El problema de la intersección de ANR's de Borsuk y métricas en el hiperespacio del cubo de Hilbert

Eduardo Cuchillo–Ibáñez* y **Manuel A. Morón***

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S.I.Montes
Universidad Politécnica de Madrid
28040 Madrid, España
eci@montes.upm.es

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, España
ma_moron@mat.ucm.es

Dedicado al Profesor Enrique Outerelo con motivo de su jubilación y en señal de reconocimiento a la labor realizada.

ABSTRACT

En este artículo relacionamos dos problemas abiertos en Homotopía y Teoría de la Forma planteados por Borsuk. Demostramos que la respuesta a, al menos, uno de ellos es negativa, y obtenemos algunas consecuencias.

2000 Mathematics Subject Classification: 55P55, 55P15, 54C56.
Key words: ANR, FANR, dominación homotópica, límites de sucesiones en hiperespacios.

*Los autores han sido parcialmente subvencionados por el proyecto de investigación BFM 2003-00825.

1. Introducción

Desde finales de los años 80 hasta mediados de los 90 del siglo anterior la labor investigadora de lo que pudiéramos llamar ahora, y así lo haremos en adelante, nuestro grupo investigador se llevó a cabo en gran parte por el apoyo científico, y económico, del profesor Outerelo puesto que parte de los integrantes de este grupo o fueron alumnos directos suyos o estuvimos arropados por pertenecer al equipo investigador de proyectos subvencionados bajo la dirección de Enrique. Aquellos tiempos, en aquellos lugares, como casi todos los tiempos en casi todos los lugares, no fueron fáciles ni cómodos para realizar labores investigadoras. Con la intención de no seguir la tendencia actual de amnesia histórica, de nuestra historia diaria y doméstica, que es la que más directamente influye en nuestros logros o fracasos, queremos recordar aquí que debemos gran parte de lo poco conseguido a aquellos que, de forma silenciosa, pero con un profundo y continuado trabajo, nos allanaron el tortuoso camino. Sin duda Enrique es un claro ejemplo de ello. Quede constancia aquí de que nosotros te lo agradecemos y te lo reconocemos.

Hemos elegido para este artículo un tema, el Problema de la Intersección de ANR's de Borsuk, por ser uno de los problemas abiertos más antigüos de la Teoría de la Forma. Creemos que los resultados que aquí damos, aunque no lo resuelven, pueden tener interés por las relaciones y extensiones que descubrimos con respecto a otros problemas y en otras situaciones, y porque, de alguna manera, se unifican respuestas a problemas relacionados que se encuentran dispersas por la literatura.

Los resultados que aquí presentamos bajo los títulos de Proposición, Teorema o Corolario no los hemos publicado antes en sitio alguno por lo que describimos las demostraciones más interesantes.

El artículo está escrito centrándonos a veces en la labor de nuestro equipo investigador como consecuencia de la ocasión especial a la que se debe —homenaje a Enrique— y no porque estemos catalogando nuestra propia aportación como esencial.

No hemos añadido una descripción de la Teoría de la Forma, marco en el que se encuadra este trabajo, por no alargar el artículo. Para una introducción histórica y alguna de sus aplicaciones puede consultarse [25] o [28]. Los conceptos y resultados clásicos de Teoría de la Forma que usamos pueden encontrarse en [6], [13] y [27]. La teoría de retractos que utilizamos se puede ver en [3] y [16].

2. El problema de la intersección de ANR's y sucesiones retractantes de ANR's-aproximativos

El problema al que nos estamos refiriendo es el siguiente:

> **(P1)** *Supongamos que tenemos una sucesión de ANR's compactos* $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe una retracción* $r_k : X_k \longrightarrow X_{k+1}$*. El espacio* $X = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ *¿es necesariamente un FANR?*

