

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2018

## EL TEOREMA DE SCHOENFLIES

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

MARÍA JAENADA

**RESUMEN.** En este trabajo demostraremos el teorema de Schoenflies. Introduciremos en primer lugar el teorema de la curva de Jordan y algunas de sus variantes; este resultado es la base del teorema de Schoenflies. Primero lo probaremos en el caso poligonal, y después construiremos una aproximación de una curva de Jordan por poligonales, que dará paso al final de la prueba del teorema. Como aplicación estudiaremos el teorema de Schoenflies en el plano proyectivo, que ilustra cómo el teorema de la curva de Jordan falla en las superficies compactas distintas de la esfera, y ofrece un criterio para diferenciar curvas de Jordan entre sí.

*Palabras clave:* Curva de Jordan, teorema de Jordan, curva de Jordan poligonal, accesibilidad lineal, aproximación poligonal, teorema de Schoenflies, grupo fundamental, plano proyectivo (real), curvas de Jordan en el plano proyectivo.

**ABSTRACT.** In this work we will prove the *Schoenflies Theorem*. We will introduce first the *Jordan curve theorem* and some variations; this is at the basis of Schoenflies theorem. Then we will prove the Schoenflies theorem in the polygonal case, and produce a polygonal approximation of any Jordan curve, which will give way to the final step of the proof. As an application we will study the theorem in the (real) projective plane, that shows how Jordan-Schoenflies fails in compact surfaces other than the sphere, and provides a criterion to distinguish Jordan curves.

*Keywords:* Jordan curve, Jordan Theorem, polygonal Jordan curve, linear accessibility, polygonal approximation, Schoenflies theorem, fundamental group, (real) projective plane, Jordan curves in the projective plane.

### ÍNDICE GENERAL

§ 1.	El teorema de la curva de Jordan.	2
§ 2.	Enunciados del teorema de Schoenflies	4
§ 3.	Consecuencias del teorema de Schoenflies	6
§ 4.	El teorema de Schoenflies en el caso poligonal	7
§ 5.	Embaldosados del disco	10
§ 6.	Entornos poligonales	11
§ 7.	Lema de aproximación poligonal	15
§ 8.	Accesibilidad. Embaldosado infinito.	18

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 57N05, 57N50.

§ 9. Demostración del teorema de Schoenflies.	19
§ 10. El grupo fundamental del plano proyectivo.	22
§ 11. Curvas de Jordan en el plano proyectivo.	24
§ 12. El teorema de Jordan-Schoenflies en el plano proyectivo.	28
§ 13. ¿En otras superficies?	33
Referencias	34

## § 1. EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN.

En este trabajo asumiremos la asignatura de TOEL de tercer curso del grado, que se encuentra en su totalidad en el texto [6].

Dedicamos esta primera sección al teorema de la curva de Jordan, paso anterior al teorema de este trabajo y en el que habitualmente buscaremos apoyo. No presentamos la demostración, que se puede encontrar en el TFG [7]. También incluimos algunos corolarios importantes que necesitaremos.

**Definición 1.1.** Una *curva de Jordan* es un espacio  $C$  homeomorfo a una circunferencia.

Fijado un homeomorfismo  $h : C \rightarrow \mathbb{S}^1$ , se orienta  $C$  trasladando la orientación de  $\mathbb{S}^1$ . Cualquiera de las dos posibles orientaciones así definidas debe fijarse a menudo en los razonamientos. Las curvas de Jordan se caracterizan topológicamente como sigue: *un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  compacto conexo y localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}$  es una curva de Jordan.* (Se suele denominar a esto *teorema de clasificación* de curvas [8].)

**Teorema 1.2** (de la curva de Jordan). *Una curva de Jordan  $C \subset \mathbb{R}^2$  desconecta el plano en dos componentes conexas, una acotada y la otra no, de cada una de las cuales es la frontera.*

La componente acotada es *el interior*  $\text{Int}(C)$  de  $C$ , y la no acotada *el exterior*  $\text{Ext}(C)$  de  $C$ . No deben confundirse estos conceptos con los puramente topológicos.

Este teorema tiene un enunciado intuitivo y natural, y aunque la prueba es difícil, enseguida nos familiarizamos con él. Veamos ahora algunos de los corolarios más inmediatos: el primero su enunciado en la esfera.

**Teorema 1.3** (de Jordan en la esfera). *Sea  $C \subset \mathbb{S}^2$  una curva de Jordan. Entonces  $C$  divide a la esfera  $\mathbb{S}^2$  en dos componentes conexas de cada una de las cuales es la frontera.*

*Demostración.* Por ser  $C$  homeomorfa a la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ , no puede ser toda la esfera, y por tanto debe existir un punto  $a \in \mathbb{S}^2 \setminus C$ . Aplicando la proyección estereográfica  $p : \mathbb{S}^2 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  desde el punto  $a$ , obtenemos un homeomorfismo entre la esfera menos un punto y el plano. Ahora,  $a \notin C$  y la imagen  $C' = p(C)$  de la curva original debe ser otra curva de Jordan en el plano.

Aplicando el teorema de la curva de Jordan en el plano,  $\mathbb{R}^2 \setminus C'$  se descompone en dos componentes conexas  $U'$  y  $V'$ , acotada y no acotada respectivamente, de las cuales  $C'$  es la frontera.

A través de  $p^{-1}$  podemos reescribir  $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$  como unión de dos abiertos:

- $p^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ ,

- $p^{-1}(U' \cup V') = p^{-1}(U') \cup p^{-1}(V') = U \cup V$  abiertos en  $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$  y conexos,
- $p^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus C') = p^{-1}(\mathbb{R}^2) \setminus p^{-1}(C) = (\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}) \setminus C = \mathbb{S}^2 \setminus C \cup \{a\}$ .

Por tanto,  $\mathbb{S}^2 \setminus C \cup \{a\} = U \cup V$ . Para terminar, como  $a$  corresponde al punto del infinito del plano en la esfera,  $a \notin \bar{U}$  y  $a \in \bar{V}$ , y  $\mathbb{S}^2 \setminus C = U \cup (V \cup \{a\})$ , que son ambos conexos; el primero por ser imagen de un conexo mediante una aplicación continua, y el segundo por ser unión de un conexo y uno de sus puntos de adherencia. Además,  $U$  es abierto en  $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ , luego en  $\mathbb{S}^2$ , y  $V \cup \{a\}$  es abierto en  $\mathbb{S}^2$  pues

$$\mathbb{S}^2 \setminus V \cup \{a\} = \mathbb{R}^2 \setminus V' = U' \cup C'$$

es compacto. ■

Una vez visto su enunciado en el plano y en la esfera cabe preguntarse si se puede generalizar para cualquier superficie cerrada. Veremos más adelante que la respuesta es negativa, e ilustraremos de qué forma puede variar la tesis.

Probamos ahora dos corolarios en el plano: la prueba de que un arco infinito desconecta el plano, y un disco no.

**Proposición 1.4** (Un arco infinito desconecta el plano). *Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto cerrado del plano homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Entonces,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene dos componentes conexas no acotadas, siendo  $C$  la frontera de ambas.*

*Demostración.* Consideramos la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{R}^2$ , esto es, añadir el punto de infinito  $\infty$  para obtener  $\mathbb{S}^2$ .

La curva del enunciado  $C \subset \mathbb{R}^2$  también se compactificará en una nueva curva  $C^* \subset \mathbb{S}^2$  donde  $\infty \in C^*$  y  $C^* \approx \mathbb{S}^1$ . Aplicando el teorema de la curva de Jordan en la esfera podemos escribir  $\mathbb{S}^2 \setminus C^*$  como unión de dos abiertos, conexos y disjuntos,  $U$  y  $V$ , de los cuales  $C^*$  es la frontera. Así, el punto de infinito es adherente a ambos por estar en  $C^*$ . Para acabar, utilizamos el homeomorfismo  $\mathbb{S}^2 \setminus C^* \approx \mathbb{R}^2 \setminus C$  para descomponer  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  en unión disjunta de abiertos conexos  $U = U \cap \mathbb{R}^2$  y  $V = V \cap \mathbb{R}^2$ , ambos no acotados por ser adherentes al punto de infinito. ■

**Proposición 1.5.** (Un disco no desconecta) *Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto homeomorfo al disco cerrado unidad  $\mathbb{D}^2 : \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  es conexo.*

*Demostración.* Sea  $h : \mathbb{D}^2 \rightarrow D$  un homeomorfismo. Aplicamos el teorema de Jordan a la curva  $C = h(\mathbb{S}^1)$  para descomponer  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  en dos componentes conexas  $U$  y  $V$  acotada y no acotada respectivamente. Por otro lado podemos reescribir  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  como unión disjunta de dos abiertos conexos,  $\mathbb{R}^2 \setminus C = \mathbb{R}^2 \setminus h(\mathbb{S}^1) = (\mathbb{R}^2 \setminus h(\mathbb{D}^2)) \cup h(\mathbb{B}^2)$ , donde  $\mathbb{B}^2$  es abierto y acotado, y  $h(\mathbb{D}^2)$  es compacto. Por el teorema de invarianza del dominio  $h(\mathbb{B}^2)$  es abierto, y se debe tener  $U = h(\mathbb{B}^2)$  y  $V = \mathbb{R}^2 \setminus h(\mathbb{D}^2)$ . Es decir,  $\mathbb{R}^2 \setminus D = \mathbb{R}^2 \setminus h(\mathbb{D}^2) = V$  es conexo. ■

El teorema de invarianza del dominio es una consecuencia no banal del estudio del grupo fundamental. No insistimos aquí en ello porque vamos a redemostrar este resultado usando el teorema de Schoenflies en lugar de la invarianza (3.4).

Como último comentario, el teorema de Jordan no se cumple en superficies distintas de la esfera. Hay por tanto que estudiar en cada una cómo la pueden desconectar sus curvas de Jordan. Por ejemplo, se demuestra que *el número máximo de curvas de Jordan*

disjuntas dos a dos que pueden dividir una superficie sin desconectarla es igual al género de la superficie [4].

En la figura 1 se puede apreciar que tan sólo una curva de Jordan desconecta una esfera o el cilindro, y sin embargo hay curvas de Jordan que no desconectan el toro.

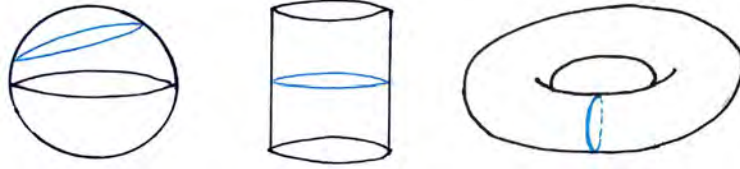


FIGURA 1. Curvas de Jordan en la esfera, el cilindro y un toro.

Diremos algo más al respecto en la última sección 13, a la vista de los resultados que habremos probado entonces.

## § 2. ENUNCIADOS DEL TEOREMA DE SCHOENFLIES

Este teorema se puede enunciar de formas diversas, la más general es:

**Teorema 2.1** (de Schoenflies). Sean  $C, C' \in \mathbb{R}^2$  dos curvas de Jordan. Todo homeomorfismo  $f : C \rightarrow C'$  se extiende a un homeomorfismo del plano  $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Veamos otra forma del enunciado:

**Teorema 2.2** (Forma débil del teorema de Schoenflies). Sea  $C \in \mathbb{R}^2$  curva de Jordan y sea  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  un homeomorfismo. Existe una extensión  $\bar{h} : \mathbb{D}^2 \rightarrow D$  del disco unidad sobre un compacto  $D$  tal que  $h(\mathbb{S}^1) = C$ .

**Observación 2.3.** En el caso  $C = \mathbb{S}^1$  la extensión es sencilla: Una aplicación continua  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  se extiende a todo el disco  $\bar{h} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  por  $\bar{h}(x) = h(\frac{x}{\|x\|})\|x\|$  y  $\bar{h}(0) = 0$ .

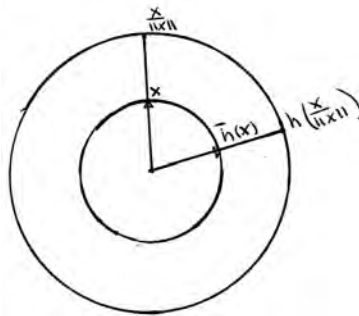


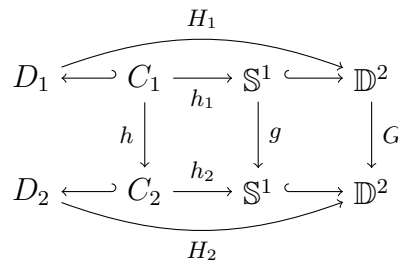
FIGURA 2. Extensión de un homeomorfismo entre dos circunferencias. ■

Aunque 2.2 es en apariencia más débil que 2.1, ambos son equivalentes. Probamos que en efecto el segundo implica al primero.

**Proposición 2.4.** La forma del débil del teorema de Schoenflies implica la fuerte.

*Demostración.* Sean  $C_1, C_2$  dos curvas de Jordan de  $\mathbb{R}^2$ , y  $h : C_1 \rightarrow C_2$  un homeomorfismo entre ellas. Vamos a encontrar una extensión de  $H$  a los interiores, y posteriormente aplicaremos la proyección estereográfica desde los distintos polos para invertir el interior y el exterior de las curvas, cambiando el punto de infinito en la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Terminaremos encontrando una extensión global.

Para cada curva  $C_1, C_2$  consideramos un homeomorfismo  $h_i : C_i \rightarrow \mathbb{S}^1$  y su extensión al disco  $H_i : D_i \rightarrow \mathbb{D}^2$ , donde  $D_i$  es un compacto y  $H_i|_{C_i} = \mathbb{S}^1$ . El diagrama 2 conmuta y podemos definir  $g = h_2 \circ h \circ h_1^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , que es homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos, y se extiende por la observación 2.3 a todo el disco; llamamos a  $G$  a esta aplicación. Sólo falta componer los homeomorfismos para obtener la extensión  $H = H_2^{-1} \circ G \circ H_1$  a los interiores.



Esto muestra que existe la extensión en los interiores, para los exteriores reducimos el problema al caso anterior invirtiendo los interiores y exteriores a través de las proyecciones estereográficas. Consideramos de nuevo los homeomorfismos  $h_i^{-1}$  y sus extensiones  $H_i^{-1}$ . Tras una traslación podemos suponer que ambas curvas tienen al origen en su interior y que  $H_i$  lo fija.

Aplicando la inversa de la proyección estereográfica desde el polo norte y componiendo con la proyección desde el polo sur, obtenemos un nuevo homeomorfismo entre dos nuevas curvas, que por lo que acabamos de probar se extiende al interior.

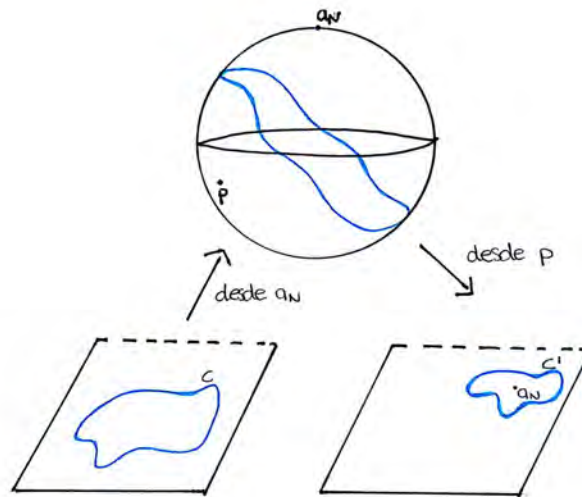


FIGURA 3. Transformación de la curva  $C$  al aplicar las dos proyecciones estereográficas.

