Propiedades topológicas básicas de las cubiertas ramificadas de Fox

José María Montesinos–Amilibia*

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, España
montesin@mat.ucm.es

Dedicado con agradecimiento y afecto al Profesor Enrique Outerelo Domínguez con motivo de su jubilación.

ABSTRACT

The fundaments of Fox's branched covering theory are freshly exposed using inverse limits. Sufficient conditions for a branched covering to be onto, or open, or discrete are given. An example of a branched covering over S^3 with a non-discrete fiber is constructed.

2000 Mathematics Subject Classification: 32S05, 14B07, 14H20.
Key words: Spread, branched covering, folded covering, singular covering.

Agradezco al Profesor Outerelo su asesoramiento en cuestiones de topología y a los Profesores Rodríguez Sanjurjo y Alonso Morón su cuidadosa lectura del artículo y sus valiosas sugerencias.

1. Introducción

En la época en que Ralph H. Fox, profesor a la sazón de la Universidad de Princeton, en los Estados Unidos, escribió su famoso artículo [7] se desconocía si todas las variedades topológicas (metrizables) eran poliedros y si era posible la existencia de dos poliedros, subyacentes a la misma variedad topológica, y sin subdivisiones isomorfas. La solución positiva de estos dos problemas (al menos en dimensión 3) era

*Parcialmente subvencionado por BFM2002-04137-C02-01.

la clave para establecer la naturaleza topológica de ciertos invariantes de los nudos que habían sido definidos a partir de un poliedro (*invariantes combinatorios*). El proceso de definición de estos invariantes consistía en construir cubiertas (coverings, überlagerungen, revêtements) ramificadas sobre estos nudos, definidas de un modo canónico, y obtener los invariantes ordinarios de estas variedades cubrientes: grupos de homología, invariantes de enlace, etc.

La dificultad de saber si estos invariantes eran topológicos radicaba en que la construcción de las cubiertas ramificadas dependía esencialmente de la estructura de poliedro del espacio base. La parte del espacio total que cubría lo que estaba fuera del conjunto singular era una cubierta no ramificada (*cubierta no ramificada asociada*) y era bien conocido ya entonces que esta parte dependía sólo de la topología y no de la triangulación. Se trataba pues de averiguar si **todo** el espacio total dependía sólo de la topología del par topológico formado por la base y el conjunto singular. El problema pues se centraba en cómo completar la parte del espacio total que cubría lo que estaba fuera del conjunto singular, construyendo topológicamente y **de modo único** la parte del espacio total yacente sobre el conjunto singular, despojando a éste de toda estructura adicional que no fuera topológica.

Esto involucraba un formidable reto. En efecto, el conjunto singular que hasta esa época era habitualmente un nudo ordinario (manso), bien podía ser ahora un nudo salvaje. ¿Y como definir la cubierta sobre el nudo si no se dispone de un entorno tubular en torno a él?

Fox salió airoso de todos estos problemas al generalizar el concepto (hasta entonces, no topológico) de cubierta ramificada. Introdujo un nuevo tipo de aplicaciones: los "spreads" (despliegues) a los cuales pudo aplicar su concepto de completación. Así pudo desarrollar una Teoría Topológica de Cubiertas Ramificadas. Su Teoría posee todas las ventajas esperadas: vale para espacios muy generales (localmente conexos y T_1); el conjunto singular es muy general (básicamente se le exige tener codimensión ≥ 2); y la cubierta ramificada depende exclusivamente de la cubierta no ramificada asociada y del par topológico (base, conjunto singular).

Una medida de la precisión de las definiciones de Fox y del alcance de sus teoremas es que la Teoría de Compactación Ideal de Freudenthal (ver [8] y [4]) es un caso particular de la Teoría de Fox, que además pone de manifiesto una elegante relación con la compactación con un punto de Alexandroff (ver [7] y [17]).

Fox desarrolló todas estas ideas en unas conferencias que pronunció en México. Allí encontró un ambiente propicio, ya abonado por las conferencias de Lefschetz. Entre los asistentes estaba Sylvia de Neymet, recientemente fallecida, que había escrito una Tesis de Maestría bajo la dirección de Lefschetz sobre cubiertas ramificadas (véanse [20], [21], [22].)

Varios autores han generalizado con mayor o menor éxito estas ideas de Fox. Conviene citar aqui el trabajo de Michael ([16], [15]) quien desarrolla las ideas de una nota al pie de página de [7] con una habilidad magistral. Otros trabajos que toman estas ideas en un contexto más amplio son los citados antes [20], [21], [22].

Finalmente es indispensable mencionar la obra de Hunt [10] quien empleó la Teoría de Uniformidades para desarrollar la Teoría de Fox.

Contemporáneo al esfuerzo de Fox fue el de otros autores cuya obra no conviene que caiga en olvido. Los trabajos de Church y Hemmingsen (ver [3] y la bibliografía en él citada) pueden leerse en conjunción con la obra de Fox pues están repletos de importantes resultados sobre aplicaciones abiertas. Los trabajos de Cernavskii [2] y Vaisälä [25] caracterizan las cubiertas ramificadas entre variedades compactas. Estos trabajos fructificaron en los importantes resultados de Edmonds y Berstein (ver [1] y la bibliografía en él citada).

Aunque Moise y Bing más tarde demostrarón que toda 3-variedad metrizable es un poliedro y que dos de tales poliedros subyacentes a variedades homeomorfas poseen subdivisiones isomorfas, resolviendo de un plumazo el problema de la naturaleza topológica de los invariantes combinatorios de las 3-variedades y de los nudos, no por eso la Teoría de Fox pierde su importancia. Ya hemos mencionado más arriba la aplicación a la Compactificación de Freudenthal y los resultados de Edmonds y de Berstein y Edmonds. Puede añadirse a esto una manera elegante de construir la desingularización de una curva algebraica. Pero lo más interesante en mi opinión es que puede aplicarse la Teoría de Fox a cubiertas ramificadas sobre conjuntos más complicados que los nudos mansos ("tame knots"). Recientemente he dedicado varios trabajos a estas investigaciones. He generalizado, por ejemplo, el teorema obtenido independientemente por Hilden y Montesinos, probando que toda 3-variedad abierta es una cubierta ramificada de S^3 privado de un conjunto manso homeomorfo al espacio de terminales ("ends") de la variedad [18]. En particular, la 3-variedad de Whitehead resulta ser una cubierta doble de $\mathbb{R}^3$ ramificada sobre un conjunto propiamente homeomorfo a $\mathbb{R}^1$. También he señalado la existencia de una colección no numerable de nudos salvajes ("wild knots") (que bordean discos) en S^3 cuyas cubiertas cíclicas ramificadas son siempre S^3 [19].

