b) = i(a)$, luego llegamos al mismo $a \in H_{n-1}$ y por tanto $\partial_*[c] = \partial_*[c']$.

Se tiene además que la aplicación ∂_* es un homomorfismo. En efecto, sean $[c], [c'] \in C_n$. Tenemos que ver que $\partial_*([c] + [c']) = \partial_*[c] + \partial_*[c']$. Supongamos que $\partial_*[c] = [a]$ y $\partial_*[c'] = [a']$ y que $i(a) = \partial(b)$ y $i(a') = \partial(b')$ para unos ciertos $a, a' \in A_{n-1}$ y $b, b' \in B_n$. Entonces, $i(a + a') = i(a) + i(a') = \partial(b) + \partial(b') = \partial(b + b')$ y $j(b + b') = j(b) + j(b') = c + c'$, con lo que $\partial([c] + [c']) = [a] + [a']$. Esta aplicación recibe en inglés el nombre de *connecting mapping*.

Estamos por tanto en condiciones de probar el siguiente teorema que nos permite obtener una sucesión exacta a partir de cualquier sucesión exacta corta de complejos de cadenas.

Teorema 5.3. *La sucesión*

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

Demostración. Necesitamos demostrar la exactitud en cada uno de los pasos, es decir, $\text{im}(i_*) = \ker(j_*)$, $\text{im}(j_*) = \ker(\partial_*)$, y $\text{im}(\partial_*) = \ker(i_*)$. Procederemos en cada caso por doble inclusión.

- $\text{im}(i_*) = \ker(j_*)$:

Como $\text{im}(i) = \ker(j)$, dado $[a] \in A_n$, $j_*i_*[a] = [ji(a)] = [0]$, luego $\text{im}(i_*) \subset \ker(j_*)$.

Sea ahora $[b] \in \ker(j_*)$ con b un ciclo de B_n . Como, $j_*[b] = [0]$, se tiene que $j(b)$ es un borde en C_n , luego $j(b) = \partial(c')$ para algún $c' \in C_{n+1}$. Por la sobreyectividad de j , existe un $b' \in B_{n+1}$ tal que $c' = j(b')$, con lo que $j(b) = \partial j(b')$ y por tanto $b - \partial(b) \in \ker(j) = \text{im}(i)$, lo cual implica que existe un $a \in A_n$ tal que $b - \partial(b) = i(a)$. Además, se tiene que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial(b')) = 0$ y por ser i inyectiva, se deduce que a es un ciclo. Finalmente, como $[b] = [b - \partial(b)] = [i(a)] = i_*[a]$, llegamos a que $\ker(j_*) \subset \text{im}(i_*)$.

- $\text{im}(j_*) = \ker(\partial_*)$:

Sea $[b] \in H_n(B)$. Como b es un ciclo, se tiene que $\partial(b) = 0$ y por tanto en este caso $\partial_*j_*[b] = 0$, luego $\text{im}(j_*) \subset \ker(\partial_*)$.

Por otro lado, sea $[c] \in \ker(\partial_*)$, y sean $b \in B_n$ y $a \in A_{n-1}$ elementos tales que $j(b) = c$ y $\partial(b) = i(a)$. Entonces, $[a] = \partial_*[c] = [0]$, con lo que a es un borde. Por tanto, existe $a' \in A_n$ tal que $a = \partial(a')$. Así, como $\partial(b) = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, el elemento $b - i(a')$ es un ciclo, y aplicando j_* se tiene que $j_*[b - i(a')] = [j(b) - ji(a')] = [j(b)] = [c]$, lo que concluye que $\ker(\partial_*) \subset \text{im}(j_*)$.

- $\text{im}(\partial_*) = \ker(i_*)$:

Tomamos $[c] \in H_n(C)$ y sean igual que antes $b \in B_n$ y $a \in A_{n-1}$ tales que $j(b) = c$ y $\partial(b) = i(a)$. Entonces, $\partial_*[c] = [a]$, con lo que $i_*\partial_*[c] = i_*[a] = [i(a)] = [\partial(b)] = [0]$. Así, $\text{im}(\partial_*) \subset \ker(i_*)$.

Por último, sea $[a] \in \ker(i_*)$, es decir, $i_*[a] = [i(a)] = [0]$, lo cual implica que $i(a)$ es un borde. Por tanto, existe $b \in B_n$ tal que $i(a) = \partial(b)$. Tomamos $c = j(b) \in C_n$. Se tiene que $\partial(c) = \partial j(b) = j\partial(b) = ji(a) = 0$, con lo que c es un ciclo y $[a] = \partial_*[c]$, que demuestra que $\ker(i_*) \subset \text{im}(\partial_*)$.

□

Queda así probado el teorema, de nuevo mediante diagram chasing. Retomando nuestro objetivo, un par (X, A) , consideramos $A_n = C_n(A)$, $B_n = C_n(X)$ y $C_n = C_n(X, A)$, que da lugar a la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde $i : C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)$ es la inclusión y $j : C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$ es la proyección. Por la definición del operador borde, el diagrama es conmutativo. Además cada fila es una sucesión exacta corta. Aplicando ahora 5.3 llegamos a la sucesión exacta que queríamos:

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots \rightarrow 0.$$

Además, si añadimos al diagrama la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

llegamos a que también es una sucesión exacta

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0.$$

De forma natural, se puede generalizar la sucesión exacta para pares (X, A) a tríos (X, A, B) donde $B \subset A \subset X$ sin más que aplicar 5.3 a la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow C_n(A, B) \rightarrow C_n(X, B) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0.$$

Ejemplo 5.4. Aplicando el resultado al par (X, x_0) donde $x_0 \in X$ es un punto (también vale si en vez de x_0 cogemos cualquier subconjunto contráctil de X), como $\tilde{H}_n(x_0) = 0$ para $n \geq 0$, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(X, x_0) \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(X, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X, x_0). \end{aligned}$$

Luego para cada n tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(X, x_0) \rightarrow 0.$$

Por ser la imagen de la aplicación de la izquierda $\{0\}$, se tiene que la aplicación del medio es inyectiva. Por ser el núcleo de la aplicación de la derecha todo $H_n(X, x_0)$, se tiene que la aplicación central es además sobreyectiva. Por tanto, deducimos que $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x_0)$.

6. ESCISIÓN

A continuación vamos a presentar la propiedad más importante de la homología relativa, conocida como *escisión*. Este resultado nos indica que, bajo ciertas hipótesis, el grupo de homología relativa no cambia si eliminamos un subconjunto de A .

Teorema 6.1 (de escisión). *Sea el par (X, A) y Z un subconjunto de A tal que $\bar{Z} \subset \text{Int}(A)$. Entonces, la inclusión $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismos de los grupos de homología relativa $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \cong H_n(X, A)$ para todo n .*

Un enunciado equivalente del teorema se formula tomando $B = X \setminus Z$. En este caso, $A \cap B = A \setminus Z$. Como $X \setminus \text{Int}(B) = \bar{Z}$, se tiene que la condición de que $\bar{Z} \subset \text{Int}(A)$ es equivalente a que $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. Así pues, el teorema se reescribe diciendo que para $A, B \subset X$ tales que $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = X$, la inclusión $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$ para todo n .

Para la demostración del teorema, necesitamos un resultado técnico. Este resultado nos dice que para la definición del grupo de homología relativa, basta considerar símlices singulares arbitrariamente pequeños.

Para un espacio X , sea $\mathcal{U} = \{U_j\}$ una familia de subconjuntos de X tales que $\bigcup_j \text{Int}(U_j) = X$. Denotamos por $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ al subgrupo de $C_n(X)$ formado por las cadenas cuyos n -símlices tienen su imagen contenida en algún $U_j \in \mathcal{U}$. Como el operador borde manda cadenas de $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ a $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, podemos definir el grupo de homología $H_n^{\mathcal{U}}(X)$. Si consideramos ahora la inclusión $i : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$, tenemos el siguiente resultado.

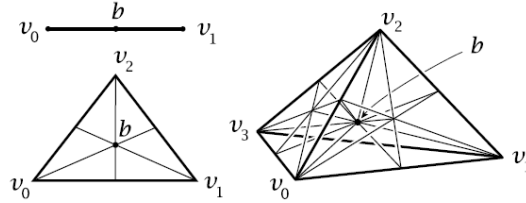
Lema 6.2. *Sea \mathcal{U} como en las condiciones anteriores. Entonces, el homomorfismo inducido $i_* : H_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo.*

Demostración. La demostración es un tanto larga y tediosa y la realizaremos en cuatro etapas progresivamente más complicadas. El objetivo será construir un operador que generalice la subdivisión baricéntrica y una homotopía de cadenas entre él y la identidad, para finalmente obtener i como una equivalencia homotópica de cadenas.

(1) *Subdivisión baricéntrica de n -símplices.* El *baricentro* de un n -símplice $[v_0, \dots, v_n]$ es el punto que se obtiene mediante la combinación lineal

$$b = \sum_i t_i v_i, \text{ con } t_i = \frac{1}{n+1} \text{ para todo } i.$$

La *subdivisión baricéntrica* de un n -símplice se define por inducción: son los n -símplices $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ donde $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ es un $(n-1)$ -símplice en la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ y la subdivisión baricéntrica de $[v_0]$ es $[v_0]$. Se tiene, por tanto, que los vértices de la subdivisión baricéntrica son el baricentro de cada cara de todas las dimensiones, es decir, el baricentro de $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ con $0 \leq k \leq n$. La siguiente figura muestra los casos de $n = 1, 2, 3$:



Recordemos que el *diámetro* de un subconjunto de un espacio métrico se define como el supremo de las distancias entre cualesquiera dos de sus elementos. Lo que nos interesa ver en este caso es que el diámetro de un símplice de la subdivisión baricéntrica es, como máximo, $n/(n+1)$ veces el del símplice original, lo cual nos asegura que aplicando iteradamente esta subdivisión, conseguiremos trocear el símplice original en otros de diámetro arbitrariamente pequeño: en la m -ésima iteración obtendremos símplices cuyo diámetro respecto del original será, a lo sumo,

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

En primer lugar, el diámetro de un símplice se alcanza en el máximo de las distancias entre sus vértices, pues dados dos puntos del símplice, v y $\sum_i t_i v_i$ se tiene que

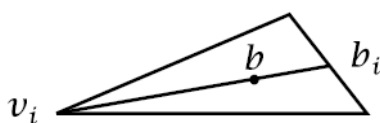
$$\|v - \sum_i t_i v_i\| = \left\| \sum_i t_i (v - v_i) \right\| \leq \sum_i t_i \|v - v_i\| \leq \sum_i t_i \max_j \|v - v_j\| = \max_j \|v - v_j\|.$$

Si ponemos ahora v en coordenadas y fijamos el v_j donde se alcanza el máximo, repitiendo la desigualdad obtenemos la afirmación. A partir de aquí, para obtener la cota que queremos, basta considerar la distancia entre dos vértices w_j y w_k de un símplice $[w_0, \dots, w_n]$ de la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$. Por inducción sobre n , para el caso $n = 2$ es trivial. Supongámoslo cierto para $n-1$. Para n , si ni w_j ni w_k es el baricentro

b de $[v_0, \dots, v_n]$, entonces ambos pertenecen a una cara y podemos aplicar la hipótesis de inducción. Supongamos, por tanto, que $w_j = b$ y tomamos w_k algún v_i , pues, por lo visto anteriormente, es donde se alcanza el máximo. Denotamos b_i al baricentro de la cara $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. Se tiene que

$$b = \sum_l \frac{1}{n+1} v_l = \frac{1}{n+1} v_i + \sum_{\substack{l \\ l \neq i}} \frac{1}{n+1} v_l = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i.$$

Luego b está en el segmento que une v_i con b_i , y además la distancia de v_i a b es $n/(n+1)$ veces la de v_i a b_i , o sea, menor o igual que $n/(n+1)$ veces el diámetro de $[v_0, \dots, v_n]$ por lo visto antes, como queríamos probar.



