TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2017

EL GRUPO SIMPLÉCTICO REAL

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM
DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

MIGUEL A. BERBEL

RESUMEN. En este trabajo se estudia el *grupo simpléctico* real de los endomorfismos lineales que preservan una forma bilineal antisimétrica no degenerada. Un acercamiento algebraico básico muestra que coincide con su *subgrupo especial* y permite obtener generadores, las *transvecciones simplécticas.* Desde un punto de vista geométrico, se ve que el grupo simpléctico es un *grupo de Lie* y se estudia su *algebra de Lie* asociada. Su *subgrupo ortogonal* es un subgrupo de Lie compacto isomorfo al grupo unitario y, además, es un retracto de deformación del grupo simpléctico. Para concluir todo esto se desarrollan herramientas analíticas como la aplicación exponencial, el logaritmo y las potencias de reales de matrices simétricas definidas positivas.

Palabras clave: Grupo simpléctico, transvección, grupo de Lie, subgrupo ortogonal, aplicación exponencial, potencias reales de matrices.

ABSTRACT. In this work we study the real *symplectic group* consisting of linear endomorphisms that preserve an antisymmetric bilinear form. A basic algebraic approach shows that its *special group* is the whole group and provides generators known as *symplectic transvections.* From the geometric viewpoint we see that the symplectic group is a *Lie group* to which a *Lie algebra* can be associated. Its *orthogonal subgroup* is a compact Lie subgroup isomorphic to the unitary group and, furthermore, it is a *deformation retract* of the symplectic group. Analytical tools such as the exponential mapping, the logarithm and real powers of definite positive symmetric matrices are developed in the process.

Keywords: Symplectic group, transvection, Lie group, orthogonal subgroup, exponential mapping, real powers of matrices.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A16, 15A60, 22E15, 22E60, 51A50.

Índice

Introducción

Este trabajo estudia el *grupo simpléctico* real Sp_{2n} formado por los llamados *simplectomorfismos,* aquellos endomorfismos lineales de un espacio vectorial que conservan una forma bilineal antisimétrica no degenerada. El texto se estructura en doce secciones en las que se pueden distinguir a grandes rasgos cuatro bloques fundamentales.

Las tres primeras secciones corresponden a una introducción del grupo simpléctico $Sp_{2n}(K)$ sobre un cuerpo arbitrario K de característica 0. En la sección 1 se repasan los conceptos básicos de formas bilineales antisimétricas. Ahí el resultado principal es su clasificación: están determinadas por su rango, que siempre es par. Además se determinan *bases simplécticas* respecto de las cuales sus ecuaciones son sencillas. Una vez visto esto, en la sección 2 se define el grupo simpléctico y se demuestra que coincide con su *subgrupo especial* mediante el desarrollo de una herramienta para calcular determinantes, el *Pfaffiano.* Finalmente, en la sección 3 se presentan unos simplectomorfismos sencillos denominados *transvecciones* que generan todo el grupo simpléctico y permiten calcular fácilmente su centro.

Las tres secciones siguientes se dedican a comprender la estructura de *grupo de Lie* del grupo simpléctico real: esto quiere decir que $Sp_{2n} = Sp_{2n}(\mathbb{R})$ es simultáneamente una variedad diferenciable y un grupo cuyas operaciones son diferenciables. La sección 4 está dedicada a demostrar que Sp_{2n} es, en efecto, un grupo de Lie conexo. También se proporcionan ecuaciones para los espacios tangentes. El espacio tangente a la identidad, que denotamos $\mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$, se conoce como el *álgebra de Lie simpléctica* y es el objeto central de estudio de la sección 6. Este espacio, junto a la aplicación *exponencial* que se presenta previamente en la sección 5, nos permite obtener parametrizaciones locales de Sp_{2n} y todos sus *subgrupos uniparamétricos*. Las demostraciones presentes en estas secciones ilustran la teoría general de Grupos de Lie que solamente comentaremos por considerar que se encuentra fuera del alcance de este trabajo.

Posteriormente nos centramos en un subgrupo distinguido de Sp_{2n}: el *grupo ortogonal simpléctico* $R_{2n} = R_{2n}(\mathbb{R})$ formado por los simplectomorfismos que son a su vez rotaciones. En la sección 7 se determina que R_{2n} es un subgrupo de Lie compacto de Sp_{2n} y en la sección 8 se estudia su álgebra de Lie correspondiente. Por su parte, la sección 9 recoje un hecho en primera apariencia llamativo como es que R_{2n} es isomorfo al grupo unitario complejo $U_n = U_n(\mathbb{C})$.

Por último, se finaliza el trabajo con un resultado topológico: El subgrupo ortogonal R_{2n} es un *retracto de deformación diferenciable de* Sp_{2n}. Las secciones 10 y 11 introducen respectivamente el *logaritmo* y las potencias *reales* de matrices que necesitamos para definir tal retracto, mientras que la sección 12 desvela el motivo topológico para la existencia de esta retracción.

1. Formas bilineales antisimétricas

En esta sección se revisan concisamente los conceptos y resultados básicos sobre formas bilineales que necesitaremos más adelante, en particular, su expresión en modo matricial, que en la sección 2 permitirá entender el grupo simpléctico como grupo de matrices. Al ser materia tratada en el Grado de Matemáticas, sólo detallamos el caso especial de las formas antisimétricas, que son las que nos interesan aquí. Así establecemos la existencia de bases simplécticas y las formas canónicas asociadas. La referencia seguida es [4].

En todo lo que sigue, hasta que se advierta otra cosa, consideramos un cuerpo K de característica 0. Los conceptos básicos son:

Definiciones 1.1. Una *forma bilineal* de un espacio vectorial de dimensión finita E sobre K es un aplicación $\omega : E \times E \to K$ que es lineal separadamente en cada variable. Se le asocian dos *polaridades:* $\omega_1 : E \to \mathcal{L}(E, K) : u \mapsto \omega(u, \cdot)$ y $\omega_2 : E \to \mathcal{L}(E, K) : v \mapsto \omega(\cdot, v)$. La forma ω se llama *regular* o *no degenerada* si estas polaridades son isomorfismos.

Definiciones 1.2. Una forma bilineal ω se denomina *simétrica* cuando $\omega(u, v) = \omega(v, u)$ para cualesquiera $u, v \in E$, o equivalentemente, si sus polaridades son iguales. Análogamente, una forma bilineal ω se denomina *antisimétrica* cuando $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ para cualesquiera $u, v \in E$, o equivalentemente, si sus polaridades son opuestas.

Definiciones 1.3. Dada una forma bilineal simétrica o antisimétrica los vectores $u, v \in E$ se dicen *conjugados* cuando $\omega(u, v) = 0$. Un vector no nulo $u \in E$ cumpliendo $\omega(u, u) = 0$ se dice *isótropo*. El *conjugado* de un subespacio vectorial $V \subset E$, es el conjunto $V^\perp \subset E$ formado por los vectores de E conjugados de todos los vectores de V. Se obtiene que $V^\perp$ es un subespacio vectorial de E de codimensión menor o igual que la de V, cumpliéndose la igualdad si la forma es no degenerada.

(1.4) Matriz de una forma bilineal. De manera habitual una forma bilineal es manipulada empleando su expresión matricial. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ una base de E, las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de dos vectores $u, v \in E$ se denotan $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Existe una única matriz $M_\omega(\mathcal{B}) = (\omega(u_i, u_j))_{ij}$ tal que para cualesquiera $u, v \in E$ se tiene que $\omega(u, v) = xMy^t$. Tal matriz se conoce como *matriz de ω respecto de la base* $\mathcal{B}$ y la igualdad anterior se llama *ecuación de ω*. Además, si $\mathcal{B}^*$ es una base de $\mathcal{L}(E, K)$ dual de $\mathcal{B}$, las matrices de las polaridades son $M_{\omega_1}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*) = M^t$ y $M_{\omega_2}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*) = M$.

Sea $\mathcal{B}'$ otra base de E y $C = C(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, el cambio de coordenadas proporciona

$$\omega(u, v) = xMy^t = (x'C^t)M(Cy'^t) = x'(C^tMC)y'^t,$$

y de la unicidad de la matriz de una forma se concluye que $M_\omega(\mathcal{B}') = C^tMC$. Es decir, las matrices de la forma en ambas bases son *congruentes:* existe una matriz *regular* C cumpliendo que $M' = C^tMC$. □

Un concepto razonable de equivalencia de formas bilineales es considerar que dos formas son equivalentes cuando respecto de bases adecuadas poseen las mismas ecuaciones. A la vista de este resultado, la clasificación de formas bilineales se reduce a la clasificación de matrices por congruencia. En los cursos de álgebra lineal impartidos en el grado de matemáticas se suele abordar la clasificación de las formas bilineales simétricas. Sin embargo, la clasificación de formas bilineales antisimétricas en un cuerpo arbitrario K, caso de interés en este trabajo, suele quedar relegada por falta de tiempo. Por ello, se procederá a detallar dicha clasificación.

(1.5) Clasificación de formas bilineales antisimétricas. Se considera $\omega : E \times E \to K$ una forma bilineal antisimétrica de rango r=rg(ω), $r \leq n$=dim(E). Para iniciar la clasificación observamos que cualquier vector no nulo $u \in E$ será isótropo pues al ser la forma antisimétrica: $\omega(u, u) = -\omega(u, u)$. En consecuencia, si $n = 1$ la única forma bilineal antisimétrica es nula.

Para $n \geq 2$ y ω no nula se pueden escoger dos vectores u, v tales que $\omega(u, v) \neq 0$ fijándonos en cualquier elemento no nulo $\omega(u_i, u_j) \neq 0$ de su matriz en una base arbitraria. Una vez obtenidos estos vectores vemos que $V = L[u, v]$ es un plano, en efecto, si $v = \lambda u$, $\omega(u, v) = \omega(u, \lambda u) = \lambda\omega(u, u) = 0$ lo que contradice la elección de u y v. A continuación, probamos que el espacio conjugado $V^\perp$ tiene codimensión 2. Para ello vamos a comprobar que las ecuaciones de $V^\perp$ son $\omega(u, \cdot) = \omega(v, \cdot) = 0$ y que son independientes. Cualquier vector $w \in V^\perp$ cumple las ecuaciones por ser conjugado de u y v, recíprocamente, si w cumple las ecuaciones será conjugado de $\lambda u + \mu v \in V$ arbitrario

$$\omega(\lambda u + \mu v, w) = \lambda\omega(u, w) + \mu\omega(v, w) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

Las ecuaciones dadas son independientes ya que definen hiperplanos diferentes: Como $\omega(v, u) \neq 0$, v no cumple la primera ecuación ni u cumple la segunda ecuación de modo que no son triviales. Por otra parte, $\omega(u, u) = 0$ y $\omega(v, v) = 0$, de modo que u pertenece al primer hiperplano pero no al segundo, v pertenece al segundo hiperplano pero no al primero y necesariamente los hiperplanos han de ser diferentes. Finalmente, se cumple que $E = V \textcircled{\perp} V^\perp$, es decir, el espacio total es suma *ortogonal* de V y su conjugado $V^\perp$.

Como las dimensiones de V y $V^{\perp}$ son 2 y $n-2$ respetivamente, basta comprobar que $V \cap V^{\perp} = \{0\}$. Si $\lambda u + \mu v \in V^{\perp}$

$$\begin{cases} 0 = \omega(u, \lambda u + \mu v) = \lambda\omega(u,u) + \mu\omega(u,v) = \mu\omega(u,v), \\ 0 = \omega(v, \lambda u + \mu v) = \lambda\omega(v,u) + \mu\omega(v,v) = \lambda\omega(v,u), \end{cases}$$

y, al ser $\omega(v,u) \neq 0$, la primera ecuación implica que $\lambda = 0$ y la segunda que $\mu = 0$. □

Tras las observaciones de 1.5, nos encontramos en situación de ver que existen determinadas bases en las que la matriz de la forma antisimétrica es especialmente sencilla lo que permitirá obtener una clasificación de forma casi inmediata.

Proposición 1.6. *Existe una base $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_s, w_1, ..., w_t\}$ de V tal que $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$, $\omega(u_i, u_j) = 0$, $\omega(v_i, v_j) = 0$ para $i, j = 1, ..., s$ y $\omega(\cdot, w_k) = 0$ para $k = 1, ..., t$. Así, como ω es antisimétrica, $\omega(v_i, u_j) = -\delta_{ij}$ y su matriz en dicha base es*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & I_s & 0 \\ \hline -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

donde I_s es la matriz identidad de dimensión s y los ceros denotan matrices de ceros de la dimensión correspondiente.