Al escribir estos últimos trabajos sentí la necesidad de releer la obra de Fox [7] y comprobar la exactitud de sus afirmaciones. El resultado de mis lecturas es el trabajo [17] en que hago una generalización de cubierta ramificada para incluir los "folded coverings" de Tucker [23] que son importantes para fundamentar bien la Teoría de Orbificies ("orbifolds") (ver [24] y [14]). Aquí publico los Teoremas de ese artículo [17] sin enunciarlos en toda su generalidad, concretándome a lo referente a cubiertas ramificadas. Resulta así una visión completa de las definiciones y principales teoremas de la Teoría, excepto la existencia y unicidad de la completación de un despliegue, para lo cual me refiero a [7] o a [17]. Lo nuevo, además de la presentación, son ciertas condiciones que aseguran que una cubierta ramificada es epiyectiva (Teorema 5.8), o abierta (Corolario 5.9) o posee fibra discreta (Teorema 5.11). También se da un sorprendente ejemplo de cubierta ramificada con una fibra no discreta, pero no conozco ejemplos ni de cubiertas ramificadas no epiyectivas, ni de cubiertas ramificadas que no sean abiertas.

El trabajo lo dedico al Profesor Outerelo, y va cargado de enorme afecto y agradecimiento. Son muchos años los pasados juntos en esta Universidad. Primero, como alumno suyo y de Don Francisco Botella; luego, codo con codo, en la clase de Problemas de Topología y como alumno suyo de Doctorado; y finalmente, en estos últimos años cercanos a su jubilación, como Director del Departamento, colega y amigo.

Muchas gracias, Enrique.

2. Cubiertas

Las aplicaciones entre espacios topológicos se supondrán continuas. (Para las cuestiones topológicas nos referimos a [11], [12], [6] y [5].) Comencemos con algunas generalidades sobre cubiertas (überlagerungen, coverings, revêtements).

Sea $g : Y \to Z$ una aplicación continua. Un entorno abierto W de $z \in Z$ se dirá un *entorno elemental* si $z \in g(Y)$ y la restricción de g a cada componente conexa de $g^{-1}(W)$ es un homeomorfismo sobre W. Un punto de Z con entorno elemental se llama *ordinario*. Un punto no ordinario es *singular*. El conjunto de puntos ordinarios de Z es un abierto Z_o de Z. Su complemento Z_s es el cerrado de puntos singulares. Una *cubierta* es una aplicación continua $g : Y \to Z$, donde Y y Z son conexos y tal que $Z_o = Z$ (y por tanto g es epiyectiva). Una cubierta en que Y es localmente conexo es abierta y entonces Z resulta ser también localmente conexo, y las componentes conexas de las imágenes inversas de abiertos de Z son base de la topología de Y. Además, en este caso, $g : Y \to Z$ es *discreta*, es decir, para todo $z \in Z$ la fibra $g^{-1}(z)$, como subespacio de Y, posee la topología discreta.

Lema 2.1 *Sea $g : Y \to Z$ una cubierta en que Y es localmente conexo. Sea W un abierto conexo de Z, y sea C una componente conexa de $g^{-1}(W)$. Entonces $g(C) = W$ y además $g \mid C : C \to W$ es una cubierta.*

Demostración. $g(C)$ es abierto conexo contenido en W. Sea $z \in \overline{g(C)} \cap W$ y V un entorno elemental de z contenido en W. Como $V \cap g(C) \neq \emptyset$, existe $x \in C$ tal que $g(x) \in V$. Sea D la x-componente conexa de $g^{-1}(V)$. Como $V \subset W$ es $D \subset C$. Como V es un entorno elemental $g(D) = V \subset g(C)$. Luego $z \in V$ está en $g(C)$. Es decir

$$g(C) = g(C) \cap W = \overline{g(C)} \cap W.$$

Así $g(C)$ es abierto-cerrado en W. Como W es conexo, $g(C) = W$. Para ver que

$$h = g \mid C : C \to W$$

es una cubierta, tomemos un entorno elemental (con respecto a g) $V \subset W$ de un punto $z \in W$. Sea D una componente conexa de $g^{-1}(V)$. Como $V \subset W$ ella está necesariamente contenida en alguna componente conexa de $g^{-1}(W)$. Entonces D

es una componente conexa de $h^{-1}(V)$ sii D es una componente conexa de $g^{-1}(V)$ y $D \subset C$. Entonces

$$h \mid D = (g \mid C) \mid D = g \mid D$$

es un homeomorfismo sobre V. Así V es un entorno elemental (con respecto a h) del punto $z \in W$. $\square$

3. Despliegues

La siguiente definición fue introducida por Fox en [7]. Una aplicación continua $g : Y \to Z$ entre espacios T_1 se llamará un **despliegue** ("spread") si las componentes conexas de imágenes inversas de abiertos de Z son base de la topología de Y. Esto es, dado un punto $y \in Y$ y un entorno abierto U de y en Y existe un abierto W en Z tal que la componente conexa de $g^{-1}(W)$ que contiene y (la y-componente de $g^{-1}(W)$, desde ahora) es un abierto entre y y U. Se deduce que Y es localmente conexo. Por ejemplo, una cubierta $g : Y \to Z$ entre espacios T_1 en que Y es localmente conexo, es un despliegue.

Proposición 3.1 *Sea $g : Y \to Z$ un despliegue. Sean $y_1, y_2, ..., y_k$ diferentes puntos en la misma fibra $g^{-1}(z)$. Existe entonces un entorno abierto W de z en Z tal que las componentes conexas de $g^{-1}(W)$ que contienen a los puntos $y_1, y_2, ..., y_k$ son k conjuntos (abiertos) disjuntos dos a dos.*

Nota 3.2 *En otras palabras,* ***hay propiedad de separación T_2 en las fibras de g con respecto a Y*** *(see [17, Theorem 2]).*

Demostración. Por definición de despliegue y por ser Y un espacio T_1, para cada par de índices $1 \leq i, j \leq k$ existe un entorno abierto W_{ij} de z en Z tal que la componente conexa de $g^{-1}(W_{ij})$ que contiene al punto y_i no contiene a y_j. Lo que implica que las componentes conexas de $g^{-1}(W_{ij})$ que contienen a y_i e y_j son disjuntas. El abierto W buscado es la intersección de los W_{ij}. $\square$