Este problema fue propuesto por Borsuk [4] prácticamente desde la aparición de la Teoría de la Forma. Más tarde, en [6], vuelve a aparecer como tal. Las principales respuestas parciales fueron dadas por el propio Borsuk y por Husch [17] y Singh [32] utilizando técnicas algebraicas. En lo que respecta a nuestro grupo de investigación, este problema fue tratado primero en [31], donde se relaciona con una propiedad de extensión de homotopías, en el contexto que nos ocupa, y se conjetura que dicha propiedad caracteriza los espacios FANR's y, por lo tanto, que la respuesta a (P1) es positiva. Más tarde, en [24], se reformula (P1) en términos de convergencia respecto de la métrica *shape*, d_s, en el hiperespacio del cubo de Hilbert que fue introducida en dicho artículo. En particular, en la Proposición 3.9 de [24] se prueba:

La respuesta a (P1) es positiva si y sólo si $\lim_{k\to\infty} X_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ *en la métrica* d_s.

Muy recientemente, en [12], se ha dado una respuesta parcial positiva a un problema relacionado con (P1).

En Cox [11] se construyó una sucesión decreciente $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de compactos tales que X_{k+1} es un retracto de X_k y $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ no es un retracto fundamental de X_1. En este ejemplo $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es un solenoide 2-ádico y todos los compactos X_k son AANR$_c$ [10], es decir, límite en la métrica de la continuidad d_c (definida por Borsuk en [2]) de ANR's. A dichos espacio se los conoce como ANR's-aproximativos en el sentido de Clapp y fueron también estudiados por Borsuk [5] bajo el nombre de *NE-sets*.

El primer resultado que queremos poner de manifiesto nos muestra, en particular, que la situación descrita en [11] es muy usual.

Proposición 1 *Sea X un espacio métrico compacto. Existe siempre una sucesión de AANR$_c$'s, $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que X_{k+1} es un retracto de X_k y $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Consideremos X como el límite inverso de una sucesión inversa $\{P_n,\ \pi_n\}$ donde los espacios P_n son ANR's compactos. Esto es

$$P_1 \xleftarrow{\pi_1} P_2 \xleftarrow{\pi_2} P_3 \longleftarrow \cdots P_n \xleftarrow{\pi_n} P_{n+1} \cdots$$

y

$$X = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} P_i \mid x_i = \pi_i(x_{i+1}),\ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Sea $X_1 = \prod_i P_i$. Definamos $r_n : X_1 \longrightarrow X_1$ por

$$r_n((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}\ , \qquad \text{donde} \qquad y_i = \begin{cases} y_i = x_i & \text{para } i \geq n+1 \\ y_i = \pi_i(x_{i+1}) & \text{para } i \leq n \end{cases}$$

Es claro que, para cada $n \in \mathbb{N}$, r_n es continua y $r_n : X_1 \longrightarrow r_n(X_1)$ es una retracción. Si llamamos $X_{n+1} = r_n(X_1)$, $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios AANR$_c$'s tales que

$X_k \supset X_{k+1}$ y $r_k \mid_{X_k} : X_k \longrightarrow X_{k+1}$ es una retracción para cada $k \in \mathbb{N}$. Finalmente es obvio que $X = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$. $\square$

Definición 2 *Dada una sucesión inversa* $\{P_n,\ \pi_n\}$, *con* P_n *ANR compacto para todo* $n \in \mathbb{N}$, *llamaremos* sucesión retractante *de* $AANR_c$ *asociada a* $\{P_n,\ \pi_n\}$ *a la sucesión* $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *construida en la proposición anterior. Notemos que, en particular,* $X_1 = \prod_{i=1}^{\infty} P_i$.

Corolario 3 *Sea* X *un espacio métrico compacto y* $\{P_n,\ \pi_n\}$ *una sucesión inversa de ANR's compactos tal que* $X = \varprojlim \{P_n,\ \pi_n\}$. *Denotemos por* (Q, ρ) *al cubo de Hilbert dotado de una métrica* ρ *que induce su topología. Si consideramos que* $X_1 = \prod_{i=1}^{\infty} P_i$ *está sumergido topológicamente en* (Q, ρ) *se tiene:*

a) X *es un* $AANR_c$ *si y sólo si* $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ *en la métrica de la continuidad* ρ_c *en* 2^Q.

b) X *es internamente movible si y sólo si* $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ *en la métrica DI en* 2^Q *definida en [29] (Proposición 4.13).*

c) X *es movible si y sólo si* $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ *en la métrica de la forma en* 2^Q *definida en [24] o, equivalentemente, en la métrica* D *definida en [29] (Proposición 4.12).*

La demostración de este corolario es una consecuencia inmediata de la observación de la página 80 de [29].