Demostración. La prueba es constructiva. Se considera $V = L[u,v]$ como en las observaciones anteriores de tal manera que se puede definir $u_1 = \frac{1}{\omega(u,v)}u$ y $v_1 = v$. Así $V_1 := L[u_1, v_1] = V$ y se cumple que:

$$\omega(u_1, v_1) = \omega(\tfrac{1}{\omega(u,v)}u, v) = \tfrac{1}{\omega(u,v)}\omega(u,v) = 1.$$

Además, como $E = V \bigoplus V^{\perp}$, para cualquier vector $v' \in V^{\perp}$ con el que ampliemos la base $\{u_1, v_1\}$ de V a una base de E se tendrá que $\omega(u_1, v') = \omega(v_1, v') = 0$. Se repite pues el proceso anterior para la restricción de ω a $V^{\perp}$ terminando el proceso cuando se obtenga una base de E o la restricción de ω sea nula.

En el primer caso, $E = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_s$ y los vectores $\{u_1, \cdots, u_s, v_1, \cdots, v_s\}$ obtenidos forman una base tal que $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$, $\omega(u_i, u_j) = 0$, $\omega(v_i, v_j) = 0$.

En el segundo caso, $E = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_s \bigoplus W$ y cualquier base $\{w_1, \cdots, w_t\}$ del subespacio W completa la base $\{u_1, \cdots, u_s, v_1, \cdots, v_s\}$ de $V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_s$ a una base de E tal que $\omega(\cdot, w_k) = 0$. En efecto, cualquier vector de $a \in E$ puede descomponerse como $a = a_1 + a_2$ con $a_1 \in V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_s$ y $a_2 \in W$ pero $\omega(a_1, w) = 0$ por ser E suma directa de conjugados y $\omega(a_2, w) = 0$ ya que ω restringida a W es nula. □

Corolario 1.7.
a) El rango de una forma bilineal antisimétrica siempre es par. En particular, una forma bilineal antisimétrica en un espacio de dimensión impar siempre es degenerada.
b) El rango clasifica las formas bilineales antisimétricas.

Demostración.

a) El rango de una forma bilineal coincide con el rango de su matriz en una base cualquiera. Escogiendo la base de la proposición anterior, su rango será $r = 2s$ que es par.
b) La proposición anterior indica que dos formas bilineales antisimétricas del mismo rango tienen la misma expresión en distintas bases y, por tanto, son equivalentes.

□

El corolario permite finalizar rápidamente la clasificación de las formas bilineales antisimétricas: se clasifican por su rango y este es par. Si ahora nos restringimos a formas no degeneradas definimos como *base simpléctica* aquella que cumple las condiciones de la proposición 1.6.

Definición 1.8. Sea E un espacio vectorial de dimensión par $2n$ y ω una forma bilineal antisimétrica no degenerada se dice que $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n\}$ es una *base simpléctica* de E si $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$, $\omega(u_i, u_j) = 0$, $\omega(v_i, v_j) = 0$ para $i, j = 1, ..., n$.

En la bibliografía hay textos que se refieren a $\{u_1, v_1, ..., u_n, v_n\}$ como base simpléctica, aunque en este trabajo solamente se empleará dicha ordenación en el lema 3.7 y la proposición 3.8. En cualquier caso, es conveniente introducir el concepto de *plano hiperbólico.*

Definición 1.9. Sean $u, v \in E$ tales que $\omega(u, v) = 1$ se dice que el plano $H = L[u, v]$ generado por ambos es un *plano hiperbólico.*

Así, en una base simpléctica cada par u_i, v_i genera un plano hiperbólico y el espacio vectorial total es la suma ortogonal de planos hiperbólicos.

Para acabar esta sección se incluyen dos propiedades de las matrices antisimétricas regulares que se utilizarán en la sección 2 para demostrar que las transformaciones del grupo simpléctico preservan la orientación.

Proposición 1.10. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz antisimétrica regular sobre K de orden $2n$.*

1. *A es congruente con la matriz*
$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right).$$
2. $\det(A)$ *es un cuadrado en K.*

Demostración.

1. Se considera la forma cuya matriz es A. Por la proposición 1.6, existe una base simpléctica en la que la matriz de dicha forma es J. En consecuencia, A y J son congruentes, es decir, existe una matriz regular C tal que $J = C^tAC$.
2. De la igualdad anterior, $\det(J) = \det(C^t)\det(A)\det(C) = \det(A)\det(C)^2$. Como C es regular, $\det(C) \neq 0$. Además $\det(J) = 1$, de modo que
$$\det(A) = \left(\frac{1}{\det(C)}\right)^2,$$
que es un cuadrado en K.

□

2. El grupo simpléctico

En esta sección se define el objeto central de nuestro estudio: el grupo simpléctico $Sp_{2n}(K)$ consistente en los isomorfismos simplécticos de una forma bilineal antisimétrica regular ω en un espacio vectorial E de dimensión $2n$ sobre K. Posteriormente, se estudiará cuál es su representación como un *grupo de matrices*. Por último, se construye el *Pfaffiano* y se utiliza para demostrar que un isomorfismo simpléctico conserva la orientación. La referencia utilizada es el libro clásico [1].

Comenzamos definiendo el concepto de simplectomorfismo que es análogo al de isometría cambiando el rol del producto escalar por la forma antisimétrica no degenerada.

Definición 2.1. Sea E un espacio vectorial de dimensión $2n$ y ω una forma bilineal antisimétrica no degenerada, un isomorfismo lineal $h : E \to E$ se dice que es un *simplectomorfismo* o *isomorfismo simpléctico* si para cualesquiera $u, v \in E$

$$\omega(h(u), h(v)) = \omega(u, v).$$

(2.2) Grupo simpléctico. Se constata fácilmente que el conjunto de todos los simplectomorfismos forma un grupo con la composición. Efectivamente, la identidad es trivialmente un isomorfismo simpléctico. Por otra parte, dado un simplectomorfismo h, su inverso h^{-1} también lo es, pues para $u, v \in E$ existen $u', v' \in E$ tales que $u = h(u')$, $v = h(v')$ y, en consecuencia,

$$\omega(h^{-1}(u), h^{-1}(v)) = \omega(h^{-1}(h(u')), h^{-1}(h(v'))) = \omega(u', v') = \omega(h(u'), h(v')) = \omega(u, v).$$

Además, la composición $h = g \circ f$ de dos simplectomorfismos también es un simplectomorfismo:

$$\omega(h(u), h(v)) = \omega(g(f(u)), g(f(v))) = \omega(f(u), f(v)) = \omega(u, v).$$

Este grupo se denomina *grupo simpléctico* de dimensión $2n$ sobre K y se denota $Sp_{2n}(K)$. Veremos a continuación que $Sp_{2n}(K)$ admite una representación como grupo de matrices asociando a cada simplectomorfismo su matriz en una base simpléctica $\mathcal{B}$ de ω, representación que denotamos así:

$$\rho : Sp_{2n}(K) \to GL_{2n}(K) : h \mapsto M_h(\mathcal{B}).$$

Claramente ρ es un homomorfismo de grupos pues la matriz de la composición de dos isomorfismos es el producto de sus matrices. Además, como en una misma base dos isomorfismos distintos tienen distinta matriz, ρ es inyectivo y por tanto es un isomorfismo sobre su imagen.

Veamos ahora qué condiciones determinan cuales son las matrices pertenecientes a la imagen de ρ. Si M es la matriz de un simplectomorfismo h en la base simpléctica $\mathcal{B}$ y u, v son dos vectores en E con coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, puesto que la matriz de ω en $\mathcal{B}$ es J (notación de 1.10), la condición $\omega(h(u), h(v)) = \omega(u, v)$ se reescribe como

$$(xM^t)J(My^t) = xJy^t,$$

para cualesquiera $x, y \in K^{2n}$. Esto es equivalente a la igualdad matricial $M^tJM = J$. Así, una forma alternativa de definir el grupo $Sp_{2n}(K)$ es mediante las matrices $M \in K^{2n\times 2n}$

que cumplen dicha igualdad:

$$Sp_{2n}(K) \equiv \operatorname{im}(\rho) = \{M \in K^{2n\times 2n} : M^t J M = J\}.$$

□

Una propiedad que satisface el grupo simpléctico es que coincide con su *subgrupo especial,* es decir, todas las matrices de $Sp_{2n}(K)$ tienen determinante $+1$, o lo que es lo mismo, los isomorfismos simplécticos conservan la orientación. Tomando determinantes en la igualdad $M^tJM = J$ se comprueba que $\det(M) = \pm 1$. Sin embargo, que el determinante sea $+1$ no es tan inmediato y admite una gran variedad de demostraciones (véase [8]). En nuestro caso se ha optado por utilizar el *Pfaffiano* de una matriz. Posteriormente, en la sección 3, se hará uso de las transvecciones simplécticas para proporcionar una demostración alternativa.

En primer lugar, se prueba una proposición que nos permitirá verificar que la definición que se va a dar del Pfaffiano es buena. Denotaremos $K[x] = K[x_{ij} : 1 \leq i < j \leq 2n]$ al anillo de polinomios en las variables x_{ij}, y por $K(x)$ a su cuerpo de fracciones.

Proposición 2.3. *Sea $A(x)$ la matriz antisimétrica genérica, con coeficientes las variables x_{ij}*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & & x_{ij} \\ & \ddots & \\ -x_{ij} & & 0 \end{pmatrix}.$$

Existen exactamente dos polinomios $P_+(x), P_-(x) \in K[x]$ tales que $\det A(x) = P_\pm(x)^2$. Además, si se evalúan las variables x_{ij} en los coeficientes J_{ij} de la matriz J de la proposición 1.10, $P_+(J) = 1$ y $P_-(J) = -1$

Demostración. Puesto que el determinante de una matriz se desarrolla como sumas y productos de sus entradas, $\det(A(x)) \in K[x]$. Por otra parte, ya que $A(x)$ es antisimétrica y tiene entradas en $K(x)$ se sigue de la proposición 1.10 que existe $P(x) \in K(x)$ función racional tal que $\det(A(x)) = P(x)^2$. Veamos que $P(x) \in K[x]$. Debido a que $K[x]$ es un dominio de factorización única existen $Q(x), R(x) \in K[x]$ tales que $P(x) = Q(x)/R(x)$ y cuyas descomposiciones en factores irreducibles $Q(x) = q_1 \cdots q_s$, $R(x) = r_1 \cdots r_t$ no tienen factores comunes. Puesto que $\frac{q_1^2\cdots q_s^2}{r_1^2\cdots r_t^2} = P^2(x) \in K[x]$, cada r_i divide a algún q_j lo que quiere decir que cada r_i es una unidad por la elección de las factorizaciones de $Q(x)$ y $R(x)$. Así, los r_i son ± 1, y $P(x)$ está en $K[x]$. Como en un cuerpo de característica cero sólo hay dos raíces cuadradas, los únicos polinomios que cumplen que su cuadrado es $\det A(x)$ son $P(x)$ y $-P(x)$.

Para demostrar la segunda parte, como $\det A(J) = \det J = 1$, se tiene que $(\pm P(J))^2 = 1$ y basta definir $P_+(x)$ como aquel de los dos que evaluado en J vale $+1$ y $P_-(x)$ como el que vale -1. □

Observación 2.4. $P_+(x)$ y $P_-(x)$ son polinomios homogéneos de grado n por ser $\det(A(x))$ polinomio homogéneo de grado $2n$.

Definición 2.5. Se llama *Pfaffiano* al polinomio homogéneo de grado n, $\mathrm{Pf}(x_{ij})$, tal que $\mathrm{Pf}(J) = 1$ y para toda matriz antisimétrica regular $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ se tiene

$$\det(A) = \mathrm{Pf}(a_{ij})^2.$$

Es necesario comprobar que en la definición anterior existe tal polinomio y es único. Puesto que $\det(A(x))$ evaluado en $x_{ij} = a_{ij}$ es $\det(A)$, el polinomio $P_+(x)$ de la proposición anterior cumple todas las condiciones de la definición. Para ver que es el único que las cumple basta recordar que dos polinomios sobre K que coinciden como funciones son iguales.

A continuación, se utilizará esta nueva herramienta para calcular determinantes y demostrar que el subgrupo especial del grupo simpléctico es todo el grupo.

Proposición 2.6. *Sea A una matriz antisimétrica regular y C una matriz regular. Entonces:* $\mathrm{Pf}(C^tAC) = \det(C)\,\mathrm{Pf}(A)$.

Demostración. La matriz A es antisimétrica y también lo es C^tAC de modo que sus determinantes se pueden escribir en términos de sus pffafianos como $\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2$ y $\det(C^tAC) = \mathrm{Pf}(C^tAC)^2$. Ahora bien, ya que $\det(C^tAC) = \det(C)^2\det(A)$ se tiene que

$$\mathrm{Pf}(C^tAC)^2 = \det(C)^2\det(A) = (\det(C)\,\mathrm{Pf}(A))^2.$$

Consideramos ahora los polinomios $\mathrm{Pf}(C(y)^tA(x)C(y))$ y $\det(C(y))\,\mathrm{Pf}(A(x))$ de $K[x_{ij}, y_{k\ell}]$ donde las variables x_{ij} son las entradas superiores de $A(x)$ y las $y_{k\ell}$ son las entradas de $C(y)$. Por lo anterior, el cuadrado de estos polinomios coincide como función polinomial de tal manera que:

$$\mathrm{Pf}(C(y)^tA(x)C(y)) = \pm\det(C(y))\,\mathrm{Pf}(A(x)).$$

Para finalizar la prueba hace falta determinar el signo para lo cual se realiza la evaluación $C = A = J$.

$$\begin{cases} \mathrm{Pf}(C^tAC) = \mathrm{Pf}(J^tJJ) = \mathrm{Pf}(J), \\ \det(C)\,\mathrm{Pf}(A) = \det(J)\,\mathrm{Pf}(J) = \mathrm{Pf}(J), \end{cases}$$

Se concluye así que el signo correcto es el positivo y que $\mathrm{Pf}(C^tAC) = \det(C)\,\mathrm{Pf}(A)$. □

Corolario 2.7. *Dada M una matriz simpléctica. Entonces,* $\det(M) = 1$.