(2) *Subdivisión baricéntrica de cadenas lineales.* El objetivo ahora es construir un operador $S : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ que llamaremos *operador subdivisión*, ver que es un homomorfismo de cadenas y que es homótopo a la identidad (por una homotopía de cadenas). Primero lo construiremos en el caso particular de un espacio convexo Y y el subgrupo $LC_n(Y)$ de *cadenas lineales*, generado por los símlices $\Delta^n \rightarrow Y$ dados por aplicaciones lineales. Como el operador borde manda cadenas lineales a cadenas lineales, los $LC_n(Y)$ forman un subcomplejo de cadenas. Además, cada n -símlice singular $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$ queda determinado por la imagen de los vértices del n -símlice Δ^n . Por conveniencia, tomaremos como $LC_{-1}(Y)$ el grupo cíclico generado por $[\emptyset]$. Dado un punto $b \in Y$, definimos el homomorfismo $b : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$ por $b[w_0, \dots, w_n] = [b, w_0, \dots, w_n]$. Si ahora aplicamos el operador borde, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial b[w_0, \dots, w_n] &= \partial[b, w_0, \dots, w_n] = [w_0, \dots, w_n] - [b, w_1, \dots, w_n] + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} [b, w_0, \dots, w_{n-1}] = [w_0, \dots, w_n] - b\partial[w_0, \dots, w_n], \end{aligned}$$

y extendiéndolo por linealidad, se sigue que $\partial b + b\partial = \text{Id}$

Ahora definimos $S : LC_n(Y) \rightarrow LC_n(Y)$ por inducción de la siguiente manera: primero, $S[\emptyset] = [\emptyset]$ y para $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$, que por lo dicho antes podemos representar por $[w_0, \dots, w_n]$ donde cada w_i es la imagen de un vértice de Δ^n , tomamos b_λ como la imagen por λ del baricentro de Δ^n y definimos $S(\lambda) = b_\lambda(S\partial\lambda)$. S cumple que $\partial S = S\partial$, pues, por inducción, para $n = -1$, $S = \text{Id}$ y como $S[w_0] = w_0(S\partial[w_0]) = w_0(S[\emptyset]) = [w_0]$, para $n = 0$ también. Si lo suponemos probado para $n - 1$, para n se tiene que

$$\partial S\lambda = \partial(b_\lambda(S\partial\lambda)) = S\partial\lambda - b_\lambda(\partial S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda) = S\partial\lambda,$$

de donde se deduce que S es un homomorfismo de cadenas.

El siguiente paso es construir una homotopía de cadenas entre S y Id que denotaremos por $T : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$. El siguiente diagrama ayuda a visualizar la construcción:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & LC_2(Y) & \longrightarrow & LC_1(Y) & \longrightarrow & LC_0(Y) & \longrightarrow & LC_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow S & \nearrow T & \downarrow S & \nearrow T & \downarrow S & \nearrow T & \downarrow S & & \\ \cdots & \longrightarrow & LC_2(Y) & \longrightarrow & LC_1(Y) & \longrightarrow & LC_0(Y) & \longrightarrow & LC_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De nuevo, por inducción, definimos $T = 0$ para $n = -1$ y $T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$ para $n \geq 0$. Falta verificar que efectivamente $\partial T + T\partial = \text{Id} - S$. Para $n = -1$ es trivial, pues $T = 0$ y $S = \text{Id}$. Para $n \geq 0$, por inducción,

$$\begin{aligned} \partial T\lambda &= \partial(b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial(\lambda - T\partial\lambda)) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(T\partial\partial\lambda + S\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - S\lambda, \end{aligned}$$

de donde se tiene el resultado.

(3) *Subdivisión baricéntrica de cadenas en general.* Según lo anterior, $S\Delta^n$ es la suma de los símlices de la subdivisión baricéntrica de Δ^n con ciertos signos. Por ejemplo, para $n = 1$,

$$S[w_0, w_1] = b(S\partial[w_0, w_1]) = b(S[w_1] - S[w_0]) = [b, w_1] - [b, w_0].$$

Así, definimos $S : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ para un n -símlice singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ como $S\sigma = \sigma_\# S\Delta^n$, donde el término de la derecha representa la suma (con los correspondientes signos) de las restricciones de σ a cada símlice de la subdivisión baricéntrica de Δ^n . Así, S es de nuevo un homomorfismo de cadenas, pues

$$\begin{aligned} \partial S\sigma &= \partial\sigma_\# S\Delta^n = \sigma_\# \partial S\Delta^n = \sigma_\# S\partial\Delta^n = \sigma_\# S\left(\sum_i (-1)^i \Delta_i^n\right) \\ &= \sum_i (-1)^i \sigma_\# S\Delta_i^n = \sum_i (-1)^i S\sigma|_{\Delta_i^n} = S\sum_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_i^n} = S\partial\sigma, \end{aligned}$$

donde Δ_i^n denota la i -ésima cara de Δ^n , es decir, el $(n-1)$ -símlice que se obtiene al omitir el i -ésimo vértice. La homotopía de cadenas $T : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ viene definida por $T\sigma = \sigma_\# T\Delta^n$. Como

$$\begin{aligned} \partial T\sigma &= \partial\sigma_\# T\Delta^n = \sigma_\# \partial T\Delta^n = \sigma_\# (\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) \\ &= \sigma - S\sigma - \sigma_\# T\partial\Delta^n = \sigma - S\sigma - T\partial\sigma, \end{aligned}$$

resulta que T es realmente una homotopía de cadenas entre S y Id .

(4) *Subdivisión baricéntrica iterada.* Una homotopía de cadenas entre Id y S^m viene dada por $D_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$, donde S^i denota aplicar la subdivisión baricéntrica iteradamente i veces. En efecto,

$$\begin{aligned} \partial D_m + D_m\partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T\partial S^i) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T\partial)S^i \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\text{Id} - S)S^i = \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = \text{Id} - S^m. \end{aligned}$$

Recordemos que para un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_j\}$ de un conjunto compacto, se define el *número de Lebesgue* como un número positivo $\varepsilon > 0$ tal que cada subconjunto de diámetro menor que ε está contenido en algún U_j . Dado un n -símlice singular σ , si

tomamos el recubrimiento $\{\sigma^{-1}(U_j)\}$ de Δ^n , por lo visto en el apartado (1), existirá un m tal que $S^m\sigma$ está en $C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Como el m depende de σ , denotamos $m(\sigma)$ como el menor que cumpla eso. Definimos ahora $D : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ como $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$ y veamos que es una homotopía de cadenas. Previamente teníamos que

$$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma,$$

de donde obtenemos

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - (S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma).$$

Llamando ahora $\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$, llegamos a la expresión

$$(1) \quad \partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma)$$

Veamos ahora que $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$, es decir, $\rho : C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Por un lado, para $S^{m(\sigma)}\sigma$ es obvio. Por otro lado, denotando $\sigma_i = \sigma|_{\Delta_i^n}$, se tiene que

$$\begin{aligned} D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma &= \sum_i (-1)^i D_{m(\sigma)}\sigma_i - \sum_i (-1)^i D\sigma_i \\ &= \sum_i (-1)^i D_{m(\sigma)}\sigma_i - \sum_i (-1)^i D_{m(\sigma_i)}\sigma_i \\ &= \sum_i (-1)^i \left(\sum_{0 \leq j < m(\sigma)} TS^j\sigma_i - \sum_{0 \leq j < m(\sigma_i)} TS^j\sigma_i \right). \end{aligned}$$

Como $m(\sigma_i) \leq m(\sigma)$, queda

$$D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma = \sum_i (-1)^i \sum_{m(\sigma_i) \leq j < m(\sigma)} TS^j\sigma_i,$$

que pertenece a $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, pues T manda elementos de $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ a $C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Además, por (1), se tiene que

$$\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial\partial D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial\partial\sigma = \rho(\partial\sigma),$$

luego ρ es un homomorfismo de cadenas. Finalmente, si consideramos la inclusión $i : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$, podemos ver (1) como $\partial D + D\partial = \text{Id} - i\rho$, de donde tenemos que i es una equivalencia homotópica de cadenas y por tanto el resultado que queríamos. \square

A partir de este resultado, podemos dar de forma sencilla la demostración del teorema de escisión.