Podemos también mejorar el ejemplo de Cox de [11] en las siguientes direcciones:

Corolario 4 *a) Todo espacio métrico compacto* X *no movible es un ejemplo de Cox, esto es, se puede obtener como la intersección de una sucesión retractante de* $AANR_c$*'s,* $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, *tal que* X *no es un retracto fundamental de* X_1. *De hecho,* X *no está dominado, en la categoria de la forma, por elemento alguno de la sucesión retractante* $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

b) Todo espacio métrico compacto movible con al menos una componente conexa no movible, cuya existencia fue demostrada por Borsuk [6] (pág.165-166), se puede obtener como intersección de una sucesión retractante $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *de* $AANR_c$*'s de forma que* $X = \lim_{k \to \infty} X_k$ *en la métrica de la forma* d_s *y tal que* X *no está dominado en la categoría de la forma por elemento alguno de la sucesión* $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. *En particular,* X *no es retracto fundamental de* X_1.

c) Consideremos el hiperespacio $(2^Q, d_s)$. *Existen compactos* $B \subset Q$ *de manera que* $B_{\geq} = \{Y \in 2^Q \mid Sh(B) \geq Sh(Y)\}$ *no es cerrado en* $(2^Q, d_s)$, *lo que a su vez implica que los problemas 8.9 y 9.9 planteados por Borsuk en [7] tienen respuesta negativa si cambiamos la métrica fundamental* ρ_F *allí definida por la métrica de la forma definida en [24] o [29].*

d) Todo $AANR_c$ Y con una componente no movible (nótese que la construcción X^* hecha en [26] (pág.48) produce espacios de este tipo si X es no movible) es un ejemplo de un espacio que se obtiene como intersección de una sucesión retractante $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $AANR_c$'s, con $Y = \lim_{k\to\infty} Y_k$ en la métrica de la continuidad y, por lo tanto, en todas las otras métricas que estamos considerando, tal que Y no está siquiera dominado en la categoría de la forma por elemento alguno Y_k de la sucesión retractante. Cada uno de estos espacios Y proporciona una respuesta negativa tanto al problema 8.9 como al 9.9 planteados por Borsuk en [7].

e) Cada uno de los espacios que satisfacen las condiciones de a) o de b) es un ejemplo de un retracto débil, en el sentido de Bogatyi [1], de un espacio $AANR_c$ que no es retracto fundamental del mismo. Se responde así negativamente al problema implícitamente planteado en el Remark 7 de [1], cambiando la hipótesis de ser ANR por $AANR_c$.

Demostración. Únicamente vamos a comprobar d) y e) puesto que el resto de apartados se obtienen o bien directamente o son consecuencia o análogos a estos dos últimos.

Consideremos un espacio AANR$_c$ Y con una componente Y_0 no movible y sea $\{P_n,\ \pi_n\}$ una sucesión inversa de ANR's compactos tal que $Y = \varprojlim\{P_n,\ \pi_n\}$. Sea $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión retractante de AANR$_c$'s asociada a $\{P_n,\ \pi_n\}$. Como $Y_1 = \prod_{i=1}^{\infty} P_i$ e Y_n es un retracto de Y_1 se tiene que todas las componentes conexas de cualquiera de los espacios Y_n son movibles. Si para algún $k \in \mathbb{N}$ se diera la dominación en la forma $Sh(Y_k) \geq Sh(Y)$ tendríamos [6] (pág.215) que la componente Y_0 de Y estaría dominada por una componente de Y_k, lo cual es imposible puesto que Y_0 no es movible.

Por otra parte, de acuerdo con el Corolario 3.a), $Y = \lim_{k\to\infty} Y_k$ en la métrica de la continuidad ρ_c y por lo tanto también en la métrica fundamental ρ_F de [7]. Se verifica que $Sh(Y_1) \geq Sh(Y_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pero $Sh(Y_1) \ngeq Sh(Y)$ con lo cual $Y_{1_{\geq}} = \{Z \in 2^Q \mid Sh(Y_1) \geq Sh(Y)\}$ no es cerrado en ρ_F.