Como las proyecciones intercambian interiores y exteriores (salvo el origen) basta pegar las dos extensiones para tener un homeomorfismo definido en todo el plano. ■

El argumento anterior muestra además que el teorema de Schoenflies en el plano implica el teorema en la esfera: *un homeomorfismo entre dos curvas de Jordan de la esfera se extiende a un homeomorfismo de la esfera.*

**Definición 2.5.** *Decimos que una curva  $C$  es de Schoenflies si cumple la forma débil del teorema.*

Con esta terminología, para demostrar el teorema de Schoenflies hay que ver que *toda curva de Jordan es una curva de Schoenflies.* La demostración se desarrolla en las secciones 6–9, utilizando ideas de [1, 2] y más indirectamente de [3, 10, 11]. En todos estos temas de la topología del plano siempre hay que citar [5], como el libro clásico absolutamente fiable (aunque de lectura muy difícil).

### § 3. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE SCHOENFLIES

El teorema de Schoenflies nos dice cuál es el tipo topológico de las componentes conexas del complemento de una curva de Jordan.

**Proposición 3.1.** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan. Entonces la componente acotada (resp. no acotada) de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es (homeomorfa a) un disco (resp. un disco con un agujero).*

*Demostración.* Consideramos un homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$ , y siguiendo las notaciones anteriores,  $U$  y  $V$  las componentes conexas acotada y no acotada respectivamente en las que  $C$  divide el plano. Por el teorema de Schoenflies  $h$  puede extenderse a un homeomorfismo  $\bar{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . La imagen por  $\bar{h}$  del disco unidad abierto  $\mathbb{B}$  debe ser una componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , y por ser el disco acotado  $\bar{h}(\mathbb{B}) = U$ . De la misma forma,  $\bar{h}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2) = \bar{h}(\mathbb{R}^2) \setminus \bar{h}(\mathbb{D}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus (U \cup C) = V$ . Así,  $U$  es homeomorfo a un disco abierto, y  $V$  a  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2$ , que es un disco agujereado. ■

**Proposición 3.2.** *Sea  $C \subset \mathbb{S}^2$  una curva de Jordan. Entonces las dos componentes conexas de  $\mathbb{S}^2 \setminus C$  son discos.*

*Demostración.* Sea  $U$  una cualquiera de las componentes de  $\mathbb{S}^2 \setminus C$ . Podemos suponer que el polo norte está en la otra componente, y al proyectar estereográficamente  $U$  se convierte en el interior de una curva de Jordan del plano, luego es un disco por el resultado anterior. ■

**Proposición 3.3.** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva cerrada homeomorfa a  $\mathbb{R}$ . Entonces las dos componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  son discos.*

*Demostración.* Como en 1.4 aplicamos la compactificación de Alexandroff, añadiendo el punto de infinito para transformar el plano en una esfera  $\mathbb{S}^2$ . Por la compactificación  $C$  se transforma en una curva de Jordan  $C'$  con  $\infty \in C'$ . Ahora, por el teorema de Jordan  $C'$  divide la esfera en dos componentes conexas  $U$  y  $V$ , y  $\infty \notin U, V$ . Por la proposición anterior 3.2  $U$  y  $V$  son discos abiertos. ■

**Proposición 3.4.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un disco cerrado. Entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  es un disco agujereado.*

*Demostración.* Basta aplicar 3.1 tomando  $C$  como la frontera de  $D$ . ■

## § 4. EL TEOREMA DE SCHOENFLIES EN EL CASO POLIGONAL

Comenzamos viendo algunos resultados previos sobre poligonales regulares y demostramos el teorema de Schoenflies para curvas de Jordan poligonales, siguiendo ideas de [2, §§1,2].

**Proposición 4.1.** *Toda curva poligonal sin autointersecciones es una curva de Jordan.*

*Demostración.* Sea  $P_n$  una poligonal de  $n$  lados. Identificando los lados de  $P_n$  con los de una poligonal regular  $P'_n$  con el mismo número de lados inscrita en la circunferencia, se tiene un homeomorfismo entre  $P_n$  y  $P'_n$ . Ahora, aplicando deformación una radial a  $P'_n$  podemos establecer un homeomorfismo entre la poligonal regular de  $n$  lados y la circunferencia. Componiendo estos dos homeomorfismos, tenemos el resultado. ■

Aquí hemos visto que toda poligonal regular es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$  y la manera de verlo tiene interés como veremos enseguida.

**Proposición 4.2.** *La forma débil del teorema de Schoenflies se cumple para poligonales regulares.*

*Demostración.* Sea  $P'_n$  una poligonal regular de  $n$  lados inscrita en  $\mathbb{S}^1$ , y sea el homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow P'_n$  dado por la retracción radial en la circunferencia como en la figura 4. Para extender al interior de  $\mathbb{D}^2$ , definimos  $\bar{h}(x) = \|x\|h(\frac{x}{\|x\|})$  si  $x \neq 0$  y  $\bar{h}(0) = 0$ .

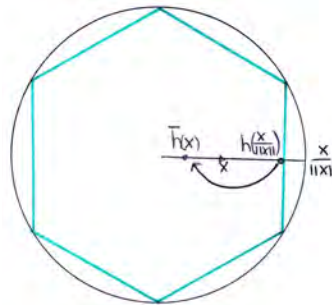


FIGURA 4. Construcción de un homeomorfismo por retracción radial. ■

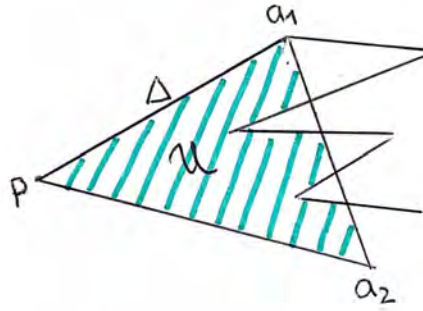
**Teorema 4.3** (Teorema de Schoenflies para poligonales). *Toda curva poligonal de Jordan  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva de Schoenflies.*

*Demostración.* Dividimos la demostración en tres pasos. Denotamos por  $P_n$  a una poligonal como en el enunciado, y  $U$  la componente conexa acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus P_n$ .

**Paso 1.** *Dada una poligonal de Jordan  $P_n$  de  $n$  lados, existen dos vértices  $p_1, p_2 \in P_n$  tales que el segmento  $]p_1, p_2[$  está contenido en el interior de la poligonal.*

Sea  $p$  el vértice de  $P_n$  con menor ordenada entre los vértices que tienen menor abscisa y  $a_1, a_2$  los vértices consecutivos. En caso de que  $]a_1, a_2[$  esté contenido en el interior  $U$ , escogemos  $p_1 = a_1, p_2 = a_2$  y hemos terminado.

En otro caso, la región interior del triángulo  $\Delta$  de vértices  $a_1, p, a_2$  debe contener otro vértice de la poligonal: contiene puntos del interior, pues una región interior de  $\Delta$  suficientemente próxima a  $p$  está contenida en  $U$ , y del exterior, pues  $]a_1, a_2[ \not\subset U$ .



Escogiendo un vértice  $p_1 \in \Delta$  con abscisa mínima, y  $p_2 = p$ , se tiene que  $]p_1, p_2[ \subset U$  y hemos terminado.

**Paso 2.**  $U$  queda dividida por  $]p_1, p_2[$  en dos componentes disjuntas.

Dada la poligonal  $P_n$ , dos vértices  $p_1, p_2$  y un sentido en la curva dado por un homeomorfismo entre la poligonal y  $\mathbb{S}^1$ , definimos  $C_1$  como la poligonal compuesta por el segmento  $[p_1, p_2]$  y la parte de  $P_n$  que une estos extremos al ser recorrida en sentido antihorario. Definimos  $C_2$  de la misma forma, recorriendo en este caso la curva en sentido horario. Denotamos por  $U_1, U_2$  sus interiores, y  $V_1, V_2$  sus exteriores. Veamos que  $U_1$  y  $U_2$  son disjuntos.

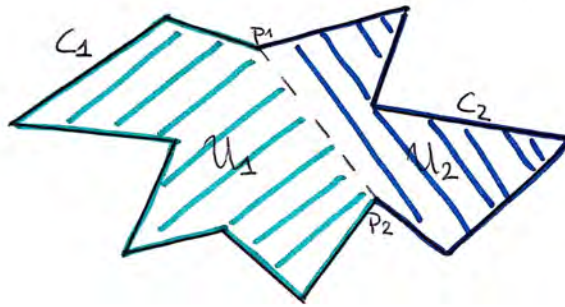


FIGURA 5. División de la poligonal.

En primer lugar sabemos que  $V \subset V_i, i = 1, 2$ : Por ser ambos conjuntos conexos y  $V \cap C_i = \emptyset$  (el único lado de  $C_i$  que no pertenece a  $C$  está en su interior  $U$ ),  $V$  debe estar contenido en alguna componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C_i$ . Como es no acotado, estará en  $V_i$ .

Por otro lado,  $U_i \subset U$ , pues sabemos que  $C \cup U = \mathbb{R}^2 \setminus V$  y  $C_i \cup U_i = \mathbb{R}^2 \setminus V_i \subset \mathbb{R}^2 \setminus V$ , por tanto  $C_i \cup U_i \subset C \cup U$ . Ahora, como  $C \cap U_i = \emptyset$  ( $C \subset \bar{V} \subset \bar{V}_i = V_i \cup C_i$ ) debe ser  $U_i \subset U$ .

Por último,  $U \setminus ]p_1, p_2[ = U_1 \cup U_2$ . El contenido  $\supset$  es fácil; acabamos de probar que  $U_i \subset U$  y  $U_i \cap ]p_1, p_2[ = \emptyset$ . Veamos entonces que  $U_1, U_2$  son las únicas componentes conexas disjuntas de  $U \setminus ]p_1, p_2[$ . Notamos que  $U_1, U_2$  son abiertos y cerrados en  $U \setminus ]p_1, p_2[$ : abiertos por serlo en el ambiente y cerrados por coincidir con su adherencia:  $\bar{U}_i = U_i \cup C_i$  implica que  $\bar{U}_i \cap (U \setminus ]p_1, p_2[) = U_i$ .

Además,  $U_1$  y  $U_2$  son disjuntos:  $U_2$  es conexo y no corta a  $C_1$  ( $U_2 \subset U$ ), lo que implica que debe estar contenido en alguna de las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C_1$ . Razonando análogamente para  $U_1$  llegamos a cuatro posibilidades en los contenidos: para  $U_2$  tenemos



$U_2 \subseteq U_1$  o bien  $U_2 \subseteq V_1$ , y de la misma forma,  $U_1 \subseteq U_2$  o bien  $U_1 \subseteq V_2$ . Es fácil ver que tiene que ser  $U_2 \subseteq V_1$ . Como  $U_i \cap V_i = \emptyset$ ,  $U_1$  y  $U_2$  son disjuntos.

Queda ver que no hay más componentes conexas. Lo hacemos por reducción al absurdo: Supongamos que tenemos otra componente conexa  $W$  siendo  $U \setminus ]p_1, p_2[ = W \cup U_1 \cup U_2$ . Sea  $p \in ]p_1, p_2[ \cap \overline{W}$ , y sea  $B$  una bola suficientemente pequeña centrada en  $p$ . Sabemos que un segmento desconecta una bola en dos partes, sin embargo

$$B \setminus ]p_1, p_2[ = ((B \cap W) \setminus ]p, p_2]) \cup ((B \cap U_1) \setminus ]p, p_2]) \cup ((B \cap U_2) \setminus ]p, p_2])$$

todos ellos distintos del vacío por hipótesis. Esto es,  $B \setminus ]p_1, p_2[$  queda desconectado en tres componentes, lo que es absurdo. Así,  $\overline{W} \cap ]p_1, p_2[ = \emptyset$  y esto implica que  $W$  es abierto y cerrado en el conexo  $U$ , es decir  $W = U$ . Hemos llegado a una contradicción.

**Paso 3.** *El teorema de Schoenflies se cumple para poligonales: un homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  se extiende a todo el disco.*

Hacemos la demostración por inducción sobre el número de lados de la poligonal. Para  $n = 3$  la poligonal es un triángulo y siguiendo la prueba de 4.2 es inmediato ver que es una curva de Schoenflies. Sea entonces una poligonal  $P_n$  de  $n$  vértices. Como se demostró en los pasos anteriores, podemos escoger dos poligonales,  $P_1$  y  $P_2$ , de interiores  $U_1$  y  $U_2$ , cada una de ellas con un número de vértices estrictamente menor que  $n$ , y tales que el interior de  $P_n$  quede dividido en dos abiertos más un segmento:  $U = U_1 \cup U_2 \cup ]p_1, p_2[$ .

Consideramos dos homeomorfismos  $h_i : P_i \rightarrow T_i$ , donde  $T_i$  es un triángulo regular de interior  $W_i$ , que según vimos en 4.2 son homeomorfos a  $\mathbb{S}^1$  y el interior del disco  $\mathbb{D}^2$  respectivamente. Podemos suponer que las imágenes del segmento  $]p_1, p_2[$  por  $h_1, h_2$  son lados de los triángulos. Usamos ahora la hipótesis de inducción para extender los homeomorfismos  $h_i$  a los interiores  $\overline{h}_i : P_i \cup U_i \rightarrow T_i \cup W_i$ .

Identificando adecuadamente los puntos del lado  $]p_1, p_2[$  de las poligonales  $P_1, P_2$ , y de igual forma los lados de los triángulos correspondientes a la imágenes de este segmento por  $h_1$  y  $h_2$ , podemos escribir  $P_1 \cup P_2 = C \cup ]p_1, p_2[$  y  $U_1 \cup U_2 = U \setminus ]p_1, p_2[$ , y la aplicación  $\overline{h} : (P_1 \cup P_2) \cup (U_1 \cup U_2) \rightarrow (T_1 \cup W_1) \cup (T_2 \cup W_2)$  es un homeomorfismo entre  $C \cup U$  y un cuadrilátero homeomorfo al disco. Hemos terminado.

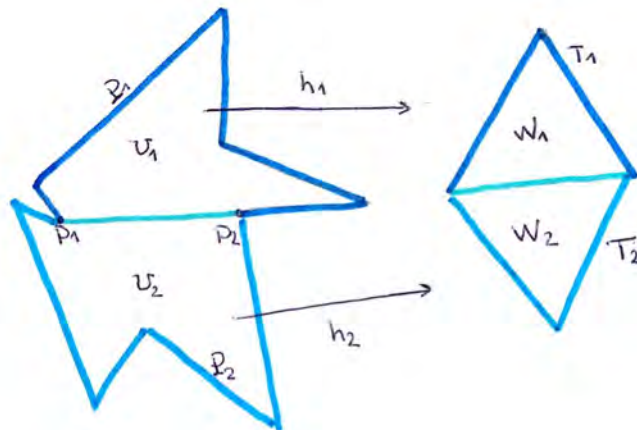


FIGURA 6. Construcción del homeomorfismo por el lema del pegado. ■

## § 5. EMBALDOSADOS DEL DISCO

En [10] pueden verse dibujos de construcciones del estilo de las de esta sección y las siguientes.

**(5.1) Descripción de una circunferencia como límite de poligonales.** Una primera idea para aproximar de forma inductiva una circunferencia por poligonales es construir poligonales regulares de vértices  $a_{n_1}, \dots, a_{n_m}$  y apoyados sobre la circunferencia de manera que la distancia entre los  $a_{n_k}$  se haga cada vez menor cuando  $k \rightarrow \infty$ . Esta construcción aproxima la circunferencia, pues tomando cualquier sucesión  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , siempre podemos encontrar un número de puntos suficientemente grande de forma que dos vértices consecutivos de la poligonal disten menos que  $\varepsilon_k$ .