Demostración del teorema de escisión. Sea $\mathcal{U} = \{A, X \setminus Z\}$. Podemos expresar $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ como $C_n(A) + C_n(X \setminus Z)$, indicando que los elementos de $C_n^{\mathcal{U}}$ son sumas de cadenas de $C_n(A)$ y $C_n(X \setminus Z)$. Consideremos ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\mathcal{U}}(X, A) & \xrightarrow{i} & C_n(X, A) \\ j \uparrow & \nearrow l & \\ C_n(X \setminus Z, A \setminus Z) & & \end{array}$$

donde cada homomorfismo es el inducido por la inclusión. Al pasar a los grupos de homología,

$$\begin{array}{ccc} H_n^u(X, A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X, A) \\ j_* \uparrow & \nearrow l_* & \\ H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) & & \end{array}$$

Lo que queremos ver es que l_* es un isomorfismo. Por 6.2, basta ver que j_* lo es. Por un lado se tiene que

$$C_n(X \setminus Z, A \setminus Z) = \frac{C_n(X \setminus Z)}{C_n(A \setminus Z)} = \frac{C_n(X \setminus Z)}{C_n(X \setminus Z) \cap C_n(A)},$$

y por otro lado,

$$C_n^u(X, A) = \frac{C_n^u(X)}{C_n^u(A)} = \frac{C_n(X \setminus Z) + C_n(A)}{C_n(A)}.$$

Por tanto,

$$j : \frac{C_n(X \setminus Z)}{C_n(X \setminus Z) \cap C_n(A)} \rightarrow \frac{C_n(X \setminus Z) + C_n(A)}{C_n(A)}$$

es un isomorfismo por el segundo teorema de isomorfía, y en consecuencia j_* también lo es. \square

7. HOMOLOGÍA DE LAS ESFERAS

En esta sección calcularemos por escisión los grupos de homología de las esferas. Serán el primer ejemplo de espacio cuyos grupos de homología (reducida) no son triviales. Además, a partir de esta homología podremos deducir importantes resultados topológicos como el *teorema del punto fijo de Brouwer*.

Teorema 7.1. *Para $n \geq 0$ se tiene:*

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

Demostración. La demostración será por inducción sobre n . Para $n = 0$, el resultado es cierto por 2.7, pues \mathbb{S}^0 es un espacio formado por dos puntos. Supongamos el resultado cierto para el caso de \mathbb{S}^{n-1} . Consideramos los siguientes subconjuntos de \mathbb{S}^n :

$$E_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \geq 0\},$$

$$E_-^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \leq 0\},$$

y vemos \mathbb{S}^{n-1} como el subconjunto $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} = 0\}$. Es importante tener en cuenta que tanto E_+^n como E_-^n son homeomorfos a \mathbb{D}^n y por tanto contráctiles. Eso implica que $\tilde{H}_i(E_+^n) = \tilde{H}_i(E_-^n) = 0$ para todo $i \geq 0$. Para ver que $\tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n)$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_i(E_-^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{k_*} & H_i(\mathbb{S}^n, E_+^n) \\ \downarrow \partial_* & & \uparrow j_* \\ \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & & \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

donde $j : C_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow C_n(\mathbb{S}^n, E_+^n)$ es la proyección, $k : C_n(E_-^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow C_n(\mathbb{S}^n, E_+^n)$ es la inclusión y ∂_* es el connecting mapping. Nuestro objetivo ahora es ver que las tres aplicaciones son isomorfismos y entonces habremos acabado. Primero tomamos la sucesión exacta asociada al par $(E_-^n, \mathbb{S}^{n-1})$:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_i(E_-^n) \rightarrow H_i(E_-^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(E_-^n) \rightarrow \cdots .$$

Como $\tilde{H}_i(E_-^n) = 0$ para todo i , tenemos que ∂_* es un isomorfismo. De forma similar, considerando la sucesión exacta asociada al par (\mathbb{S}^n, E_+^n)

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_i(E_+^n) \rightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{j_*} H_i(\mathbb{S}^n, E_+^n) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(E_+^n) \rightarrow \cdots ,$$

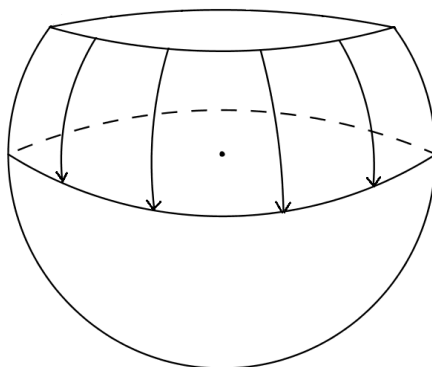
llegamos a que j_* es un isomorfismo. Para probar que k_* es isomorfismo, en un primer momento podríamos pensar en aplicar el teorema de escisión al obtenerse el par $(E_-^n, \mathbb{S}^{n-1})$ quitándole a (\mathbb{S}^n, E_+^n) el subconjunto $E_+^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$. Sin embargo en este caso no podemos utilizarlo al no cumplirse que $\overline{E_+^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}} \subset \text{Int}(E_+^n)$. Por este motivo, consideramos el subconjunto

$$W = \{(x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \geq \frac{1}{2}\},$$

a partir del cual podemos obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_i(E_-^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{k_*} & H_i(\mathbb{S}^n, E_+^n) \\ \downarrow h_* & \nearrow e_* & \\ H_i(\mathbb{S}^n \setminus W, E_+^n \setminus W) & & \end{array}$$

para el que h y e son inclusiones. Por un lado, e_* es un isomorfismo por el teorema de escisión. Por otro lado, se tiene que $(E_-^n, \mathbb{S}^{n-1})$ es un retracto de deformación de $(\mathbb{S}^n \setminus W, E_+^n \setminus W)$, es decir, existe una aplicación continua $r : (\mathbb{S}^n \setminus W, E_+^n \setminus W) \rightarrow (E_-^n, \mathbb{S}^{n-1})$ tal que $h \circ r \sim \text{Id}$ y $r \circ h \sim \text{Id}$, o sea, h es una equivalencia homotópica para pares.



Se sigue de 3.2 que h_* es un isomorfismo, y por la conmutatividad del diagrama, que k_* también. □

Una vez que conocemos los grupos de homología de la esfera, podemos demostrar varios resultados topológicos importantes.

Corolario 7.2 (Invarianza global de la Dimensión.). (1) Si $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^m$, entonces $n = m$.
 (2) Si $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, entonces $n = m$.

Demostración. (1) Inmediato a partir de 7.1 y 4.5.

(2) Para \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , su compactificación de Alexandroff es \mathbb{S}^n y \mathbb{S}^m , respectivamente. Como el homeomorfismo es un caso particular de tipo de homotopía y dos espacios homeomorfos tienen su compactificación de Alexandroff homeomorfa, se sigue de (1) que si $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, entonces $n = m$, \square

Corolario 7.3. \mathbb{S}^n no es contráctil.

Demostración. En efecto, pues $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \neq 0$. \square

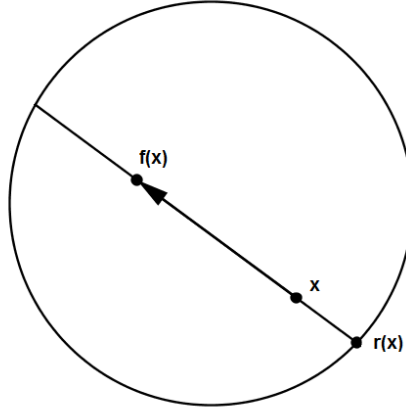
Corolario 7.4. \mathbb{S}^{n-1} no es un retracto de \mathbb{D}^n .

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $r \circ i = \text{Id}$, donde $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ es la inclusión. Entonces, tenemos que $r_* \circ i_* = \text{Id}$. De aquí se deduce que $i_* : \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{D}^n)$ es inyectiva y $r_* : \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{D}^n) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ es sobreyectiva, lo cual es imposible por ser $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$ y $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{D}^n) = 0$. \square

Teorema 7.5 (del punto fijo de Brouwer). *Sea $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in \mathbb{D}^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. De nuevo procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que para todo $x \in \mathbb{D}^n$, $f(x) \neq x$, o equivalentemente, $\|f(x) - x\| \neq 0$. Con esto, vamos a definir una retracción $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$, lo cual supone una contradicción. Como $f(x) \neq x$, podemos considerar la recta que pasa por $f(x)$ y x :

$$x + \lambda(f(x) - x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Definiremos $r(x)$ como el punto de corte más cercano a x de tal recta con $\partial\mathbb{D}^n$, o lo que es lo mismo, $r(x) = x + \lambda(f(x) - x)$ donde λ es la solución negativa de la ecuación $\|x + \lambda(f(x) - x)\|^2 = 1$. Tal solución existe, pues por ser $f(x) \neq x$, la recta corta a la circunferencia necesariamente en dos puntos. Además, cada uno de los puntos corresponde a un sentido de λ , lo cual hace que exista una solución positiva y una negativa. Así, tomamos la raíz negativa y nos queda la aplicación que queríamos, que obviamente es continua. Además, si $x \in \partial\mathbb{D}^n$, se tiene que $r(x) = x$. Por tanto es un retracto: contradicción. \square

Para terminar esta sección, damos un último resultado importante conocido como *Invarianza de la Dimensión*, que generaliza el apartado (2) de 7.2 y se prueba fácilmente a partir del teorema de escisión.

Teorema 7.6 (de Invarianza de la Dimensión). *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos no vacíos. Si U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.*

Demostración. Sea $x \in U$. Podemos aplicar el teorema de escisión con $X = \mathbb{R}^n$, $A = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, y $Z = \mathbb{R}^n \setminus U$. Así, se tiene que $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$. Por otro lado, consideramos la sucesión exacta asociada al par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{j_*} H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \cdots .$$

Como \mathbb{R}^n es contráctil y $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ es del mismo tipo de homotopía que \mathbb{S}^{n-1} , se tiene:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots ,$$

de donde se sigue que $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$ para $n = k$ y cero en otro caso. Por el mismo razonamiento se llega a que si $y \in V$, entonces $H_k(V, V \setminus \{y\}) = \mathbb{Z}$ si $m = k$ y cero si es distinto. Ahora bien, como $U \cong V$, supongamos que $\varphi : U \rightarrow V$ es el homeomorfismo y tomemos $y = \varphi(x)$. Entonces, φ induce un isomorfismo $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(V, V \setminus \{\varphi(x)\})$, de donde se deduce que necesariamente $n = m$. \square

8. GRADO DE UNA APLICACIÓN

En esta sección aprovecharemos el cálculo del grupo $H_n(\mathbb{S}^n)$ para introducir un concepto conocido como *grado de una aplicación*. Este concepto fue definido por primera vez por Brouwer al principio del siglo XX, aunque su definición fue anterior a la teoría de homología tal como la hemos presentado aquí.

Definición 8.1. Dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, tenemos un homomorfismo inducido $f_* : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$. Como $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, f_* debe ser de la forma $f_*(\alpha) = d\alpha$, con $d \in \mathbb{Z}$, para cada $\alpha \in \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$. Así, definimos *grado* de f como $\deg(f) = d$.

A continuación veremos algunas de las propiedades que cumple el grado que nos servirán para demostrar algún resultado interesante.

Proposición 8.2 (propiedades del grado). (1) $\deg(\text{Id}) = 1$.

(2) Si f no es sobreyectiva, entonces $\deg(f) = 0$.