Finalmente, si se dice que un espacio satisface la propiedad α cuando todas sus componentes conexas son movibles, es claro que α es una propiedad que se hereda por dominación en la forma, los espacios Y_k satisfacen la propiedad α e Y no, lo que supone una respuesta negativa al problema 9.9. $\square$

Hay que decir que en [9] se obtuvieron resultados relacionados con los anteriores.

3. El problema de la intersección de ANR's y la dominación homotópica entre poliedros finitos

Antes incluso de nacer la Teoría de la Forma, Borsuk [3] (pág.221) planteó el siguiente problema:

(Q1) *¿Es cierto que si tenemos dos ANR's compactos X e Y tales que X es homeomorfo a un retracto de Y e Y es homeomorfo a un retracto de X, entonces X e Y tienen el mismo tipo de homotopía?*

La pregunta anterior se puede reformular de manera equivalente de la siguiente forma:

(Q2) *¿Existen dos ANR's compactos X e Y, con distintos tipos de homotopia, tales que X es homeomorfo a un retracto de Y e Y es homeomorfo a un retracto de X?*

La equivalencia entre (Q1) y (Q2) es obvia en el sentido de que la respuesta a (Q1) es afirmativa si y sólo si la respuesta a (Q2) es negativa.

En la misma monografía [3] (pág.223) Borsuk realiza la siguiente pregunta:

(Q3) *¿Es verdad que si dos ANR's compactos X e Y cumplen que cada uno de ellos domina homotópicamente al otro entonces X e Y tienen el mismo tipo de homotopía?*

O de forma equivalente:

(Q4) *¿Existen dos ANR's compactos X e Y con distintos tipos de homotopía tales que X domina homotópicamente a Y e Y domina homotópicamente a X?*

Proposición 5 *Las preguntas (Q2) y (Q4) son equivalentes y ambas lo son al siguiente problema:*

> **(P2)** *¿Existen dos poliedros finitos X e Y con distintos tipos de homotopía tales que cada uno de ellos domina homotópicamente al otro?*

Demostración. Puesto que la existencia de una retracción implica la dominación homotópica, es evidente que si la respuesta a (Q2) es afirmativa entonces la respuesta a (Q4) también es positiva.

Por otra parte supongamos que la respuesta a (Q4) es afirmativa. En ese caso existen ANR's compactos X e Y, de distinto tipo de homotopía, de manera que cada uno de ellos domina homotópicamente al otro. Consideremos el cubo de Hilbert Q y definamos $X' = X \times Q$ e $Y' = Y \times Q$. Claramente X' e Y' son ANR's (son incluso Q-variedades) del mismo tipo de homotopía que X e Y respectivamente. Seguidamente vamos a utilizar un resultado de Borsuk–Oledzki, enunciado en [8] de manera más débil, en el que se establece:

Si un compacto Z está dominado en la categoría de la forma por un ANR T, entonces existe una copia homeomorfa de Z en $T \times Q$ la cual es un retracto fundamental de $T \times Q$.

Así, X' es homeomorfo a un retracto fundamental de Y' y viceversa.

Finalmente, como tanto X' como Y' son ANR's, ser retracto fundamental equivale a ser retracto. De esta forma X' e Y' sirven como respuesta positiva a (Q2). La equivalencia con (P2) proviene del importante resultado de West [34] que prueba la conjetura de Borsuk consistente en que todo ANR compacto tiene el tipo de homotopía de un poliedro finito. $\square$

Uno de los resultados más significativos de este artículo es el siguiente:

Teorema 6 *Al menos uno de los problemas de Borsuk (P1) o (P2) tiene respuesta negativa.*