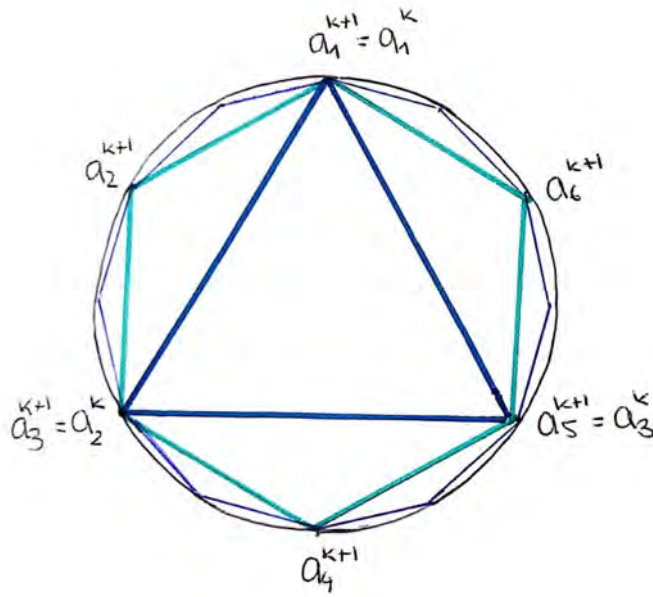


FIGURA 7. Aproximación de una circunferencia por poligonales.

Sin embargo requiere que los vértices de las poligonales que aproximan estén apoyados sobre la circunferencia, y ésto puede resultar un inconveniente al extender una aplicación al interior, pues los valores de los vértices en cada paso están prefijados. Como alternativa, hacemos la siguiente construcción:

Empezamos igual, escogiendo en el  $k$ -ésimo paso puntos  $\{p_1^k, \dots, p_{n_k}^k\}$  en la circunferencia tales que  $d(p_i^k, p_{i+1}^k) < \varepsilon_k$ . Tomamos la precaución de tomar en cada paso el nuevo conjunto de puntos conteniendo al anterior:  $\{p_1^k, \dots, p_{n_k}^k\} \subset \{p_1^{k+1}, \dots, p_{n_{k+1}}^{k+1}\}$ .

Por último, para elegir los vértices las poligonales que aproximan, tomamos en cada punto su radio y aplicamos una homotecia en el mismo de razón  $1 - \varepsilon_k$ , de manera que las imágenes de los  $p_i^k$ , que denotamos por  $q_i^k$ , serán los vértices de la poligonal.

Esta sucesión de poligonales, que denotaremos por  $\{S^k\}_{k \geq 0}$ , aproxima la circunferencia y resuelve el problema: Dada  $\{\varepsilon_k\}_{k \geq 0}$ , podemos encontrar para cada  $k$  una familia de puntos  $\{q_1^k, \dots, q_{n_k}^k\}$  tales que  $d(q_i^k, p_i^k) < \varepsilon_k$ . Así,  $S^k$  aproxima  $\mathbb{S}^1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . ■

(5.2) **Manipulaciones con poligonales.** En primer lugar vamos a fijar algunas notaciones que utilizaremos posteriormente, según la figura siguiente:

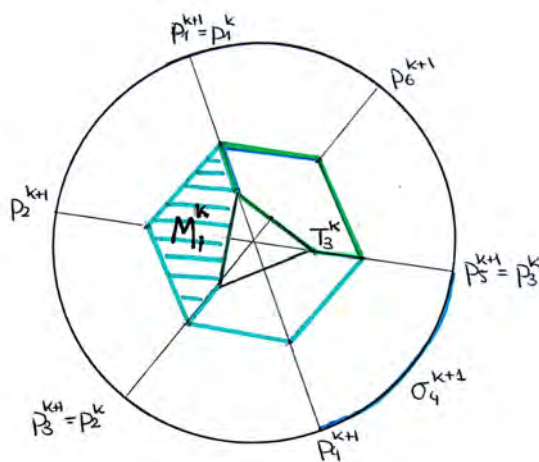


FIGURA 8. Construcción de un polígono que aproxime  $S^1$ .

$S^k$ : Polígono de vértices los puntos  $q_i^k$ , que aproxima la circunferencia en el paso  $k$ -ésimo.

$T_i^k$ : Polígono formada en el paso  $(k + 1)$ -ésimo al unir los lados del polígono  $S^{k+1}$  entre dos puntos consecutivos  $p_i^k$  y  $p_{i+1}^k$ , con el lado del polígono anterior  $S^k$  entre los mismos puntos.

$M_i^k$ : Región añadida entre dos puntos consecutivos  $p_i^k, p_{i+1}^k$  en el paso  $k + 1$ .

$B_i^k$ : Unión de todas las regiones  $M_i^j$  definidas en las  $0 \leq j \leq k$  etapas anteriores.

$\sigma_i^k$ : Arco comprendido entre dos puntos  $p_i^k$  y  $p_{i+1}^k$ . ■

## § 6. ENTORNOS POLIGONALES

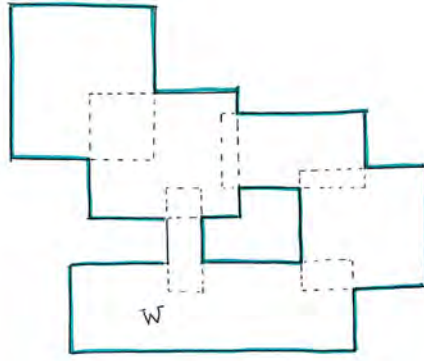
Para demostrar el teorema de Schoenflies, aproximaremos una curva de Jordan dada por poligonales. La simplificación que introducimos en la demostración es la utilización de poligonales con lados paralelos a los ejes; es decir, buscamos una de tales curvas cuya distancia a la curva original sea “tan pequeña como se quiera”. Primero demostramos que la frontera de una unión finita de cuadrados de lados paralelos a los ejes es un polígono mediante el siguiente lema:

**Lema 6.1.** *Sea  $\{W_1, \dots, W_r\}$  una colección finita de cuadrados abiertos con lados paralelos a los ejes, todos en rectas distintas. Denotamos  $W = \bigcup_{i=1}^r W_i$ . Entonces  $\text{Fr}(W)$  es una unión finita de segmentos de los lados de los  $W_i$ , formado por poligonales cuyos vértices son puntos de intersección entre segmentos perpendiculares.*

*Demostración.* En primer lugar vamos a reescribir la frontera de  $W$  como unión finita de segmentos cerrados:

$$\text{Fr}(W) = \overline{W} \setminus W = \bigcup_{i=1}^r \overline{W}_i \setminus \bigcup_{i=1}^r W_i = \bigcup_{i=1}^r (\overline{W}_i \setminus \bigcup_{j=1, j \neq i}^r W_j) = \bigcup_{i=1}^r (\text{Fr}(W_i) \setminus \bigcup_{i \neq j} W_j)$$

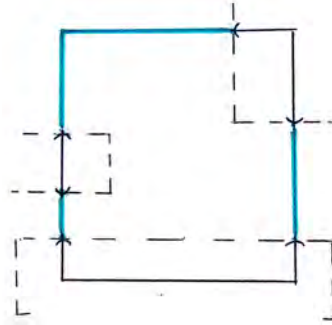
donde  $\text{Fr}(W_i) \setminus \bigcup_{i \neq j} W_j$  es unión finita de segmentos cerrados.

FIGURA 9. Frontera de  $W$ .

Ahora estudiamos las incidencias de segmentos en un vértice  $a$  de  $\text{Fr}(W)$  según el número de cuadrados a los que sea adherente.

- $a \in \text{Fr}(W)$  es adherente a un único cuadrado  $W_i$ : En primer lugar notamos que  $a \notin W_i$ , pues en ese caso  $a \in \text{Int}(\overline{W_i}) = W_i$  y  $a \notin \text{Fr}(W)$ , lo que es absurdo. Además,  $a$  debe ser un vértice de  $\text{Fr}(W_i)$ , pues en caso contrario, podríamos tomar una bola centrada en  $a$  suficientemente pequeña,  $B_\varepsilon$ , que no cortase a ningún otro  $W_j$  ( $a$  no es adherente a ningún otro rectángulo), y  $B_\varepsilon \cap \text{Fr}(W_i) = B_\varepsilon \cap \text{Fr}(W)$  sería un segmento en  $\text{Fr}(W)$  con  $a$  en su interior y  $a$  no sería vértice de  $\text{Fr}(W)$ .

Así pues  $a$  es un vértice del cuadrado  $\overline{W_i}$ . Siguiendo el mismo argumento de antes, encontramos una bola suficientemente pequeña que no corte a ningún otro  $W_j$ , y en  $a$  inciden dos lados perpendiculares de  $\text{Fr}(W_i)$  que lo son de  $\text{Fr}(W)$ .

FIGURA 10. Segmentos de la frontera de un cuadrado en  $\text{Fr}(W)$ .

- Sea  $a \in \text{Fr}(W)$  adherente a dos cuadrados  $W_i, W_j$ : Ahora  $a$  no puede ser vértice de ningún rectángulo, pues cualquier posición de  $a$  en el otro rectángulo hace que compartan un lado. Así, supongamos que  $a$  está en un lado de  $W_i$ , sin pérdida de generalidad, horizontal: Como  $a$  no puede estar en un lado horizontal, ni ser vértice de  $W_j$  (estarían apoyados sobre la misma recta), debe estar en un lado vertical de  $W_j$ , y tomando una bola suficiente pequeña que no corte a ningún otro  $W_k$  de la frontera de  $W$ , se tiene que  $a$  es un vértice de la poligonal  $\text{Fr}(W)$  donde confluyen los lados perpendiculares de  $W_i, W_j$  en los que se apoya  $a$ .

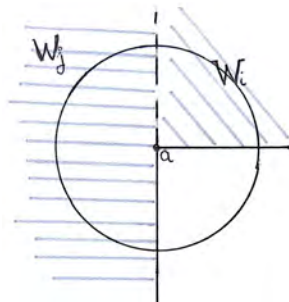


FIGURA 11. Incidencia entre dos segmentos de  $\text{Fr}(W)$  en un vértice adherente a dos cuadrados.

- Supongamos por último que  $a \in \text{Fr}(W)$  es adherente a tres cuadrados  $W_i, W_j, W_k$ . La única posibilidad, según hemos visto es que  $a$  esté en un lado horizontal para alguno de los cuadrados y en uno vertical en el otro. Una vez más, si  $a \in \text{Fr}(W_k)$  para el tercer  $W_k$ , este cuadrado debe compartir un lado con alguno de los anteriores.

Esto demuestra que  $\text{Fr}(W)$  es una poligonal de lados paralelos a los ejes donde en cada vértice inciden dos, y solo dos, segmentos perpendiculares; si  $a \in \text{Fr}(W)$  solo puede estar en el interior de un segmento o ser un vértice donde confluyan dos lados, uno horizontal y el otro vertical.

Esto es, cada componente conexa de  $\text{Fr}(W)$  es una poligonal cerrada de Jordan. ■

La poligonal anterior no puede ser infinita, pues hay una cantidad finita de cuadrados. Sin embargo, como ilustra la figura 9,  $\text{Fr}(W)$  puede estar compuesta por varias poligonales. Vamos a demostrar ahora que si  $W$  es conexo, existe una única poligonal cuyo interior contiene a todas las demás.

**Lema 6.2.** *Sea  $W$  como en el lema anterior. Entonces, si  $W$  es conexo, existe una única curva poligonal maximal en  $\text{Fr}(W)$  que contiene al resto de poligonales que conforman la frontera.*

*Demostración.* Consideramos la familia finita de curvas poligonales de Jordan que conforman  $\text{Fr}(W)$ ,  $\{C_k\}$ . Escogemos para cada cadena  $\text{Int}(C_{k_1}) \subset \text{Int}(C_{k_2}) \subset \dots$  (interiores como curvas de Jordan), que es finita pues hay una cantidad finita de  $C_k$ 's, la curva maximal  $C_{\ell_i}$ . Consideramos la familia  $\mathfrak{C} = \{C_{\ell_1}, C_{\ell_2}, \dots, C_{\ell_k}\}$  de todas las curvas maximales de las distintas cadenas.

**Paso 1.** *Las curvas maximales son disjuntas dos a dos.*

Por construcción ninguna poligonal de la familia  $\mathfrak{C}$  está en el interior de otra. Todas estas curvas son disjuntas, pues hemos demostrado anteriormente que cualquier punto  $a \in \text{Fr}(W)$  está, o bien en el interior de un segmento (que estará en un lado de una, y sólo una poligonal), o bien en un vértice donde intersecan dos, y solo dos, segmentos perpendiculares de  $\text{Fr}(W)$ . Así  $a$  sólo puede pertenecer a una de las curvas.

**Paso 2.** *La intersección de los exteriores de las poligonales  $V = \bigcap_k \text{Ext}(C_{\ell_k})$  es un conjunto conexo por caminos.*

Notamos que  $V$  es abierto por ser intersección finita de abiertos. Sean  $x, y \in V$ . Si el segmento  $[x, y]$  no corta a ningún  $C_l$ , entonces está contenido en  $V$  y hemos terminado. En caso contrario debemos construir un camino que los una contenido en esta intersección.

Descartamos la posibilidad de que el segmento  $[x, y]$  sea horizontal o vertical. Para ello, trabajamos con un punto  $x'$  en una bola de centro  $x$  contenida en  $V$  de forma que  $[x', y]$  no sea horizontal ni vertical: basta conectar  $x'$  con  $y$  en  $V$  y añadir  $[x, x']$ .

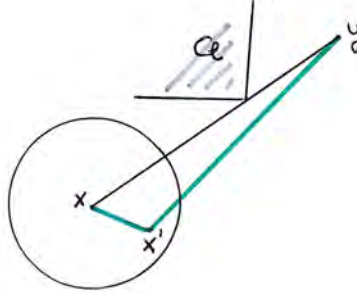


FIGURA 12. Incidencia entre dos segmentos de  $\text{Fr}(W)$ .

Supongamos ahora que  $[x, y]$  corta a alguna poligonal, digamos  $C_l$ . Si el corte se hace en un vértice de  $C_l$ , tomamos un punto  $x'$  con la condición inicial de que  $[x', y]$  no corte a ningún  $C_l$  en el vértice (se puede por ser el número de vértices finito).

Supongamos por tanto que un segmento de  $[x, y]$  entre en el interior de algún  $C_l$ . Por ser  $C_l$  disjunto con cualquier otro  $C_k$ , existe una poligonal en  $\text{Ext}(C_l)$  que aproxime la curva  $C_l$  como en la figura 13 y no corta a ninguna otra de la familia  $\mathfrak{C}$ .

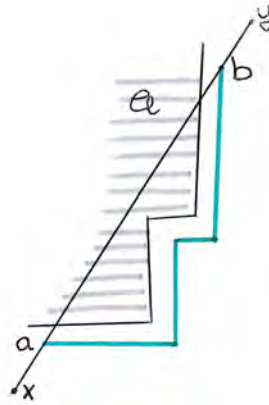


FIGURA 13. Construcción de una poligonal en  $\text{Ext}(C_l)$ .

Así, escogemos dos puntos  $a, b \in [x, y]$  suficientemente próximos a  $C_l$  tales que  $[x, y] \cap C_l \subset [a, b]$ , y la poligonal  $P$  de extremos  $a, b$  que aproxima la curva  $C_l$  en  $\text{Ext}(C_l)$  no corta a ningún otro  $C_k \in \mathfrak{C}$ . El camino  $[x, a] \cup P \cap [b, y]$  conecta  $x, y$ . Por ser la poligonal  $\text{Fr}(W)$  finita, repitiendo el mismo argumento un número finito de pasos, siempre podemos conectar los puntos  $x, y$  por una poligonal en  $V$ .

No hemos especificado la construcción explícita de  $P$ , por ser sencilla y mecánica. Sin embargo debemos tener en cuenta que podemos tomar poligonales “en dos sentidos” para

aproximar  $C_l$ . Por ser ésta finita, siempre podremos tomar una poligonal finita que la aproxime. En nuestro caso, cualquiera de las dos resuelve el problema.