(3) Si $f \sim g$, entonces $\deg(f) = \deg(g)$.

(4) $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

(5) Si f es una equivalencia homotópica, entonces $\deg(f) = \pm 1$.

(6) Si f es una reflexión en \mathbb{S}^n , $\deg(f) = -1$.

(7) Para la aplicación antipodal $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ se cumple que $\deg(A) = (-1)^{n+1}$.

(8) Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

Demostración. (1) Obvio, puesto que $\text{Id}_* = \text{Id}$.

(2) Sea $x_0 \in \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^n)$. Entonces f la podemos descomponer como $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ que al pasar a grupos de homología obtenemos $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n \setminus x_0) \hookrightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$. Como

$\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ es contráctil, se tiene que $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}) = 0$, con lo que $f_* \equiv 0$, por lo que $\deg(f) = 0$.

(3) Inmediato a partir de 3.2.

(4) Teniendo en cuenta que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, dado $\alpha \in \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ se tiene que $\deg(f \circ g)\alpha = (f \circ g)_*(\alpha) = (f_* \circ g_*)(\alpha) = f_*(\deg(g)\alpha) = \deg(f) \deg(g)\alpha$.

(5) Es consecuencia inmediata de las dos propiedades anteriores, puesto que si $f \circ g \sim \text{Id}$, entonces $\deg(f) \deg(g) = 1$, con lo que $\deg(f) = \deg(g) = \pm 1$.

(6) Como $f \circ f = \text{Id}$, se tiene que $\deg(f) = \pm 1$. En consecuencia, basta encontrar un elemento $\sigma \in \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ tal que $f_*(\sigma) = -\sigma$. Sea $\sigma_1 : \Delta^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ el n -símplice singular que manda Δ^n al hemisferio norte respecto del ecuador que queda fijo por f . De la misma manera, definimos σ_2 como el n -símplice singular que manda Δ^n al hemisferio sur. Como el borde de ambos es \mathbb{S}^{n-1} , se tiene que $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ es un ciclo. Por otro lado, f_* manda σ_1 a σ_2 y viceversa, por lo que $f_*(\sigma) = -\sigma$, como queríamos.

(7) Como la aplicación antipodal manda (x_1, \dots, x_{n+1}) a $(-x_1, \dots, -x_{n+1})$, se tiene que $A = A_1 \circ \dots \circ A_{n+1}$ donde cada A_i es la reflexión que fija todas las coordenadas y cambia de signo la i -ésima. Por tanto, juntando los apartados (4) y (6) tenemos que $\deg(A) = \deg(A_1) \cdots \deg(A_{n+1}) = (-1)^{n+1}$.

(8) Si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ no tiene puntos fijos, podemos definir una homotopía entre f y la aplicación antipodal. En tal caso, por el apartado (3) tendríamos que $\deg(f) = (-1)^{n+1}$. El hecho de que f no tenga puntos fijos hace que la aplicación

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

esté bien definida, pues el denominador representa el segmento que une $f(x)$ con $-x$ y no pasa por el origen. Por tanto, H proporciona la homotopía deseada. \square

Observación 8.3. La propiedad (3) en realidad es un si y sólo si. La implicación recíproca a la que hemos probado es un importante teorema debido a Hopf que nosotros no utilizaremos [6, V.2–3]. Por tanto, como comentario añadimos que el grado de una aplicación no sólo es un invariante homotópico, sino que la caracteriza.

Ahora que tenemos el concepto de grado, podemos probar algunos resultados célebres.

Definición 8.4. Un *campo tangente* v en \mathbb{S}^n es una aplicación que a cada punto $x \in \mathbb{S}^n$ le hace corresponder un vector $v(x)$ tangente a \mathbb{S}^n , es decir, ortogonal a x . Un campo tangente es continuo si cada una de sus componentes es continua, y es distinto de cero si $v(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$.

Teorema 8.5 (de la esfera de Brouwer). *Existe un campo tangente continuo distinto de cero en \mathbb{S}^n si y solo si n es impar.*

Demostración. Sea v un campo tangente. Normalizando si es necesario, podemos suponer que $\|v(x)\| = 1$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Para cada t , el vector $(\cos t)x + (\sin t)v(x)$ están en la circunferencia unidad del plano que generan los vectores x y $v(x)$. Variando t en $[0, \pi]$, obtenemos una homotopía $H(x, t) = (\cos t)x + (\sin t)v(x)$ entre la identidad y la aplicación antipodal, A , con lo que $(-1)^{n+1} = \deg(A) = \deg(\text{Id}) = 1$, lo cual es posible

sólo si n es impar. Recíprocamente, si n es impar, el campo $v(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{n+1}, x_n)$ es tangente continuo y no tiene ceros. \square

Definición 8.6. Una *acción* de un grupo G sobre un espacio X es un homomorfismo $g \mapsto \theta_g$ de G en el grupo $\text{Homeo}(X)$ de los homeomorfismos de X en X . Decimos que G *actúa libremente* si θ_g sólo tiene puntos fijos cuando $g = e$.

Teorema 8.7. \mathbb{Z}_2 es el único grupo no trivial que actúa libremente sobre \mathbb{S}^n si n es par.

Demostración. Denotemos θ la acción. Como el grado de un homeomorfismo es ± 1 , podemos definir una aplicación

$$\begin{aligned} d : G &\rightarrow \{\pm 1\} \\ g &\mapsto \deg(\theta_g) \end{aligned}$$

Esta aplicación es un homomorfismo, pues

$$d(gh) = \deg(\theta_{gh}) = \deg(\theta_g \circ \theta_h) = \deg(\theta_g) \deg(\theta_h) = d(g)d(h)$$

Por otro lado, si G actúa libremente, para cada g distinto del neutro, θ_g no tiene puntos fijos, por lo que $d(g) = \deg(\theta_g) = (-1)^{n+1}$. Luego si n es par, $d(g) = -1$, es decir, $\ker(d) = \{e\}$, lo que implica que $G < \mathbb{Z}_2$, de donde se deduce que $G = \{e\}$ o $G = \mathbb{Z}_2$. \square

Ejemplo 8.8. El *espacio proyectivo real*, $\mathbb{R}P^n$, se puede definir como el cociente \mathbb{S}^n / \sim , donde $x \sim -x$. En ese caso, podemos tomar $\mathbb{Z}_2 = \{\text{Id}, A\}$, donde $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es la aplicación antipodal, de forma que $A(x) = -x$. Esta aplicación es un homeomorfismo de \mathbb{S}^n en sí misma y no tiene puntos fijos, luego tenemos un ejemplo de acción libre de \mathbb{Z}_2 sobre \mathbb{S}^n . Además, $\mathbb{S}^n / \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}P^n$.

Veamos otro ejemplo donde la teoría del grado resulta útil. Vamos a dar una demostración alternativa del teorema del punto fijo de Brouwer que, además, es la prueba que Brouwer realizó originalmente.

Teorema 8.9 (del punto fijo de Brouwer). *Sea $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in \mathbb{D}^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. Supongamos que f no tiene puntos fijos. Como cada hemisferio de \mathbb{S}^n es homeomorfo a \mathbb{D}^n , podemos considerar $f : E_+^n \rightarrow E_+^n$. Sea $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ la reflexión respecto del ecuador. Podemos extender f a \mathbb{S}^n de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E_+^n, \\ (f \circ h)(x) & \text{si } x \in E_-^n. \end{cases}$$

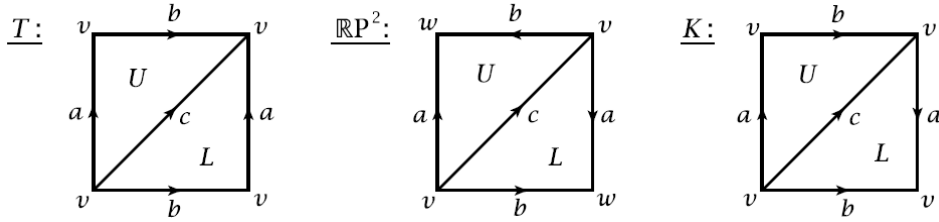
Es claro que g es continua y no tiene puntos fijos. Por 8.2 (8), $\deg(g) = (-1)^{n+1}$. Pero por otro lado, g no es sobreyectiva, por lo que se deduce de 8.2 (2) que $\deg(g) = 0$: contradicción. \square

9. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

En esta sección vamos a presentar de forma breve otra teoría conocida como *homología simplicial* que resulta útil a la hora de calcular los grupos de homología de ciertos espacios denominados Δ -complejos. Como hemos visto hasta ahora, hemos necesitado un extenso

desarrollo de la teoría singular hasta poder calcular la homología de un espacio tan común como la esfera. Sin embargo, a partir de ese desarrollo hemos sido capaces de probar resultados topológicos aparentemente ajenos a la naturaleza de la homología. Es por esto que la homología simplicial resulta un buen complemento a la singular, pues permite hacer los cálculos de una forma más directa.

Para introducir el concepto de Δ -complejo, recordamos cómo el toro, el plano proyectivo y la botella de Klein pueden obtenerse mediante un cuadrado identificando sus lados:



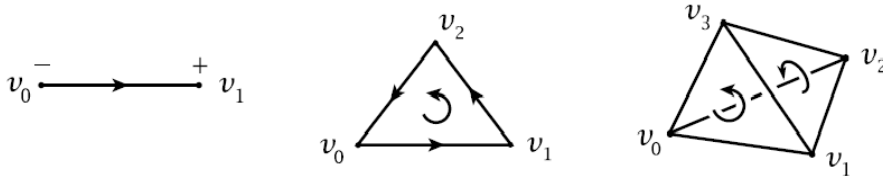
Si trazamos la diagonal como se ve en el dibujo, entonces también podemos construir dichos espacios mediante triángulos identificando ciertos lados.

Un Δ -complejo es un espacio cociente que se obtiene a partir de una colección de símplices disjuntos mediante la identificación de sus caras. La dimensión del espacio es la máxima de las dimensiones entre los símplices que lo componen. El conjunto de los símplices de dimensión k lo denotaremos por X^k , el k -esqueleto de X . Cada símplice lleva asociada una función característica $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$, que restringida al interior de Δ^k es un homeomorfismo. Además, cada cara de un símplice es, a su vez, un símplice con función característica que coincide con la restricción de la primera función característica a esa cara.