4. Despliegues completos y completación de Fox de un despliegue

Sea $g : Y \to Z$ un despliegue. Si z es un punto de Z, $\mathcal{E}(z)$ denotará el sistema de entornos abiertos de z. Hay un sistema inverso de espacios topológicos y aplicaciones continuas definido a continuación. Si $W \in \mathcal{E}(z)$ el espacio Y_W es por definición el espacio topológico obtenido de $g^{-1}(W)$ al identificar cada componente conexa a un punto (es un espacio discreto). (Si $y_z(W)$ denota una componente conexa de $g^{-1}(W)$, la misma notación servirá para denotar al punto correspondiente de Y_W.) Si W_1 y

$W_2 \in \mathcal{E}(z)$ y definimos $W_2 \geq W_1$ (leído: "W_2 sigue a W_1") sii $W_2 \subset W_1$ entonces $(\mathcal{E}(z), \geq)$ es un conjunto dirigido. Para $W_2 \geq W_1$ definimos $j_{W_1 W_2} : Y_{W_2} \to Y_{W_1}$ como la función continua inducida por la inclusión canónica $g^{-1}(W_2) \subset g^{-1}(W_1)$. Entonces

$$\{Y_W;\, j_{W_1 W_2};\, \mathcal{E}(z)\}$$

es un sistema inverso cuyo límite representaremos por Y_z. Los elementos de Y_z, llamados aquí *cuerdas* ("threads") sobre z, son elementos $y_z = \{y_z(W)\}$ del producto cartesiano infinito $\Pi_{W \in \mathcal{E}(z)} Y_W$ tales que $j_{W_1 W_2}(y_z(W_2)) = y_z(W_1)$, para todo $W_2 \geq W_1$. Es decir, tales que $y_z(W_2) \subset y_z(W_1)$ siempre que $W_2 \subset W_1$. Denotemos mediante p_W la restricción a Y_z de la proyección canónica

$$\Pi_{W \in \mathcal{E}(z)} Y_W \to Y_W.$$

Sea U una componente conexa fija de $g^{-1}(W)$. Sea U_W la unión de cuerdas $y_z = \{y_z(W)\}$ de Y_z sobre z cuya W-coordenada es U; es decir, tales que $y_z(W) = U$. Entonces, es bien sabido [5, Proposition 2.5.5] que una base de la topología de Y_z es

$$\{U_W : W \in \mathcal{E}(z), U \text{ componente conexa de } g^{-1}(W)\}.$$

Nótese que una cuerda queda perfectamente determinada si se conoce $y_z(V)$ para los miembros V de una base del sistema de entornos de z. Pues, en efecto, si $W \in \mathcal{E}(z)$ y V es básico contenido en W entonces $y_z(W)$ es la componente conexa de $g^{-1}(W)$ que contiene a $y_z(V)$.

Proposición 4.1 *Si $y_z = \{y_z(W)\} \in Y_z$ es una cuerda sobre z, entonces la intersección $\bigcap_{W \in \mathcal{E}(z)} y_z(W)$ consta a lo más de un punto (de $g^{-1}(z)$).*

Demostración. Si la intersección no es vacía, ella consta de puntos de la fibra de $g^{-1}(z)$, pero éstos están separados por componentes conexas de algún $g^{-1}(W)$. □

Proposición 4.2 *(Comparar [11, 4.5 Lemma of embedding].) La aplicación $\lambda_z : g^{-1}(z) \to Y_z$ definida por $\lambda_z(y) = \{yW\}$, donde yW es la y-componente conexa de $g^{-1}(W)$, es continua, abierta sobre su imagen e inyectiva.*

Demostración. Es inyectiva porque por la Proposición 4.1 $\bigcap_{W \in \mathcal{E}(z)}(yW) = \{y\}$. Veamos que λ_z es continua. Sea U_W un miembro de la base de Y_z. Entonces $y \in U \cap g^{-1}(z) \Leftrightarrow yW = U \Leftrightarrow \lambda_z(y) \in U_W$. Es decir $\lambda_z^{-1}(U_W) = U \cap g^{-1}(z)$ que es abierto en $g^{-1}(z)$. Así λ_z es continua. Además λ_z es abierta sobre su imagen porque $\lambda_z(U \cap g^{-1}(z)) = \lambda_z \lambda_z^{-1}(U_W) = U_W \cap \lambda_z(g^{-1}(z))$. □

Definición 4.3 ([17, Definition 1]) *El despliegue g es completo si $\lambda_z : g^{-1}(z) \to Y_z$ es epiyectiva (y por la anterior Proposición, un homeomorfismo) para todo $z \in Z$. Equivalentemente: el despliegue g es completo si, para toda cuerda $y_z = \{y_z(W)\}$ sobre z, y para todo z, la intersección $\bigcap_{W\in\mathcal{E}(z)} y_z(W)$ es no vacía (y consta de un punto).*

En la terminología de Fox se dice que X *es localmente conexo en* Y sii Y posee una base cuyas intersecciones con X son conexas.

Un despliegue $g : Y \to Z$ se llama una *completación* de un despliegue $f : X \to Z$ si (i) X es un subespacio denso y localmente conexo en Y; y (ii) g es completo y extiende f.

El siguiente enunciado es el Teorema Fundamental de [7]. Una demostración con correcciones está en [17].

Teorema 4.4 *Todo despliegue posee una única completación (a menos de homeomorfismo).*

5. Cubiertas ramificadas

Esta sección sigue de cerca [17].

Definición 5.1 *Una cubierta ramificada es un despliegue $g : Y \to Z$ completo entre espacios conexos, tal que Z_o es denso y localmente conexo en Z, y $g^{-1}(Z_o)$ es denso y localmente conexo en Y.*

Hay un ejemplo de despliegue $g : Y \to Z$ completo con Y conexo y Z_o conexo, denso y localmente conexo en Z, pero en que $g^{-1}(Z_o)$ no es denso en Y.

El siguiente lemma implica que los espacios Z_o y $g^{-1}(Z_o)$ son conexos.

Lema 5.2 ([7]) *Si X es denso y localmente conexo en Y entonces la intersección de X con cualquier abierto conexo de Y es conexa.*

Demostración. En efecto, sea V un abierto conexo de Y. Supongamos que $U = V \cap X$ (que no es vacío por ser X denso en Y) no es conexo. Entonces existen abiertos en X, A_1 y A_2, no vacíos y disjuntos cuya unión es U. Vamos a hallar abiertos en Y, B_1 y B_2, no vacíos y disjuntos cuya unión es V. Para ello, sea $y \in V$ arbitrario. Tomamos un entorno $N(y)$ de y, contenido en V, tal que su intersección con X, que llamaremos $M(y)$, sea conexa. (Tal $N(y)$ existe por ser X localmente conexo en Y.) Como $M(y) \subset U = A_1 \cup A_2$, se tendrá que $M(y)$ está o en A_1 o en A_2. En el primer caso, y pertenece a B_1 y en el segundo $y \in B_2$ .Claramente (i) $A_i \subset B_i$, $i = 1, 2$; (ii) B_i es abierto: si $y \in B_i$, entonces $N(y) \subset B_i$; (iii) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$; (iv) $B_1 \cup B_2 = V$. Luego V no es conexo. Esto demuestra el Lema. □

Entonces, la restricción $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z_o$ es una cubierta, llamada *la cubierta asociada a* g. El grado de la cubierta asociada a g es por definición *el grado de* g.