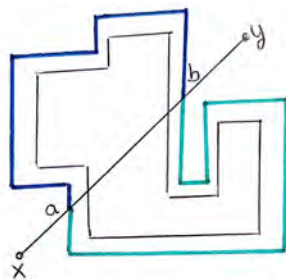


FIGURA 14. Dos posibles construcciones en la aproximación de  $C_l$

**Paso 3.** *Existe una única poligonal maximal  $C_l$ , que contiene a  $W$  en su interior.*

Lo hacemos por reducción al absurdo: Supongamos que  $W$  no está contenido en el interior de ninguna curva de la familia  $\mathfrak{C}$ , es decir  $W \cap \text{Ext}(C_l) \neq \emptyset$  para toda poligonal de  $\mathfrak{C}$ . Por construcción  $C_l \subset \text{Fr}(W)$ , pero todas las curvas  $C_l$  son poligonales de Jordan y  $W$  es conexo con  $W \cap \text{Ext}(C_l) \neq \emptyset$ , luego  $W$  está totalmente contenido en el exterior de todas las curvas, y por tanto de la intersección  $V$  de esos exteriores.

Además,  $W$  es abierto en el conexo  $V$  por serlo en el plano, y cerrado por no tener puntos de frontera en  $V$ . Esto es,  $W = V$  y hemos llegado a un absurdo, pues  $W$  es acotado y  $V$  no. Esto demuestra la existencia de una curva maximal que contiene a  $W$  en su interior.

Por último veamos la unicidad. Supongamos que la curva maximal  $C_l$  contiene a  $W$  en su interior y que hay otra curva maximal  $C_{l'}$ . Como  $C_{l'} \not\subset \text{Int}(C_l)$  y  $C_l \cap C_{l'} = \emptyset$ , se tiene  $C_{l'} \subset \text{Ext}(C_l)$ . Ahora, como  $W \subset \text{Int}(C_l)$ ,  $\overline{W} \subset \text{Int}(C_l) \cup C_l$  no corta a  $C_{l'}$ . Esto es absurdo. ■

En lo que sigue, denotamos esta poligonal maximal por  $\Sigma$ .

## § 7. LEMA DE APROXIMACIÓN POLIGONAL

En esta sección vamos a ver cómo aproximar un arco  $\gamma$  por poligonales de lados paralelos a los ejes. Para hacerlo, tomamos una poligonal  $P$  con los mismos extremos que  $\gamma$  de forma que  $P \cup \gamma$  sea una curva de Jordan. A partir de la nueva curva, construiremos como en [1, Chap. III] para la aproximación poligonal de una curva, una poligonal en un entorno abierto de  $\gamma$  que la aproxime.

**Lema 7.1.** *Sea  $\gamma$  un arco cerrado de extremos  $a_1, a_2$  y sea  $P$  una poligonal tal que  $\Gamma = P \cup \gamma$  es curva de Jordan. Consideramos  $b_1, b_2$  los vértices consecutivos a  $a_1, a_2$  en  $P$ , y  $P' = P \setminus ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2])$ . Entonces, para cualquier entorno abierto  $V$  de  $\gamma$ , existe una poligonal  $Q$  de lados paralelos a los ejes y extremos  $q_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2$  tal que  $Q \subset V$  y  $Q \subset \text{Int}(\gamma \cup P)$ .*

*Demostración.* Descomponemos la prueba en tres pasos.

**Paso 1.** *Existe un entorno abierto  $V'$  de  $\gamma$  con  $V' \subset V$  y  $V' \cap P' = \emptyset$  tal que  $b_1$  y  $b_2$  están en el exterior de cualquier curva de Jordan contenida en  $V'$ .*

Sea  $B$  una bola abierta suficientemente grande tal que  $\Gamma \subset \text{Int}(B)$ . Por el teorema de la curva de Jordan, todos los puntos exteriores a  $B$  lo serán también a  $\Gamma$ . Como  $\gamma \cap P' = \emptyset$ , podemos elegir  $V' \subset V \cap B$  que no corte a  $P'$  y además  $b_1, b_2 \notin \overline{V'}$ . Podemos tomar  $B_1, B_2$  dos bolas contenidas en  $B$  y centradas en  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente de forma que  $B_i$  no corta a  $V'$ , pues  $b_i \notin \overline{V'}$ . Reduciendo los  $B_i$  podemos suponer también que sólo cortan a dos segmentos consecutivos de la poligonal  $P$ .

Una vez más, por el teorema de la curva de Jordan sabemos que toda bola centrada en  $b_i \in \Gamma$  debe contener puntos tanto del interior como del exterior de la curva. Tomamos un  $c_i \in B_i$  en el exterior. Como  $\text{Ext}(\Gamma)$  es un conjunto abierto conexo del plano, es conexo por poligonales: dado cualquier punto  $d_i \in \mathbb{R}^2 \setminus B_i \subset \text{Ext}(\Gamma)$  podemos encontrar una poligonal totalmente contenida en el exterior de  $\Gamma$ , que denotamos  $P_i$ , que una  $c_i$  con  $d_i$ . Reduciendo  $V'$  podemos conseguir que no corte a la poligonal  $P_i \cup [c_i, b_i]$ . Así cualquier curva de Jordan contenida en  $V'$  tiene a  $d_i$  en su exterior, y no corta a la poligonal  $P_i \cup [c_i, b_i]$ , luego  $b_i$  está en su exterior como  $d_i$ .

**Paso 2.** *Dado un entorno abierto  $V$  de  $\gamma$  existe una curva de Jordan poligonal contenida en  $V$  que contiene a  $\gamma$  en su interior, y corta a  $\Gamma$ .*

Reduciendo  $V$  si fuera necesario, podemos suponer que  $V$  es como  $V'$  en el paso 1. Sea  $x \in \gamma$ ,  $E^x$  un entorno cuadrado abierto del punto totalmente contenido en  $V$ , y  $W^x$  otro entorno cuadrado de diámetro la mitad que el anterior.

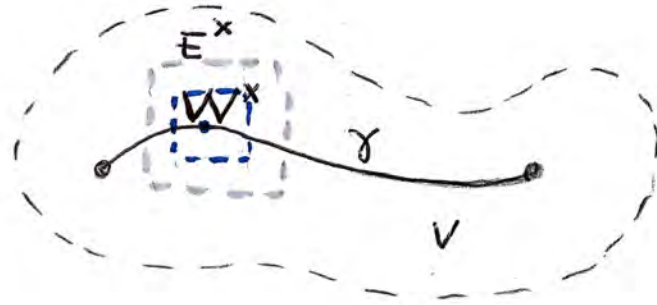


FIGURA 15. Recubrimiento de  $\gamma$  por cuadrados abiertos.

Consideramos el recubrimiento de  $\gamma$  por los abiertos  $\{W^x : x \in \gamma\}$ . Por compacidad podemos extraer un subrecubrimiento finito  $\gamma \subset \bigcup_{i=1}^n W^{x_i}$ . Haciendo una última modificación en los  $W^x$ , ampliándolos si fuera necesario, de forma que todos los lados descansen en rectas distintas y distintas de  $[a_i, b_i]$ . Como  $W^x \subset E^x \subset V$ , obtenemos un recubrimiento finito de  $\gamma$  con unión  $W = \bigcup_{i=1}^n W^{x_i} \subset V$ .

Consideramos la poligonal maximal  $\Sigma$  que se obtiene al aplicar el lema 6.2 a la unión de rectángulos  $W$ . Esta curva contiene a  $\gamma$  en su interior pues por construcción el interior de  $\Sigma$  contiene a  $W$  y  $\gamma \subset W$ , y está contenida en  $V$  ( $\Sigma \subset \text{Fr}(W) \subset V$  por haber empezado con los  $E^x \subset V$ ). Además, el paso 1 garantiza que los puntos  $b_1$  y  $b_2$  están en el exterior de la poligonal.

Finalmente,  $a_i \in \gamma \subset \text{Int}(\Sigma)$  y  $b_i \in \text{Ext}(\Sigma)$ , lo que implica que el segmento  $[a_i, b_i]$  debe intersectar a la curva maximal (en un corte transversal).

**Paso 3.** *Construcción de la poligonal  $Q$ .*



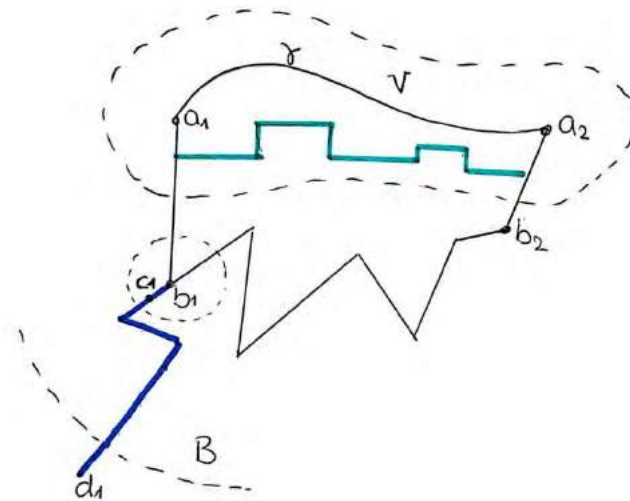


FIGURA 16. Construcción de la poligonal  $Q$ .

Sea  $O \in \Sigma$  en el exterior de  $\Gamma$ . Recorriendo la poligonal  $\Sigma$  desde  $O$  en cualquiera de los dos sentidos posibles, existirá un punto donde este recorrido corte a uno de los segmentos  $]a_i, b_i[$  y entre en  $\text{Int}(\Gamma)$ ; sin pérdida de generalidad suponemos que el punto de intersección, que denotamos  $q_1$  está en  $]a_1, b_1[$ .

Si al continuar recorriendo la poligonal en  $\text{Int}(\Gamma)$  desde  $q_1$  en el mismo sentido, se llega al segmento  $]a_2, b_2[$ , podemos tomar como  $Q$  la poligonal que une los puntos de corte  $q_1, q_2$  y habremos terminado. En caso contrario  $\Sigma$  debe cortar de nuevo al segmento  $]a_1, b_1[$  volviendo al exterior de  $\Gamma$ . Sustituyendo el trozo de poligonal comprendido entre dos puntos de  $\Sigma$  suficientemente próximos a los puntos de corte con  $]a_1, b_1[$ , por un segmento en  $\text{Ext}(\Gamma)$  tendremos una nueva poligonal, que seguimos denotando por  $\Sigma$ , no interseca con el segmento en el punto  $q_1$  y cumple las mismas condiciones que la curva anterior:  $\Sigma \cap \gamma = \emptyset$  y  $\Sigma \cap P' = \emptyset, a_i \in \text{Int}(\Sigma), b_i \in \text{Ext}(\Sigma)$  y por tanto  $\Sigma \cap \Gamma \neq \emptyset$ . Como hemos probado en el paso 2, esta curva  $\Sigma$  debe cortar a  $\Gamma$  en los segmentos  $]a_i, b_i[$ .

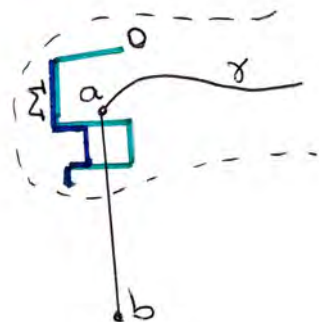


FIGURA 17. Entrada-salida suprimida.

Repetimos el proceso para la nueva poligonal. El número de repeticiones debe ser finito, pues  $\Sigma$  tiene un número finito de lados. Así, obtenemos la poligonal  $Q$  como en el enunciado. ■

## § 8. ACCESIBILIDAD. EMBALDOSADO INFINITO.

**Definición 8.1.** Un punto  $a$  de una curva de Jordan  $C$  se dice *accesible linealmente* si existe otro punto  $b$  de la curva tal que el segmento  $]a, b]$  está contenido en el interior de la curva.

**Observaciones 8.2.** Existen curvas de Jordan donde no todos los puntos son accesibles linealmente. Por ejemplo, en la curva de Jordan que muestra la figura el punto  $p$  no es accesible por coincidir la recta tangente de las dos ramas de la curva en  $p$ .



Por otro lado, se aprecia inmediatamente que si la curva de Jordan es poligonal, todos los puntos son accesibles linealmente. ■

El concepto de accesibilidad importante en estos temas. Hay una presentación general en [11].

**Lema 8.3.** *El conjunto de puntos accesibles linealmente de una curva de Jordan es denso en la curva.*

*Demostración.* Sea  $C$  curva de Jordan y  $a_0 \in C$ . Cualquier bola  $B_\varepsilon$  centrada en  $a_0$  contendrá puntos del interior de la curva, pues  $a_0 \in \overline{\text{Int}(C)}$  y  $C = \overline{\text{Int}(C)} \setminus \text{Int}(C)$ . Tomamos  $b \in B_\varepsilon \cap \text{Int}(C)$ . Si el segmento  $[a_0, b]$  está contenido en el interior de  $C$  hemos terminado. En caso contrario, consideramos el conjunto  $C \cap [a_0, b]$ , que es compacto por serlo la curva y el segmento  $[a_0, b]$ . Así, debe existir un punto  $a$  en la intersección cuya distancia a  $b$  sea mínima: el mínimo de las distancias entre los de puntos de  $C \cap [a_0, b]$  y  $b$  se alcanza en la intersección. Por la elección de  $a$ ,  $]a, b] \subset \text{Int}(C)$ , y  $a$  es accesible.



El siguiente lema nos permite controlar la distancia entre puntos accesibles linealmente. La longitud de la curva entre dos puntos no es una buena medida, pues puntos próximos pueden encerrar una longitud de la curva muy grande.

**Lema 8.4.** *Sea  $C$  una curva de Jordan y  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  un homeomorfismo. Entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una familia de puntos en la circunferencia  $\{p_i\}$  ordenados cíclicamente cuyas imágenes son linealmente accesibles en  $C$  y tales que tanto el diámetro del arco  $\sigma_i$  encerrado por dos puntos consecutivos  $p_i, p_{i+1}$  de la familia, como el diámetro de la curva encerrada por sus imágenes sea menor que  $\varepsilon$ .*

*Demostración.* En primer lugar notamos que  $h$  es uniformemente continua por ser una aplicación continua entre compactos: dado  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta' > 0$  tal que para cualesquiera dos puntos  $x, y \in \mathbb{S}^1$  se tiene que si  $\|x - y\| < \delta'$  entonces  $\|h(x) - h(y)\| < \varepsilon$ .

Sea  $\delta < \varepsilon, \delta'$ , y sean  $\{q_i\}$  puntos ordenados cíclicamente en  $\mathbb{S}^1$  tales que dos consecutivos distan menos que  $\frac{\delta}{3}$ . Por ser el conjunto de puntos accesibles linealmente de  $C$  denso en la curva, debe existir para cada punto  $q_i$  en la familia, un punto accesible linealmente  $a_i \in C$  tal que  $\|a_i - h(q_i)\| < \frac{\delta}{3}$  y  $\|q_i - h^{-1}(a_i)\| < \frac{\delta}{3}$ .

Escogemos ahora la familia de puntos  $\{p_i = h^{-1}(a_i)\}$ . El diámetro del arco que encierran dos puntos consecutivos de la familia es menor que  $\varepsilon$ , pues utilizando la propiedad triangular se tiene que  $\|p_i - p_{i+1}\| < \|p_i - q_i\| + \|q_i - q_{i+1}\| + \|p_{i+1} - q_{i+1}\| < \delta < \varepsilon$ .

Por último, definimos  $\gamma_i = h(\sigma_i)$ . Dados  $x, y \in \sigma_i$  se tiene que  $\|x - y\| < \|p_i - p_{i+1}\| < \delta < \delta'$ , y utilizando la continuidad uniforme de  $h$ ,  $\|h(x) - h(y)\| < \varepsilon$ . Esto demuestra que  $\text{diam}(\gamma_i) < \varepsilon$ . ■

**Observación 8.5.** Dados dos puntos  $a_1, a_2$  accesibles en una curva de Jordan  $C$  y  $b_1, b_2$  los extremos de dos segmentos  $]a_i, b_i] \in \text{Int}(C)$ , siempre existe una curva poligonal  $P$  contenida en  $\text{Int}(C)$  que une  $b_1$  y  $b_2$ , porque  $\text{Int}(C)$  es un abierto conexo. Además, podemos suponer que esta poligonal está libre de autointersecciones, pues siempre se puede sustituir el “trozo” encerrado por una autointersección por el punto donde la poligonal pasa dos veces.