Demostración. Como M es simpléctica, $M^tJM = J$. Aplicando la proposición anterior a J, que es antisimétrica, y M, que es regular; se obtiene que

$$\det(M)\,\mathrm{Pf}(J) = \mathrm{Pf}(M^tJM) = \mathrm{Pf}(J)$$

y como $\mathrm{Pf}(J) = 1 \neq 0$, $\det(M) = 1$. □

3. Transvecciones simplécticas

En esta sección se describe una clase especial de isomorfismos lineales: las *transvecciones simplécticas*. Estas generan todo el grupo $Sp_{2n}(K)$ lo que permite proporcionar otra demostración de que todos los isomorfismos simplécticos conservan la orientación y probar que el centro de $Sp_{2n}(K)$ se reduce a $\{\pm\mathrm{Id}\}$.

Como hasta ahora, E es un espacio vectorial y ω es una forma bilineal antisimétrica. Para simplificar la escritura se introduce la notación $x \cdot y = \omega(x, y)$ a semejanza del producto escalar habitual.

Definición 3.1. Una *transvección simpléctica* es un isomorfismo simpléctico de la forma:

$$\sigma_c(x) = x + c(u \cdot x)u.$$

Donde $c \in K$ y u es un vector fijo de E que determina la *dirección* de σ_c.

Para garantizar que esta definición es correcta es necesario comprobar que una aplicación así definida es un isomorfismo simpléctico.

- La aplicación σ_c es lineal.
$$\begin{cases} \sigma_c(x+y) = x + y + c(u \cdot (x+y))u \\ \qquad\qquad\quad = x + y + c(u \cdot x)u + c(u \cdot y)u = \sigma_c(x) + \sigma_c(y), \\ \sigma_c(\lambda x) = \lambda x + c(u \cdot \lambda x)u = \lambda x + \lambda c(u \cdot x)u = \lambda \sigma_c(x). \end{cases}$$
- La aplicación σ_c es un isomorfismo.
En efecto, como σ_c es un endomorfismo de un espacio vectorial finito es suficiente ver que es inyectiva. Si $\sigma_c(x) = 0$, necesariamente $x = \lambda u$ de modo que $u \cdot x = \lambda u \cdot u = 0$ y, en consecuencia, $0 = \sigma_c(x) = x$.
- La aplicación σ_c es simpléctica:

$$\begin{aligned} \sigma_c(x) \cdot \sigma_c(y) &= (x + c(u \cdot x)u) \cdot (y + c(u \cdot y)u) \\ &= x \cdot y + c(u \cdot x)(u \cdot y) + c(u \cdot y)(x \cdot u) + c(u \cdot x)c(u \cdot y)(u \cdot u) \\ &= x \cdot y + c(u \cdot x)(u \cdot y) - c(u \cdot y)(u \cdot x) = x \cdot y. \end{aligned}$$

$\square$

(3.2) Expresión matricial. Para su uso posterior, se explicita la matriz M de una transvección simpléctica σ. Nos interesa usar coordenadas respecto de una base simpléctica, respecto de la cual la forma antisimétrica ω tiene la matriz J de 1.10. En esta situación, la transvección $\sigma(x) = x + c(u \cdot x)u$ tiene por matriz $M = I + cu^t uJ$.

En efecto, tenemos $u \cdot x = uJx^t$ y para multiplicar *matricialmente* este número por la matriz columna u^t el orden correcto es $u^t(uJx^t)$, con lo que

$$\sigma(x) = x^t + cu^t(uJx^t) = x^t + c(u^t uJ)x^t = (I + cu^t uJ)x^t,$$

como interesaba. $\square$

Las transvecciones simplécticas son un tipo especial de simplectomorfismos por lo que cabe preguntarse que condiciones ha de cumplir un simplectomorfismo para asegurar que es una transvección. La siguiente caracterización resuelve ese interrogante.

Proposición 3.3. *Sea σ un simplectomorfismo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) *σ es una transvección simpléctica.*
(ii) *σ deja fijos todos los puntos de un hiperplano.*
(iii) *σ es de la forma $\sigma(x) = x + \phi(x)u$ con $\phi(x) \in K$, es decir, existe algún $u \in E$ tal que para cualquier $x \in E$ se satisface $\sigma(x) - x \in L[u]$.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii): Un vector x de E es fijo de σ si y solo si $c(u \cdot x) = 0$. Si $c = 0$, la aplicación σ es la identidad y todo el espacio queda fijo, en particular cualquier hiperplano. En caso contrario, $c \neq 0$ y $u \cdot x = 0$, es decir, $\mathrm{Fix}(\sigma)$ es el hiperplano conjugado de u.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea H hiperplano de puntos fijos por σ, $x \in E$ e $y \in H$. Entonces:

$$\begin{aligned}(\sigma(x) - x) \cdot y &= \sigma(x) \cdot y - x \cdot y = \sigma(x) \cdot y - \sigma(x) \cdot \sigma(y) \\ &= \sigma(x) \cdot (y - \sigma(y)) = \sigma(x) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Esto significa que $\sigma(x) - x \in H^{\perp}$, la recta conjugada del hiperplano H. Lo que demuestra (iii) con u cualquier vector tal que $L[u] = H^{\perp}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Si la aplicación es de la forma dada:

$$\begin{aligned}\sigma_c(x) \cdot \sigma_c(y) &= (x + \phi(x)u) \cdot (y + \phi(y)u) \\ &= x \cdot y + \phi(x)(u \cdot y) + \phi(y)(x \cdot u) + \phi(x)\phi(y)(u \cdot u) \\ &= x \cdot y + \phi(x)(u \cdot y) - \phi(y)(u \cdot x).\end{aligned}$$

Al ser σ un simplectomorfismo $\sigma_c(x) \cdot \sigma_c(y) = x \cdot y$ y se concluye que $\phi(x)(u \cdot y) = \phi(y)(u \cdot x)$. Si ahora se elige y tal que $u \cdot y \neq 0$, lo cual es posible ya que ω es regular, se obtiene que

$$\phi(x) = \frac{\phi(y)}{u \cdot y}(u \cdot x) = c(u \cdot x)$$

y, en consecuencia, σ es una transvección. □

A continuación se demuestra una propiedad sencilla de las transvecciones que posteriormente será muy útil para determinar el centro de $Sp_{2n}(K)$.

Proposición 3.4. *Sea σ una transvección simpléctica distinta de la identidad cuya dirección es u y sea τ un simplectomorfismo, entonces $\tau\sigma\tau^{-1}$ es una transvección distinta de la identidad cuya dirección es $\tau(u)$.*

Demostración. Para cualquier simplectomorfismo τ se tiene que

$$\tau\sigma\tau^{-1}(x) - x = \tau(\sigma\tau^{-1}(x) - \tau^{-1}(x)).$$

Ahora bien, como σ es una transvección de dirección u, $\sigma\tau^{-1}(x) - \tau^{-1}(x) = \lambda u$ y por lo anterior $\tau\sigma\tau^{-1}(x) - x \in L[\tau(u)]$. Finalmente, al ser τ un isomorfismo, $\tau(u)$ es no nulo y $\tau\sigma\tau^{-1}$ es, por 3.3, una transvección distinta de la identidad con dirección $\tau(u)$. □

Los resultados recogidos en los lemas siguientes son pasos previos a la demostración de que las transvecciones generan el grupo $Sp_{2n}(K)$. En ellos se procede a estudiar como, dados dos vectores o dos planos hiperbólicos, se puede transformar uno en el otro mediante aplicaciones sucesivas de transvecciones.

Lema 3.5. *Sean $v, w \in E$ distintos, existe una transvección simpléctica σ tal que $\sigma(v) = w$ si y solo si $v \cdot w \neq 0$.*

Demostración. Si existe una transvección tal que $\sigma(v) = w$, entonces $w - v = \sigma(v) - v \in L[u]$ por lo que podemos suponer que $w - v$ es su dirección. Así, la transvección es de la forma $\sigma(x) = x + c((w - v) \cdot x)(w - v)$ y al imponer $\sigma(v) = w$ se tiene

$$w = v + c((w - v) \cdot v)(w - v) = v + c(w \cdot v)(w - v).$$

En consecuencia $c(w \cdot v) = 1$ y $w \cdot v \neq 0$.

Para ver el recíproco basta comprobar que la transvección con dirección $w - v$ y $c = 1/(w \cdot v)$ satisface $\sigma(v) = w$. □

Lema 3.6. *Sean $v, w \in E$ distintos tales que $v \cdot w = 0$, existen dos transvecciones simplécticas cuya composición transforma v en w.*

Demostración. Los subespacios $L[v]^{\perp}$ y $L[w]^{\perp}$ son dos hiperplanos de un espacio vectorial E de dimensión finita, por tanto, la unión de ambos no es todo el espacio, es decir, existe $z \in E$ tal que $v \cdot z \neq 0$ y $z \cdot w \neq 0$. Por el lema anterior, existen transvecciones σ_1 y σ_2 con $\sigma_1(v) = z$ y $\sigma_2(z) = w$. Entonces, $\sigma_2\sigma_1(v) = w$. □

Lema 3.7. *Sean $H = L[v_1, w_1]$ y $H' = L[v_2, w_2]$ dos planos hiperbólicos. Existe una composición σ de a lo sumo cuatro transvecciones que cumple: $\sigma(v_1) = v_2$ y $\sigma(w_1) = w_2$.*

Demostración. Por el lema anterior existe una composición σ' de a lo sumo dos transvecciones tal que $\sigma'(v_1) = v_2$ y $\sigma'(w_1) = w_2'$. Es suficiente ver que existe un simplectomorfismo σ'' composición de como mucho dos transvecciones que satisface $\sigma''(v_2) = v_2$ y $\sigma''(w_2') = w_2$. Se distinguen dos casos:

Si $w_2' \cdot w_2 \neq 0$, por el lema 3.5 existe una transvección σ'' tal que $\sigma''(w_2') = w_2$. Además, σ'' deja fijos los puntos del hiperplano $L[w_2' - w_2]^{\perp}$. Veamos que v_2 está en dicho hiperplano. En efecto, como σ'' es un simplectomorfismo, $L[v_2, w_2']$ es un plano hiperbólico. Entonces, $v_2 \cdot (w_2' - w_2) = v_2 \cdot w_2' - v_2 \cdot w_2 = 1 - 1 = 0$ como queríamos ver.

Si $w_2' \cdot w_2 = 0$ se recurre a componer dos transvecciones como las del caso anterior. El plano $H'' = L[v_2, v_2 + w_2]$ es hiperbólico ya que $v_2 \cdot (v_2 + w_2) = v_2 \cdot w_2 = 1$. Además:

$$\begin{cases} w_2 \cdot (v_2 + w_2) = -1 \neq 0, \\ w_2' \cdot (v_2 + w_2) = -1 \neq 0. \end{cases}$$

Aplicando el primer caso para H, H'' y H'', H', existen transvecciones σ_1, σ_2 tales que

$$\begin{cases} \sigma_1(v_2) = v_2, & \sigma_1(v_1) = v_2 + w_2, \\ \sigma_2(v_2) = v_2, & \sigma_2(v_2 + w_2) = w_2. \end{cases}$$

Así, $\sigma'' = \sigma_2 \sigma_1$ es composición de dos simplectomorfismos buscada. □

Proposición 3.8. *Todo isomorfismo simpléctico $\tau \in Sp_{2n}(K)$ es composición de a lo sumo $4n$ transvecciones simplécticas.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, w_1, ..., v_n, w_n\}$ una base simpléctica ordenada de modo que $L[v_i, w_i]$ forman un plano hiperbólico, $\mathcal{B}' = \{v_1' = \tau(v_1), w_1' = \tau(w_1), ..., v_n' = \tau(v_n), w_n' = \tau(w_n)\}$ es una base por ser τ isomorfismo y es simpléctica por ser τ simpléctica. Más aún, los subespacios $L[v_i', w_i']$ son planos hiperbólicos.

