

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JULIO 2019

COHOMOLOGÍA DE DE RHAM Y GRADO DE BROUWER-KRONECKER

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM
DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

PATRICIA J. ESTEBAN-INFANTES

RESUMEN. En este trabajo se estudian algunos apartados de la cohomología de de Rham. Veremos la definición de la derivada de Lie y del producto interior y se tratará la integral de cohomología, comprobando que es un isomorfismo. También se probará el lema de Poincaré, conectando la cohomología con la homotopía. Por último, se presentará el grado de Brouwer-Kronecker y se utilizarán todas estas herramientas para demostrar algunos teoremas de Brouwer y el teorema de la invarianza del dominio, extraer algunas conclusiones acerca de las esferas \mathbb{S}^m y culminar con el teorema de Hopf.

Palabras clave: *derivada de Lie, forma diferencial, diferencial exterior, grupo de cohomología, integral en cohomología, grado, homotopía.*

ABSTRACT. In this work we study some aspects of the de Rham cohomology. We will introduce the Lie derivative and inner product and we will explore the integration of cohomology classes, showing that it is an isomorphism. We will also prove Poincaré's lemma, linking the cohomology to results on homotopy. In the end, we will present the Brouwer-Kronecker degree and use the previous tools to prove some of Brouwer's theorems and the invariance of domain theorem, to achieve some conclusions about the spheres \mathbb{S}^m and to culminate with Hopf's theorem.

Keywords: *Lie derivative, differential form, exterior derivative, cohomology group, integration of cohomology classes, degree, homotopy.*



*A todos los compañeros que me han
ayudado a llegar hasta aquí.*

ÍNDICE

Introducción	3
1. Derivada de Lie de campos	4
2. Cohomología de De Rham	7
3. Derivada de Lie de formas y producto interior	10
4. El último grupo de cohomología	13
5. Lema de Poincaré y homotopía	17
6. Grado de una aplicación continua	21
7. Cálculo del grado de Brouwer-Kronecker	24
8. Teoremas de Brouwer	27
9. Teorema de la invarianza del dominio	29
10. Construcciones en esferas	31
11. Teorema de Hopf	34
Apéndice	37
Referencias	40

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se realiza una introducción a la *cohomología de de Rham* y al *grado de Brouwer-Kronecker*. El objeto de estudio de la primera son los denominados *grupos de cohomología*, a saber, los cocientes de los espacios vectoriales de las formas cerradas sobre los subespacios de formas exactas, y para lo que se emplearán las técnicas del cálculo en variedades. Respecto a la segunda, se estudia el grado de una aplicación, que surge de la relación entre las integrales de formas en variedades vía imagen inversa. Los contenidos de este texto se disponen en 11 secciones, que partirán de las bases sentadas en el curso *Variedades diferenciables* del grado de Matemáticas.

En la primera sección se realiza una breve introducción a las *álgebras de Lie*, lo que conduce a la definición de la *derivada de Lie de campos*. En la segunda se proporcionan las nociones básicas en las que se apoya la *cohomología de de Rham*, partiendo de algunos conceptos elementales de *formas diferenciales*, seguidos por la *diferencial exterior* y terminando con las definiciones de los *grupos de cohomología*. Tras esto, se retoma en la tercera sección la derivada de Lie, extendiéndola en esta ocasión a las formas diferenciales, y se introduce el *producto interior*, obteniendo algunas relaciones interesantes entre ambas derivaciones.

A continuación, en la cuarta sección, se introducirá la integral en cohomología y se proporcionarán algunos resultados esenciales, como la existencia de formas de integral no nula, que nos permitirán demostrar que la integral define un isomorfismo en cohomología.

En la quinta se definirá el *operador de Poincaré*, con el que se obtendrán algunas consecuencias importantes relacionadas con la homotopía y el *lema de Poincaré* y se sentarán las bases que permitirán extender la cohomología a aplicaciones continuas.

Posteriormente se abordará el *grado de una aplicación*, que aparece al relacionar los *últimos grupos de cohomología* de dos variedades. Se empezará con la definición formal para aplicaciones diferenciales y se extenderá, por medio de la homotopía, para aplicaciones continuas. Tras esta sección, se demostrará que el grado de una aplicación toma siempre valores enteros.