Demostración. Supongamos que la respuesta a (P2) es positiva. Sean entonces X e Y dos poliedros finitos con distinto tipo de homotopía tales que cada uno de ellos domina homotópicamente al otro. Definamos el ANR $X_1 = X \times Q$. A partir del ya mencionado resultado de Borsuk-Oledzki obtenemos dos retracciones $r_1 : X_1 \longrightarrow X_2$, donde X_2 es homeomorfo a $Y \times Q$, y $r_2 : X_2 \longrightarrow X_3$, con X_3 homeomorfo a $X \times Q$. De esta manera se construye una sucesión retractante de ANR's compactos $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en la cual X_k es homeomorfo a $X \times Q$ para k impar y a $Y \times Q$ para k par. Consideremos al espacio X sumergido en el cubo de Hilbert (Q, ρ) y sea ρ_s la métrica de la forma definida en 2^Q en [24], o equivalentemente en [29]. Según 3.9 de [24], $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un FANR si y sólo si $\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ en ρ_s. Por otro lado, según 3.11 en [24], existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que si $\rho_s(X_k, X_j) < \varepsilon$ entonces $Sh(X_k) = Sh(X_j)$ y, al ser todos ANR's, X_k y X_j tienen el mismo tipo de homotopía si distan menos de ε. Por lo tanto, $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \underset{\rho_s}{\not\to} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y en consecuencia la respuesta a (P1) es negativa.

$\square$

En la demostración anterior se encuentra implícitamente el siguiente resultado:

Proposición 7 *Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión retractante de ANR's compactos tal que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es un FANR. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Sh(X_n) = Sh(\bigcap X_k)$ para cada $n \geq n_0$ y, por lo tanto, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ tiene la forma de un poliedro finito.*

Por otra parte Edwards–Geoghegan [14] han demostrado que existen FANR's que no tienen la forma de un poliedro finito. Así pues, para esos espacios la Proposición 1 de este trabajo parece ajustada ya que, en este caso, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es un retracto fundamental de X_1 y no se puede cambiar la hipótesis de ser AANR_c por ANR. En [32] ya se observó una cuestión análoga a ésta.

Resulta bastante fácil comprobar que la respuesta al problema (P2) es positiva si se reemplaza la hipótesis sobre X e Y de ser poliedros finitos por ser AANR_c. Por ejemplo basta tomar como X un discontinuo de Cantor e Y la suma topológica de un discontinuo de Cantor y un punto. Incluso si se impone que X e Y sean conexos pueden construirse ejemplos fácilmente. Fox en [15], aunque asegura que los espacios X e Y eran ANR's y evidentemente no lo son, da un ejemplo en el que X es un producto numerable de la *figura del ocho* por sí misma e $Y = S^1 \times X$, siendo S^1 la 1-esfera.

Por otra parte se ha dado una respuesta positiva a (P2) manteniendo las hipótesis de ser los espacios ANR's pero sin compacidad [33]. Naturalmente, los espacios construidos en [33] no están dominados por poliedros finitos.

Por otro lado, Moszynska [30] ha establecido que la respuesta a (P2) es negativa si uno de los poliedros, y por lo tanto ambos, es conexo y simplemente conexo. A este respecto, y aprovechando la dependencia entre (P1) y (P2) reflejada en el Teorema 6 y las respuestas positivas a (P1) dadas en [17] y [32] podemos extender el resultado de Moszynska de las dos siguientes maneras:

Corolario 8 *Si X e Y son dos poliedros finitos y conexos de modo que cada uno de ellos domina homotópicamente al otro y, además, se cumple una de las dos siguientes condiciones:*

1) $\pi_1(X)$, y por lo tanto $\pi_1(Y)$, es finito (π_1 representa al grupo fundamental),

2) $\pi_1(X)$, y por lo tanto $\pi_1(Y)$, es abeliano,

se tiene que X e Y tienen el mismo tipo de homotopía.

4. Algunas disquisiciones sobre los resultados recientes de Kolodziejczyk

Recientemente Danuta Kolodziejczyk en una serie de artículos ([18], [19], [20], [21], [22] y [23]) resuelve algunos de los problemas de Borsuk relacionados con dominación homotópica entre poliedros finitos. Los resultados que está obteniendo son ciertamente interesantes. Las técnicas que utiliza son algebraicas y se apoyan en una gran cantidad de resultados profundos, y ya clásicos, debidos a Whitehead y Wall entre otros, así como localizaciones de grupos y espacios nilpotentes de Hilton–Mislin–Roitberg. Concretamente en [18] y [19] comprueba que:

Existen poliedros finitos que dominan homotópicamente a una cantidad infinita de poliedros de distinto tipo de homotopía dos a dos.