Lema 5.3 *Sea A un subespacio de X conexo, denso y localmente conexo en X. Sea $A \subset B \subset X$. Entonces B es conexo, denso y localmente conexo en X y además X es localmente conexo.*

Demostración. Como $X = \overline{A} \subset \overline{B} \subset X$, B es denso. Como $A \subset B \subset \overline{A}$ y A es conexo, B es conexo. Por ser A localmente conexo en X, hay base de X tal que para cualquiera W de sus miembros es $W \cap A$ conexo. Entonces, como $W \cap A \subset W \cap B \subset W \subset \overline{W \cap A}$, se tiene que $W \cap B$ es conexo (y así B es localmente conexo en X) y que W es conexo (y así X es localmente conexo). □

Lema 5.4 *Sea A un subespacio de Y y sea $X \subset Y$ un abierto. Entonces $X \cap A$ es localmente conexo en X si A es localmente conexo en Y. También $X \cap A$ es denso en X si A es denso en Y.*

Demostración. Si hay base de Y cuyos miembros, intersecados con A, dan conjuntos conexos, tomamos los miembros de esa base que yacen en X. Su intersección con A coincide con su intersección con $X \cap A$ y sigue siendo conexa. Si A es denso en Y todo abierto de X, siendo abierto de Y, corta a A, y por tanto a $X \cap A$. □

Proposición 5.5 *Si g es una cubierta ramificada, entonces Z es localmente conexo.*

Demostración. El Lema 5.3 implica que Z es localmente conexo por ser Z_o conexo, denso y localmente conexo en Z. □

Proposición 5.6 *Sea $g : Y \to Z$ una cubierta ramificada. Sea W un abierto conexo de Z, y sea C una componente conexa de $g^{-1}(W)$. Entonces $C \cap g^{-1}(Z_o)$ es una componente conexa de $g^{-1}(W \cap Z_o)$ y g restringida a $C \cap g^{-1}(Z_o)$ es una cubierta sobre $W \cap Z_o$.*

Demostración. Por ser g un despliegue, C es un abierto conexo de Y. Por ser $g^{-1}(Z_o)$ denso y localmente conexo en Y, C corta a $g^{-1}(Z_o)$ en un conjunto conexo (Lemma 5.2). Entonces el conexo $C \cap g^{-1}(Z_o)$, que está contenido en $g^{-1}(W) \cap g^{-1}(Z_o) = g^{-1}(W \cap Z_o)$, yace en alguna componente conexa D de $g^{-1}(W \cap Z_o)$. Veamos que

$C \cap g^{-1}(Z_o) = D$. En efecto, como $D \subset g^{-1}(W)$ es un conexo que corta a la componente conexa C de $g^{-1}(W)$ será $D \subset C$. Entonces $C \cap g^{-1}(Z_o) = D$. Por el Lema 2.1 g restringida a $C \cap g^{-1}(Z_o)$ es una cubierta sobre $W \cap Z_o$. □

Teorema 5.7 *Sea $g : Y \to Z$ una cubierta ramificada. Sea W un abierto conexo de Z, y sea C una componente conexa de $g^{-1}(W)$. Entonces $g \mid C : C \to W$ es una cubierta ramificada cuya imagen contiene a $W \cap Z_o$.*

Demostración. Veamos que $h = g \mid C : C \to W$ es una cubierta ramificada. Sea W_o la colección de puntos de W que son ordinarios para la aplicación h. Por la Proposición 5.6 $C \cap g^{-1}(Z_o)$ es una componente conexa de $g^{-1}(W \cap Z_o)$ y g restringido a $C \cap g^{-1}(Z_o)$ es una cubierta sobre $W \cap Z_o$. Por tanto W_o contiene a $W \cap Z_o$. Para demostrar que h es una cubierta ramificada bastará probar, en virtud del Lema 5.3, que $W \cap Z_o$ es denso y localmente conexo en W y que $h^{-1}(W \cap Z_o)$ es denso y localmente conexo en C, porque entonces las mismas propiedades cumplirán W_o y $h^{-1}(W_o)$. Como W es abierto en Z y Z_o es denso y localmente conexo en Z, entonces $W \cap Z_o$ es denso y localmente conexo en W (Lema 5.4). Empleando este mismo Lema se ve que $h^{-1}(W \cap Z_o) = C \cap g^{-1}(Z_o)$ es denso y localmente conexo en C pues C es abierto en Y y $g^{-1}(Z_o)$ es denso y localmente conexo en Y. □

Teorema 5.8 *Una cubierta ramificada $g : Y \to Z$ es epiyectiva si Z cumple el primer axioma de numerabilidad.*

Demostración. Recuérdese que si $g : Y \to Z$ es un despliegue y z es un punto de Z, $\mathcal{E}(z)$ denota el sistema de entornos abiertos de z. Si W_1 y $W_2 \in \mathcal{E}(z)$ y definimos $W_2 \geq W_1$ sii $W_2 \subset W_1$ entonces $(\mathcal{E}(z), \geq)$ es un conjunto dirigido. Como Z es localmente conexo y cumple el primer axioma de numerabilidad, existe una base $\mathcal{B}(z) = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ de entornos abiertos conexos de z tal que $V_{i+1} \geq V_i$, para todo i. Esto significa que la base $\mathcal{B}(z)$ es un subconjunto cofinal en $(\mathcal{E}(z), \geq)$. Hemos definido un sistema inverso de espacios topológicos y aplicaciones continuas como sigue. Si $W \in \mathcal{E}(z)$ el espacio Y_W es por definición el espacio topológico obtenido de $g^{-1}(W)$ al identificar cada componente conexa a un punto (es un espacio discreto). Para $W_2 \geq W_1$ definimos $j_{W_1 W_2} : Y_{W_2} \to Y_{W_1}$ como la función continua inducida por la inclusión canónica $g^{-1}(W_2) \subset g^{-1}(W_1)$. Entonces