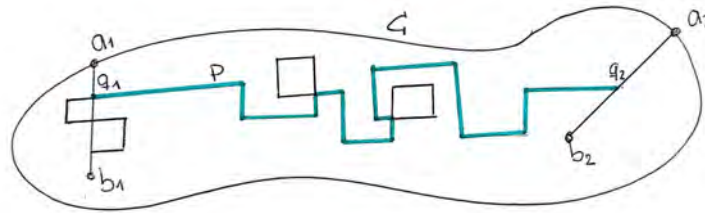


FIGURA 18. Construcción de la poligonal sin autointersecciones.

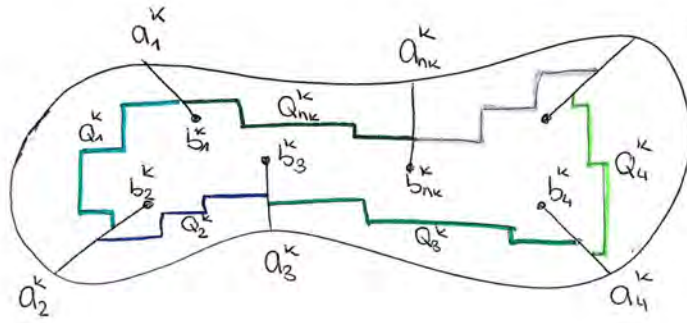
§ 9. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE SCHOENFLIES.

Comenzamos construyendo la aproximación poligonal de la curva, y los dominios de Jordan con fronteras poligonales que aproximan el interior. La idea de esta aproximación se puede encontrar en [1, Chap.3], y como en otra sección anterior, en [10] hay dibujos parecidos a los de esta. Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan. Fijamos una sucesión de medida  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  y en cada paso  $k$  una familia  $\{a_i^k\}_{i=1, \dots, n_k}$  de puntos de  $C$  linealmente accesibles tales que  $\text{diam}(\gamma_i^k) < \varepsilon_k$ , donde  $\gamma_i^k$  denota al arco entre  $a_i^k$  y  $a_{i+1}^k$  en la curva  $C$ .

**Paso 1.** Notamos que dados los puntos  $a_1^k, a_2^k$  y  $b_1^k, b_2^k$  tales que  $]a_i^k, b_i^k] \subset \text{Int}(C)$ , se tiene que, al ser  $\text{diam}(\gamma_1^k) < \varepsilon_k$  y quizá reduciendo los segmentos,  $a_2^k, b_2^k \in B_{\varepsilon_k}(a_1^k)$ .

En el primer paso de la construcción tomamos una poligonal sin autointersecciones  $Q_1^k$  en el interior de  $B_{\varepsilon_k}(a_1^k)$  que una los puntos  $b_1^k, b_2^k$ . Reemplazamos en  $C$  el arco  $\gamma_1^k$  por  $]a_1^k, b_1^k] \cup Q_1^k \cup ]a_2^k, b_2^k]$  para evitar autointersecciones en las poligonales y obtenemos una nueva curva de Jordan  $C_1^k$  donde los puntos  $b_2^k, a_3^k$  son accesibles linealmente, el primero por ser vértice de una poligonal y el segundo por serlo en  $C$ .

**Paso 2.** Consideramos ahora los segmentos  $]b_2^k, c_2^k], ]a_3^k, b_3^k] \in \text{Int}(C_1)$ , y repetimos el argumento del primer paso en la nueva curva. Obtenemos entonces una poligonal  $Q_2^k$  que une en el interior de  $C_1^k$  los puntos  $b_2^k$  y  $b_3^k$ . Sustituyendo  $]a_2^k, b_2^k] \cup \gamma_2^k$  por  $Q_2^k \cup ]b_3^k, a_3^k]$ , obtenemos  $C_2^k$ .

FIGURA 19. Construcción de la poligonal  $P^k$ .

En un número finito de pasos, llegaremos a una curva  $C_{n_{k-1}}^k$  que será unión de  $\gamma_{n_k}^k$ , los segmentos  $[a_1^k, b_1^k]$ ,  $[a_{n_k}^k, b_{n_k}^k]$  y una curva poligonal que aproxima el resto de  $C$ . Tomamos  $Q_{n_k}^k$  una poligonal que una dos puntos de  $b_1^k, b_{n_k}^k$  en  $\text{Int}(C)$ , y sustituimos  $[a_1^k, b_1^k] \cup \gamma_{n_k}^k \cup [a_{n_k}^k, b_{n_k}^k]$  por  $Q_{n_k}^k$ , resultando una curva  $P^k$  que aproxima  $C$ : por la elección de los puntos, la distancia de  $C$  a  $P^k$  es siempre menor que  $\varepsilon_k$ .

**Paso 3.** Para la siguiente etapa, escogemos otra familia  $\{a_i^{k+1}\}_{i=1, \dots, n_{k+1}}$  de puntos linealmente accesibles tales que  $\{a_i^k\}_{i=1, \dots, n_k} \subset \{a_i^{k+1}\}_{i=1, \dots, n_{k+1}}$ , y  $\text{diam}(\gamma_i^{k+1}) < \varepsilon_{k+1}$ .

Aplicamos el método de aproximación anterior, con la precaución de tomar para cada  $a_j^{k+1}$  que se corresponde con algún  $a_i^k$ , el vértice  $b_j^{k+1}$  en el segmento  $[a_i^k, b_i^k]$  definido anteriormente, y las nuevas poligonales  $Q_{n_i}^{k+1}$  sin intersectar a las ya definidas en la anterior construcción. Por último, definimos:

$$U_k := \text{Int}(P^k),$$

$$R_i^k = (\bigcup_{j \in J_i} Q_j^{k+1}) \cup Q_i^k, \text{ donde } J_i = \{j \mid Q_j^{k+1} \subset \text{Int}([a_i^k, b_i^k] \cup \gamma_i^k \cup [a_{i+1}^k, b_{i+1}^k])\},$$

$$N_i^k = \text{Int}(R_i^k).$$

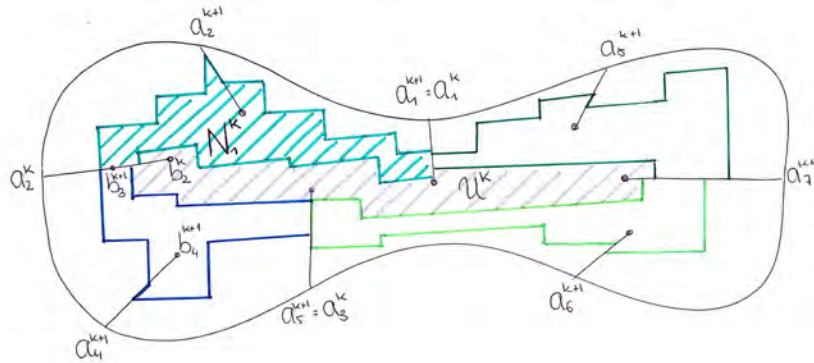


FIGURA 20. Notaciones en la aproximación poligonal de una curva.

Una vez hecha la construcción anterior, en la que hemos probado en primer lugar que una poligonal es una curva de Schoenflies y en segundo que una circunferencia se puede expresar como límite de poligonales, podemos demostrar el teorema de Schoenflies en general. Como sabemos, basta probar la forma débil.

**Teorema 9.1** (Forma débil del teorema de Schoenflies). *Sea  $C \in \mathbb{R}^2$  curva de Jordan y sea  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  un homeomorfismo. Existe una extensión  $\bar{h} : \mathbb{D}^2 \rightarrow D$  del disco unidad sobre un compacto  $D$  tal que  $h(\mathbb{S}^1) = C$ .*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon_k > 0$  una sucesión que tiende a 0 y  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  un homeomorfismo. Como en 8.4 para cada  $\varepsilon_k$  consideramos una familia  $\{p_i^k\}_{i=1,\dots,n_k}$  de puntos en la circunferencia cumpliendo que la familia de puntos  $\{a_i^k = h(p_i^k)\}$  sean accesibles linealmente y dados  $\sigma_i^k$  el arco en  $\mathbb{S}^1$  entre dos puntos consecutivos  $p_i^k, p_{i+1}^k$ , y  $\gamma_i^k = h(\sigma_i^k)$ ,  $\text{diam}(\sigma_i^k)$  y  $\text{diam}(\gamma_i^k) < \varepsilon_k$ . Utilizaremos las notaciones de 5 para  $\mathbb{S}^1$  y de 9 para  $C$ : recordamos que  $B = \bigcup_k B_k$  es la bola unidad abierta, y  $U_k$  es el interior de la curva  $P^k$  que aparece en la aproximación poligonal de la curva. Vamos a construir la extensión como límite de aplicaciones definidas en los  $U_k$ . Una vez tengamos definida la aplicación, comprobaremos que en efecto, extiende  $h$ , y que es un homeomorfismo.

Empezamos en cualquier  $k$  y sea  $P^k$  la poligonal en el interior de la curva  $C$  construida desde los puntos  $a_i^k$  como en 9. Definimos un homeomorfismo  $h^k$  entre  $P^k$  y un polígono de  $n_k$  lados  $S^k$ , construido en 5 como sugiere la figura 21: En el polígono  $S^k$ , consideramos un homeomorfismo entre el  $i$ -ésimo lado del mismo y la poligonal  $Q_i^k$ ,  $h_i^k : [q_i^k, q_{i+1}^k] \rightarrow Q_i^k$ , y usando el lema de encolamiento el homeomorfismo  $h^k : S^k \rightarrow P^k$  como la unión de los anteriores. Usando el teorema de Schoenflies para poligonales extendemos  $h^k$  al interior  $U_k$ .

En el siguiente paso de la aproximación consideramos la nueva curva  $P^{k+1}$  y las poligonales  $T_i^k$ , y definimos homeomorfismos  $h_i^{k+1}$  que lleven los  $T_i^k$  a su análogo en la construcción en la curva  $R_i^k$ , respetando la imagen de  $Q_i^k$  determinada en el paso anterior. Aplicando el teorema de Schoenflies para poligonales extendemos a los interiores,  $M_i^k$  en la circunferencia y  $N_i^k$  en la curva. Uniendo todos estos homeomorfismos a los anteriores, obtenemos el homeomorfismo  $h^{k+1}$  cumpliendo que  $h|_{B_k}^{k+1} = h^k$ .

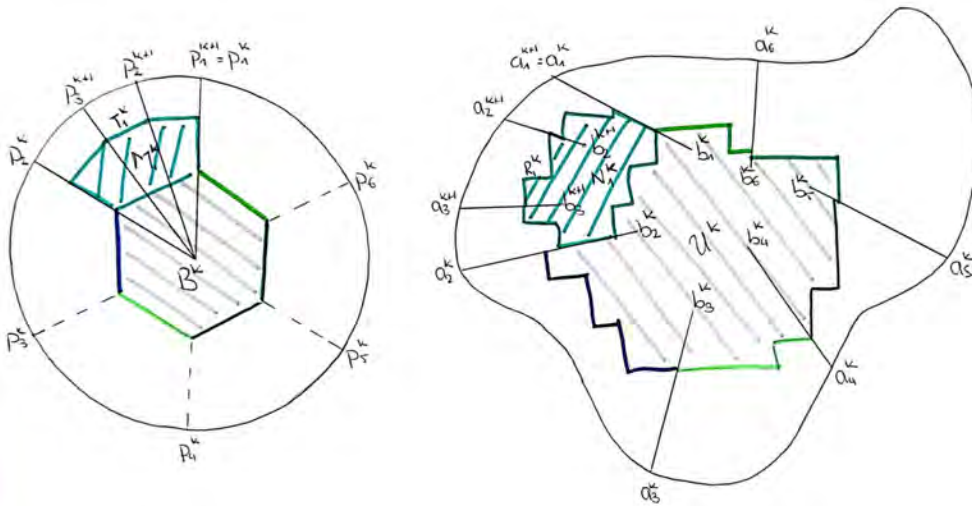


FIGURA 21. Construcción de la extensión.

Por la forma en la que se han definido, respetando siempre la imagen determinada en pasos anteriores, las aplicaciones  $h^k$  están bien definidas y son continuas en todo su dominio.

Así,  $\bar{h} : B \rightarrow U$  se define por  $\bar{h}(x) = h^k(x)$  si  $x \in B_k$ . Está bien definida y es continua, pues  $h^{k+1}|_{B_k} = h^k$ . Veamos que da una extensión de  $h$  al interior, es decir que hay continuidad en la frontera  $\mathbb{S}^1$  del disco.

Estudiamos la continuidad por sucesiones: supongamos que  $(x_\nu)$  es una sucesión en  $B$  que converge a un punto de la circunferencia  $x_0$  y veamos que entonces  $y_\nu = \bar{h}(x_\nu) \rightarrow y_0 = h(x_0)$ . Por compacidad, basta ver que cualquier subsucesión convergente de  $(y_\nu)$  debe converger a  $y_0$ . Supongamos lo contrario y sea  $y_{\nu_k}$  una subsucesión con  $y_{\nu_k} \rightarrow z \neq y_0$ , con lo que para  $k$  suficientemente grande,  $(y_{\nu_k}) \notin B(y_0, \varepsilon_k)$ . Sea para cada  $\varepsilon_k$ , la familia  $p_i^k \rightarrow x_0$  de puntos tomados como en el paso anterior. Por la continuidad de  $h$ , tenemos  $a_i^k \rightarrow y_0$ , y por ser  $y_{\nu_k}$  imagen de  $x_{\nu_k}$ , debe estar contenido en  $N_i^k$  que dista menos de  $\varepsilon_k$  de la curva  $C$ . Ahora,

$$\|y_{\nu_k} - y_0\| \leq \|y_{\nu_k} - a_i^k\| + \|a_i^k - y_0\| < \varepsilon_k + \|a_i^k - y_0\|$$

y como ambas tienden a 0,  $y_{\nu_k} \rightarrow y_0$ .

Sólo queda ver que  $U = \bar{h}(B)$ . Por un lado  $\bar{h}(B) = \bigcup_k \bar{h}(B_k) = \bigcup_k U_k \subset U$  por lo que  $\bar{h}(B) \subset U$ , y por otro  $\bar{h}(\mathbb{D}^2) \cap U$  es cerrado en  $U$ , pues  $\bar{h}(\mathbb{D}^2)$  es compacto, y  $\bar{h}(B \cup \mathbb{S}^1) \cap U = (\bar{h}(B) \cap U) \cup (h(\mathbb{S}^1) \cap U) = \bar{h}(B) \cap U$ , por lo que  $\bar{h}(B)$  es cerrado  $U$ , que es conexo por Jordan. Esto implica que  $\bar{h}(B) = U$ . Así,  $\bar{h} : \mathbb{D}^2 \rightarrow C \cup U$  es una función continua, biyectiva, de un compacto  $\mathbb{D}^2$  en un espacio Hausdorff, es decir,  $\bar{h}$  es un homeomorfismo. ■

## § 10. EL GRUPO FUNDAMENTAL DEL PLANO PROYECTIVO.

En esta sección presentamos el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  y su recubridor sobre la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Nuestro objetivo es extender el enunciado de Schoenflies a esta superficie. Para hacerlo necesitaremos diferenciar tipos de curvas de Jordan en el plano proyectivo y cuándo desconectan la superficie.