Para definir la homología simplicial, es necesario dar una orientación a los símplices. Tal orientación la tomaremos como la inducida por el orden de los vértices de Δ^n . Denotemos por $\{e_\alpha^n\}$ el conjunto de los interiores de los símplices de dimensión n . Definimos n -cadenas $\Delta_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por $\{e_\alpha^n\}$, es decir, las sumas formales $\sum_\alpha k_\alpha e_\alpha^n$. También podemos identificar cada e_α^n con su función característica $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ y definir las n -cadenas mediante las sumas $\sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha$. De la misma manera que para la homología singular, se define el operador borde $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$ por

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

La siguiente figura muestra cómo se establece la orientación de los símplices y sus caras:



En la primera figura, $\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$. En la segunda, $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$. Para el tercer caso, $\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$.

De esta manera, el signo menos indica que se toma la orientación opuesta a la dada por el orden de los vértices.

De la misma manera que en el caso singular, se comprueba que el operador borde es nilpotente, es decir, $\partial\partial(\sigma) = 0$, lo cual permite definir los grupos de homología simplicial de una manera análoga a los que ya vimos. Por tanto, definimos

$$H_n^\Delta = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})}.$$

Ejemplo 9.1. Sea $X = \mathbb{S}^1$. Descomponemos la circunferencia en un 1-símplice e y un vértice v :



Entonces, tenemos que $\Delta_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}\langle v \rangle$ y $\Delta_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}\langle e \rangle$. Como $\partial(e) = v - v = 0$, se tiene que

$$H_n^\Delta(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 1, \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 9.2. Consideremos ahora el toro con la descomposición que vimos anteriormente, con un vértice v , tres lados a, b, c y dos caras U, L . Ahora tenemos que $\Delta_0 = \mathbb{Z}\langle v \rangle$, $\Delta_1 = \mathbb{Z}\langle a, b, c \rangle$ y $\Delta_2 = \mathbb{Z}\langle U, L \rangle$. Por un lado, $\partial_1 = 0$. Por otro lado, $\partial_2(U) = a + b - c = \partial_2(L)$. Así, $H_0^\Delta(T) = \mathbb{Z}$, $H_1^\Delta(T) = \frac{\mathbb{Z}\langle a, b, c \rangle}{\mathbb{Z}\langle a+b-c \rangle} = \mathbb{Z}\langle a, b \rangle$ y $H_2^\Delta(T) = \mathbb{Z}\langle U - L \rangle$. Por tanto, nos queda

$$H_n^\Delta(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2, \\ 0 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

De igual modo al que ya hicimos, si tomamos $A \subset X$ se define la homología simplicial relativa como la homología de las cadenas $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$, que, de forma análoga a la homología singular, cumple lo esperado respecto a la sucesión exacta.

10. EQUIVALENCIA ENTRE HOMOLOGÍA SIMPLICIAL Y SINGULAR

De manera natural, cabe preguntarse si los grupos de homología singular y simplicial dan el mismo resultado, pues un símlice lo podemos identificar con su función característica y mirarlo como un símlice singular, de forma que tenemos un homomorfismo $\Delta_n(X) \rightarrow C_n(X)$. Vamos a ver unos resultados auxiliares que nos permitirán demostrar el resultado principal de la sección, que asegura que los grupos de homología singular y simplicial son isomorfos.

Lema 10.1. *Sea el par (X, A) tal que A es un retracto de deformación de un entorno suyo $V \subset X$. Entonces, la proyección $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induce un isomorfismo $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$.*

Demostración. En primer lugar, el isomorfismo $H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ se sigue de 5.4 teniendo en cuenta que A/A es un punto.

Sea V entorno de A en X con A retracto de deformación de V . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n((X/A) \setminus (A/A), (V/A) \setminus (A/A)) \end{array}$$

Por un lado, tomando la sucesión exacta asociada al trío (X, V, A) ,

$$\cdots \rightarrow H_n(V, A) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, V) \rightarrow H_{n-1}(V, A) \rightarrow \cdots,$$

se tiene que la flecha superior izquierda es un isomorfismo, pues $H_n(V, A) = 0$ por ser el par (V, A) del mismo tipo de homotopía que (A, A) . Además, ese retracto de deformación induce otro entre V/A y A/A , luego por el mismo razonamiento, la flecha inferior izquierda también es isomorfismo. Las otras dos flechas horizontales son isomorfismos por el teorema de escisión. Finalmente, la flecha vertical derecha es isomorfismo por ser $q|_{X \setminus A}$ un homeomorfismo. Así, por la conmutatividad del diagrama tenemos el resultado. \square

Lema 10.2. *La aplicación identidad $\text{Id}_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ es un ciclo que genera $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.*

Demostración. Que es un ciclo es claro. Veamos lo segundo por inducción sobre n . Para $n = 0$ es trivial, pues Δ^0 es un punto. Consideremos Λ el conjunto de todas las $(n-1)$ -caras de Δ^n salvo una. Veamos que se tienen isomorfismos

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{\cong} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}),$$

donde en la derecha hemos tomado la cara Δ^{n-1} que no está en Λ . La flecha de la izquierda es isomorfismo al considerar la sucesión exacta asociada al trío $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$,

$$\cdots \rightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow \cdots,$$

pues $H_k(\Delta^n, \Lambda) = 0$ para todo $k \geq 0$ por ser Λ un retracto de deformación de Δ^n , por lo que $(\Delta^n, \Lambda) \simeq (\Lambda, \Lambda)$. Por otro lado, tanto el par $(\partial\Delta^n, \Lambda)$ como $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ cumplen las hipótesis de 10.1, luego sus grupos de homología coinciden con $H_n(\partial\Delta^n/\Lambda)$ y $H_n(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1})$, respectivamente. Pero estos dos grupos son isomorfos, pues los cocientes $\partial\Delta^n/\Lambda$ y $\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}$ son homeomorfos. Como el isomorfismo de la izquierda es ∂_* en la sucesión exacta de $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$, mediante diagram chasing se tiene que manda Id_n a ∂Id_n , que es $\pm \text{Id}_{n-1}$ en $C_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$. En consecuencia, por la hipótesis de inducción, Id_n genera $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. \square

Lema 10.3 (de los cinco). *Sea un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

cuyas dos filas son exactas, β y δ son isomorfismos, α es sobreyectiva y ϵ es inyectiva. Entonces γ también es isomorfismo.

Demostración. La demostración sigue el procedimiento habitual de diagram chasing. Veamos primero que γ es sobreyectiva. Sea $c' \in C'$. Por ser δ sobreyectiva, existe un $d \in D$ tal que $k'(c') = \delta(d)$. De la conmutatividad del diagrama y la exactitud, se sigue que $\epsilon l(d) = l'\delta(d) = l'k'(c') = 0$. Como ϵ es inyectiva, se tiene que $d \in \ker(l) = \text{im}(k)$. Así, $d = k(c)$ para cierto $c \in C$. Aplicando k' se tiene que $k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - k'\gamma(c) = k'(c') - \delta k(c) = k'(c') - \delta(d) = 0$. En consecuencia, $c' - \gamma(c) \in \ker(k') = \text{im}(j')$, por lo que existe un $b' \in B'$ tal que $j'(b') = c' - \gamma(c)$. La sobreyectividad de β nos proporciona ahora un $b \in B$ tal que $b' = \beta(b)$, con lo que $\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + \gamma j(b) = \gamma(c) + j'\beta(b) = \gamma(c) + j'(b') = c'$, de donde se tiene que γ es sobreyectiva.

Para ver que γ es inyectiva, supongamos que $\gamma(c) = 0$ para un $c \in C$. Como $\delta k(c) = k'\gamma(c) = 0$ y δ es inyectiva, se tiene que $k(c) = 0$, con lo que $c \in \ker(k) = \text{im}(j)$. Así, existe $b \in B$ tal que $j(b) = c$. $\beta(b)$ cumple que $j'\beta(b) = \gamma j(b) = \gamma(c) = 0$, por lo que teniendo en cuenta la exactitud, $\beta(b) = i'(a')$ para cierto $a' \in A'$. Como α es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $a' = \alpha(a)$. Aplicando β a $i(a) - b$ tenemos que $\beta(i(a) - b) = \beta i(a) - \beta(b) = i'\alpha(a) - \beta(b) = i'(a') - \beta(b) = 0$, lo que implica que $b = i(a)$ por ser β inyectiva. Por tanto, $c = j(b) = ji(a) = 0$ por la exactitud, lo que prueba la inyectividad de γ . \square

Teorema 10.4. *El homomorfismo $\Delta_n(X) \rightarrow C_n(X)$ induce un isomorfismo $H_n^\Delta(X) \cong H_n(X)$.*

Demostración. La demostración será por inducción sobre k , donde X^k denotará el k -esqueleto de X . Para $k = 0$ el resultado es obvio, pues X^0 es un conjunto discreto de puntos. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo dado por la sucesión exacta asociada al par (X^k, X^{k-1}) :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

Nuestro objetivo es ver que la flecha vertical del centro es un isomorfismo. Por hipótesis de inducción, la segunda y quinta columna son isomorfismos. Aplicando 10.3, basta ver que la primera y la cuarta también lo son. Primero, $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ es cero para $n \neq k$ por tratarse de homología relativa, y es un grupo abeliano libre generado por los elementos de X^k para $n = k$. Así, se tiene

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} 0 \xrightarrow{\partial_{k+1}} \Delta_k(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\partial_k} 0 \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots,$$

con lo que resulta que $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ tiene la misma descripción que $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$.

Para $H_n(X^k, X^{k-1})$, consideremos la aplicación $\Phi : \bigsqcup_\alpha (\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$, donde $\Phi|_{(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)}$ es la función característica de Δ_α^k . Teniendo en mente el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k & \longrightarrow & X^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k & \longrightarrow & X^k \\ \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k & \longrightarrow & X^{k-1} \end{array}$$

se tiene que Φ induce un homeomorfismo $\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \bigsqcup_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k \cong X^k / X^{k-1}$, pues por la construcción de los Δ -complejos, Φ es homeomorfismo al restringirla al interior de cada símplice, y en el borde se consigue al colapsar todo a un punto. Por tanto, como (X^k, X^{k-1}) y $(\Delta_{\alpha}^k, \partial \Delta_{\alpha}^k)$ cumplen las hipótesis de 10.1, se tiene que

$$H_n(X^k, X^{k-1}) = H_n(X^k / X^{k-1}) \cong H_n(\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \bigsqcup_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k) = \bigoplus_{\alpha} H_n(\Delta_{\alpha}^k, \partial \Delta_{\alpha}^k).$$

Por último, a partir de 10.2 se deduce que $H_n(X^k, X^{k-1})$ es abeliano libre generado por los k -símplices para $n = k$ y cero para el resto. \square

11. SUCESIÓN EXACTA DE MAYER-VIETORIS

En esta sección introducimos una herramienta para calcular los grupos de homología conocida como *sucesión exacta de Mayer-Vietoris*, que se podría decir que es lo análogo al teorema de Seifert-Van Kampen para el grupo fundamental. Esta sucesión presenta un aspecto similar a la que vimos para homología relativa, pero a menudo resulta más útil.