$$\{Y_W; j_{W_1 W_2}; \mathcal{E}(z)\}$$

es un sistema inverso cuyo límite, que representamos por Y_z es homeomorfo a $g^{-1}(z)$ (Definición 4.3). Siendo la base $\mathcal{B}(z)$ un subconjunto cofinal en $(\mathcal{E}(z), \geq)$ el límite Y_z es homeomorfo al límite inverso de la sucesión inversa $\{Y_W; j_{W_1 W_2}; \mathcal{B}(z)\}$ (consultar, por ejemplo, [5, Corollary 2.5.11]). Veamos que la aplicación $j_{W_1W_2} : Y_{W_2} \to Y_{W_1}$ es epiyectiva. Si C_1 es una componente conexa de $g^{-1}(W_1)$, entonces (Proposition 5.6) $C_1 \cap g^{-1}(Z_o)$ es una componente conexa D de $g^{-1}(W_1 \cap Z_o)$, donde $W_1 \cap Z_o$ es conexo (Lema 5.2). Entonces (Lema 2.1) $g(C_1) \supset g(D) = W_1 \cap Z_o \supset W_2 \cap Z_o$. Sea $y \in C_1$ tal que $g(y) \in W_2 \cap Z_o$. Sea C_2 la y-componente conexa de $g^{-1}(W_2)$. Entonces $C_2 \subset C_1$. Así $j_{W_1W_2} : Y_{W_2} \to Y_{W_1}$ es epiyectiva. Esto implica que el límite inverso Y_z de la sucesión inversa $\{Y_W; j_{W_1W_2}; \mathcal{B}(z)\}$, que es homeomorfo a $g^{-1}(z)$, es distinto del vacío [5, Exercise 2.5.A]. Así g es epiyectiva. □

La condición de que Z cumpla el primer axioma de numerabilidad ¿es necesaria en el anterior Teorema 5.8? (compárese [5, Exercise 2.5.A (b)]).

Corolario 5.9 *Una cubierta ramificada $g : Y \to Z$ es una aplicación epiyectiva y abierta si Z cumple el primer axioma de numerabilidad.*

Demostración. Sea $g : Y \to Z$ una cubierta ramificada. Como por la Proposición 5.5 Z es localmente conexo y g es un despliegue, las componentes conexas de imágenes inversas de abiertos *conexos* de Z son base de la topología de Y. Sea pues W un abierto conexo de Z y sea C una componente conexa de $g^{-1}(W)$. Entonces (Teorema 5.8) $g \mid C : C \to W$ es una cubierta ramificada donde W satisface el primer axioma de numerabilidad. Es por tanto epiyectiva; es decir $g(C) = W$. Así g es abierta.
□

En una cubierta ramificada $g : Y \to Z$, al conjunto $Z_s = Z - Z_o$ se le llama **lugar singular** ("branching set") y se dice que g ***es una cubierta ramificada sobre*** Z_s. Sea z_s un punto de Z_s. Sea $y \in g^{-1}(z_s)$. El **índice de ramificación** $b(y)$ es el ínfimo de los grados de las cubiertas asociadas a las cubiertas ramificadas $g \mid C : C \to W$, donde C es la y-componente conexa de $g^{-1}(W)$, para todo entorno abierto conexo W de z_s. Si todos estos grados son infinitos, el índice de ramificación es infinito.

Al conjunto de puntos de $g^{-1}(Z_s)$ con índice de ramificación uno se le denomina **seudorramificación** ("pseudobranching cover"), y al conjunto de puntos de $g^{-1}(Z_s)$ con índice de ramificación mayor que uno se le denomina **ramificación** ("branching cover").

Veremos luego que existen cubiertas ramificadas en que alguna fibra posee punto límite (y no es discreta). Pero:

Teorema 5.10 *Si en una cubierta ramificada $g : Y \to Z$ los índices de ramificación son todos finitos entonces g es discreta.*

Demostración. La fibra sobre un punto de Z_o es evidentemente discreta. Sea pues $y \in Y$ tal que $g(y) = z \in Z_s$. Sea W un entorno abierto y conexo de z y sea C la y-componente conexa de $g^{-1}(W)$. Como por hipótesis el índice de ramificación de y es finito podemos suponer que la cubierta ramificada $g \mid C : C \to W$ tiene grado finito m. Si el punto y fuera de acumulación de $g^{-1}(z)$ entonces $g^{-1}(z) \cap C$ poseería infinitos puntos. Sean $y_1, \ldots, y_{m+1}$ puntos distintos en $g^{-1}(z) \cap C$. Por Proposición 3.1 existe un entorno abierto W_1 de z contenido en W tal que las componentes conexas $V_1, ..., V_{m+1}$ de $g^{-1}(W_1)$ que contienen a los $y_1, \cdots, y_{m+1}$ son distintas y disjuntas. Por la Proposición 5.6

$$g(V_i \cap g^{-1}(W_o)) = W_1 \cap W_o,\ i = 1, ..., m+1.$$

Como W_o es denso en W, existe $z_o \in W_1 \cap W_o$. Este punto posee preimágenes en los $m+1$ entornos disjuntos V_i. Pero esto es imposible porque z_o tiene en C exactamente m preimágenes. Esto concluye la demostración. $\square$

Teorema 5.11 *Si en la cubierta ramificada $g : Y \to Z$ el espacio Y es localmente compacto, entonces los índices de ramificación son todos finitos y en consecuencia la fibra es discreta. Si el espacio Y es compacto entonces la fibra es finita.*

Demostración. Supongamos Y localmente compacto. Entonces, para todo punto $y_s \in Y$ y todo entorno U de y_s existe W, entorno abierto conexo de $z_s = g(y_s)$ en Z, tal que la y_s-componente conexa C de $g^{-1}(W)$ tiene adherencia compacta, está contenida en U y además $g(C) = W$. (Si Y es compacto tomemos $W = Z$ y $C = Y$.) Supongamos que $z_s \in Z_s$. Para todo $z_o \in W \cap Z_o$, el conjunto $C \cap g^{-1}(z_o)$ es finito, pues si no lo fuera tendría un punto de acumulación q en $\overline{C}$ y entonces $g(q) = z_o$ no sería un punto ordinario. Esto demuestra que el índice de ramificación de y_s es finito. Esto concluye la demostración. $\square$

Una *cubierta no ramificada* ("unbranched covering") es un despliegue $f : X \to Z$ tal que (i) Z_o es conexo, denso y localmente conexo en Z; y (ii) $X = f^{-1}(Z_o)$ es conexo. Entonces $\widetilde{f} : X \to Z_o$, definida por $\widetilde{f}(x) = f(x)$, es una cubierta, llamada *la cubierta asociada* a f. Como, por ser f un despliegue, X es localmente conexo, la cubierta asociada $\widetilde{f}$ es abierta, y siendo Z_o abierto en Z, también f es abierta.