Es conocida la caracterización del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  como el conjunto de clases en  $\mathbb{R}^3$  menos la clase del 0 con la relación de proporcionalidad  $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Cada clase está unívocamente determinada por una dirección. Así, usaremos la caracterización de  $\mathbb{P}^2$  como el cociente de  $\mathbb{S}^2$  por la aplicación antipodal que identifica los dos vectores que comparten dirección en la esfera.

$$\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 : (x_0, x_1, x_2) \rightarrow (x_0 : x_1 : x_2).$$

La aplicación está bien definida, cubre todo el plano proyectivo y cada punto de  $\mathbb{P}^2$  tiene exactamente dos preimágenes en la esfera. Más aún,  $\rho$  es un recubridor de dos hojas, pues dado un punto  $a = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$  y sus dos preimágenes  $\pm \hat{a}$  en la esfera, podemos construir homeomorfismos entre dos entornos abiertos de  $\hat{a}$  y  $-\hat{a}$  y un abierto trivializador  $U$  entorno de  $p$ . En primer lugar, consideramos el hiperplano  $\Pi : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$  perpendicular al vector  $\hat{a}$  en  $\mathbb{R}^3$  que divide la esfera en dos casquetes  $U_\pm$ , cada uno de los cuales es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Este plano puede ser considerado la recta de infinito en el plano proyectivo y así  $U = \mathbb{P}^2 \setminus \Pi$  es un entorno abierto de  $a$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ .

Por último,  $\rho^{-1}(U) = U_+ \cup U_-$  y  $\rho|_{U_\pm}$  son homeomorfismos sobre  $U$ . Esta aplicación  $\rho$  se denomina *recubridor antipodal*.

Enunciamos dos resultados de existencia de *elevaciones* de caminos y de homotopías en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  a la esfera  $\mathbb{S}^2$ . No incluimos la demostración, que es una copia la que se encuentra en la sexta sección de [6] para el espacio  $\mathbb{S}^1$  y su recubridor  $\mathbb{R}$ .

**Definición 10.1.** Si  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  es una función continua y existe  $f' : X \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $\rho \circ f' = f$  decimos que  $f'$  es una *elevación de  $f$  al espacio  $\mathbb{S}^2$*  (o simplemente una elevación).

Consideramos un punto  $a_0 \in \mathbb{P}^2$  y una preimagen suya  $\hat{a}_0$  por el recubridor antipodal  $\rho$ .

**Lema 10.2** (Elevación de caminos). *Todo camino  $\sigma$  en  $\mathbb{P}^2$  tal que  $\sigma(0) = a_0$  tiene una elevación única  $\hat{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $\hat{\sigma}(0) = \hat{a}_0$ .*

**Lema 10.3** (Elevación de homotopías). *Sea  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$  una función continua:  $F(0, 0) = a_0$ . Entonces  $F$  tiene una elevación  $\hat{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $\hat{F}(0, 0) = \hat{a}_0$ .*

Por la unicidad de la elevación de caminos, tomando  $\hat{\sigma}$  como la única elevación de  $F(0, t)$  con origen en  $\hat{a}_0$ , es equivalente imponer la condición inicial de la elevación de una homotopía en punto del origen  $\hat{F}(0, 0) = \hat{a}_0$  o en el camino  $\hat{F}(0, t) = \hat{\sigma}(t)$ .

El recubridor antipodal nos permite calcular el grupo fundamental del plano proyectivo. La demostración es explícita y nos será útil para identificar los tipos de curvas de Jordan que podemos encontrar en  $\mathbb{P}^2$ .

**Proposición 10.4.** *El grupo fundamental del plano proyectivo real tiene dos elementos. En consecuencia es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .*

*Demostración.* Es suficiente por la conexión de  $\mathbb{P}^2$  hacer el cálculo para el punto base  $a = (1 : 0 : 0)$ , cuyas preimagenes son  $\hat{a} = (1, 0, 0)$  y  $-\hat{a} = (-1, 0, 0)$ .

Consideramos un lazo  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$  de punto base  $a$ . Por el lema de la elevación,  $\sigma$  se puede elevar a un camino  $\hat{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$  con origen  $\hat{a}$ , y extremo una preimagen de  $a$ . Distinguiamos dos casos:

- Si el extremo de  $\hat{\sigma}$  es el punto  $\hat{a}$  el camino es un lazo en la esfera, que es simplemente conexa. Así, podemos definir una homotopía de punto base fijo  $\hat{H}_s : \hat{\sigma} \simeq \hat{a}$  que compuesta con el recubridor  $\rho$  define una homotopía de lazos en  $\mathbb{P}^2$ ,  $\rho \circ \hat{H}_s : \sigma \simeq a$ .
- En caso contrario, el camino  $\hat{\sigma}$  tiene por extremos dos puntos antipodales, y por tanto es homótopo a cualquier arco  $\hat{\alpha}$  de origen  $\hat{a}$  y extremo su antípoda. Tomando por ejemplo  $\hat{\alpha} = (0, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$  se tiene  $\hat{H}_s : \hat{\sigma} \simeq \hat{\alpha}$ , y aplicando una vez más el recubridor antipodal obtenemos una homotopía  $\rho \circ \hat{H}_s : \sigma \simeq \alpha$  donde  $\alpha = \rho \circ \hat{\alpha}$ .

Queda ver que estas dos clases de lazos son distintas, es decir que  $\alpha$  no es nulhomótopo. Para ello, supongamos que lo fuera y consideramos la homotopía de lazos  $H_s : \alpha \simeq a$  definida en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  donde los lados verticales y superior son constantemente  $a$ . Por el lema de la elevación con condición inicial  $\hat{\alpha}$ , la homotopía se eleva a una aplicación  $\hat{H}_s : \hat{\alpha} \simeq \hat{\tau}$  definida en el mismo cuadrado. Por continuidad, la imagen en los bordes verticales y superior debe ser constante,  $\hat{a}$  o  $-\hat{a}$ . Esto contradice que los extremos de  $\hat{\alpha}$  sean antipodales.

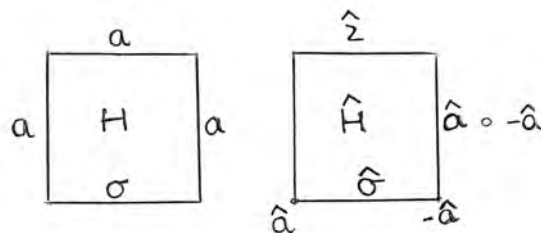


FIGURA 22. Elevación de una homotopía de caminos.

Hemos probado que el grupo fundamental de  $\mathbb{P}^2$  tiene dos elementos. Esto implica que  $\pi(P^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ . ■

Esta prueba muestra que sólo hay dos tipos de lazos posibles en plano proyectivo, los que son nulhomótopos y los que su elevación mediante el recubridor antipodal en la esfera es homótopa a un camino de extremos antipodales. Hemos hecho la demostración en  $\mathbb{P}^2$  porque es el caso que nos interesa, pero se generaliza inmediatamente para ver que  $\pi(P^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$  para  $n \geq 2$ .

§ 11. CURVAS DE JORDAN EN EL PLANO PROYECTIVO.

Nos interesamos ahora en cuándo desconectan los dos tipos de lazos anteriores en el plano proyectivo. Comenzamos probando que la preimagen de una curva de Jordan es, o bien una curva invariante por la aplicación antipodal (la elevación del lazo será un arco de extremos antipodales en la esfera) o bien la unión de curvas de Jordan imágenes antipodales la una de la otra (que por estar en  $\mathbb{S}^2$  serán ambas nulhomótopas). Esta clasificación nos permitirá posteriormente describir la forma en la que una curva de Jordan desconecta  $\mathbb{P}^2$ .

**Proposición 11.1.** *Una aplicación continua e inyectiva  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  es nulhomótopa si y sólo si lo es una parametrización  $\sigma$  de  $C = h(\mathbb{S}^1)$  como lazo de punto base un punto  $p \in C$ .*

*Demostración.* Empecemos con la implicación hacia la derecha. Sea  $\alpha_0$  la única preimagen del punto  $x_0$  al que se homotopa  $h$ , y  $\exp$  la parametrización exponencial de  $\mathbb{S}^1$  con  $\exp(0) = \exp(1) = \alpha_0$ . Consideramos el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & & \\
 \exp \downarrow & \searrow \sigma & \\
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

donde  $\sigma = \exp \circ h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$  es una parametrización de la imagen de  $h$  como lazo de punto base  $x_0$ . Por hipótesis existe una homotopía  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$  entre  $h$  y  $x_0$ , que componemos con la aplicación exponencial en la primera variable. Así obtenemos una homotopía de lazos  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$ , esto es,  $H(t, 0) = \sigma(t)$ ,  $H(t, 1) = x_0$  y  $H(0, s) = H(1, s)$ . Pero buscamos establecer una homotopía de lazos *con punto base fijo*, es decir, la última igualdad debe ser  $H(0, s) = H(1, s) = x_0$ . Como se muestra en el dibujo 23 basta identificar el borde superior del cilindro para obtener la aplicación definida en un cono, y componiendo con una proyección sobre su base, en un disco cerrado.

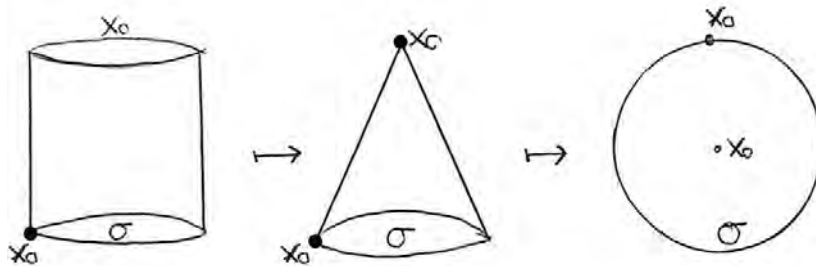


FIGURA 23. Identificación del borde superior del cilindro.



Ahora, componemos con una identificación del disco sobre el disco que colapsa un arco adecuado del borde sobre un punto, como en la figura siguiente

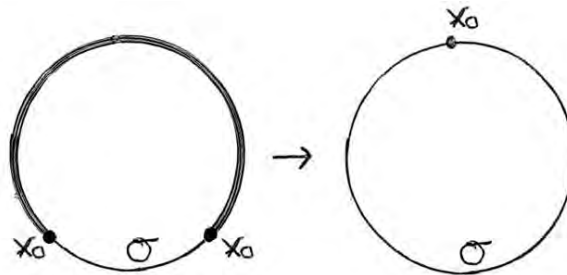


FIGURA 24. Colapsamiento de un arco sobre un punto.

Finalmente, deformando el disco mediante un homeomorfismo que transforme el arco anterior de  $\mathbb{S}^1$  sobre tres lados de un cuadrado inscrito, se tiene la homotopía  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$  de punto base fijo:  $H(0, s) = \sigma$ ,  $H(1, s) = x_0$  y  $H(t, 0) = H(t, 1) = x_0$  para  $t, s \in [0, 1]$ .

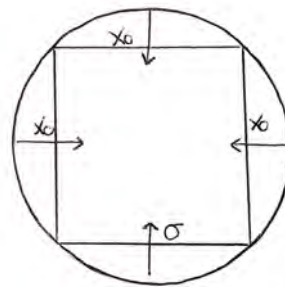


FIGURA 25. Homeomorfismo del disco sobre el cilindro.

Para la implicación hacia la derecha basta utilizar la aplicación exponencial, según se representa en la siguiente figura:

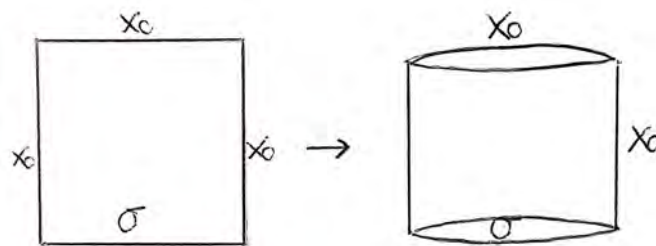
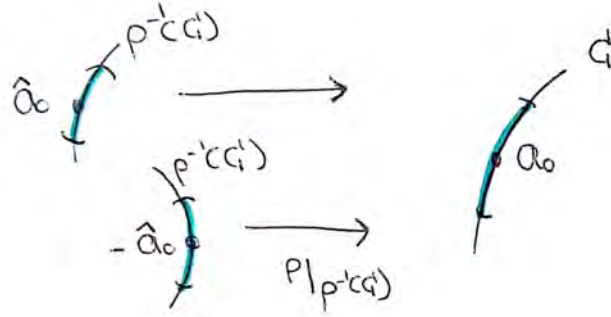


FIGURA 26. Identificación exponencial sobre un cilindro.

■

**Proposición 11.2.** *Sea  $C$  una curva de Jordan en  $\mathbb{P}^2$  y  $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  el recubridor antipodal. Entonces,  $\rho^{-1}(C)$  es o bien una curva de Jordan invariante por la aplicación antipodal, o bien dos curvas de Jordan disjuntas e imagen antipodal la una de la otra.*

*Demostración.* Es importante recordar que  $\rho$  es homeomorfismo local y por tanto localmente inyectiva, por lo que  $\rho|_{\rho^{-1}(C)}: \rho^{-1}(C) \rightarrow C$  también lo es, y la preimagen de  $C$  no puede tener autointersecciones: en cada punto  $a_0 \in C$  existe un entorno  $U_{a_0}$  en la curva que es homeomorfo a un entorno en la circunferencia.



En primer lugar,  $\rho^{-1}(C)$  es unión de a lo sumo dos componentes conexas. En efecto, al ser compacto (cerrado en  $\mathbb{S}^2$ ) y localmente conexo (por ser la preimagen de la curva), el número de componentes conexas debe ser finito. Además este número debe ser menor que el número de preimágenes de cada punto: Supongamos que  $\rho^{-1}(C)$  tiene tres componentes conexas, digamos  $C_1, C_2$  y  $C_3$ , todas ellas abiertas (por ser localmente conexo) y cerradas (por ser componentes conexas) en la preimagen de  $C$ . Entonces  $\rho(C_i)$  son abiertas ( $\rho$  es homeomorfismo local) y cerradas (continuidad), lo que implica que  $\rho(C_i) = C$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Pero esto es absurdo, pues cada punto tiene sólo dos preimágenes por la aplicación antipodal. Estudiamos ahora los dos casos posibles:

Si  $\rho^{-1}(C)$  es conexo, y por lo que acabamos de ver compacto en la esfera  $\mathbb{S}^2$ , entonces usando el teorema de clasificación de curvas [8, IV.1] es una curva de Jordan. Además debe ser invariante por la aplicación antipodal, pues en otro caso la preimagen de  $C$  no podría constar de una sola componente conexa.

Si  $\rho^{-1}(C)$  no es conexo, debe estar formado por dos componentes conexas y compactas, es decir curvas de Jordan. Además deben ser imágenes antipodales, pues al aplicar  $\rho$  da una misma curva. ■

**Proposición 11.3.** *Sea  $C$  una curva de Jordan en  $\mathbb{P}^2$ . La curva  $C$  es nulhomótopa si y sólo si  $\hat{C} = \rho^{-1}(C)$  es la unión de dos curvas de Jordan disjuntas imagen antipodal la una de la otra. Además, en tal caso  $\hat{C}$  divide la esfera en tres componentes conexas, dos de ellas simplemente conexas e imagen antipodal la una de la otra.*

*Demostración.* Veamos primero que si  $\hat{C}$  es nulhomótopa, tiene dos componentes conexas. Consideramos una parametrización inyectiva (salvo en el punto base por donde pasa dos veces)  $\sigma$  de la curva, las dos preimágenes de un punto  $a \in C$  que denotamos por  $\hat{a}$  y  $-\hat{a}$  y dos elevaciones  $\hat{\sigma}_+$  y  $\hat{\sigma}_-$  con origen en  $\hat{a}$  y  $-\hat{a}$  respectivamente. Ahora, por ser  $C$  nulhomótopa las elevaciones deben ser lazos en la esfera, y por ser las parametrizaciones inyectivas (salvo en el punto base) las elevaciones deben ser distintas curvas: Si fueran el mismo lazo, existiría un  $t \in [0, 1]$  de forma que  $\hat{\sigma}_+(t) = -\hat{a}$ , y aplicando  $\rho$ ,  $\sigma(0) = \sigma(t) = \sigma(1)$ , por lo que  $\sigma$  pasaría por  $a$  tres veces y no sería inyectiva. Además las dos curvas  $\hat{\sigma}_\pm$  están contenidas en  $\rho^{-1}(C)$  y por la proposición anterior  $\rho^{-1}(C)$  es unión de dos curvas de Jordan disjuntas e imágenes antipodales la una de la otra,  $C_1$  y  $C_2$ .