Como una aplicación de las propiedades obtenidas hasta entonces, se probarán en la octava sección varios teoremas célebres de Brouwer: el teorema de no retracción de una variedad sobre su borde, el teorema de la bola peluda y el teorema del punto fijo de Brouwer; este último será empleado en la siguiente sección para demostrar el teorema de invarianza del dominio, según el cual una aplicación continua e inyectiva de dominio abierto resulta ser un homeomorfismo sobre su imagen. Estos teoremas que deducimos mediante la cohomología de de Rham tienen otras consecuencias topológicas importantes, como la invarianza local de la dimensión o la invarianza del borde. No incluimos estos resultados porque sería copiar las demostraciones que en dimensión dos se ven en la asignatura *Topología elemental*. En la décima, se proporcionarán algunos resultados relativos a las esferas \mathbb{S}^m , que se usarán en la última sección para demostrar, finalmente, el *teorema de Hopf*, por el que se relaciona \mathbb{Z} con el conjunto de clases de homotopía sobre esferas.

1. DERIVADA DE LIE DE CAMPOS

En esta sección se presentan algunas nociones relativas a las *álgebras de Lie*, partiendo de conceptos básicos de campos tangentes, para concluir introduciendo la *derivada de Lie de campos*.

Dada una variedad M , recordamos que un campo (tangente) X es una aplicación que a cada punto de M hace corresponder un vector tangente en dicho punto. Se dirá que es continuo o diferenciable si lo es como aplicación entre M y su fibrado tangente TM .

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos tangentes (diferenciables) a la variedad M , que es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y un módulo sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Teniendo en cuenta que los vectores tangentes a una variedad actúan como derivaciones, se puede decir que un campo X tangente a M es un endomorfismo del espacio de funciones diferenciables de dominio la variedad.

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad X(f) = Xf : p \mapsto X_p(f) = d_p f(X_p).$$

Visualizándolo de este modo, también se puede caracterizar la diferenciabilidad de un campo según lo sea la acción anterior: un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es diferenciable si y sólo si, para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, Xf es diferenciable.

Tras estos puntos introductorios, incidiremos sobre una estructura concreta que se puede otorgar a $\mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.1. Dado un espacio vectorial E , un *corchete de Lie* es una aplicación bilineal

$$[\cdot, \cdot] : E \times E \rightarrow E, \quad (x, y) \mapsto [x, y],$$

que verifica dos propiedades:

- i) Es antisimétrica, es decir, $[x, y] = -[y, x]$ para cualesquiera $x, y \in E$.
- ii) Cumple la identidad de Jacobi, a saber, $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$ para cualesquiera $x, y, z \in E$.

Asimismo, un *álgebra de Lie* $(E, [\cdot, \cdot])$ es un espacio vectorial equipado con un corchete de Lie.

Ejemplos 1.2.

1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , equipado con el producto vectorial usual, es un álgebra de Lie. Tomando los vectores canónicos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}, [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}, [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j},$$

observamos que se cumplen la antisimetría y, trivialmente, la identidad de Jacobi.

2. El espacio vectorial de matrices cuadradas, tomando como corchete el conmutador de matrices, es un álgebra de Lie.

En efecto, si X, Y y Z son matrices cuadradas (con la misma dimensión), definiendo

$$[\cdot, \cdot] : E \times E \rightarrow E, \quad (X, Y) \mapsto XY - YX,$$

es sencillo comprobar que se cumple la bilinealidad y la antisimetría, de modo que nos centramos en la identidad de Jacobi.

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX;$$

$$[[Z, X], Y] = [ZX - XZ, Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ;$$

$$[[Y, Z], X] = [YZ - ZY, X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY;$$

Se ve que, al sumar $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X]$, se obtiene el resultado deseado.

El producto de matrices del último ejemplo corresponde a la composición de aplicaciones lineales y sugiere buscar un comportamiento análogo para más espacios vectoriales cuyos elementos sean otro tipo de aplicaciones. Así, podemos considerar como espacio vectorial a $\mathfrak{X}(M)$ y tomar una estructura semejante a la anterior para el corchete de Lie.