En [20] se prueba que éste no es el caso si el poliedro es simplemente conexo y en [23] se obtiene el mismo resultado si el grupo fundamental del poliedro es finito.

Especialmente en [22] estudia el problema de dominación a cadenas descendentes de tipos de homotopía. Concretamente define como cadena de longitud k para un compacto A a un sistema $X_1, \ldots, X_k$ de compactos tales que $Sh(A) \geq Sh(X_k) > Sh(X_{k-1}) > \cdots > Sh(X_1)$, donde $Sh(Y) > Sh(X)$ significa que Y domina, en la categoría de la forma, a X pero X no domina a Y. Cuando todos los compactos que aparecen son ANR's (en particular poliedros) la dominación en la forma se puede sustituir por la de homotopía.

En [23] se establece que existe un poliedro finito P que domina a una cantidad infinita de poliedros, de distinto tipo de homotopía dos a dos, pero que existe un número natural k tal que toda cadena descendente dominada por P no puede tener longitud mayor que k.

Diremos que un poliedro P domina a una cadena descendente infinita si existe una sucesión de poliedros $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $X_1 = P$ y X_k domina estrictamente a X_{k+1}, para cada $k \in \mathbb{N}$, esto es, X_k domina a X_{k+1} pero X_{k+1} no domina a X_k.

Empleando los mismos argumentos que en el Teorema 6 se obtiene:

Proposición 9 *Si existe un poliedro finito P que domina a una cadena descendente infinita de poliedros entonces existe una respuesta negativa a (P1) en la que el primer elemento de la cadena retractante, X_1, es un ANR con igual tipo de homotopía que P.*

La existencia de un poliedro P que domina a una cantidad infinita de tipos de homotopía de poliedros tiene incidencia en algunos conceptos y resultados de tipo métrico introducidos en [29] como los de familias equimovibles, FANR(ε), etc.

En particular tenemos las siguientes respuestas a problemas implícitamente planteados en [29].

Consideremos, como en [29] el hiperespacio $(2^Q, D)$ del cubo de Hilbert.

Proposición 10 *a) Existe un ANR $X \subset Q$ tal que el subespacio*

$$\{Y \subset X \,|\, Y \text{ es un retracto fundamental de } X\}$$

no es totalmente acotado.

b) Existe una familia numerable de retractos fundamentales de X que no es equimovible.

Por último, el estudio del siguiente problema puede ser interesante:

Problema. Sea P un poliedro finito que domina homotópicamente a una cantidad infinita de poliedros $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que, dos a dos, no son homotópicamente equivalentes (como los detectados por Kolodziejczyk). Consideremos todos ellos (por medio del resultado de Borsuk–Oledzki mencionado en la demostración de la Proposición 5) como retractos de la Q-variedad $P \times Q$. Sea el hiperespacio $2_H^{P\times Q}$ dotado de la métrica de Hausdorff. Por la compacidad de dicho espacio puede suponerse que existe $\lim_{k\to\infty} X_k$ para la métrica de Hausdorff.

- *¿Qué relación hay entre $X = \lim_{k\to\infty} X_k$ y los espacios X_k suficientemente próximos?*

- *¿Es X no movible? Nótese que X no es el límite de $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en la métrica de la forma. De hecho existe $\varepsilon > 0$ tal que $d_s(X_k, X_j) \geq \varepsilon$ para $k \neq j$.*

Referencias

[1] S. Bogatyi: *Approximate and fundamental retracts.* Math. USSR Sb. **22** (1974), 91–103.

[2] K. Borsuk: *On some metrizations of the hyperspace of compact sets.* Fund. Math. **41** (1954), 168–202.

[3] ———: *Theory of retracts.* Polish Scientific Publishers, Warszawa 1967.

[4] ———: *Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences.* Fund. Math. **64** (1969), 55–85.