Sean $A, B \subset X$ tal que $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = X$. Sea $C_n(A + B)$ el subgrupo de $C_n(X)$ formado por la suma de cadenas de $C_n(A)$ y cadenas de $C_n(B)$. En virtud de 6.2, la inclusión $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ induce un isomorfismo entre los respectivos grupos de homología. Consideremos los homomorfismos

$$\phi : C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A) \oplus C_n(B)$$

dada por

$$\phi(\alpha) = (\alpha, -\alpha)$$

y

$$\psi : C_n(A) \oplus C_n(B) \rightarrow C_n(A + B)$$

dada por

$$\psi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta,$$

y veamos que la sucesión

$$0 \rightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A + B) \rightarrow 0$$

es exacta corta. En primer lugar, que ϕ es inyectiva y ψ es sobreyectiva es obvio por su propia definición. Por otro lado, como $\psi(\phi(\alpha)) = \psi(\alpha, -\alpha) = \alpha - \alpha = 0$, se tiene que $\text{im}(\phi) \subset \ker(\psi)$. Por último, si $(\alpha, \beta) \in \ker(\psi)$, entonces necesariamente cumple que $\alpha = -\beta$, por lo que $(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)$, de donde se sigue que $\ker(\psi) \subset \text{im}(\phi)$.

Así pues, estamos en la situación de 5.3, y podemos extender la sucesión exacta corta de complejos de cadenas a una sucesión exacta. Denotando $\Phi = \phi_* : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$ y $\Psi = \psi_* : H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(A + B)$, podemos definir:

Definición 11.1. Llamamos *sucesión exacta de Mayer-Vietoris* a la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

Observación 11.2. En este caso, se le puede dar a ∂_* una interpretación explícita. Sea $\alpha \in H_n(X)$. Como vimos en 6.2, podemos tomar como representante de α un ciclo $x + y$, donde $x \in C_n(A)$ e $y \in C_n(B)$. En ese caso, se tiene que $\partial(x) + \partial(y) = \partial(x + y) = 0$, es decir, $\partial(x) = -\partial(y)$ representan el mismo ciclo en $H_{n-1}(A \cap B)$. Por tanto, $\partial_*(\alpha) = [\partial(x)]$.

Además, si aumentamos la sucesión exacta corta de la forma natural a

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

entonces también podemos definir la sucesión de Mayer-Vietoris para la homología reducida.

Ejemplo 11.3. Usando la sucesión de Mayer-Vietoris podemos obtener de forma sencilla los grupos de homología de la esfera. Tomando $X = \mathbb{S}^n$, $A = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ y $B = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$, como $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, podemos aplicar la sucesión de Mayer-Vietoris. Además, resulta que \mathbb{S}^{n-1} es retracto de deformación de $A \cap B$, pues $\mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n y, a su vez, \mathbb{S}^{n-1} es un retracto de deformación de \mathbb{R}^n menos un punto. La situación es, por tanto, la siguiente:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \rightarrow \tilde{H}_i(X) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(A) \oplus \tilde{H}_{i-1}(B) \rightarrow \dots,$$

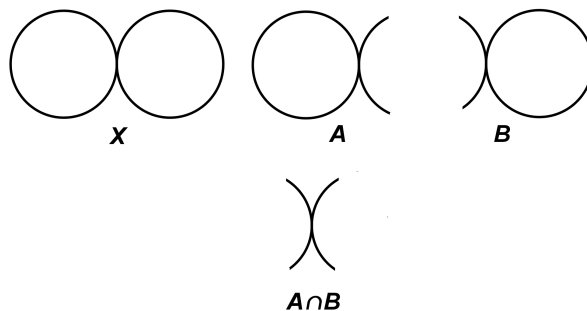
donde $\tilde{H}_i(A) = \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n) = \tilde{H}_i(B)$, es decir,

$$0 \rightarrow \tilde{H}_i(X) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(A \cap B) \rightarrow 0,$$

de donde se sigue que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = \tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}_{i-1}(A \cap B) = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ para todo i . Ahora, razonando por inducción llegamos a que

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

Ejemplo 11.4. También podemos calcular los grupos de homología del *ocho*, es decir, $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Para ello lo descomponemos como muestra el dibujo:



Ahora bien, A y B son del mismo tipo de homotopía que \mathbb{S}^1 y $A \cap B$ es contráctil. Por tanto, a partir de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris se tiene que $H_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) = 0$ para $n \geq 2$. Para $n = 1$ se tiene

$$\dots \rightarrow H_1(A \cap B) \rightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \rightarrow H_1(X) \rightarrow \tilde{H}_0(A \cap B) \rightarrow \dots,$$

es decir,

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

de donde se deduce que $H_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por último, por ser conexo por caminos, aunque también se obtiene de la sucesión, $H_0(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

12. RELACIÓN ENTRE EL GRUPO FUNDAMENTAL Y EL PRIMER GRUPO DE HOMOLOGÍA

Si consideramos un lazo $\gamma \in \pi_1(X)$, resulta que, en particular, $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ puede mirarse como un 1-símplice. Además, $\partial(\gamma) = \gamma(1) - \gamma(0) = 0$ por ser un lazo, por lo que se tiene que γ es también un ciclo. Es decir, $\gamma \in H_1(X)$. A partir de aquí cabe preguntarse si existe alguna relación entre los grupos $\pi_1(X)$ y $H_1(X)$. En esta sección abordamos esta pregunta, para la que introducimos primeramente algunos conceptos sobre grupos.

Definición 12.1. Sea G un grupo. Se llama *conmutador* de G al subgrupo $[G, G] < G$ generado por los elementos $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, para todo $g, h \in G$.

Una primera observación sobre $[G, G]$ es que es un subgrupo normal de G , pues para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $k^{-1}[g, h]k = k^{-1}ghg^{-1}h^{-1}k = k^{-1}gkk^{-1}hkk^{-1}g^{-1}kk^{-1}h^{-1}k = [k^{-1}gk, k^{-1}hk] \in [G, G]$.

Definición 12.2. Para un grupo G se define el *abelianizado* de G como

$$\text{Ab}(G) = \frac{G}{[G, G]}.$$

Se cumple que $\text{Ab}(G)$ es un grupo abeliano. En efecto, si $[g], [h] \in \text{Ab}(G)$, entonces $[g][h][g]^{-1}[h]^{-1} = [ghg^{-1}h^{-1}] = [e]$, de donde se tiene que $[g][h] = [h][g]$.

Lema 12.3. Sea G un grupo y $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ distintos tales que $g_i \neq g_j^{-1}$ para cada i, j . Sea w un producto de potencias de los g_i tal que la suma de los exponentes de un mismo g_i es cero. Entonces, w está en el conmutador de G .

Demostración. La demostración es sencilla, pues si tomamos $[w]$ como elemento de $\text{Ab}(G)$, entonces podemos agrupar los factores de cada $[g_i]$ por ser $\text{Ab}(G)$ abeliano. Como la suma de los exponentes es cero, se tiene que al reagrupar cada factor queda elevado a cero, por lo que $[w] = [e]$, o lo que es lo mismo, $w \in [G, G]$. \square

A la vista de la observación al principio de la sección, podemos considerar una aplicación $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ que manda un lazo a él mismo visto como 1-símplice. Así tenemos el siguiente teorema.

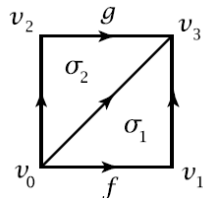
Teorema 12.4. Si X es conexo por caminos, la aplicación h induce un isomorfismo entre $\text{Ab}(\pi_1(X))$ y $H_1(X)$.

Demostración. Para la demostración, primero veremos que h es un homomorfismo bien definido. A continuación, probaremos que por ser X conexo por caminos, h es sobreyectiva, y por último, veremos que $\ker(h) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$, de donde tendremos el resultado. Utilizaremos la notación $f \simeq g$ para referirnos a caminos homótopos (con extremos fijos) y $f \sim g$ para símlices homólogos, es decir, para indicar que $f - g$ es un borde. Las siguientes propiedades nos serán de utilidad:

(1) Si f es un camino constante, $f \sim 0$, pues es el borde del 2-símplice $\sigma : [v_0, v_1, v_2] \rightarrow X$ cuya imagen es la misma que la de f :

$$\partial(\sigma) = \sigma|_{[v_1, v_2]} - \sigma|_{[v_0, v_2]} + \sigma|_{[v_0, v_1]} = f - f + f = f$$

(2) Si $f \simeq g$, entonces $f \sim g$. Tomamos $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ homotopía entre f y g . Dividimos el cuadrado que representa la homotopía en dos 2-símplices σ_1 y σ_2 . La siguiente figura ayuda a visualizar la construcción.



Por la definición de homotopía, se tiene que $\sigma_1|_{[v_0, v_1]} = f$, $\sigma_1|_{[v_1, v_3]} = f(1) = g(1)$, $\sigma_2|_{[v_0, v_2]} = f(0) = g(0)$ y $\sigma_2|_{[v_2, v_3]} = g$. Por tanto,

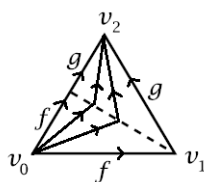
$$\begin{aligned} \partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= \sigma_1|_{[v_1, v_3]} - \sigma_1|_{[v_0, v_3]} + \sigma_1|_{[v_0, v_1]} - \sigma_2|_{[v_2, v_3]} + \sigma_2|_{[v_0, v_3]} - \sigma_2|_{[v_0, v_2]} \\ &= f(1) + f - g - f(0) \sim f - g, \end{aligned}$$

pues las restricciones a $[v_0, v_3]$ se anulan, y por (1), $f(1)$ y $f(0)$ son homólogos a 0 por ser constantes.