Se va a demostrar que existe una composición de a lo sumo $4n$ transvecciones que transforma los vectores de la base $\mathcal{B}$ en los de la base $\mathcal{B}'$ y, por tanto, τ será dicha composición pues coincide con ella en una base. Se procede por inducción en n, el número de planos hiperbólicos cuya suma directa es el espacio total. Para $n = 1$, el espacio vectorial E es un plano hiperbólico por lo que basta aplicar el lema 3.7. Veamos el paso inductivo. Definimos $H = L[v_1, w_1]$ y $H' = L[v_1', w_1']$ de modo que $E = H \bigoplus H^\perp = H' \bigoplus H'^\perp$ y por el lema 3.7 existe una composición σ de a lo sumo cuatro transvecciones tal que $\sigma(H) = H'$, $\sigma(v_1) = v_1'$ y $\sigma(w_1) = w_1'$. Además, como $\sigma(H) = H'$ también se cumple que $\sigma(H^\perp) = H'^\perp$. Puesto que la dimensión de

$$H'^\perp = L[v_2'' = \sigma(v_2), w_2'' = \sigma(w_2), ..., v_n'' = \sigma(v_n), w_n'' = \sigma(w_n)]$$

es $2n - 2$, por la hipótesis de inducción, existe un composición σ' de a lo sumo $4(n-1)$ transvecciones de $H'^\perp$ tal que $\sigma'(v_i'') = v_i'$ y $\sigma'(w_i'') = w_i'$ para $i = 2, \ldots, n$. Basta entonces comprobar que la aplicación $\mathrm{Id} \bigoplus \sigma'$ es una sucesión de transvecciones de E y aplicar estas tras las cuatro primeras de σ.

En efecto, sea σ_c una transvección de las que forman σ', su ecuación es $\sigma_c(x) = x + c(u \cdot x)u$ con $u \in H'^\perp$. Ahora bien, si $x \in H'$ se tiene que $u \cdot x = 0$ y la ecuación anterior extendida a E es la identidad al restringirse a H'. De esto se concluye que $\big(\mathrm{Id} \bigoplus \sigma_c\big)(x) = x + c(u \cdot x)u$. Por tanto, $\mathrm{Id} \bigoplus \sigma_c$ es una transvección de E e $\mathrm{Id} \bigoplus \sigma'$ es composición de las aplicaciones $\mathrm{Id} \bigoplus \sigma_c$. □

Una vez visto que las transvecciones generan todo el grupo $Sp_{2n}(K)$ se puede deducir que los simplectomorfismos conservan la orientación de forma alternativa a como se realizó en la sección anterior.

Corolario 3.9. *Todo elemento $\tau \in Sp_{2n}(K)$ preserva la orientación.*

Demostración. Puesto que las transvecciones generan $Sp_{2n}(K)$, τ es composición de transvecciones y su determinante es el producto del determinante de estas transvecciones. Así, basta ver que el determinante de estas es $+1$. En efecto:

$$\sigma_{c/2}^2(x) = \sigma_{c/2}(x + \tfrac{1}{2}c(u \cdot x)u) = x + c(u \cdot x)u = \sigma_c(x)$$

Entonces, $\det(\sigma_c)=\det(\sigma_{c/2})^2$ y como $\det(\sigma_{c/2})=\pm 1$ se concluye que $\det(\sigma_c)=1$. □

También se obtiene como corolario el centro del grupo $Sp_{2n}(K)$.

Corolario 3.10. *El centro de* $Sp_{2n}(K)$ *es* $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Demostración. Sea τ un elemento del centro de $Sp_{2n}(K)$ distinto de la identidad y σ una transvección con dirección u, se tiene que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$. Por la proposición 3.4, $\tau\sigma\tau^{-1}$ es una transvección con dirección $\tau(u)$ de lo que se deduce que $L[\tau(u)] = L[u]$. Ya que esto se obtiene para cualquier transvección, se cumple para todas las direcciones u, y todos los vectores son vectores propios. Por tanto, τ es una homotecia. Finalmente, al ser τ simpléctica y distinta de la unidad, $\tau = -\mathrm{Id}$. □

4. El grupo de Lie simpléctico real

A partir de ahora suponemos que K es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y denotaremos simplemente Sp_{2n} a $Sp_{2n}(\mathbb{R})$. Este grupo, al verlo como las matrices simplécticas de orden $2n$ con coeficientes reales, puede dotarse de una topología heredada de $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$. El objetivo de esta sección es determinar que Sp_{2n} es un *grupo topológico* conexo, y que de hecho es un *grupo de Lie,* es decir, es una variedad diferenciable y las operaciones de grupo son diferenciables.

En primer lugar se confiere a Sp_{2n} de estructura de espacio topológico. Como se acaba de comentar, se considera Sp_{2n} como el grupo de matrices simplécticas de orden $2n$ con coeficientes reales de modo que $Sp_{2n} \subset \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ y Sp_{2n} hereda la topología usual $\mathcal{T}_u$ de $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Se pueden consultar más detalles sobre los conceptos básicos de topología en [10].

(4.1) La norma de Frobenius. (1) La topología usual $\mathcal{T}_u$ está definida por la norma euclídea, que para una matriz cuadrada de orden n, $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, se escribe

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Esta norma de A puede calcularse a partir de la norma euclídea de sus filas $A_{i\bullet}$ o de sus columnas $A_{\bullet j}$:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|A_{i\bullet}\|^2},$$

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|A_{\bullet j}\|^2}.$$

(2) La propiedad esencial de la norma de Frobenius es que es *submultiplicativa* en el sentido siguiente: dadas dos matrices cuadradas reales A y B de orden n se cumple

$$\|A \cdot B\|^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2.$$

En efecto, las entradas de la matriz $A \cdot B$ son los productos escalares usuales de las filas de A por las columnas de B, así

$$\|A \cdot B\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (AB)_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \langle A_{i\bullet}, B_{\bullet j} \rangle^2}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para la norma euclídea se sabe que $\langle A_{i\bullet}, B_{\bullet j} \rangle^2 \leq \|A_{i\bullet}\|^2 \|B_{\bullet j}\|^2$. Por tanto, al sustituir en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \|A \cdot B\| &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \langle A_{i\bullet}, B_{\bullet j} \rangle^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \|A_{i\bullet}\|^2 \|B_{\bullet j}\|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|A_{i\bullet}\|^2 \sum_{j=1}^{n} \|B_{\bullet j}\|^2} = \|A\| \|B\|, \end{aligned}$$

tal como se quería ver.

(3) Con la topología usual las operaciones de matrices son continuas, de hecho, diferenciables:

$$\begin{cases} \text{producto} : (A, B) \mapsto A \cdot B, & A, B \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \\ \text{inversa} : A \mapsto A^{-1}, & A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \det(A) \neq 0. \end{cases}$$

En efecto, las componentes del producto son $(A \cdot B)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$, es decir, son funciones polinomiales, luego diferenciables. En cuanto a la inversa, sus componentes son las funciones racionales

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\alpha_{ji}}{\det(A)},$$

donde α_{ij} es el (i, j)-ésimo menor adjunto de A, y estos cocientes son diferenciables donde el denominador no se anula. □

Una vez familiarizados con la topología del grupo simpléctico la primera propiedad que establecemos es la conexión.

Proposición 4.2. *El grupo Sp_{2n} es conexo por caminos.*

Demostración. En primer lugar se va a construir un camino desde la identidad a cualquier transvección simpléctica. Dada una transvección σ_c tal que $\sigma_c(x) = x + c(u \cdot x)u$ consideramos la aplicación:

$$\gamma : [0, 1] \to Sp_{2n} : t \mapsto \sigma_{tc} \equiv M_t,$$

donde la matriz de σ_{tc} es, como se vio en 3.2, $M_t = I + tcu^t uJ$. Vemos que las entradas de M_t son polinomios de grado 1 en t, luego

$$t \mapsto \gamma(t) = M_t \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

es un camino continuo. Ahora construimos un camino desde la identidad a cualquier simplectomorfismo τ. Puesto que las transvecciones generan el grupo simpléctico existen transvecciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ cuya composición es τ. Si $M_1, \ldots, M_r$ son sus respectivas matrices, la matriz del simplectomorfismo τ será su producto $M = M_r \cdots M_1$ y el problema se reduce a encontrar una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to Sp_{2n}$ tal que $\gamma(0) = I$ y

$$\gamma(1) = M_\tau = M_r \cdots M_1.$$

Pero para ello basta construir caminos $\gamma_i(t) = M_{i,t}$ como anteriormente desde la identidad a σ_i y multiplicarlos matricialmente:

$$\gamma(t) = M_{r,t} \cdots M_{1,t}$$

El camino resultante es continuo por la continuidad del producto de matrices y permite conectar la identidad a cualquier simplectomorfismo. En suma, dos de estos siempre se pueden conectar, y Sp_{2n} es conexo por caminos. □

(4.3) Sp_{2n} **es un grupo de Lie.** Ahora se va a demostrar que el grupo simpléctico real es una variedad diferenciable. Tras ver esto se concluye inmediatamente que Sp_{2n} es un grupo de Lie ya que se ha obtenido anteriormente que el producto y la inversión de matrices son operaciones diferenciables. La argumentación está inspirada en un ejercicio propuesto en [5].

(1) Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \Sigma : A \mapsto A^t JA$ donde J es la matriz de la proposición 1.10 y Σ denota el subespacio de $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ correspondiente a las matrices antisimétricas. Es claro que $A^t JA$ es una matriz antisimétrica por serlo J. Por tanto, f está bien definida. Además, es una función diferenciable pues las entradas de $A^t JA$ se expresan como polinomios de las entradas de A.

(2) Se obtiene la derivada de f en A, $d_A f$, a partir de las derivadas direccionales. Sea $B \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$:

$$\begin{aligned} d_A f(B) &= \lim_{h\to 0} \frac{(A+hB)^t J(A+hB) - A^t JA}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{A^t JA + hB^t JA + hA^t JB + h^2 B^t JB - A^t JA}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} B^t JA + A^t JB + hB^t JB = B^t JA + A^t JB. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$d_A f : \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \Sigma : B \mapsto B^t JA + A^t JB.$$

Se observa que la derivada de f también tiene su imagen en Σ. Veamos ahora que $d_A f$ es suprayectiva si A es regular. Para ello, dada M una matriz antisimétrica se busca una matriz B que resuelva la ecuación: $B^t JA + A^t JB = M$. Ahora bien, de la antisimetría de J se tiene que $B^t JA = (A^t J^t B)^t = -(A^t JB)^t$ y de la antisimetría de M que $M = (M - M^t)/2$. Así, reescribimos la ecuación como:

$$A^t JB - (A^t JB)^t = \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}M^t.$$

Es decir, basta resolver $A^t JB = \frac{1}{2}M$. Esto es posible siempre que A sea regular ya que, al ser J invertible, $A^t J$ también lo es.

(3) Sp_{2n} es la preimagen de J por f y como $d_A f$ es sobreyectiva en cualquier matriz regular, por el teorema de la función implícita Sp_{2n} es variedad diferenciable de dimensión $2n \times 2n - \dim(\Sigma) = 2n \times 2n - n(2n-1) = n(2n+1)$. □

(4.4) Espacios tangentes. El *espacio (vectorial) tangente* en $A \in Sp_{2n}$ a Sp_{2n} se denota $T_A Sp_{2n}$ y corresponde al núcleo de $d_A f$, es decir,

$$T_A Sp_{2n} = \ker(d_A f) = \{B \in R^{2n\times 2n} | B^t JA + A^t JB = 0\}.$$

En particular,

$$T_I Sp_{2n} = \{B \in R^{2n\times 2n} | B^t J + JB = 0\}.$$

(1) Si $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ es una matriz regular, la aplicación lineal $\phi(M) = AM$ es un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ con inverso $\phi^{-1}(M) = A^{-1}M$. Por ello, si A es un automorfismo simpléctico, la restricción $\phi|Sp_{2n}$ es un difeomorfismo de nuestro grupo de Lie (con inverso $\phi^{-1}|Sp_{2n}$). Estas son las *traslaciones del grupo.*

(2) Puesto que la traslación ϕ es una aplicación lineal, es su propia derivada. En consecuencia, define un isomorfismo lineal

$$\phi = d_I \phi : T_I Sp_{2n} \to T_A Sp_{2n},$$

que permite identificar cada espacio tangente del grupo con el tangente en la identidad: $T_A Sp_{2n} = A \cdot T_I Sp_{2n}$.

En las secciones siguientes nos dedicaremos a comprender el significado de este espacio tangente.

5. La aplicación exponencial

Para estudiar el espacio tangente $T_I Sp_{2n}$ utilizaremos la función exponencial para matrices, por lo que se procederá a realizar una presentación elemental de la misma. Consideramos matrices de orden $m \times m$ (en nuestro caso $m = 2n$). La referencia fundamental para esta sección es [3].

(5.1) La aplicación exponencial. La exponencial de una matriz M se define formalmente mediante la igualdad

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

Esta serie es absolutamente convergente en todo su dominio ya que la norma de Frobenius es submultiplicativa y

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|M^k\| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|M\|^k = \exp(\|M\|).$$

Esto muestra en primer lugar que la función $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} : M \mapsto \exp(M)$ está bien definida y es continua, pero de hecho muestra que es analítica y por tanto diferenciable de clase ∞.