Teorema 5.12 *Sea $g : Y \to Z$ una cubierta ramificada. Entonces $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z$ es una cubierta no ramificada cuya cubierta asociada es $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z_o$. Además g es la completación de $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z$. De este modo, g está unívocamente determinada por la cubierta no ramificada asociada $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z$; y ésta, por la cubierta asociada $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z_o$ y la inclusión $Z_o \subset Z$.*

Demostración. Por el Lema 5.2 aplicado al conexo Y, $g^{-1}(Z_o)$ es conexo. Así $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z$ es una cubierta no ramificada. Como $g^{-1}(Z_o)$ es conexo, denso y localmente conexo en Y, entonces g es la completación de $g \mid g^{-1}(Z_o) : g^{-1}(Z_o) \to Z$. $\square$

El método más frecuente de obtener cubiertas ramificadas es completar cubiertas no ramificadas. Nótese que, en este proceso, el conjunto de puntos ordinarios puede aumentar: piénsese en una completación que produzca una cubierta ordinaria.

Obsérvese que aunque la fibra sea discreta los índices de ramificación pueden ser infinitos (piénsese en una fibra que consta de un solo punto con índice de ramificación infinito).

Hay un ejemplo de cubierta ramificada con fibra no discreta. Para entender la naturaleza topológica de la fibra en ese ejemplo es conveniente poder determinarla desde su complemento en Y. Esta es la razón del siguiente Teorema.

Teorema 5.13 *Sea $g : Y \to Z$ una cubierta ramificada. Sea $z_s \in Z_s$ y sea $X = Y - g^{-1}(z_s)$. Sea $f = g \mid X : X \to Z$. Entonces $g^{-1}(z_s)$ es homeomorfo al límite inverso X_{z_s} del sistema inverso $\{X_W; h_{W_1 W_2}; \mathcal{B}(z_s)\}$ donde $\mathcal{B}(z_s)$ es el sistema de entornos abiertos y conexos de z_s, y si $W \in \mathcal{B}(z_s)$, X_W es el espacio topológico discreto obtenido de $f^{-1}(W)$ al identificar cada componente conexa a un punto. Para $W_2 \geq W_1$ definimos $h_{W_1 W_2} : X_{W_2} \to X_{W_1}$ como la función continua inducida por la inclusión canónica $f^{-1}(W_2) \subset f^{-1}(W_1)$.*

Demostración. Como $g^{-1}(Z_o) \subset X \subset Y$, el Lema 5.3 implica que X es conexo, denso y localmente conexo en Y. Por tanto (Lema 5.2) si $W \in \mathcal{B}(z_s)$ y C es una componente conexa de $g^{-1}(W)$, entonces

$$C \cap X = C \cap f^{-1}(W)$$

es conexo. Como

$$g(C) \supset W \cap Z_o \neq \emptyset$$

(Teorema 5.7), $C \cap X \neq \emptyset$. Además $C \cap X$ es una componente conexa de $f^{-1}(W)$. En efecto, si

$$C \cap X \subset D \subset f^{-1}(W)$$

con D conexo, se tiene $D \cap C \neq \emptyset$ y $D \subset g^{-1}(W)$, y siendo C una componente conexa de $g^{-1}(W)$, necesariamente $D \subset C$; y así

$$D = D \cap X \subset C \cap X.$$

De esta manera , la aplicación

$$k_W : Y_W \to X_W;\ k_W(C) = C \cap X$$

está bien definida y envía la componente conexa C de $g^{-1}(W)$ a la componente conexa $C \cap X$ de $f^{-1}(W)$. Esta aplicación es biyectiva. En efecto, si $D \subset f^{-1}(W)$ es una componente conexa de $f^{-1}(W)$, necesariamente hay una componente conexa C de $g^{-1}(W)$ tal que $D \subset C$. Entonces $k_W(C) = C \cap X$ es una componente conexa de $f^{-1}(W)$ que contiene a la componente conexa D de $f^{-1}(W)$. Así

$$k_W(C) = C \cap X = D.$$

Luego k_W es epiyectiva. Si C_1 y C_2 son componentes conexas de $g^{-1}(W)$ tales que $k_W(C_1) = k_W(C_2)$, es

$$C_1 \cap X = C_2 \cap X \neq \emptyset,$$

lo que implica que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, y así $C_1 = C_2$. De este modo $k_W : Y_W \to X_W$ es un homeomorfismo. Ahora es evidente que los sistemas inversos

$$\{X_W; h_{W_1W_2}; \mathcal{B}(z_s)\}$$

y $\{Y_W; j_{W_1W_2}; \mathcal{B}(z_s)\}$ tienen límites homeomorfos. Es decir X_{z_s} es homeomorfo a Y_{z_s} que es homeomorfo a $g^{-1}(z_s)$ (Definición 4.3). $\square$

Aplicaremos este Teorema en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.14 *Una cubierta ramificada que posee una fibra compacta pero no discreta.*

Construcción. En la 3-esfera S^3, pensada como $\mathbb{R}^3 + \infty$, tomamos en el plano xy un círculo C_1 de radio 1 y una translación h que envía C_1 a un círculo C_2 de igual radio y disjunto con C_1. Definimos $C_{i+1} = h^i(C_1)$. Denotamos por p_i al centro de C_i y por B_i a la bola de centro p_i y radio 1. Denotamos la unión de todos los círculos C_i, $i \geq 1$, mediante S.

El grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash S)$ es libre de rango infinito y está libremente generado por los meridianos μ_i de los círculos C_i. Definimos un homomorfismo transitivo $\omega : \pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash S) \to \Sigma$, donde Σ es el grupo de permutaciones de los números $\{0, 1, 2, ...\}$, al mandar al meridiano μ_i a la trasposición $\omega(\mu_i) = (0i)$.

Hay una cubierta

$$\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}^3 \backslash S$$

definida por la monodromía ω (el grupo fundamental de $\widetilde{X}$ se aplica, mediante $\widetilde{f}_\natural$, inyectivamente sobre la preimagen, mediante ω, del estabilizador del 0 en Σ). Entonces, al componer

$$\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}^3 \backslash S$$

con la inclusión canónica de $\mathbb{R}^3 \backslash S$ en S^3, obtenemos una cubierta no ramificada $f : \widetilde{X} \to S^3$. Esta cubierta no ramificada admite una única completación $g : Y \to S^3$ que es una cubierta ramificada. Veremos que la fibra $g^{-1}(\infty)$ es compacta pero no discreta (admite un punto límite). Para ello aplicaremos el Teorema 5.13 anterior que determina el tipo topológico de la fibra $g^{-1}(\infty)$ a partir de

$$f = g \mid X : X \to S^3$$

donde $X = Y - g^{-1}(\infty)$.