(3) Representando por $f \cdot g$ la operación de concatenar caminos, se tiene que $f \cdot g \sim f + g$. Para ver esto, consideramos un 2-símplice σ cuyos lados son f , g y las proyecciones ortogonales de esos dos sobre el tercer lado, que representa la concatenación $f \cdot g$. Para un punto interior, extendemos σ como sigue: si w está en la altura desde v_1 , entonces $w = f(1) = g(0)$. Si está en la parte inferior, consideramos el segmento que proyecta v_0 sobre la altura pasando por dicho punto. En dicho segmento definimos σ mediante la interpolación lineal

$$(1 - t)v_0 + tw = (1 - t)f(0) + tf(1).$$

De forma análoga extendemos σ a la parte superior mediante g . La siguiente figura muestra esta construcción:



Entonces se tiene que

$$\partial(\sigma) = \sigma|_{[v_1, v_2]} - \sigma|_{[v_0, v_2]} + \sigma|_{[v_0, v_1]} = g - f \cdot g + f,$$

de donde se sigue el resultado.

(4) Por último, se cumple que $\bar{f} \sim -f$, donde \bar{f} denota el camino inverso de f . Esto es inmediato a partir de (3), pues $f + \bar{f} \sim f \cdot \bar{f} \sim 0$.

En particular, a partir de (2) y (3) se tiene que $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ es un homomorfismo y está bien definido. Veamos ahora que h es sobreyectiva. Sea $\sigma = \sum_i k_i \sigma_i$ un 1-ciclo en $H_1(X)$. En primer lugar, podemos reescribir σ de forma que cada k_i sea 1 ó -1

permitiendo repeticiones en los σ_i . Además, para los que tengan $k_i = -1$, por (4) podemos tomar $\bar{\sigma}_i$ y por tanto suponer que $k_i = 1$ para todo i . Así, $\sigma = \sum_i \sigma_i$. Como $\partial(\sigma) = \sum_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = 0$, debe cumplirse que para cada σ_i que no sea un lazo, existe un σ_j y un σ_l tal que $\sigma_i(0) = \sigma_j(1)$ y $\sigma_i(1) = \sigma_l(0)$. Concatenando $\sigma_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_l$ e iterando el proceso, llegaremos a conseguir un lazo. Por tanto, por (3) podemos suponer que todos los σ_i son lazos. Por último, fijando $x_0 \in X$, como X es conexo por caminos, podemos tomar caminos γ_i desde x_0 hasta el punto base de σ_i y formar los lazos $\gamma_i \cdot \sigma_i \cdot \bar{\gamma}_i \sim \sigma_i$, por lo que también podemos suponer que todos los lazos tienen punto base en x_0 . En consecuencia, definiendo como σ' la concatenación de todos los σ_i , obtenemos un lazo tal que $h(\sigma') = \sigma$, de donde se deduce la sobreyectividad de h .

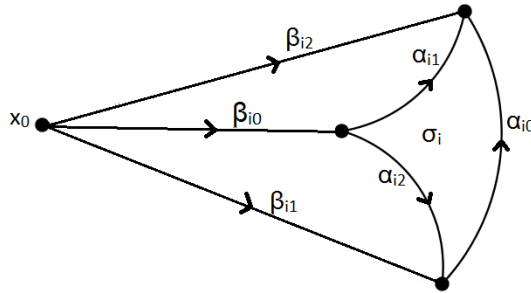
Falta ver que $[\pi_1(X), \pi_1(X)] = \ker(h)$. Que el conmutador de $\pi_1(X)$ está contenido en $\ker(h)$ es inmediato por ser $H_1(X)$ abeliano. Para ver el otro contenido, sea $\gamma \in \ker(h)$ un lazo con punto base x_0 . Visto como un 1-ciclo en $H_1(X)$, γ es homólogo a 0 por estar en $\ker(h)$, luego es un borde. Por tanto, existe una 2-cadena $\sum_i k_i \sigma_i$ tal que $\partial(\sum_i k_i \sigma_i) = \gamma$, con $\sigma_i : \Delta^2 \rightarrow X$ 2-símplices singulares cuyos bordes denotamos por $\alpha_{i0} = \sigma_i|_{[v_1, v_2]}$, $\alpha_{i1} = \sigma_i|_{[v_0, v_2]}$ y $\alpha_{i2} = \sigma_i|_{[v_0, v_1]}$, por lo que

$$(2) \quad \gamma = \sum_i k_i (\alpha_{i0} - \alpha_{i1} + \alpha_{i2}).$$

Denotemos por S el conjunto de los 1-símplices singulares distintos que aparecen en la suma (2) tras agrupar todos los términos. Dichos símplices aparecen con coeficiente 0 excepto γ que aparece con coeficiente 1. Por tanto, para cada $\theta \in S$, si denotamos por m_θ a la suma de los coeficientes que acompañan a los símplices en (2) que son igual que θ , se tiene que

$$m_\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta = \gamma, \\ 0 & \text{si } \theta \neq \gamma. \end{cases}$$

Ahora tomamos caminos β_{ij} con $j = 0, 1, 2$ que van de x_0 a $\alpha_{i2}(0)$, $\alpha_{i0}(0)$ y $\alpha_{i1}(1)$, respectivamente.



A partir de ellos, definimos los lazos en x_0 :

$$\begin{aligned} \eta_{i0} &= \beta_{i1} \alpha_{i0} \bar{\beta}_{i2}, \\ \eta_{i1} &= \beta_{i0} \alpha_{i1} \bar{\beta}_{i2}, \\ \eta_{i2} &= \beta_{i0} \alpha_{i2} \bar{\beta}_{i1}. \end{aligned}$$

En general, que un lazo $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ sea nulhomótopo es equivalente a que se pueda extender de forma continua al interior del disco. Esto se cumple en el caso de un lazo alrededor de un 2-símplice, pues se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta^2 & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \cong \uparrow & \nearrow & \\ \mathbb{D}^2 & & \end{array}$$

que extiende el lazo al disco. Así, el lazo $\eta_i = \eta_{i0} \cdot \bar{\eta}_{i1} \cdot \eta_{i2}$ es homótopo al lazo constante en x_0 , por lo que $\prod_i \eta_i^{k_i}$ también. Finalmente, construimos el lazo $\gamma \cdot (\prod_i \bar{\eta}_i^{k_i})$, que es homótopo a γ y por lo comentado anteriormente cumple las hipótesis de 12.3, luego está en el conmutador. \square

13. TEOREMA DE JORDAN-BROUWER

Una vez tenemos desarrollada toda la teoría de homología singular, vamos a ver que con ella se pueden demostrar importantes resultados de topología tales como el teorema de separación de Jordan-Brouwer y el teorema de Invarianza del Dominio.

Teorema 13.1. *Sea D un subespacio de \mathbb{S}^n homeomorfo a \mathbb{D}^k para algún $k \geq 0$. Entonces, $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D) = 0$ para todo i .*

Demostración. La demostración será por inducción sobre k . Para $k = 0$ el resultado es evidente, pues D^0 es un punto y entonces $\mathbb{S}^n \setminus D$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n , que es contráctil. Por tanto, supongamos que se cumple para $k - 1$. Sea $h : I^k \rightarrow D$ un homeomorfismo donde I^k denota el cubo de dimensión k y definamos los subconjuntos $Y_0 = h(I^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}])$, $Y_1 = h(I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$. Ahora, tomando $A = \mathbb{S}^n \setminus Y_0$ y $B = \mathbb{S}^n \setminus Y_1$ se tiene que $A \cap B = \mathbb{S}^n \setminus D$ y $A \cup B = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$. Por hipótesis de inducción, $\tilde{H}_i(A \cup B) = 0$ para todo i , por lo que aplicando la sucesión de Mayer-Vietoris llegamos a

$$0 \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \xrightarrow{\Psi} 0,$$

de donde deducimos que $\Phi : \tilde{H}_i(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$ es un isomorfismo.

Recordemos que Φ es un homomorfismo cuyas componentes son inducidas, salvo el signo en la segunda, por las inclusiones $\mathbb{S}^n \setminus D \hookrightarrow A$ y $\mathbb{S}^n \setminus D \hookrightarrow B$. Así, un ciclo $\alpha \in \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D)$ distinto de cero, o sea, que no sea un borde, será también distinto de cero en $\tilde{H}_i(A)$ o $\tilde{H}_i(B)$. Por tanto, supongamos por reducción al absurdo que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D) \neq 0$ para algún i . Entonces, existe un ciclo α que no es un borde y por tanto tampoco es un borde en $\tilde{H}_i(A)$ o en $\tilde{H}_i(B)$. Supongamos que se cumple en A , siendo el otro caso análogo. En ese caso, podemos considerar A como si fuese $\mathbb{S}^n \setminus D$ y definir nuevos subconjuntos $Y_{00} = I^{k-1} \times [0, \frac{1}{4}]$ y $Y_{01} = I^{k-1} \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. A partir de los cuales podemos repetir el argumento anterior para asegurar que α no será un borde en alguno de los dos nuevos grupos de homología. Por inducción, construimos una sucesión de intervalos anidados

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

para los que $\alpha \neq 0$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_j))$ para todo j .

Denotemos ahora $I_\infty = \bigcap_j I_j$, que está formado por un solo punto. Por la hipótesis de inducción, α sí es un borde en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_\infty))$, luego existe un β con $\alpha = \partial(\beta)$. Ahora bien, β es una combinación lineal finita de simplices singulares cuya imagen es compacta en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_\infty)$, luego la imagen de β también es compacta. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \bigcup_j (\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_j)) &= \mathbb{S}^n \setminus \bigcap_j h(I^{k-1} \times I_j) \\ &= \mathbb{S}^n \setminus h\left(\bigcap_j (I^{k-1} \times I_j)\right) = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_\infty), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\{\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_j)\}_j$ es un recubrimiento abierto de β , por lo que podemos extraer uno finito. Pero como los intervalos están anidados, esto es equivalente a que existe un m tal que la imagen de β está contenida en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$. Pero en ese caso, $\alpha = \partial(\beta)$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m))$, de donde obtenemos una contradicción. \square

Teorema 13.2. *Sea S un subespacio de \mathbb{S}^n homeomorfo a \mathbb{S}^k para $0 \leq k \leq n-1$. Entonces,*

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n - k - 1, \\ 0 & \text{si } i \neq n - k - 1. \end{cases}$$

Demostración. De nuevo procederemos por inducción sobre k . Para $k = 0$, S está formado por dos puntos, luego $\mathbb{S}^n \setminus S$ es del mismo tipo de homotopía que \mathbb{S}^{n-1} , por lo que se cumple el resultado. Como S es homeomorfo a \mathbb{S}^k , podemos poner $S = D_1 \cup D_2$ donde D_1 y D_2 son homeomorfos a \mathbb{D}^k , y $D_1 \cap D_2$ es homeomorfo a \mathbb{S}^{k-1} . Por 13.1, se tiene que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D_1) = \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D_2) = 0$ para todo i . Así, utilizando la sucesión exacta de Mayer-Vietoris con $A = \mathbb{S}^n \setminus D_1$ y $B = \mathbb{S}^n \setminus D_2$, obtenemos

$$0 \xrightarrow{\Psi} \tilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^n \setminus D_1 \cap D_2) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus S) \xrightarrow{\Phi} 0,$$

de donde tenemos que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus S) \cong \tilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^n \setminus D_1 \cap D_2) = \mathbb{Z}$ para $i+1 = n-k$ y 0 en otro caso por la hipótesis de inducción, de donde se sigue el resultado. \square

A partir de este teorema tenemos el siguiente caso particular.