En efecto, hay que probar que las componentes $\exp_{ij}(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(M^k)_{ij}$ son funciones analíticas respecto de las entradas $M_{ij} = x_{ij}$ de la matriz M. Para ello observamos que la serie anterior es realmente un desarrollo en serie de potencias de x_{ij} en el origen (1) y que además es absolutamente convergente (2).

(1) Lo primero se concluye a partir de la siguiente expresión explícita para $(M^k)_{ij}$:

$$(M^k)_{ij} = \sum_{r_1,\ldots,r_{k-1}=1}^{m} x_{ir_1} x_{r_1 r_2} \cdots x_{r_{k-1}j}.$$

Obtenemos la expresión mediante inducción. Para $k = 1$ se cumple trivialmente ya que $M_{ij} = x_{ij}$. Mientras que el paso inductivo queda:

$$\begin{aligned}(M^k)_{ij} &= \sum_{r_{k-1}=1}^{m} (M^{k-1})_{ir_{k-1}} (M)_{r_{k-1}j} = \sum_{r_{k-1}=1}^{m} \sum_{r_1,\ldots,r_{k-2}=1}^{m} x_{ir_1} \cdots x_{r_{k-2}r_{k-1}} \cdot x_{r_{k-1}j} \\ &= \sum_{r_1,\ldots,r_{k-1}=1}^{m} x_{ir_1} \cdots x_{r_{k-1}j}\end{aligned}$$

No obstante, para ver que $\exp_{ij}$ es analítica solamente es necesario saber que $(M^k)_{ij}$ es un polinomio homogéneo de grado k en las variables x_{ij}, $P_k(x)$, cuyos coeficientes, a_ν, son no negativos. Así, se puede escribir $\exp_{ij}(M)$ como la serie de potencias:

$$\exp_{ij}(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(M^k)_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\nu|=k} a_\nu x^\nu.$$

(2) Ahora comprobamos que la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\nu|=k} |a_\nu x^\nu|$ es convergente. Observamos que al ser los coeficientes a_ν no negativos:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\nu|=k} |a_\nu x^\nu| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\nu|=k} a_\nu |x^\nu| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P_k(|x|).$$

Si se define $\widetilde{M}$ la matriz cuyas entradas son las de M en valor absoluto, es decir, $\widetilde{M}_{ij} = |x_{ij}|$, se verifica que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\nu|=k} |a_\nu x^\nu| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P_k(|x|) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (\widetilde{M^k})_{ij} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|\widetilde{M}^k\| \leq \exp(\|\widetilde{M}\|).$$

Donde se ha empleado que la norma de Frobenius de una matriz es siempre mayor que el valor absoluto de cada una de sus entradas y que es submultiplicativa. □

La exponencial cumple las propiedades esperables, pero hay que enunciarlas con precisión:

Proposición 5.2. *Se cumple:*

(i) $\exp(0) = I$.
(ii) $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$ *si* M *y* N *conmutan.*

(iii) $\exp(M)\exp(-M) = I$.
(iv) $\exp(M^t) = \exp(M)^t$.
(v) *Si N es invertible,* $\exp(N^{-1}MN) = N^{-1}\exp(M)N$.

Demostración. Para ver (i) basta sustituir en la serie. Para hallar (ii) se observa que, como M y N conmutan, $(M+N)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}M^rN^{k-r}$ y se puede sustituir en la serie esta expresión debido a la convergencia absoluta:

$$\begin{aligned}\exp(M)\exp(N) &= \left(\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}M^r\right)\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{1}{s!}N^s\right) = \sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{1}{r!s!}M^rN^s \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!(k-r)!}M^rN^{k-r}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(M+N)^k \\ &= \exp(M+N).\end{aligned}$$

(iii) se obtiene de (i) e (ii). Por su parte, (iv) se obtiene al emplear en la serie que $(M^t)^n = (M^n)^t$ y (v) al observar que $(N^{-1}MN)^n = N^{-1}M^nN$. □

Para finalizar esta sección se demuestra una propiedad de la aplicación exponencial que también se empleará en la siguiente sección para construir parametrizaciones locales de Sp_{2n}.

Proposición 5.3. *La aplicación* $\exp : \mathbb{R}^{m\times m} \to \mathbb{R}^{m\times m}$ *es un difeomorfismo local en* 0*, pues su derivada en* 0 *es la identidad:* $d_0\exp(M) = M$.

Demostración. Basta calcular la derivada direccional:

$$\begin{aligned}d_0\exp(M) &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(0+hM)-\exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}h^kM^k - \exp(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}h^{k-1}M^k = M.\end{aligned}$$

Así, la derivada $d_0\exp$ es un isomorfismo lineal, y por tanto la aplicación exponencial es un difeomorfismo local en 0. □

6. El Álgebra de Lie del grupo simpléctico

En esta sección vemos el papel que juega el espacio T_ISp_{2n}, que denotaremos a partir de ahora $\mathfrak{sp}_{2n}$. Empezamos viendo como $\mathfrak{sp}_{2n}$ nos permite obtener parametrizaciones locales de Sp_{2n} a través de la aplicación exponencial. Posteriormente se estudiarán los subgrupos uniparamétricos de Sp_{2n}, que son las imágenes de homomorfismos diferenciables de $\mathbb{R}$ (como grupo aditivo) en Sp_{2n}. El espacio $\mathfrak{sp}_{2n}$ permite describir estos subgrupos completamente.

(6.1) Parametrizaciones locales de Sp_{2n}. (1) Comenzamos observando que si M está en $\mathfrak{sp}_{2n}$, $\exp(M)$ está en Sp_{2n}. En efecto, si M está en $\mathfrak{sp}_{2n}$, por lo visto en 4.4, se cumple que $M^tJ + JM = 0$. Así, $J^{-1}M^tJ = -M$ conmuta con M y por la propiedad (iii) de la exponencial:

$$I = \exp(J^{-1}M^tJ + M) = \exp(J^{-1}M^tJ)\exp(M)$$

De las propiedades (v) y (iv) se obtiene

$$I = J^{-1}\exp(M^t)J\exp(M) = J^{-1}\exp(M)^tJ\exp(M),$$

y $\exp(M)$ está en Sp_{2n}.

(2) Acabamos de ver que la aplicación exponencial restringida a $\mathfrak{sp}_{2n}$ tiene imagen en Sp_{2n}, y éstas son dos variedades diferenciables de la misma dimensión. Como en la proposición 5.3 se ha obtenido que la aplicación exponencial es un difeomorfismo local en 0, dicha restricción es una parametrización local de Sp_{2n} en I. Además, si se quiere tener una parametrización local en A de Sp_{2n} basta aplicar la traslación correspondiente del grupo Sp_{2n} (ver 4.4) tras la parametrización que se acaba de definir en I. $\square$

Todo lo que queda de sección lo dedicaremos al estudio de los subgrupos uniparamétricos. A pesar de que su definición en apariencia no está relacionada con el tangente $\mathfrak{sp}_{2n}$, pronto veremos que sí. La referencia esencial en esta parte es [2].

Definición 6.2. Un *subgrupo uniparamético* de Sp_{2n} es una aplicación diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \to Sp_{2n}$ que satisface

$$\gamma(t+s) = \gamma(t)\cdot\gamma(s)$$

para cualquier par de números reales t, s. Es decir, es un homomorfismo diferenciable de $\mathbb{R}$, considerado como grupo aditivo, en Sp_{2n}.

Ejemplo 6.3. Fijada M de $\mathfrak{sp}_{2n}$ se considera la aplicación $f_M : \mathbb{R} \to \mathfrak{sp}_{2n} : t \mapsto tM$, que es lineal, luego diferenciable. Se define entonces $\gamma_M = \exp\circ f_M$,

$$\gamma_M : \mathbb{R} \to Sp_{2n} : t \mapsto \exp(tM),$$

que es un subgrupo uniparamétrico de Sp_{2n}. Esto es debido a que γ_M es composición de aplicaciones diferenciables y a que, por conmutar tM y sM para cualesquiera t y s reales, se obtiene la condición de homomorfismo:

$$\gamma_M(t+s) = \exp((t+s)M) = \exp(tM)\exp(sM) = \gamma_M(t)\gamma_M(s).$$

Destaquemos que $\gamma_M'(0) = M$ (por la regla de la cadena y 5.3). $\square$

Observación 6.4. Es equivalente en la definición anterior pedir solamente que γ sea diferenciable en 0, ya que en ese caso de la propiedad de homomorfismo se deduce que γ es diferenciable en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)\gamma(t)-\gamma(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\gamma(h)-I)\gamma(t) = \gamma'(0)\gamma(t).$$

Además de la diferenciabilidad, obtenemos la fórmula $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$. De forma similar se obtiene $\gamma'(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$. $\square$

Ahora vamos a probar que los ejemplos de subgrupos uniparamétricos que acabamos de describir en 6.3 son en realidad todos los que hay.

Proposición 6.5. *Sea $\gamma : \mathbb{R} \to Sp_{2n}$ un subgrupo uniparamétrico de Sp_{2n}. Entonces, es de la forma*

$$\gamma_M : \mathbb{R} \to Sp_{2n} : t \mapsto \exp(tM)$$

para algún $M \in \mathfrak{sp}_{2n}$.

Demostración. Por ser γ un homomorfismo se tiene que $\gamma(0) = I$. Por tanto, $\gamma'(0)$ está en $T_I Sp_{2n} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Si se llama M a $\gamma'(0)$, se concluye de la observación 6.4 que γ es solución de la ecuación diferencial

$$\gamma'(t) = \gamma(t)M$$

con la condición inicial $\gamma(0) = I$. Como tal solución es única, el resultado se concluye probando que $\gamma_M(t) = \exp(tM)$ es solución de dicho problema de valor inicial. Pero como γ_M es un subgrupo uniparámetrico eso es de nuevo la observación 6.4 aplicada a γ_M. □

De esta manera, hemos determinado todos los subgrupos uniparamétricos del grupo simpléctico: se corresponden biyectivamente (via la exponencial) con las matrices del espacio tangente $\mathfrak{sp}_{2n} = T_I Sp_{2n}$. De hecho, un grupo uniparamétrico $\gamma(t) = \exp(tM)$ está determinado por $M = \gamma'(0)$, es decir, por su restricción a cualquier intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$

Aunque no desarrollaremos este tema, digamos que $\mathfrak{sp}_{2n}$ es la denominada *álgebra de Lie de Sp_{2n}*, y es un álgebra porque se equipa con el *corchete de Lie*

$$[M, N] = MN - NM.$$

Por supuesto, es necesario comprobar que este producto está bien definido, pero dada la caracterización de las matrices del espacio tangente, esto se reduce al siguiente cálculo

$$\begin{aligned} J[M, N] &= J(MN - NM) = JMN - JNM = -M^t JN + N^t JM \\ &= M^t N^t J - N^t M^t J = -(-NM + MN)^t J = -[M, N]^t J. \end{aligned}$$

Mencionemos también que la descripción

$$\mathfrak{sp}_{2n} = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : e^{tM} \in Sp_{2n} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\},$$

implícita en todo lo anterior, está detrás de que Sp_{2n} sea un grupo de Lie. El hecho general es que un subgrupo *cerrado* de un grupo de Lie es un grupo de Lie. Para subgrupos cerrados G de un grupo lineal $GL_m(\mathbb{R})$ la estrategia de demostración es (i) probar que

$$\mathfrak{g} = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : e^{tM} \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

es un espacio vectorial, (ii) ver que la exponencial es un difeomorfismo de un entorno de 0 en $\mathfrak{g}$ sobre un entorno de I en G, luego es una parametrización de G en I, y (iii) usar las traslaciones del grupo G para parametrizar G en los demás puntos. En nuestra exposición todo esto ha ido viéndose directamente para Sp_{2n}, sin apelar a su condición de ser un subgrupo cerrado de $GL_{2n}(\mathbb{R})$. Pero esa condición es esencial, por ejemplo, para ver que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial aunque la exponencial de la suma de matrices no es siempre el producto de las exponenciales. En [2] se realiza una introducción a los grupos de matrices en el contexto más general de la teoría de grupos de Lie matriciales.

7. El grupo ortogonal simpléctico

En esta sección se describe el *grupo ortogonal simpléctico,* que es el subgrupo $R_{2n} = R_{2n}(\mathbb{R})$ de Sp_{2n} formado por las *rotaciones simplécticas,* es decir, los automorfismos simplécticos que son ortogonales: $R_{2n} = O_{2n} \cap Sp_{2n}$, donde $O_{2n} = O_{2n}(\mathbb{R})$ denota al grupo de los isomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^{2n}$, o equivalentemente a las matrices ortogonales de orden $2n$.

Iniciamos el estudio de R_{2n} mostrando las condiciones que ha de satisfacer una matriz M de R_{2n}. Esto es muy sencillo puesto que es conocido que las matrices ortogonales son aquellas que satisfacen $M^t = M^{-1}$ y hemos visto que las simplécticas son las que cumplen $M^t JM = J$ con J de la proposición 1.10. Es decir, las matrices de R_{2n} son aquellas que satisfacen ambas condiciones. No obstante, es interesante expresar estas condiciones en terminos de los bloques de orden n de M.