[5] ———: *On a class of compacta*. Houston J. Math. **1** (1975), 1–13.

[6] ———: *Theory of shape*. Polish Scientific Publishers, Warszawa 1975.

[7] ———: *On a metrization of the hyperspace of a metric space*. Fund. Math. **94** (1977), 191–207.

[8] K. Borsuk, J. Oledzki: *Remark on the shape domination*. Bull. Acad. Polon. Sci. **28** (1980), 67–70.

[9] L. Boxer, R.B. Sher: *Borsuk's fundamental metrics and shape dominations*. Bull. Acad. Polon. Sci. **26** (1978), 849–853.

[10] M.H. Clapp: *On a generalization of absolute neighborhood retracts*. Fund. Math. **70** (1971), 117–130.

[11] C. Cox: *Three questions of Borsuk concerning movability and fundamental retraction.* Fund. Math. **80** (1973), 169–179.

[12] J. Dydak, F.R. Ruiz del Portal: *Isomorphisms in pro–categories*. J. Pure Appl. Alg. **190** (2004), 85–120.

[13] J. Dydak, J. Segal: *Shape Theory: An introduction*. Springer-Verlag LNM 688, Berlin 1978.

[14] D.A. Edwards, R. Geoghegan: *Shapes of complexes, ends of manifolds, homotopy limits and the Wall obstruction*. Annals of Math. **101** (1975), 521–535; Correction **104** (1976), 389.

[15] R.H. Fox: *On homotopy type and deformation retracts*. Annals of Math. **44** (1943), 40–50.

[16] S.T. Hu: *Theory of retracts*. Wayne State University Press, Detroit 1965.

[17] L. Husch: *Intersection of ANR's*. Fund. Math. **79** (1978), 21–26.

[18] D. Kolodziejczyk: *There exists a polyhedron dominating infinitely many different homotopy types*. Fund. Math. **151** (1996), 39–46.

[19] ———: *Polyhedra dominating infinitely many different homotopy types*. Bull. Acad. Polon. Sci. **44** (1996), 271–283.

[20] ———: *Simply-connected polyhedra dominate only finitely many different shapes*. Top. Appl. **112** (2001), 289–295.

[21] ———: *There exists a polyhedron with infinitely many left neighbors*. Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 303–309.

[22] ———: *Homotopy domination within polyhedra*. Fund. Math. **178** (2003), 189–201.

[23] ———: *Polyhedra with finite fundamental group dominate only finitely many different homotopy types*. Aparecerá en Fund. Math..

[24] V.F. Laguna, M.A. Morón, N.T. Nhu, J.M.R. Sanjurjo: *Movability and limits of polyhedra*. Fund. Math. **143** (1993), 191–201.

[25] S. Mardešić: *Absolute neighborhood retracts and shape theory*. In *History of topology*. I. M. James (Ed.), 241–269, Elsevier, 1999.

[26] S. Mardešić, J. Segal: *Shapes of compacta and ANR-systems*. Fund. Math. **72** (1971), 41–59.

[27] ________: *Shape theory. The inverse system approach*. North–Holland, Amsterdam 1982.

[28] ________: *History of shape theory and its applications to general topology*. In *Handbook of the history of general topology, vol. 3*. C. E. Aull and R. Lowen (Ed.), 1145–1177, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[29] M.A. Morón, F.R. Ruiz del Portal: *Shape as a Cantor completion process*. Math. Z. **225** (1997), 67–86.

[30] M. Moszynska: *On the homotopy classification of spaces*. Fund. Math. **66** (1969), 65–83.

[31] J.M.R. Sanjurjo: *Algunas propiedades de tipo homotópico de los espacios FANR*. Ann. Inst. Mat. UNAM **20** (1980), 113–125.

[32] S. Singh: *On a problem of Borsuk*. Bull. Acad. Polon. Sci. **27** (1979), 129–134.

[33] T.E. Stewart: *On R-equivalent spaces*. Indagationes Math. **20** (1958), 460–462.

[34] J.E. West: *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution of a conjecture of Borsuk*. Annals of Math. **106** (1977), 1–18.