Recíprocamente, si la preimagen de  $C$  son dos curvas distintas, cada una de ellas es una elevación suya como lazo y por tanto la clase de homotopía de la curva es la clase del neutro.

Queda ver la segunda parte del enunciado. Que la esfera queda dividida en tres componentes conexas es fácil: aplicando el teorema de la curva de Jordan para  $C_1$ , se tiene que  $\mathbb{S}^2 \setminus C_1 = U_1 \cup W$ , que por el teorema de Schoenflies son dos discos abiertos y  $C_2$  está totalmente contenido en uno de ellos. Sin pérdida de generalidad suponemos que en  $W$ . Por otro lado,  $W$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , y aplicando el teorema de la curva de Jordan en el plano, se tiene que  $W \setminus C_2 = U_2 \cup V$ , donde por Schoenflies  $U_2$  es un abierto simplemente conexo y  $V$  es un disco menos un punto. Así,  $\mathbb{S}^2 \setminus \rho^{-1}(C)$  es unión de tres abiertos conexos,  $U_1, U_2$  y  $V$ , que la antipodal debe permutar entre sí.

Para terminar, la imagen de un disco por el homeomorfismo antipodal debe ser otro disco. Así,  $\rho$  transforma  $U_1$  en  $U_2$  o bien lo deja fijo, pero la antipodal transforma  $C_1$  en  $C_2$ , por lo que  $U_1$  y  $U_2$  son imagen antipodal el uno del otro, y  $V$  es invariante antipodal. ■

**Proposición 11.4.** *Sea  $C$  una curva de Jordan en  $\mathbb{P}^2$ . Si  $C$  no es nulhomótopa, entonces  $\widehat{C} = \rho^{-1}(C)$  es una curva de Jordan invariante por la aplicación antipodal. Además  $\mathbb{S}^2 \setminus \widehat{C}$  tiene dos componentes conexas, imagen antipodal la una de la otra.*

*Demostración.* Por no ser la curva nulhomótopa, su preimagen es una única curva de Jordan invariante por la aplicación antipodal (11.2). Aplicando el teorema de Jordan-Schoenflies, la curva  $\widehat{C}$  divide la esfera en dos discos abiertos  $U_1$  y  $U_2$ , cuya frontera es la curva.

Probemos para terminar que las dos componentes conexas son imágenes antipodales. Primero, utilizando el teorema del punto fijo que Brouwer, no quedan invariantes: En caso contrario, el dominio de Jordan  $D = \widehat{C} \cup U_1$ , que es un disco, sería invariante antipodal, y por tanto la aplicación antipodal  $A : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que por definición no tiene puntos fijos induce, restringiéndola al dominio  $D$ , una aplicación del disco en sí mismo sin puntos fijos, lo que es absurdo. Además,  $A$  es un homeomorfismo, y  $A|_{\mathbb{S}^2 \setminus \widehat{C}}$  lleva las componentes conexas a componentes conexas. Como sólo hay dos, y ninguna queda fija,  $A$  intercambia  $U_1$  y  $U_2$ . ■

Intuitivamente podemos diferenciar las dos clases de curvas de Jordan como los dos elementos distintos del grupo fundamental  $\mathbb{Z}_2$  del plano proyectivo. En caso de que la curva en  $\mathbb{P}^2$  sea nulhomótopa se corresponderá con la clase del neutro, pues las dos componentes serán las posibles elevaciones del lazo según el punto de origen escogido. En caso contrario su preimagen será unión disjunta (salvo en los extremos) de dos caminos de extremos antipodales e imagen antipodal el uno del otro. Más tarde daremos sentido riguroso a todo esto.

Una vez que hemos estudiado el comportamiento de la preimagen de una curva de Jordan en la esfera, bastará aplicar el recubridor antipodal para obtener una clasificación de las curvas homeomorfas a la circunferencia en el plano proyectivo, según la forma en que lo desconecten. Lo vemos en el siguiente teorema:

**Teorema 11.5** (de Jordan en  $\mathbb{P}^2$ ). *Sea  $C$  una curva de Jordan en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  y consideramos su imagen inversa por la aplicación antipodal  $\widehat{C} = \rho^{-1}(C)$ . Entonces se cumple:*

- (1) Si  $C$  es nulhomótopa,  $\widehat{C}$  es la unión de dos curvas de Jordan imagen antipodal la una de la otra y  $C$  divide al plano proyectivo en dos componentes conexas.
- (2) En caso contrario,  $\widehat{C}$  es una curva invariante por la aplicación antipodal, y  $\mathbb{P}^2 \setminus C$  es conexo.

*Demostración.* Con lo visto anteriormente, sólo falta analizar la conexión en el plano proyectivo. En caso de que  $C$  sea nulhomótopa,  $\mathbb{S}^2 \setminus \widehat{C}$  está compuesto por tres componentes conexas, dos de ellas simplemente conexas e imágenes antipodales y la tercera invariante por la aplicación antipodal. Al aplicar el recubridor antipodal en el plano proyectivo, las dos componentes simplemente conexas darán una misma componente. Con las notaciones anteriores

$$\mathbb{P}^2 \setminus C = \rho \circ \rho^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus C) = \rho(\mathbb{S}^2 \setminus \widehat{C}) = \rho(U_1 \cup V \cup U_2) = \rho(U_1) \cup \rho(V)$$

donde  $\rho(U_1)$  y  $\rho(V)$  son dos abiertos no vacíos y disjuntos.

Estudiamos ahora el caso en que  $C$  no es nulhomótopa, y por tanto  $\widehat{C}$  es una curva de Jordan invariante antipodal. Sabemos por 11.4 que los abiertos en los que se divide la esfera son imagen antipodal el uno del otro. Al aplicar  $\rho$  a la esfera menos la curva  $\widehat{C}$  tendremos una sola componente conexa

$$\mathbb{P}^2 \setminus C = \rho \circ \rho^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus C) = \rho(\mathbb{S}^2 \setminus \widehat{C}) = \rho(U_1 \cup U_2) = \rho(U_1),$$

y por tanto  $C$  no desconecta  $\mathbb{P}^2$ . ■

## § 12. EL TEOREMA DE JORDAN-SCHOENFLIES EN EL PLANO PROYECTIVO.

Una vez estudiadas la dos formas distintas en las que una curva de Jordan en el plano proyectivo puede desconectarlo, nos interesamos en el tipo topológico de estas componentes. Vamos a probar que las curvas de Jordan que no desconectan son rectas de infinito, y que las que sí lo hacen son homeomorfas a circunferencias en un plano afín.

**Teorema 12.1** (de Jordan-Schoenflies en  $\mathbb{P}^2$ ). *Sea  $C$  una curva de Jordan en  $\mathbb{P}^2$ .*

- (1) Si  $C$  no es nulhomótopa, existe un homeomorfismo de  $\mathbb{P}^2$  que la transforma en una recta proyectiva  $\ell_\infty$ . En particular,  $C$  no desconecta el plano proyectivo y su complementario es un disco abierto (un plano afín con recta de infinito  $\ell_\infty$ ).
- (2) Si  $C$  es nulhomótopa, existe un homeomorfismo de  $\mathbb{P}^2$  que la transforma en una circunferencia de un plano afín  $\mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty$ . En particular,  $C$  desconecta  $\mathbb{P}^2$  en dos componentes: un disco abierto y una banda de Moebius.

Antes de demostrar el teorema, vamos a ver algunos resultados auxiliares que nos ayudarán a comprender la forma en la que se hacen estas transformaciones.

**Proposición 12.2.** *Sea  $\widehat{C}$  una curva de Jordan en la esfera  $\mathbb{S}^2$  que queda invariante por la aplicación antipodal. Entonces existe un homeomorfismo de la esfera compatible con la aplicación antipodal, cuya restricción a  $\mathbb{S}^1$  tiene por imagen la curva.*

*Demostración.* Primero vamos a construir un homeomorfismo  $h$  entre una circunferencia y la curva compatible con la aplicación antipodal  $A : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , es decir  $h(x) = -h(-x)$  para todo punto  $x \in \mathbb{S}^1$ . Una vez hecho esto extenderemos por el teorema de Schoenflies en uno de los dominios de Jordan formados, y definiremos la aplicación en el restante como un "espejo antipodal". Esto nos dará la extensión a la esfera que buscamos.

Sea un punto  $\hat{a} \in \hat{C}$ . Sabemos que la curva  $\hat{C}$  es invariante antipodal, luego  $-\hat{a} \in \hat{C}$ . Tomamos los dos arcos  $\gamma_1, \gamma_2$  en los que  $a$  y  $-a$  dividen la curva. Como la antipodal induce un homeomorfismo de  $\hat{C} \setminus \{a, -a\}$ , conserva o intercambia sus componentes conexas  $\gamma_i \setminus \{a, -a\}$ . Basta ver que no las conserva para concluir que  $-\gamma_1 = \gamma_2$ .

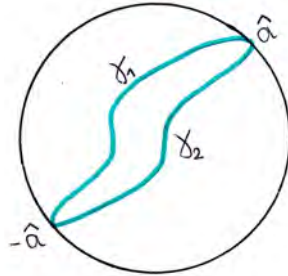


FIGURA 27. Curva antipodal en la esfera.

Si la antipodal conserva  $\gamma_1$ , induce en ese arco un homeomorfismo *sin puntos fijos* que intercambia los extremos. Topológicamente, al ser un arco lo mismo que el intervalo  $[0, 1]$ , lo que tenemos es una aplicación continua  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  con  $g(0) = 1, g(1) = 0$  y  $g(t) \neq t$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Esto es imposible.

Ahora, tomamos un punto  $x_0 \in \mathbb{S}^1$  y la semicircunferencia  $\sigma \subset \mathbb{S}^1$  de  $x_0$  a  $-x_0$ . Sea  $\bar{f} : \sigma \rightarrow \gamma_1$  un homeomorfismo cualquiera y definimos:  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \hat{C} : h(x) = \bar{f}(x)$  si  $x \in \sigma$  y  $h(x) = -\bar{f}(-x)$  si  $x \in -\sigma$ .

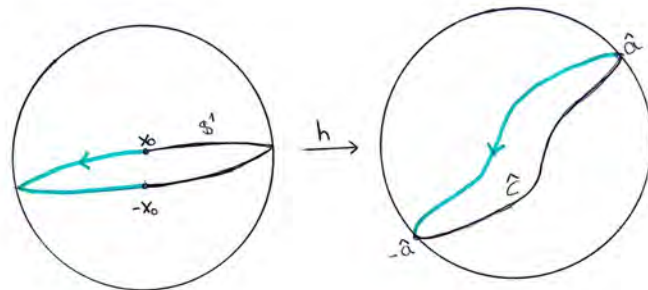


FIGURA 28. Homeomorfismo entre una semicircunferencia y un arco de extremos antipodales.

Comprobemos que en efecto  $h$  es un homeomorfismo: la aplicación está bien definida, es continua en cada arco abierto entre los puntos  $\pm x_0$ , y en los extremos por coincidir los límites laterales. La inyectividad es fácil, si dos puntos  $x, y$  tienen la misma imagen, no pueden estar en la misma semicircunferencia, pues  $h$  es homeomorfismo en cada una de las componentes conexas de  $\hat{C} \setminus \{x_0, -x_0\}$ . Supongamos que  $x \in \sigma$  e  $y \in -\sigma$ , lo que implicaría que  $h(x) = -h(-y)$  y por tanto  $x, -y$  son dos puntos en  $\sigma$  con imágenes antipodales, lo que acabamos de probar que es imposible. Por último es sobreyectiva, pues su imagen es  $\gamma_1 \cup -\gamma_1 = \hat{C}$ .

Ahora, considerando por un lado la inmersión de  $\mathbb{S}^1$  en la esfera como ecuador y el casquete superior  $S_+$ , y por el otro una de las componentes conexas  $U$  en las que  $\hat{C}$  divide  $\mathbb{S}^2$ , se tiene que  $S_+ \cup \mathbb{S}^1$  y  $U \cup \hat{C}$  son homeomorfos a dos discos cerrados, en cuyas fronteras

hemos definido  $h$ . Por el teorema de Shoenflies en el plano, podemos extender  $h$  a los interiores. Denotamos la extensión por  $H$ .

Por último, definimos  $\bar{h} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  haciendo  $\bar{h}(x) = H(x)$  si  $x \in S_+ \cup \mathbb{S}^1$  y  $\bar{h}(x) = -H(-x)$  en otro caso. Esta aplicación está bien definida, es continua, inyectiva y cubre toda la esfera por ser las componentes conexas de  $\mathbb{S}^2 \setminus \widehat{C}$  imágenes antipodales. Como es homeomorfismo local, es homeomorfismo. ■

Dicho en otras palabras, si la curva de Jordan  $C$  en el plano proyectivo no es nulhomótopa, su preimagen por el recubrimiento antipodal puede transformarse en el ecuador de la esfera por un homeomorfismo que respeta la aplicación antipodal.

Estudiamos ahora lo que pasa cuando la curva de Jordan  $C \subset \mathbb{P}^2$  es nulhomotópa. Hemos visto que en este caso la preimagen de  $C$  por el recubrimiento antipodal son dos curvas disjuntas e imágenes antipodales,  $C_1$  y  $C_2$ . Gracias a que la primera curva no corta a la segunda, se tiene que una de las componentes conexas de  $\mathbb{S}^2 \setminus C_1$ , digamos  $U_1$ , no contiene puntos antipodales, y lo mismo se cumple para el dominio de Jordan correspondiente  $D = C_1 \cup U_1$ . Todo esto permite escoger un entorno abierto del dominio  $D$  suficientemente pequeño de forma que no contenga puntos antipodales.

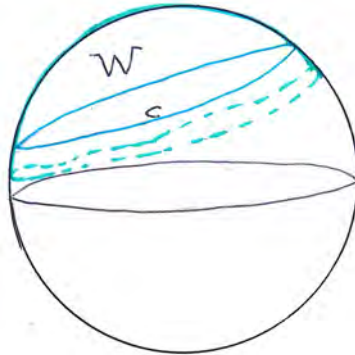


FIGURA 29. Entorno sin puntos antipodales.

Vamos a probar que este dominio  $D$  puede hacerse arbitrariamente pequeño a través de un homeomorfismo que fije  $\mathbb{S}^2 \setminus W$  para un entorno  $W$  de  $D$  sin puntos antipodales.

**Proposición 12.3.** *Sea  $C$  una curva de Jordan en  $\mathbb{S}^2$  que no corta a su imagen antipodal  $-C$ ,  $U$  la componente conexa de  $\mathbb{S}^2 \setminus C$  que no contiene a  $-C$  y  $D = C \cup U$  el dominio de Jordan correspondiente. Consideramos un punto  $a \in U$ , y un entorno suyo  $V \subset U$ . Entonces existe un dominio de Jordan  $W \subset \mathbb{S}^2$ , con  $D \subset W$  que no contenga imágenes antipodales y un homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que fuera de  $W$  es la identidad y  $h(D) \subset V$ .*

*Demostración.* Notamos que el dominio de Jordan  $D$  tiene una base de entornos que son dominios de Jordan: basta quitar un punto en la esfera que no pertenezca al dominio, para trasladar el problema al plano  $\mathbb{R}^2$ , donde se tiene el resultado como consecuencia del teorema de Schoenflies.