Proposición 7.1. *Sea*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

una matriz de orden $2n$ *y* $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *su bloques de orden* n*.* M *es una rotación simpléctica si y sólo si se cumple:*

$$\begin{cases} D = A, \ C = -B, \\ A^t A + B^t B = I, \\ A^t B - B^t A = 0. \end{cases}$$

Demostración. Siempre y cuando se cumpla $M^t = M^{-1}$, la condición correspondiente a la caracterización de simplectomorfismo se puede reescribir como $JM = MJ$. Si se multiplica por bloques ambas matrices, se obtiene que:

$$JM = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}, \ MJ = \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix}.$$

Así que $JM = MJ$ se cumple cuando $D = A$ y $C = -B$. Entonces, las matrices de R_{2n} son aquellas que satisfacen estas dos ecuaciones y son ortogonales. Puesto que:

$$M^t M = \begin{pmatrix} A^t & -B^t \\ B^t & A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^t A + B^t B & A^t B - B^t A \\ B^t A - A^t B & B^t B + A^t A \end{pmatrix},$$

se tiene que $I = M^t M$ si y sólo si:

$$\begin{cases} A^t A + B^t B = I, \\ A^t B - B^t A = 0. \end{cases}$$

□

A continuación vamos a ver que R_{2n} es un subgrupo de Lie cerrado de Sp_{2n}. Se va a considerar R_{2n} como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ mediante la siguiente aplicación:

$$g : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{2n\times 2n} : (A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

La aplicación g es lineal, por tanto, diferenciable y con derivada coincidente con ella misma. Además es inyectiva, de modo que es biyectiva sobre su imagen. Existe entonces una inversa definida en la imagen de g que también es lineal y diferenciable. En resumen, g es un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ y su imagen por g.

Se define ahora

$$U = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} : A^tA + B^tB = I, A^tB - B^tA = 0\}.$$

Su imagen por g es R_{2n} lo que permite concluir de lo anterior que U y R_{2n} son difeomorfos. Así, para ver que R_{2n} es una variedad diferenciable de dimensión n^2, se prueba que U lo es. Esto se hace de forma similar a como se demostró que Sp_{2n} es una variedad diferenciable.

Proposición 7.2. *El conjunto U anterior es cerrado en $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$, y es una variedad diferenciable de dimensión n^2.*

Demostración. Se define la aplicación

$$f : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \Sigma^{sim} \times \Sigma^{ant} : (A, B) \mapsto (A^tA + B^tB, A^tB - B^tA),$$

donde Σ^{sim}, Σ^{ant} denotan respectivamente los subespacios lineales de $\mathbb{R}^{n^2}$ formados por las matrices simétricas y por las antisimétricas. Además se designan f_1 y f_2 a las componentes de f. Observamos que U es la preimagen de $(I, 0)$ por f, con lo que es cerrado en $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Dado $(A, B) \in U$, calculamos las derivadas parciales de las componentes f_1, f_2 a partir de las derivadas direccionales igual que se hizo en 4.3(2) y resulta:

$$\begin{cases} d_Af_1(\bullet, B)M = A^tM + M^tA, \\ d_Bf_1(A, \bullet)N = B^tN + N^tB, \end{cases} \qquad \begin{cases} d_Af_2(\bullet, B)M = M^tB - B^tM, \\ d_Bf_2(A, \bullet)N = A^tN - N^tA, \end{cases}$$

donde M, N son matrices de $\mathbb{R}^{n^2}$. En consecuencia la derivada de f es:

$$\begin{aligned} d_{(A,B)}f(M, N) &= (d_{(A,B)}f_1(M, N), d_{(A,B)}f_2(M, N)) \\ &= (d_Af_1(\bullet, B)M + d_Bf_1(A, \bullet)N,\ d_Af_2(\bullet, B)M + d_Bf_2(A, \bullet)N) \\ &= (A^tM + M^tA + B^tN + N^tB,\ M^tB - B^tM + A^tN - N^tA) \\ &= \big((A^tM + B^tN) + (A^tM + B^tN)^t,\ (A^tN - B^tM) - (A^tN - B^tM)^t\big). \end{aligned}$$

Se observa que por supuesto la imagen de $d_{(A,B)}f$ está en $\Sigma^{sim} \times \Sigma^{ant}$. Veamos que de hecho es todo este espacio:

• Sea V una matriz simétrica de orden n. Se toma $M = \frac{1}{2}AV$ y $N = \frac{1}{2}BV$, y se tiene que

$$\begin{cases} A^tM + B^tN = \frac{1}{2}(A^tA + B^tB)V = \frac{1}{2}f_1(A, B)V = \frac{1}{2}V, \\ A^tN - B^tM = \frac{1}{2}(A^tB - B^tA)V = \frac{1}{2}f_2(A, B)V = 0. \end{cases}$$

Así, con esta elección de M y N, $d_{(A,B)}f(M, N) = (V, 0)$.

• Sea W una matriz antisimétrica de orden n. Se toma $M = -\frac{1}{2}BW$ y $N = \frac{1}{2}AW$, y se tiene que

$$\begin{cases} A^tM + B^tN = \frac{1}{2}(-A^tB + B^tA)W = \frac{1}{2}f_2(A, B)W = 0, \\ A^tN - B^tM = \frac{1}{2}(A^tA + B^tB)W = \frac{1}{2}f_1(A, B)W = \frac{1}{2}W. \end{cases}$$

Por tanto, $d_{(A,B)}f(M,N) = (0,W)$.

De estos dos cálculos resulta que $d_{(A,B)}f$ es suprayectiva para cada $(A,B) \in U$. En consecuencia, por el teorema de la función implícita, U es una variedad diferenciable de dimensión

$$\dim(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}) - \dim(\Sigma^{sim} \times \Sigma^{ant}) = 2n^2 - (\tfrac{1}{2}n(n+1) + \tfrac{1}{2}n(n-1)) = n^2.$$

□

Corolario 7.3. *El grupo de rotaciones simplécticas es una variedad diferenciable de dimensión n^2 y un subgrupo de Lie compacto de Sp_{2n}.*

Demostración. El grupo R_{2n} es difeomorfo a U via la inclusión lineal $g : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, y, por tanto, es una variedad diferenciable de dimensión n^2. Como las inclusiones lineales son aplicaciones cerradas, y U es cerrado en $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$, concluimos que R_{2n} es cerrado de $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Para deducir la compacidad, falta comprobar que es acotado, pero esto es cierto debido a que la norma de Frobenius de una matriz M de O_{2n} es $\sqrt{2n}$. En efecto, las columnas de M son las imágenes de los elementos de la base canónica por una rotación por lo que su norma euclídea es 1 y se halla:

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \left\|M_{\bullet j}\right\|^2} = \sqrt{2n}.$$

□

8. El álgebra de Lie del grupo ortogonal simpléctico

Como ya vimos en la sección 6 para el grupo simpléctico, es de especial interés conocer el espacio tangente a un grupo de Lie dado, que es la denominada álgebra de Lie del grupo. El grupo que nos concierne ahora es R_{2n} y denotaremos $\mathfrak{r}_{2n} = T_I R_{2n}$ su álgebra de Lie.

(8.1) Cálculo de $\mathfrak{r}_{2n}$. (1) Podemos utilizar la inmersión lineal $g : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ que induce el difeomorfismo $U \to R_{2n}$ para calcular $\mathfrak{r}$. Como g es su propia derivada e $I = g(I,0)$, por la regla de la cadena se concluye que $\mathfrak{r}_{2n}$ es $g(T_{(I,0)}U)$. El espacio tangente $T_{(I,0)}U$ se puede obtener fácilmente a partir de la aplicación f utilizada en la sección anterior:

$$T_{(I,0)}U = \ker d_{(I,0)}f = \{(M,N) \in \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} : M + M^t = 0,\ N - N^t = 0\}.$$

Por tanto,

$$\mathfrak{r}_{2n} = \left\{ P = \begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix} : M \in \Sigma^{ant},\ N \in \Sigma^{sim} \right\}.$$

Como se ha visto en la demostración de la proposición 7.1, que el primer y el último bloque sean iguales y los otros dos opuestos equivale a que $JP = PJ$. Por otra parte, que M sea antisimétrica y N simétrica es lo mismo que exigir que P sea antisimétrica. Deducimos así que $\mathfrak{r}$ está formado por las matrices antisimétricas $P = -P^t$ que satisfacen

$$P^t J + JP = -PJ + JP = 0.$$

Es decir, el álgebra de Lie de R_{2n} es

$$\mathfrak{r}_{2n} = \Sigma^{ant} \cap \mathfrak{sp}_{2n}.$$

(2) Este resultado no debe sorprendernos si reflexionamos acerca del significado de Σ^{ant} en este contexto. El grupo ortogonal O_{2n} se puede obtener como la preimagen de I por la aplicación $h : \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \Sigma^{sim} : M \mapsto M^t M$, a la que se le puede aplicar el teorema de la función implícita. Como $d_I h(M) = M + M^t$, se concluye que $T_I O_{2n} = \ker d_I h$ consiste precisamente en las matrices antisimétricas de modo que lo que hemos obtenido anteriormente no es más que la relación:

$$T_I R_{2n} = T_I O_{2n} \cap T_I Sp_{2n}.$$

De todos modos, conviene señalar que no hay *transversalidad* aquí, en el sentido de la topología diferencial [9], pues

$$\dim(T_I O_{2n} + T_I Sp_{2n}) = n(2n-1) + n(2n+1) - n^2 = 3n^2 < \dim(\mathbb{R}^{2n\times 2n}),$$

y la transversalidad consistiría en que $T_I O_{2n} + T_I Sp_{2n} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$. □

Para completar esta revisión rápida del álgebra de Lie $\mathfrak{r}_{2n}$ introducimos como en el caso simpléctico la exponencial.

(8.2) Subgrupos uniparamétricos de R_{2n}. (1) En primer lugar, se tiene que $\exp(M) \in R_{2n}$ para toda matriz $M \in \mathfrak{r}_{2n}$ (con lo que de nuevo la restricción $\exp : \mathfrak{r}_{2n} \to R_{2n}$ es una parametrización local en $I \in R_{2n}$).

En efecto, a la vista de la descripción anterior de $\mathfrak{r}_{2n}$, y como ya comprobamos el resultado para Sp_{2n}, basta ver que si M es antisimétrica entonces $\exp(M)$ es ortogonal, pero por las propiedades de la exponencial 5.2:

$$\exp(M)^t = \exp(M^t) = \exp(-M) = \exp(M)^{-1}.$$

(2) Se cumple que

$$\mathfrak{r}_{2n} = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : e^{tM} \in R_{2n} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\},$$

En efecto, el contenido $\subset$ lo acabamos de ver. Para el otro, observamos que si la curva $\gamma(t) = e^{tM} \in R_{2n}$ está bien definida, su velocidad en $I = \gamma(0)$ es $M = \gamma'(0) \in T_I R_{2n} = \mathfrak{r}_{2n}$.

(3) Los subgrupos uniparamétricos $\gamma : \mathbb{R} \to R_{2n}$ de R_{2n} (es decir, los homomorfismos diferenciables) son precisamente las aplicaciones $\gamma(t) = \exp(tM)$ para $\gamma'(0) = M \in \mathfrak{r}_{2n}$.

Un subgrupo uniparamétrico γ de R_{2n} es ciertamente un subgrupo uniparámetrico de Sp_{2n}, luego ya sabemos que es del tipo $\gamma(t) = \exp(tM)$, y como acabamos de indicar:

$$M = \gamma'(0) \in T_I R_{2n} = \mathfrak{r}_{2n}.$$

□

9. El grupo unitario complejo

En esta sección se introduce el grupo unitario complejo $U_n = U_n(\mathbb{C})$ y se obtiene un isomorfismo de grupos $U_n(\mathbb{C}) \equiv R_{2n}(\mathbb{R}) \big(= O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{R})\big)$. Este isomorfismo de grupos es de hecho un difeomorfismo, y por tanto, un isomorfismo de grupos de Lie. Véase por ejemplo [6].

Comenzamos con una breve exposición de las formas sesquilienales y productos hermíticos para definir U_n. Nuestra referencia para todo ello es [4].

(9.1) Productos hermíticos. Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

(1) Una *forma sesquilineal* es una aplicación $\omega : E \times E \to \mathbb{C}$ que es semilineal en su primera variable y lineal en la segunda. Se entiende que una función f es *semilineal* si dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y $u, v \in E$ se cumple $f(\lambda u + \mu v) = \bar{\lambda} f(u) + \bar{\mu} f(v)$ donde las barras denotan conjugación compleja.

(2) La matriz M de ω respecto de una base $\mathcal{B} = \{u_i\}$ de E tiene entradas $\omega(u_i, u_j)$, y si las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de u, v son x, y, se tiene $\omega(u, v) = \bar{x} M y^t$.