Corolario 13.3 (teorema de separación de Jordan-Brouwer). *Sea S un subconjunto de \mathbb{S}^n homeomorfo a \mathbb{S}^{n-1} . Entonces, $\mathbb{S}^n \setminus S$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Demostración. Aplicando 13.2 con $k = n-1$ se tiene que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus S) = \mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo, $H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por tanto, por 2.6 se tiene que $\mathbb{S}^n \setminus S$ está compuesto por dos componentes conexas. \square

Al suprimir un punto de \mathbb{S}^n no se ve alterada la conexión. Por tanto, podemos reformular el teorema de la siguiente manera.

Teorema 13.4 (de separación de Jordan-Brouwer). *Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n homeomorfo a \mathbb{S}^{n-1} . Entonces, $\mathbb{R}^n \setminus S$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Para finalizar, tenemos el famoso resultado conocido como *Invarianza del Dominio*.

Teorema 13.5 (de Invarianza del Dominio). *Si $X \subset \mathbb{S}^n (\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{S}^n (\mathbb{R}^n)$, entonces X es abierto.*

Demostración. Tomemos un $x \in X$ y un entorno suyo D homeomorfo a \mathbb{D}^n y sea $S \subset D$ que corresponde a $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ bajo tal homeomorfismo. Entonces, $\mathbb{S}^n \setminus D$, que es abierto, es también conexo por caminos usando 13.1 y 2.6. Por otro lado, por 13.3, $\mathbb{S}^n \setminus S$, que también es abierto, tiene dos componentes conexas por caminos. Tales componentes son $\mathbb{S}^n \setminus D$ y $D \setminus S$ por ser estas disjuntas. En particular, $D \setminus S$ es abierto y además es entorno de x . Finalmente, como $D \setminus S \subset X$, se tiene que X es abierto. La prueba para $X \subset \mathbb{R}^n$ es análoga utilizando 13.4. \square

Observación 13.6. Además de ésta, el teorema de Invarianza del Dominio se puede formular de distintas maneras [6, pp. 167–169]: sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces se verifica:

- (1) *Si f es localmente inyectiva, entonces es abierta.*
- (2) *Si f es inyectiva, entonces es un homeomorfismo sobre la imagen, que es un abierto.*

Corolario 13.7 (Invarianza del Borde Topológico). *Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ y $f : S \rightarrow T$ un homeomorfismo. Entonces se tiene:*

- (1) $f(\text{Int}(S)) = \text{Int}(T)$.
- (2) $f(\partial S) = \partial T$.

Demostración. (1) Como f es inyectiva, se tiene que $f(\text{Int}(S)) \subset T$ es abierto en \mathbb{R}^n , de donde se deduce que $f(\text{Int}(S)) \subset \text{Int}(T)$. El contenido recíproco se obtiene de forma análoga considerando f^{-1} .

- (2) En este caso el resultado se sigue teniendo en cuenta que f es inyectiva y que

$$\partial S = S \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S} = S \setminus \text{Int}(S).$$

Por tanto,

$$f(\partial S) = f(S \setminus \text{Int}(S)) = f(S) \setminus f(\text{Int}(S)) = T \setminus \text{Int}(T) = \partial T.$$

\square

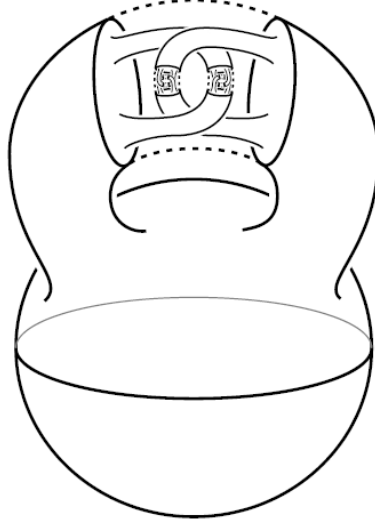
14. MÁS ALLÁ DE JORDAN-BROUWER

El teorema de la curva de Jordan es el teorema de Jordan-Brouwer en dimensión dos. Pero en esta dimensión se puede demostrar aún más:

Teorema 14.1 (de Schönflies). *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Entonces, S divide al plano en dos componentes conexas U y V . Además, la componente acotada, U es homeomorfa a $\text{Int}(\mathbb{D}^2)$ y la no acotada, V , es homeomorfa a $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2$.*

Este teorema presenta la peculiaridad de que no se cumple en dimensión superior. No sólo deja de mantenerse el homeomorfismo entre las componentes no acotadas, sino que, además, no tienen los mismos grupos de homotopía. Un ejemplo famoso de este hecho es la conocida como *esfera cornuda de Alexander*, que es homeomorfa a \mathbb{S}^2 [3, p. 170]. Por

el teorema de Jordan-Brouwer, tal esfera divide a \mathbb{R}^3 en dos componentes conexas. Sin embargo, la componente exterior ni siquiera es simplemente conexa.



Lo que viene ahora es, por tanto, una importante distinción entre grupos de homotopía y grupos de homología. Veremos una generalización del teorema de Jordan-Brouwer que afirma que si dos cerrados $A, B \in \mathbb{R}^n$ son homeomorfos, entonces $H_p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H_p(\mathbb{R}^n \setminus B)$ para todo $p \geq 0$. Para ello necesitamos algunos resultados previos. El primero es un resultado clásico de Topología General:

Lema 14.2 (Urysohn-Tietze). [4, p. 48] Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación continua. Entonces existe una aplicación continua $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g|_A = f$.

Proposición 14.3. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos cerrados y sea $\phi : A \rightarrow B$ un homeomorfismo. Entonces hay un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ tal que

$$h(x, 0_m) = (0_n, \phi(x)) \text{ para todo } x \in A.$$

Demostración. Aplicando 14.2 podemos extender ϕ a una aplicación continua $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos $h_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ por

$$h_1(x, y) = (x, y + f_1(x)).$$

Es claro que h_1 es homeomorfismo, pues es continua y tiene por inversa $h_1^{-1}(x, y) = (x, y - f_1(x))$, que también es continua. De la misma manera, extendiendo ϕ^{-1} a una aplicación continua $f_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos un homeomorfismo $h_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dado por

$$h_2(x, y) = (x + f_2(y), y).$$

Finalmente, tomamos $h = h_2^{-1} \circ h_1$, que verifica, para $x \in A$,

$$h(x, 0_m) = h_2^{-1}(x, f_1(x)) = h_2^{-1}(x, \phi(x)) = (x - f_2(\phi(x)), \phi(x)) = (0_n, \phi(x)).$$

□

En lo que sigue, identificaremos $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \times \{0_k\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

Corolario 14.4. *Si $\phi : A \rightarrow B$ es un homeomorfismo entre subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^n , entonces se puede extender ϕ a un homeomorfismo $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.*

Demostración. Basta aplicar 14.3 y componer h con la aplicación $\tau : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $\tau(x, y) = (y, x)$. \square

Proposición 14.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado. Entonces se verifica que*

$$\tilde{H}_{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_p(\mathbb{R}^n \setminus A) \text{ para todo } p \geq 0.$$

Demostración. Sean $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definidos por

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, \infty), \\ U_2 &= \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-\infty, 1). \end{aligned}$$

Así, a partir de ellos tenemos que $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ y $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1)$. Veamos que tanto U_1 como U_2 son contráctiles. Para U_1 , sea $\phi : U_1 \rightarrow U_1$ dada por $\phi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n+1} + 1)$. De esta forma, fijado un punto $x' \in U_1$, con $x'_{n+1} > 0$, se tiene que para cualquier $x \in U_1$, éste puede unirse a $\phi(x)$ por un segmento contenido en U_1 , y, a su vez, $\phi(x)$ puede unirse a x' . Así, definimos una homotopía entre Id_{U_1} y la aplicación constante en x' mediante

$$H(x, t) = \begin{cases} (1 - 2t)x + 2t\phi(x) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (2 - 2t)\phi(x) + (2t - 1)x' & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

El caso de U_2 es análogo. Por otro lado, $\mathbb{R}^n \setminus A$ es un retracto de deformación de $(\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1)$, para lo que basta tomar la proyección $\pi : (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$. Utilizando ahora la sucesión exacta de Mayer-Vietoris, una vez más llegamos a

$$0 \xrightarrow{\Psi} \tilde{H}_{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_p(\mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\Phi} 0,$$

de donde tenemos el resultado. \square

Finalmente obtenemos la generalización anunciada del teorema de Jordan-Brouwer.

Teorema 14.6. *Sean, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados homeomorfos. Entonces,*

$$H_p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H_p(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

Demostración. Aplicando inducción a 14.5, se tiene que para $m, p \geq 0$,

$$\tilde{H}_{p+m}(\mathbb{R}^{n+m} \setminus A) \cong \tilde{H}_p(\mathbb{R}^n \setminus A).$$

Por otro lado, 14.4 asegura que, en particular, $\tilde{\phi}|_{\mathbb{R}^{2n} \setminus A}$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$ y $\mathbb{R}^{2n} \setminus B$. En consecuencia,

$$\tilde{H}_p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \tilde{H}_{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong \tilde{H}_{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong \tilde{H}_p(\mathbb{R}^n \setminus B),$$

de donde se sigue que

$$H_p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H_p(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

\square

REFERENCIAS

- [1] J. DIEUDONNÉ: *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960.* 2
Birkhäuser, Boston 1989.
- [2] M. J. GREENBERG, J. R. HARPER: *Algebraic Topology: A First Course.* 2
Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [3] A. HATCHER: *Algebraic Topology.* 2, 8, 35
Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [4] I. MADSEN, J. TORNEHAVE: *From Calculus to Cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes.* 36
Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [5] W. S. MASSEY: *A Basic Course in Algebraic Topology.* 2
Springer, New York 1991.
- [6] E. OUTERELO, J. M. RUIZ: *Mapping Degree Theory.* 22, 35
GTM 108, AMS-RSME, Rhode Island, 2009.