Afirmamos que X es $\mathbb{R}^3 \backslash \cup_{i=1}^{\infty} \{p_i\}$ y vamos a construir $f : X \to S^3$. Sea

$$H := \mathbb{R}^3 \backslash \cup_{i=1}^{\infty} Int(B_i).$$

Sea $\pi : H \to \mathbb{R}^3$ la proyección que identifica puntos de ∂B_i por reflexión en el plano xy, para todo $i \geq 1$. Asímismo, sea

$$H_i := \mathbb{R}^3 \backslash Int(B_i).$$

Sea $\pi_i : H_i \to \mathbb{R}^3$ la proyección que identifica puntos de ∂B_i por reflexión en el plano xy. Definimos

$$f : X \to \mathbb{R}^3 \subset S^3$$

como sigue. La aplicación f restringida a

$$X \backslash \cup_{i=1}^{\infty} Int(B_i) = H$$

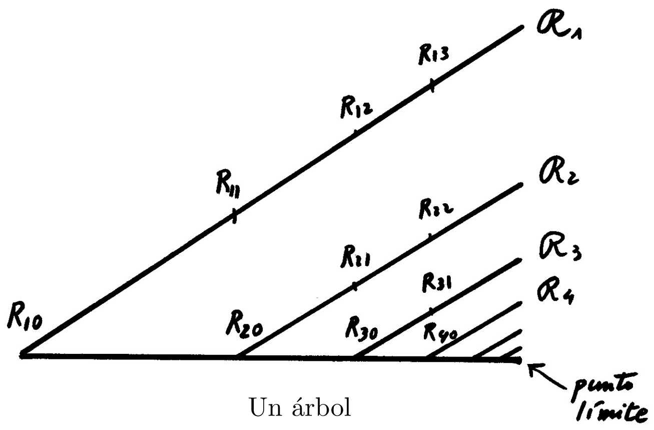
es la proyección π. La restricción de f a $(B_i \backslash \{p_i\})$ es la composición de la reflexión en xy, con la inversión en ∂B_i, con la proyección π_i. No es muy difícil ver que esta es la función f.

Si suponemos, como podemos, que p_i es $(4i, 0, 0)$, y tomamos la sucesión creciente $\{D_i : i \geq 0\}$ de bolas donde D_i tiene centro en $(0, 0, 0)$ y radio $2 + 4i$, la fibra $g^{-1}(\infty)$ es homeomorfa al límite inverso de la sucesión inversa

$$\{X_W; h_{W_1 W_2}; \mathcal{B}(\infty)\},$$

donde $\mathcal{B}(\infty)$ es la base $\{W_i\}_{i=0}^{\infty}$ de entornos abiertos de $\infty \in S^3$ siendo $W_i = S^3 \backslash D_i$. Para entender el límite de la sucesión inversa fabricaremos un grafo como sigue. Para cada $i \geq 0$ tomaremos el espacio discreto $X_i (= X_{W_i})$ con tantos puntos como componentes conexas tiene

$$f^{-1}(W_i) = X \backslash f^{-1}(D_i).$$



Un árbol

Conectaremos mediante aristas un punto P de X_i con aquellos puntos de X_{i+1}que representan componentes de

$$X \backslash f^{-1}(D_{i+1})$$

contenidas en la componente de

$$X \backslash f^{-1}(D_i)$$

representada por P. Se verá que obtenemos un árbol como el de la Figura. El límite inverso buscado $g^{-1}(\infty)$ es el espacio de terminales de este árbol, y este espacio posee un punto límite.

Ante todo $f^{-1}(D_0)$ es una colección numerable de bolas disjuntas de X que no separan a X. En efecto $f^{-1}(D_0)$ es la union de D_0 con las inversas de D_0 con respecto a ∂B_i para todo $i \geq 1$, y la bola inversa con respecto a ∂B_i cae en $Int(B_i) \backslash \{p_i\}$. Así X_0 es un espacio que consta de un único punto que denotaremos por R_{10}.

Tomemos ahora D_1. Esta bola contiene en su interior a B_1 y en su exterior a todas las demás bolas B_i, $i \geq 2$. Entonces $f^{-1}(D_1)$ es la unión de $D_1 \backslash Int(B_1)$ con la inversa de este conjunto con respecto a ∂B_1 (lo cual es una bola con agujero) más las inversas de D_1 con respecto a ∂B_i para todo $i \geq 2$ y éstas son bolas situadas en $Int(B_i) \backslash \{p_i\}$, $i \geq 2$. Entonces $X \backslash f^{-1}(D_1)$ consta de dos componentes que denotaremos por R_{11} (representa la componente acotada de $X \backslash\ f^{-1}(D_1)$ la cual yace en $Int(B_1)$) y R_{20} (representa la no acotada). Así R_{10} se *bifurca* en dos nuevos vértices R_{20} y R_{11}.

Tomemos D_2. Esta bola contiene en su interior a $B_1 \cup B_2$ y en su exterior a todas las demás bolas B_i, $i \geq 3$. Entonces $f^{-1}(D_2)$ es la unión de $D_2 \backslash Int(B_1 \cup B_2)$, más la inversa de $D_2 \backslash Int(B_1)$ con respecto a ∂B_1, más la inversa de $D_2 \backslash Int(B_2)$ con respecto a ∂B_2 (lo cual es una bola con dos agujeros) más las inversas de D_2 con respecto a ∂B_i para todo $i \geq 3$ y éstas son bolas situadas en $Int(B_i)\backslash\{p_i\}$, $i \geq 3$. Entonces $X\backslash f^{-1}(D_2)$ consta de tres componentes que denotaremos por R_{12}, R_{21} y R_{30} (representan las dos componentes acotadas, como antes, y el dominio no acotado). Vemos que R_{12}, está contenida en el interior de R_{11}. Las otras dos están contenidas en R_{20}. Así, X_2 tiene tres puntos: R_{12}, R_{21} y R_{30}. El vértice R_{20} se bifurca en dos aristas que van a R_{21} y a R_{30} ; el vértice R_{11} se prolonga linealmente hasta el R_{12}. Procediendo así acabamos construyendo el árbol de la Figura. Por tanto $g^{-1}(\infty)$ posee un punto límite.