Si $\mathcal{B}'$ es otra base y C la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ (es decir $x^t = Cx'^t$):

$$\omega(u, v) = \bar{x} M y^t = (\bar{x}' \bar{C}^t) M (C y'^t) = \bar{x}' (\bar{C}^t M C) y'^t,$$

con lo que la matriz de ω en la base $\mathcal{B}'$ es $M' = C^* M C$, donde aparece la *matriz conjugada traspuesta* $C^* = \bar{C}^t$.

(3) Se dice que ω es *hermítica* si $\omega(u, v) = \overline{\omega(v, u)}$. Claramente ocurre si y sólo si su matriz M respecto de cualquier base $\mathcal{B}$ cumple $M^* = M$. Las formas hermíticas se diagonalizan y clasifican por su rango y signatura de igual modo que las formas bilineales simétricas. En particular, una forma hermítica se denomina definida positiva o *producto hermítico,* si su signatura es máxima. Entonces existen bases *ortogonales,* respecto de las cuales la matriz de ω es diagonal con autovalores positivos, y reescalando sus vectores se obtienen bases *ortonormales,* respecto de las cuales la matriz de ω es la identidad. □

A continuación se introducen los endomorfismos que conservan un producto hermítico de forma similar a como se hizo con los simplectomorfismos en 2.1. En este análisis las bases ortonormales juegan el papel que jugaban las bases simplécticas.

(9.2) El grupo unitario complejo. Sea ω un producto hermítico en E, $\dim(E) = n$.

(1) Se denomina *endomorfismo unitario* de E a todo isomorfismo lineal $h : E \to E$ tal que para cualesquiera $u, v \in E$ se tiene:

$$\omega(h(u), h(v)) = \omega(u, v).$$

Los endomorfismos unitarios forman un grupo con la composición denominado *grupo unitario.* En rigor, tal grupo se denota $U(E)$, pero como espacios vectoriales de igual dimensión dan lugar a grupos unitarios isomorfos, se denotará $U_n(\mathbb{C})$.

(2) Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal y M la matriz de h en dicha base. La condición de endomorfismo unitario se escribe en coordenadas como

$$\bar{x}Iy^t = (\bar{x}\bar{M}^t)I(My^t) = \bar{x}M^*My^t,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}^n$. Así, vía el isomorfismo que identifica cada endomorfismo unitario con su matriz respecto de $\mathcal{B}$, el grupo unitario complejo se identifica con el de las *matrices unitarias* de $\mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\{M \in \mathbb{C}^{n\times n} : M^*M = I\}.$$

$\square$

(9.3) El grupo de Lie real $U_n(\mathbb{C})$. (1) En $\mathbb{C}^{n\times n}$ con la topología usual (via la identificación con $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ separando partes real e imaginaria) las operaciones de matrices,

$$\begin{cases} \text{producto} : (A, B) \mapsto A \cdot B, & A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \\ \text{inversa} : A \mapsto A^{-1}, & A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \det(A) \neq 0, \end{cases}$$

son diferenciables por lo mismo que se dijo en 4.1.3.

(2) El grupo $U_n(\mathbb{C})$ es un grupo de Lie real puesto que es variedad diferenciable y sus operaciones son diferenciables. Se puede dar una prueba similar a la realizada para ver que Sp_{2n} y R_{2n} son variedades, pero se va deducir de otra manera a continuación. No obstante, el grupo $U_n(\mathbb{C})$ no es un grupo de Lie *complejo* ya que no es una variedad compleja: las ecuaciones $M^*M = I$ no son holomorfas pues involucran a la conjugación. $\square$

Para terminar esta sección se establece un isomorfismo de grupos de Lie entre $U_n(\mathbb{C})$ y $O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{R})$, lo que incluye el hecho de que $U_n(\mathbb{C})$ es variedad diferenciable.

Proposición 9.4. *El grupo $U_n(\mathbb{C})$ es un grupo de Lie isomorfo al grupo ortogonal simpléctico $R_{2n}(\mathbb{R}) = O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Se considera la siguiente aplicación lineal :

$$F : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n\times 2n} : (A + iB) \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

(recuérdese la aplicación g de la p. 22). Esta aplicación es inyectiva y su imagen es el subespacio lineal formado por las matrices de la forma:

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) La restricción de F a $U_n(\mathbb{C})$, que denotamos f, es una biyección de $U_n(\mathbb{C})$ sobre $R_{2n}(\mathbb{R})$. Esto se sigue de lo anterior y la siguiente observación:

$$\begin{aligned} I &= (\overline{A + iB})^t(A + iB) = (A^t - iB^t)(A + iB) \\ &= A^tA - iB^tA + iA^tB + B^tB = (A^tA + B^tB) + i(A^tB - B^tA). \end{aligned}$$

Es decir, $A + iB$ es unitaria si y sólo si $A^tA + B^tB = I$ y $A^tB - B^tA = 0$, o lo que es lo mismo, su imagen es una rotación simpléctica (7.1). Ya se ve por qué se usó la letra U en la p. 23.

(2) La biyección $f : U_n(\mathbb{C}) \to R_{2n}(\mathbb{R})$ es un difeomorfismo: tanto ella como su inversa son diferenciables pues son restricciones de aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales. Como ya sabemos que $R_{2n}(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable, concluimos que lo es $U_n(\mathbb{C})$.

(3) La aplicación F, y por tanto f, respeta el producto de matrices. En efecto, por un lado, el producto de dos matrices complejas es:

$$(A + iB)(C + iD) = (AC - BD) + i(BC + AD).$$

Por otro, el producto de sus imágenes por F es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC - BD & BC + AD \\ -BC - AD & -BD + AC \end{pmatrix}.$$

Así, $F((A + iB)(C + iD)) = F(A + iB)F(C + iD)$.

En conclusión, $f : U_n(\mathbb{C}) \to R_{2n}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de grupos de Lie. □

10. La aplicación logaritmo

Para entender la relación topológica entre el grupo simpléctico Sp_{2n} y su subgrupo ortogonal R_{2n} debemos estudiar las matrices simplécticas simétricas definidas positivas, lo que nos lleva de nuevo a la aplicación exponencial. Como en otras ocasiones, denotamos $\Sigma \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ el subespacio vectorial de las matrices simétricas de orden m, y Σ^+ su subconjunto abierto formado por las definidas positivas (es abierto por el criterio de los menores principales de Sylvester [4]).

Toda matriz $S \in \Sigma$ se puede diagonalizar mediate una matriz ortogonal: $S = U^t\langle a_i\rangle U$, siendo $\langle a_i\rangle$ la matriz $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$, de manera que $\exp(S) = U^t\langle e^{a_i}\rangle U$ con todos los autovalores e^{a_i} positivos. Esto muestra que la exponencial define una aplicación *suprayectiva* diferenciable (analítica de hecho)

$$\exp : \Sigma \to \Sigma^+ : S = U^t\langle a_i\rangle U \mapsto U^t\langle e^{a_i}\rangle U.$$

Además es evidente que S y $\exp(S)$ se diagonalizan simultáneamente, luego tienen los mismos autovectores.

Proposición y definición 10.1. *La aplicación exponencial* $\exp : \Sigma \to \Sigma^+$ *es un difeomorfismo (analítico). Su inverso es el* logaritmo, $\log : \Sigma^+ \to \Sigma$, *definido para matrices simétricas definidas positivas.*

Demostración. En primer lugar:

(1) *La aplicación exponencial* $\exp : \Sigma \to \Sigma^+$ *es inyectiva* (luego biyectiva).

Sean $S, T \in \Sigma$ tales que $\exp(S) = \exp(T)$, mediante la diagonalización de S se tiene que $\exp(S) = U^t\langle e^{a_i}\rangle U$ lo que resulta en:

$$\langle e^{a_i}\rangle = U \exp(S)U^t = U \exp(T)U^t = \exp(UTU^t).$$

Se observa que UTU^t es simétrica y por ello existirá una matriz ortogonal V y $\langle b_i\rangle$ tal que $UTU^t = V^t\langle b_i\rangle V$. Así, $\exp(UTU^t) = V^t\langle e^{b_i}\rangle V$ y los coeficientes de esta matriz son:

$$\begin{aligned}(V^t\langle e^{b_i}\rangle V)_{ij} &= \sum_{k,l=1}^{m}(V^t)_{ik}(\langle e^{b_i}\rangle)_{kl}V_{lj} = \sum_{k=1}^{m}(V^t)_{ik}e^{b_k}V_{kj}.\\ &= (V_{1i},\dots,V_{mi})\cdot(e^{b_1}V_{1j},\dots,e^{b_m}V_{mj}).\end{aligned}$$

Puesto que $\langle e^{a_i}\rangle = V^t\langle e^{b_i}\rangle V$ es diagonal se concluye de lo anterior que el producto escalar $(V_{1i},\dots,V_{mi})\cdot(e^{b_1}V_{1j},\dots,e^{b_m}V_{mj})$ es nulo salvo cuando $i=j$. Ahora bien, al ser V ortogonal, sus columnas $V_{\bullet,i}$ forman una base ortogonal y, en consecuencia, $(e^{b_1}V_{1j},\dots,e^{b_m}V_{mj}) \in L[V_{\bullet,j}]$. Es decir, existe λ_j tal que $e^{b_k}V_{kj} = \lambda_j V_{kj}$ para $k=1,\dots,m$. Si $V_{kj}\neq 0$ obtenemos $e^{b_k} = \lambda_j$, es decir, $b_k = \log(\lambda_j) = \mu_j$, y esos k son los relevantes para concluir que $(b_1V_{1j},\dots,b_mV_{mj}) = \mu_j V_{\bullet,j}$.

Veamos que $V^t\langle b_i\rangle V$, y por tanto UTU^t, son diagonales. En efecto, realizando las mismas operaciones que para $V^t\langle e^{b_i}\rangle V$, se obtiene que:

$$(V^t\langle b_i\rangle V)_{ij} = (V_{1i},\dots,V_{mi})\cdot(b_1V_{1j},\dots,b_mV_{mj}).$$

Pero acabamos de ver que $(b_1V_{1j},\dots,b_mV_{mj}) = \mu_j V_{\bullet,j}$ y de la ortogonalidad de los $V_{\bullet,j}$ se sigue que $V^t\langle b_i\rangle V$ es diagonal.

Finalmente, como UTU^t es diagonal y la aplicación exponencial es claramente inyectiva para matrices diagonales, de $\exp(UTU^t) = \langle e^{a_i}\rangle$ se sigue que $UTU^t = \langle a_i\rangle$. En consecuencia, $T = U^t\langle a_i\rangle U = S$ tal como queríamos ver.

Probado (1), veamos ahora que

(2) *La aplicación* $\exp : \Sigma \to \Sigma^+$ *es un difeomorfismo local,*

lo que, por ser una aplicación biyectiva, implica que es un difeomorfismo global.

Para probar (2), por el teorema de la función inversa, basta comprobar que $d_S\exp$ es inyectiva, es decir, si S y T son matrices simétricas y $d_S\exp(T) = 0$ entonces $T=0$. En primer lugar se obtiene una expresión para $d_S\exp(T)$:

$$\begin{aligned}d_S\exp(T) &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(S+hT)-\exp(S)}{h} = \lim_{h\to 0}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{(S+hT)^k - S^k}{h}\\ &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}S^lTS^{k-1-l} = Q.\end{aligned}$$

Puesto que $d_S\exp(T)$ es simétrica se puede interpretar como una forma cuadrática Q. Supongamos que $d_S\exp(T) = 0$, es decir que la forma Q es nula. Consideramos ahora una base $\mathcal{B} = \{u_1,\dots,u_m\}$ de autovectores de S. Al ser Q nula, tenemos $u_iQu_j = 0$ para cualesquiera i,j. Veamos que entonces $u_iTu_j = 0$ (y por tanto $T=0$).

$$\begin{aligned}0 = u_iQu_j &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}u_iS^lTS^{k-1-l}u_j = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}u_i\lambda_i^lT\lambda_j^{k-1-l}\mu_j\\ &= \Big(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}\lambda_i^l\lambda_j^{k-1-l}\Big)u_iTu_j = cu_iTu_j.\end{aligned}$$

Por tanto, solamente queda comprobar que el paréntesis c no es nulo. Para el caso $\lambda_i = \lambda_j$ es:

$$c = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_i^{k-1} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k-1)!} \lambda_i^{k-1} = e^{\lambda_i} > 0.$$

Y para $\lambda_i \neq \lambda_j$:

$$c = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \frac{\lambda_i^k - \lambda_j^k}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \lambda_i^k - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \lambda_j^k \right) = \frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \neq 0.$$

□

11. Potencias de matrices simétricas positivas

En esta sección mostramos que R_{2n} es un retracto de deformación (diferenciable) de Sp_{2n}. Para ello necesitamos las potencias *reales* S^α de una matriz simétrica definida positiva S. Esas potencias se definen normalmente mediante diagonalización ortogonal, pero hay que comprobar: (i) que el resultado no depende de la diagonalización, y (ii) que la operación es diferenciable, es decir, es diferenciable la aplicación $(\alpha, S) \mapsto S^\alpha$. El libro [7] presenta de una manera general cómo se resuelven estas dificultades inherentes a las *funciones con matrices*. En nuestro caso se hace fácilmente usando el logaritmo.