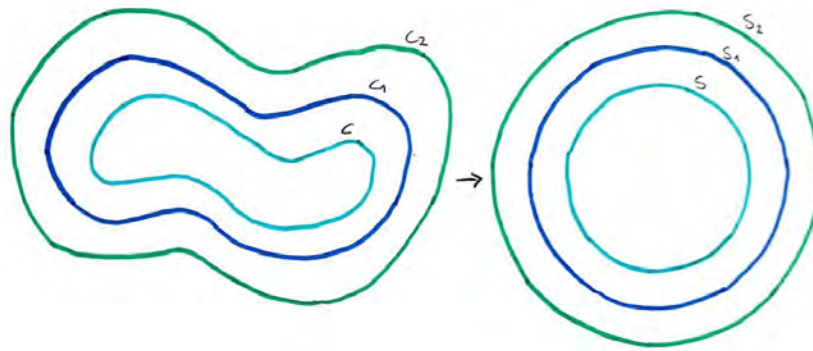


FIGURA 30. Base de entornos de Jordan.

Así, podemos escoger un entorno  $W$  de  $D$  que sea un dominio de Jordan. Buscamos definir un homeomorfismo en  $W$  que transforme  $D$  en un conjunto en el interior de  $V$  y coincida con identidad en el borde  $S$  de  $W$ . De nuevo, quitando un punto en el exterior de  $D$  trasladamos el problema al plano. Mantenemos notaciones de puntos y entornos que en adelante consideramos en  $\mathbb{R}^2$ .

Por Schoenflies podemos suponer que la curva  $C$  es una circunferencia. En esta situación escogemos dos circunferencias concéntricas  $S$  y  $S'$ , la primera contenida en el entorno  $V$  y de forma que  $S \subset \text{Int}(C)$ ,  $C \subset \text{Int}(S')$  y  $S' \subset W$ .

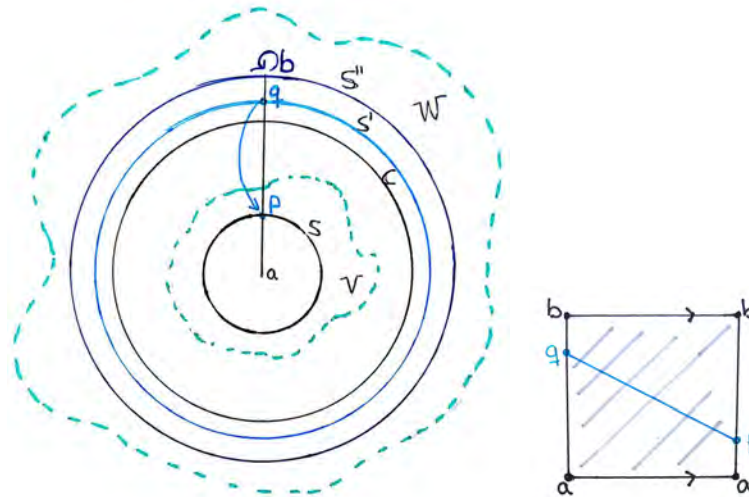


FIGURA 31. Deformación radial en  $W$  para transformar  $S'$  en  $S$ .

Deformando radialmente  $W$  por un homeomorfismo  $h$  para transformar  $S'$  en  $S$ , se tiene que la curva  $C$  se transforma en otra curva en el interior de  $S$ , luego dentro de  $V$ . Esta deformación se puede hacer la identidad en el exterior de una circunferencia adicional  $S'' \subset W$  que contenga  $S'$  en su interior.

Por último, volviendo a la esfera y extendiendo el homeomorfismo por la identidad fuera de  $W$ , se tiene el enunciado. ■

**Proposición 12.4.** *Sea  $C$  una curva de Jordan en el plano  $\mathbb{R}^2$  que contiene al origen en su interior. Sean  $S_0 \subset S_1$  dos circunferencias de centro el origen tales que  $S_0$  está contenida en el interior de  $C$  y  $C$  en el interior de  $S_1$ . Entonces existe un homeomorfismo  $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que transforma  $C$  en  $S_0$  y coincide con la identidad en  $S_1$ .*

La idea de la prueba es utilizar el teorema de Schoenflies para extender un homeomorfismo entre  $C$  y  $S_0$  a todo el disco  $D_1$  cuya frontera es  $S_1$ . Para que la extensión coincida con la identidad en el borde del disco, hemos de tener cuidado con la orientación en las curvas. Denotamos por  $R$  el radio de  $S_1$ .

En primer lugar orientamos  $C$  y  $S_0$  en sentido antihorario y consideramos un homeomorfismo  $f : C \rightarrow S_0$  que respete la orientación. Dividimos  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  en tres regiones: Por el teorema de Jordan  $S_1 \setminus C$  es unión de dos abiertos, uno simplemente conexo  $U$  y otro  $V$  de frontera  $C \cup S_1$ . Escogiendo  $a$  (resp  $b$ ) el punto de  $C$  con mayor (resp. menor) ordenada posible, los segmentos  $I$  que une  $a$  con  $(0, R)$  y  $J$  que une  $b$  con  $(0, -R)$  están totalmente contenidos (salvo los puntos  $a$  y  $b$ ) en  $V$ . Así, denotando por  $V_1$  y  $V_2$  a las dos regiones en las que los segmentos  $I$  y  $J$  dividen  $V$ , tenemos que  $S_1 \setminus C = U \cup V_1 \cup V_2$ .

Ahora hacemos la construcción análoga en  $S_1 \setminus S_0 = U' \cup V'$  para dividirlo en tres regiones  $U', V'_1$  y  $V'_2$ , esta vez escogiendo los puntos  $f(a)$  y  $f(b)$  en  $S_0$  y das poligonales  $P$  y  $Q$  en  $V'$  que los unen a  $(0, R)$  y  $(0, -R)$  como frontera de  $V'_1$  y  $V'_2$ .

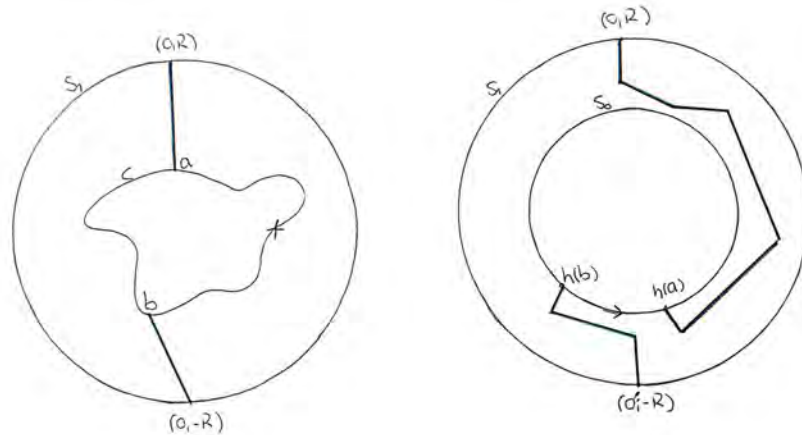


FIGURA 32. Transformación proyectiva de una curva de Jordan en una circunferencia.

Por último, consideramos la identidad  $S_1 \rightarrow S_1$ ,  $f : C \rightarrow S_0$  y dos homeomorfismos  $I \rightarrow P$  y  $J \rightarrow Q$  que respeten las orientaciones. Aplicando Schoenflies en las tres curvas formadas, se tiene el enunciado. Con los resultados anteriores estamos en condiciones de probar el teorema.

*Demostración.* Supongamos primero que la curva no es nulhomótopa. En este caso su preimagen por el recubrimiento antipodal es una curva de Jordan invariante por la aplicación antipodal  $A$ , unión de dos arcos disjuntos imágenes antipodales. Además  $\widehat{C}$  divide a  $\mathbb{S}^2$  en dos componentes conexas  $U_1$  y  $U_2$ , cumpliendo que  $A(U_1) = U_2$  y viceversa. Por 12.2 podemos transformar  $\widehat{C}$  en el ecuador de la esfera por un homeomorfismo  $h$  compatible con  $A$ , y por Schoenflies podemos extenderlo a los dominios correspondientes

$$h : \mathbb{S}^2 \cap \{z \geq 0\} \rightarrow \widehat{C} \cup U_1$$



Como  $h$  respeta la antipodal en los bordes, se extiende por antipodalidad a toda la esfera.

Ahora, el homeomorfismo  $h$  induce, por el recubrimiento antipodal, otro en  $\mathbb{P}^2$  que transforma la recta proyectiva del infinito  $\ell_\infty : z = 0$  en la curva  $C$ . En particular  $\mathbb{P}^2 \setminus C$  es homeomorfo al plano afín  $\mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty$ , es decir, a un disco abierto.

Estudiamos ahora el caso en que la curva  $C$  es nulhomótopa. En este caso  $\widehat{C} = C_1 \cup C_2$  donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos curvas de Jordan disjuntas e imágenes antipodales, que dividen la esfera en tres componentes conexas, dos de ellas simplemente conexas e imágenes antipodales la una de la otra,  $U_1$  y  $U_2$ , y una tercera homeomorfa a un disco abierto e invariante por la aplicación antipodal. Consideramos  $D_1 = U_1 \cup C_1$ , un entorno suyo  $W_1$  también dominio de Jordan sin puntos antipodales y un abierto arbitrariamente pequeño  $V$  contenido en  $U_1$ . Por 12.3 existe un homeomorfismo  $h : W_1 \rightarrow W_1$  que lleva el dominio  $D$  al interior de  $V$  y es la identidad en el borde de  $W_1$ . Para extender esta aplicación a toda esfera de forma que sea compatible con  $A$ , definimos  $h$  en  $W_2 := -W_1$  por antipodalidad y extendemos por la identidad en el resto de la esfera.

De esta forma, tenemos un homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  compatible con la aplicación antipodal que transforma los dominios  $D_1$  y  $D_2 = U_2 \cup C_2$  en dos abiertos arbitrariamente pequeños contenidos en dos hemisferios antipodales. Aplicando el recubridor antipodal, la curva  $C$  se transforma en otra curva de Jordan que no corta la recta proyectiva  $\ell_\infty$  correspondiente al ecuador.

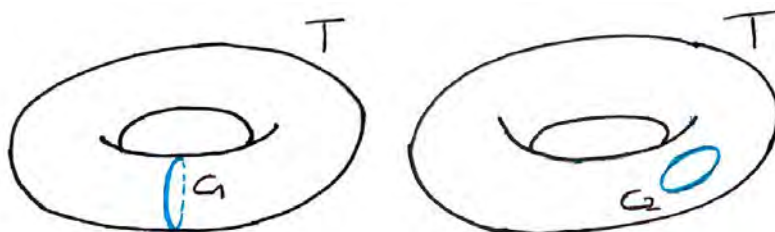
Además por 12.4 esta curva se transforma en una circunferencia  $S$  que no corta a la recta del infinito por un homeomorfismo que coincide con la identidad en  $\ell_\infty$ . Así,  $\mathbb{P}^2 \setminus C$  es homeomorfo a  $\mathbb{P}^2 \setminus S$ . Ahora, como  $S$  está contenida en el plano afín  $\mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty$  se tiene que  $\mathbb{P}^2 \setminus C$  es unión de dos componentes conexas, una de ellas homeomorfa al interior de  $S$ , un disco abierto, y la otra al  $\mathbb{P}^2$  menos ese disco, que es una banda de Moebius. ■

### § 13. ¿EN OTRAS SUPERFICIES?

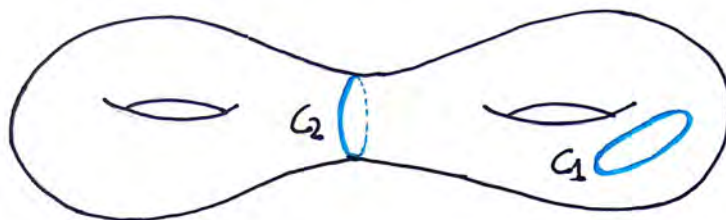
Según las diferencias de comportamiento de las curvas de Jordan en el plano proyectivo y la esfera, se plantea a qué se deberán realmente. Aunque esto requeriría herramientas topológicas más sofisticadas, se pueden hacer algunas observaciones mirando ejemplos interesantes.

**Ejemplos 13.1.** (1) En los dos casos estudiados, la esfera y el plano proyectivo, observamos que una curva de Jordan  $C$  desconecta la superficie si y sólo si su clase de homotopía es nula (como la esfera es simplemente conexa todas la desconectan). Además, una curva que desconecta es nulhomótopa y bordea un disco. Esto expresa de manera común lo que sabemos para las dos superficies.

(2) En el toro se cumple un teorema similar al del proyectivo pero aunque hay cierta similitud de ideas (espacio recubridor y clases de homotopía) su demostración es más difícil ([9, Ch.II]). Como en el plano proyectivo, en el toro hay dos clases de curvas de Jordan por homeomorfismo ambiente según desconecten o no, y las que desconectan son nulhomótopas y bordean un disco. La siguiente figura representa los dos modelos (salvo difeomorfismo ambiente).

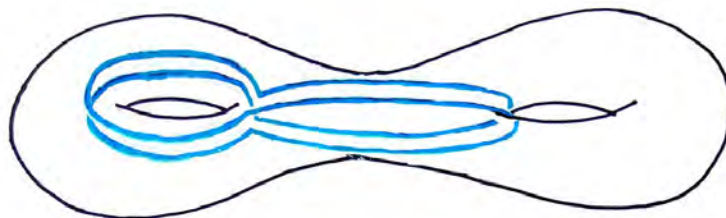


(3) Que el tipo topológico sumergido de una curva de Jordan esté determinado por desconectar o no ya no se cumple en otras superficies. Por ejemplo, consideremos dos curvas en el toro con dos agujeros  $S$ , como en la figura siguiente:



Las dos desconectan, pero no pueden ser homeomorfas ambiente:  $C_1$  es borde de un disco y  $C_2$  no lo es. Pero observamos que  $C_2$  es nulhomótopa.

(4) Una cosa que se cumple en los ejemplos anteriores es que una curva de Jordan que los desconecta es nulhomótopa, pero tampoco esto es cierto en general. Por ejemplo, de nuevo en un toro con dos agujeros:



Esta curva bordea dos cilindros pegados transversalmente, y no es nulhomótopa pues el grupo fundamental no es conmutativo. ■

Estos ejemplos muestran que la variedad de curvas Jordan de una superficie, según la desconecten y de qué manera, depende directamente de la complejidad del grupo fundamental. Un análisis riguroso de esto entra de lleno en cómo se triangulan y clasifican las superficies.

#### REFERENCIAS

- [1] R.H. BING: *The geometric topology of 3-manifolds*. 6, 15, 19  
AMS, Rhode Island 1983.
- [2] S.S. CAIRNS: *An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem*. 6, 7  
Proc. AMS 2:6 (1951) 860–867.
- [3] J.-Y. LE DIMET: *Le plan, la sphère et le théorème de Jordan*. 6  
Ellipses, 2012.

- [4] F. ETAYO: *Elementos de topología algebraica: grupo fundamental y clasificación de superficies*. 4  
Sanz y Torres, Madrid 2016.
- [5] M.H.A. NEWMAN: *Elements of the topology of plane sets of points*. 6  
University Press, Cambridge 1964.
- [6] E. OUTERELO, J.M<sup>A</sup> SÁNCHEZ ABRIL: *Elementos de topología*. 2, 22  
Sanz y Torres, Madrid 2008.
- [7] J.D. PORRAS: *The Jordan curve theorem and planar graphs*. 2  
UCM, doble grado de Ingeniería Informática y Matemáticas, TFG 2016.
- [8] E. OUTERELO, J.A. ROJO, J.M. RUIZ: *Topología Diferencial*. 2, 26  
Sanz y Torres, Madrid 2014.
- [9] D. ROLFSEN: *Knots and links*. 33  
AMS Chelsea, Providence 2003.
- [10] L. SIEBENMANN: *The Osgood-Schoenflies theorem revisited*. 6, 10, 19  
Russian Math. Surveys 60:4 (2005) 645–672.
- [11] C. THOMASSEN: *The Jordan-Schoenflies Theorem and the Classification of surfaces*. 6, 18  
Am. Math. Monthly 99 (2) (1992), 116–131.  
<http://www.maths.ed.ac.uk/aar/jordan/thomass.pdf>