El espacio Y es el resultado de añadir a $X = \mathbb{R}^3\backslash \cup_{i=1}^{\infty} \{p_i\}$ la fibra compacta $g^{-1}(\infty)$. Esta fibra es $(\cup_{i=1}^{\infty}\{p_i\}) \cup \{\infty\}$ y consta de una parte discreta, (que rellena los huecos de $X = \mathbb{R}^3\backslash \cup_{i=1}^{\infty} \{p_i\}$ y que es la **seudorramificación** sobre ∞) y de un punto ideal ∞ (que es la **ramificación** sobre ∞, con índice de ramificación infinito) que posee un peculiar sistema de entornos. Así resulta que el espacio topológico Y privado del punto $\{\infty\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$, pero, por el Teorema 5.11, Y *no es compacto ni localmente compacto*. Luego Y, aunque como conjunto es S^3, como espacio topológico no es S^3, y ni siquiera es una variedad. Obsérvese que si $x \in \mathbb{R}^3$, la fibra $g^{-1}(x)$ tiene punto límite $\{\infty\}$ en la topología ordinaria de S^3, pero no en la de Y. Este es en efecto un notable ejemplo.

La restricción de $g : Y \to S^3$ a la preimagen del plano yz (unido a $\{\infty\}$) proporciona un ejemplo bidimensional.

Nuestro ejemplo puede modificarse un poco más para obtener una cantidad no numerable de cubiertas ramificadas de grado infinito

$$g : \mathbb{R}^n + \{\infty\} \to S^n,$$

donde $n = 3, 4$, con lugar singular un nudo (salvaje) y cuya fibra sobre ∞ no es discreta. El espacio $\mathbb{R}^n + \{\infty\}$ se define exactamente como en el ejemplo anterior. Por ejemplo el lugar singular puede ser el nudo salvaje en S^3 que es una suma conexa infinita $(K_1\#K_2\#K_3\#...\,) \cup \{\infty\}$ donde K_i es un nudo trébol (3_1 en notación de Reidemeister) situado dentro de B_i, para $i \geq 1$. De hecho hay una colección no numerable de ejemplos diferentes.

Finalizamos con cuatro problemas cuya solución desconozco.

Problema 5.15 *¿Hay alguna cubierta ramificada no epiyectiva?* (Se deduce del Teorema 5.13 y de [9] que si la fibra sobre $z_s \in Z\backslash Z_o$ es vacía, el sistema de entornos $\mathcal{E}(z_s)$ dirigido por inclusión no puede tener una base **linealmente** ordenada por inclusión.)

Problema 5.16 *¿Hay alguna cubierta ramificada con una fibra homeomorfa al conjunto de Cantor?*

Problema 5.17 *¿Hay alguna cubierta ramificada con una fibra no localmente compacta?*

Problema 5.18 *¿Hay alguna cubierta ramificada entre n-variedades topológicas T_2, Lindelöf y conexas, $n \geq 3$, con lugar singular* 0*-dimensional?* (Ver [3], [1], [2] y [25].)

Referencias

[1] I. Berstein, A.L. Edmonds: *The degree and branch set of a branched covering.* Invent. math. **45** (1978), no. 3, 213–220.

[2] A.V. Cernavskii: *Finitely multiple open mappings of manifolds.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **151** (1963) 69–72.

[3] P.T. Church, E. Hemmingsen: *Light open maps on n-manifolds.* Duke Math. J. **27** (1960) 527–536.

[4] R.F. Dickman, R.A. McCoy: *The Freudenthal compactification.* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **262** (1988), 35 pp.

[5] R. Engelking: *General topology.* Translated from the Polish by the author. Monografie Matematyczne **60.** [Mathematical Monographs **60**] PWN–Polish Scientific Publishers, Warsaw 1977.

[6] ———: *Theory of dimensions finite and infinite.* Sigma Series in Pure Math. **10.** Heldermann Verlag, Lemgo 1995.

[7] R.H. Fox: *Covering spaces with singularities.* En *Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in honor of S. Lefschetz*(Fox et al., eds.), 243–257, Princeton Univ. Press, 1957.

[8] H. Freudenthal: *Neuaufbau der Endentheorie.* Annals of Math. **43** (2) (1942), 261–279.

[9] L. Henkin: *A problem on inverse mapping systems.* Proceedings AMS **1** (1950), 224–225.

[10] J.H.V. Hunt: *Branched coverings as uniform completions of unbranched coverings (Resumé).* Contemp. Math. **12** (1982),141–155.

[11] J.L. Kelley: *Topología general.* Traducido del inglés y revisado por O.A. Varsavsky. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires 1962.

[12] J. Margalef, E. Padrón, E. Outerelo: *Topología general.* Sanz y Torres, Madrid 2000.

[13] W.S. Massey: *Algebraic topology: An introduction.* Harcourt, Brace & World, Inc., New York 1967.

[14] Y. Matsumoto, J.M. Montesinos–Amilibia: *A proof of Thurston's uniformization theorem of geometric orbifolds.* Tokyo J. Math. **14** (1991), no. 1, 181–196.

[15] E. Michael: *Completing a spread (in the sense of R. H. Fox) without local connectedness.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **66** or Indag. Math. **25** (1963), 629–633.

[16] ———: *Cuts.* Acta Math. **111** (1964), 1–36.

[17] J.M. Montesinos–Amilibia: *Branched coverings after Fox: an exposition.*

[18] ———: *Representing open 3-manifolds as 3-fold branched coverings.* Rev. Mat. Complutense **15** (2002), no. 2, 533–542.

[19] ———: *Uncountably many wild knots whose cyclic branched covering are S^3.* Rev. Mat. Complutense *16* (2003), no. 1, 329–344.

[20] S. de Neymet de Christ: *A generalization of the notion of spread.* Topology, Proc. Spec. Semin., Vol. 2, México 1981, 21–43 (1981).

[21] S. de Neymet de Christ, F. González Acuña: *A generalization of Fox's spread completion*. Symposium on Algebraic Topology in honor of José Adem (Oaxtepec, 1981), Contemp. Math. **12** (1982), 271–285.

[22] ———: *A generalization of Fox's notion of spread*. (Spanish) Mathematics today (Luxembourg, 1981), 293–296, Gauthier-Villars, Paris 1982.

[23] A.W. Tucker: *Branched and folded coverings*. Bulletin AMS **42** (1936), 859–862.

[24] W.P. Thurston: *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University Lectures 1976-77 (unpublished).

[25] J. Väisälä: *Discrete open mappings on manifolds*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, **392** (1966), 10.