Definición 11.1. *Sea S una matriz simétrica definida positiva y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $S^\alpha = \exp(\alpha \log(S))$.*

Esta definición resuelve (i) y (ii), pues log y exp son aplicaciones diferenciables (de hecho analíticas), y coincide con la definición algebraica. En efecto, diagonalizando, $S = U^t \langle \lambda_i \rangle U$ y $\log(S) = U^t \langle a_i \rangle U$ con $\lambda_i = e^{a_i}$, de modo que

$$S^\alpha = \exp(\alpha U^t \langle a_i \rangle U) = \exp(U^t \langle \alpha a_i \rangle U) = U^t \exp\langle \alpha a_i \rangle U = U^t \langle e^{\alpha a_i} \rangle U = U^t \langle \lambda_i^\alpha \rangle U.$$

Las propiedades naturales se deducen fácilmente:

$$S^\alpha S^\beta = S^{\alpha+\beta}, \quad (S^\alpha)^\beta = S^{\alpha\beta}.$$

Obsérvese además que por la misma definición, las potencias S^α son simétricas definidas positivas. Pero el hecho importante aquí es el siguiente:

Proposición 11.2. *Si una matriz $S \in \Sigma^+$ es simpléctica, también lo es cualquier potencia suya S^α.*

Demostración. Supongamos que S es simpléctica y veamos que S^α también lo es. Sabemos que S y S^α se diagonalizan simultáneamente, luego tenemos una base de autovectores $u_1, \dots, u_m$ de ambas con autovalores asociados positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ y $\lambda_1^\alpha, \dots, \lambda_m^\alpha$. Por la bilinealidad de la forma simpléctica ω, para probar que S^α es simpléctica basta ver que para cualquier par de vectores u_i, u_j se satisface:

$$\omega(S^\alpha u_i, S^\alpha u_j) = \omega(u_i, u_j).$$

Ahora bien, S es simpléctica, y por tanto;

$$\omega(u_i, u_j) = \omega(Su_i, Su_j) = \omega(\lambda_i u_i, \lambda_j u_j) = \lambda_i \lambda_j \omega(u_i, u_j).$$

Esto indica que, o bien $\lambda_i\lambda_j = 1$, o bien $\omega(u_i, u_j) = 0$. Pero ya que

$$\omega(S^\alpha u_i, S^\alpha u_j) = \omega(\lambda_i^\alpha u_i, \lambda_j^\alpha u_j) = \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha \omega(u_i, u_j),$$

si $\lambda_i\lambda_j = 1$, hemos terminado, mientras que en caso contrario $\omega(u_i, u_j) = 0$ y también $\omega(S^\alpha u_i, S^\alpha u_j) = 0$. □

Terminamos con una consecuencia topológica sencilla que entenderemos mejor en la sección siguiente.

Proposición 11.3. *La aplicación*

$$\rho_\alpha : Sp_{2n} \to Sp_{2n} : M \mapsto (MM^t)^{-\alpha/2} M$$

es un retracto de deformación diferenciable (analítico) del grupo simpléctico sobre su subgrupo ortogonal.

Demostración. La aplicación ρ_α es diferenciable pues la transposición, el producto de matrices y tomar potencias reales son operaciones diferenciables. Observamos que ρ_0 es la identidad y que si U es una matriz ortogonal, como $UU^t = I$, $\rho_\alpha(U) = U$. Así, para ver que ρ_α es retracto de deformación sobre el subgrupo ortogonal de Sp_{2n} queda constatar que $\rho_1(M)$ es ortogonal, pero esto es una comprobación inmediata:

$$(MM^t)^{-1/2} M[(MM^t)^{-1/2} M]^t = (MM^t)^{-1/2} MM^t (MM^t)^{-1/2} = (MM^t)^0 = I$$

(nótese que MM^t es simétrica, luego lo son sus potencias). □

12. Descomposición polar simpléctica y homotopía

Terminamos este trabajo explicando de una manera topológica muy explícita por qué existe la retracción con la que concluimos la sección anterior. Ello requiere entender el papel que juega la subvariedad (que no subgrupo) Sp_{2n}^+ de Sp_{2n} formada por las matrices simplécticas, simétricas y definidas positivas, es decir:

$$Sp_{2n}^+ = \Sigma^+ \cap Sp_{2n}.$$

(12.1) El difeomorfismo $Sp_{2n} \equiv Sp_{2n}^+ \times R_{2n}$**.** Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} h : Sp_{2n} &\longrightarrow Sp_{2n}^+ \times R_{2n} \\ M &\longmapsto ((MM^t)^{1/2}, (MM^t)^{-1/2} M) \end{aligned}$$

que está bien definida pues hemos visto en 11.3 que $(MM^t)^{-1/2}M$ es una rotación simpléctica y, como MM^t es simpléctica definida positiva, su potencia $(MM^t)^{1/2}$ es simpléctica definida positiva.

A continuación se demuestra que h es un difeomorfismo entre Sp_{2n} y $Sp_{2n}^+ \times R_{2n}$. No cabe duda de que h es diferenciable por serlo las aplicaciones implicadas en su definición. Si denotamos h_1,h_2 a sus componentes, observamos que $h_1(M)h_2(M) = M$. Así, si M y N tienen la misma imagen, $M = h_1(M)h_2(M) = h_1(N)h_2(N) = N$, y h es inyectiva.

Además, dado $(S,U) \in Sp_{2n}^+ \times R_{2n}$, SU es simpléctica y se obtiene que $h(SU) = (S,U)$ pues :

$$\begin{cases} h_1(SU) = (SUU^tS^t)^{1/2} = (SS^t)^{1/2} = S, \\ h_2(SU) = (SUU^tS^t)^{-1/2}SU = S^{-1}SU = U. \end{cases}$$

Es decir, h es una biyección cuya inversa es el producto de matrices $(S,U) \mapsto SU$ que es diferenciable.

En conclusión, $Sp_{2n}^+ \times R_{2n}$ es una variedad difeomorfa a Sp_{2n} y toda matriz de Sp_{2n} se puede escribir de forma única como producto de una matriz simpléctica simétrica definida positiva y una rotación simpléctica. Esto se conoce como *descomposición polar* de una matriz simpléctica real. $\square$

(12.2) La variedad Sp_{2n}^+. Acabamos de ver que el producto $Sp_{2n}^+ \times R_{2n}$ es variedad diferenciable, pero resulta que Sp_{2n}^+ también lo es, y es una variedad conexa.

La conexión es una cuestión topológica inmediata, pues la primera componente del difeomorfismo h del párrafo anterior, $h_1 : Sp_{2n} \to Sp_{2n}^+$, es una aplicación continua y sobreyectiva (de hecho hemos visto que $h_1(S) = h_1(SI) = S$ para $S \in Sp_{2n}^+$). Para mostrar que Sp_{2n}^+ es una variedad procedemos como sigue. Fijamos $S \in Sp_{2n}^+$ y examinamos la siguiente composición de aplicaciones:

$$R_{2n} \xhookrightarrow{j_S} Sp_{2n} \xrightarrow{h_2} R_{2n},$$

donde j_S es la inclusión $U \mapsto SU$ y h_2 es la segunda componente de h. Sabemos que $h_2(j_S(U)) = h_2(SU) = U$, luego nuestra composición es la identidad. Derivando en I, como $S = j_S(I)$, queda

$$\mathrm{Id} = d_I \,\mathrm{Id} = d_I(h_2 \circ j_S) = d_S h_2 \circ d_I j_S,$$

y deducimos que $d_S h_2$ es sobreyectiva. Puesto que $Sp_{2n}^+ = h_2^{-1}(I)$, una vez más el teorema de la función implícita nos dice que Sp_{2n}^+ es una variedad diferenciable de dimensión $\dim(Sp_{2n}) - \dim(R_{2n}) = n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$. $\square$

(12.3) El difeomorfismo $\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n} \equiv Sp_{2n}^+$. En 10.1 se ha determinado que la aplicación exponencial es un difeomorfismo entre Σ y Σ^+. Si restringimos la aplicación a la matrices del álgebra de Lie simpléctica $\mathfrak{sp}_{2n}$, su imagen $\exp(\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n})$ es una subvariedad de Sp_{2n}^+ difeomorfa a un espacio afín.

Se puede calcular fácilmente la dimensión del espacio vectorial $\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n}$ considerando bloques de matrices como en la proposición 7.1. En efecto, una matriz $M \in \Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n}$ ha de satisfacer $M^t = M$ y $MJ + JM = 0$. Con las expresiones para MJ y JM en bloques de matrices obtenidas en la misma proposición, se concluye que $MJ + JM = 0$ se cumple si y sólo si $B = C$ y $A = -D$. Si además imponemos que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

sea simétrica, A y B son simétricas. Por tanto, como dos matrices simétricas de dimensión n bastan para especificar un elemento arbitrario de $\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n}$ la dimensión del espacio es

$$\dim(\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n}) = \tfrac{1}{2}n(n+1) + \tfrac{1}{2}n(n+1) = n(n+1).$$

Ahora bien, Sp_{2n}^+ es una variedad diferenciable conexa de dimensión $n(n+1)$ y contiene a $\exp(\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n})$, que es otra variedad de la misma dimensión, luego necesariamente $\exp(\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n}) = Sp_{2n}^+$. En otras palabras, la exponencial induce un difeomorfismo $\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n} \equiv Sp_{2n}^+$ (y el inverso lo induce el logaritmo). □

Como $\Sigma \cap \mathfrak{sp}_{2n}$ es un espacio vectorial de dimensión $n(n+1)$, lo anterior nos indica que Sp_{2n}^+ es difeomorfa a $\mathbb{R}^{n(n+1)}$, que es contráctil y así entendemos por qué existía el retracto de deformación obtenido en la sección 11. Explícitamente:

(12.4) El retracto de deformación ρ_α via $Sp_{2n} \equiv \mathbb{R}^{n(n+1)} \times R_{2n}$. Tenemos el retracto de deformación evidente

$$\varrho_\alpha : \mathbb{R}^{n(n+1)} \times R_{2n} \to \mathbb{R}^{n(n+1)} \times R_{2n} : (x, U) \mapsto ((1-\alpha)x, U),$$

que lo es de $\mathbb{R}^{n(n+1)} \times R_{2n}$ sobre $\{0\} \times R_{2n}$. Ahora podemos utilizar el difeomorfismo $Sp_{2n} \equiv \mathbb{R}^{n(n+1)} \times R_{2n}$ para trasladar ϱ_α a Sp_{2n}, *y obtenemos el retracto ρ_α de* 11.3. En efecto, aplicando todas las definiciones introducidas previamente a $M \in Sp_{2n}$:

$$\begin{aligned}
M &\mapsto (h_1(M), h_2(M)) = (S, U)\\
&\mapsto (\log(S), U)\\
&\mapsto \varrho_\alpha(\log(S), U) = ((1-\alpha)\log(S), U)\\
&\mapsto \big(\exp\big((1-\alpha)\log(S)\big), U\big) = (S^{1-\alpha}, U)\\
&\mapsto S^{1-\alpha}U = h_1(M)^{1-\alpha}h_2(M) = (MM^t)^{(1-\alpha)/2}(MM^t)^{-1/2}M = (MM^t)^{-\alpha/2}M = \rho_\alpha(M).
\end{aligned}$$

En suma el retracto que habíamos definido recogía exactamente el hecho de ser Sp_{2n}^+ un factor contráctil de Sp_{2n}. □

Referencias

[1] E. Artin: *Geometric Algebra.* 7
Interscience, New York 1957.

[2] A. Baker: *An introduction to matrix groups and their applications.* 20, 21
Lecture Notes, Dept. Mathematics, Glasgow 2000

[3] M. Boij, D. Laskov: *An Introduction to Algebra and Geometry via Matrix Groups.* 17
Lecture notes, KTH Matematik 1998, revised 2008.

[4] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, J.M. Ruiz: *Álgebra Lineal, vol 2.* 3, 26, 28
Sanz y Torres, Madrid 2010.

[5] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables.* 16
Sanz y Torres, Madrid 2016.

[6] M.A. de Gosson: *Symplectic methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics.* 26
Birkhauser, Basel 2011.

[7] F. Hiai, D. Petz: *Introduction to Matrix Analysis and applications.* 30
Springer UTX, New Delhi 2014.

[8] D.S. Mackey, N. Mackey: *On the determinant of symplectic matrices.* 8
`Numerical Analysis Report 422, Manchester Centre Comp. Math. 2003.`
[9] E. Outerelo, J.A. Rojo, J.M. Ruiz: *Topología Diferencial.* 25
Sanz y Torres, Madrid 2014.
[10] E. Outerelo, J.M» Sánchez Abril: *Elementos de topología.* 14
Sanz y Torres, Madrid 2008.