Proposición 1.3. *El espacio vectorial $\mathfrak{X}(M)$ junto con el corchete de Lie definido del modo*

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X,$$

para cualesquiera dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, es un álgebra de Lie.

Demostración. La prueba de esta proposición es mecánica, si se tienen en cuenta las observaciones realizadas en la segunda parte del ejemplo anterior, sustituyendo el producto de matrices por la composición de funciones.

Es menos inmediato ver que, en efecto, el corchete de Lie está bien definido, es decir, que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$; para ello, debe cumplirse la regla de Leibniz en cada punto y que la aplicación resultante sea diferenciable.

La diferenciable se sigue de que, dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, entonces $Xf \in \mathcal{C}^\infty(M)$, por lo que $Y(Xf)$ también será diferenciable.

En cuanto a la regla de Leibniz, sean $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $p \in M$,

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(fg) &= (X \circ Y)_p fg - (Y \circ X)_p fg = X_p(Y_p(fg)) - Y_p(X_p(fg)) \\ &= X_p(f(p)Y_p(g) + g(p)Y_p(f)) - Y_p(f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)) \\ &= f(p) \{X_p(Y_p(g)) - Y_p(X_p(g))\} + g(p) \{X_p(Y_p(f)) - Y_p(X_p(f))\} \\ &= f(p)[X, Y]_p g + g(p)[X, Y]_p f. \end{aligned}$$

□

Al corchete $[X, Y]$ se le llama, en ocasiones, *derivada de Lie del campo Y respecto a X* , denotándolo $L_X Y$, y representa la variación infinitesimal del campo Y a lo largo de las curvas $\gamma : I \rightarrow M$ cuyos vectores tangentes se corresponden con los vectores del campo X . No obstante, el concepto de la derivada de Lie se puede extender a otro tipo de argumentos aparte de los campos, como por ejemplo, y parte del objeto de estudio de este trabajo, a formas diferenciales.

Antes de formalizar estas ideas, conviene recordar que, dado un campo X sobre una variedad M , es posible construir un flujo φ a partir de las curvas integrales del campo y de modo que éste sea el generador infinitesimal de dicho flujo. Para no inducir a error con la notación, presentamos con todo detalle la definición de flujo.

Definición 1.4. Dada una variedad M , un *flujo* es una aplicación diferenciable

$$\varphi : W \rightarrow M, \quad (t, x) \mapsto \varphi_t(x),$$

siendo $W \subset \mathbb{R} \times M$ un entorno abierto de $\{0\} \times M$, que cumple

- i) φ_0 es la identidad en M .
- ii) Dado $x \in M$, $I(x) = \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in W\}$ es un intervalo abierto, tal vez infinito, cuyos extremos verifican $\alpha(x) < 0 < \beta(x)$.
- iii) Si $s \in I(x)$, entonces $I(\varphi_s(x)) = I(x) - s$.
- iv) Si $s \in I(x)$ y $t \in I(\varphi_s(x))$, entonces $(\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t+s}(x)$,

Tras esto, procedemos a definir propiamente la derivada de Lie, mediante la proposición siguiente, y observar que se corresponde con lo introducido previamente.

Proposición 1.5. *Dado un flujo φ sobre una variedad M , su generador infinitesimal X y un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple, para todo $p \in M$,*

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t,*}(Y_{\varphi_t(p)}) - Y_p}{t}.$$

Demostración.

Primero, observamos que

$$\varphi_{-t,*}(Y_{\varphi_t(a)})f = d_{\varphi_t(a)}\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(a)})(f) = (Y_{\varphi_t(a)}(\varphi_{-t}))(f) = Y_{\varphi_t(a)}(f \circ \varphi_{-t}),$$

y desarrollamos $f \circ \varphi_{-t}$ en torno a un valor t cercano a 0:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_{-t} &= f(\varphi_{-t}) = f(\varphi_0) + t \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_{-t}) \right|_{t=0} + \mathcal{O}(t^2) \\ &\approx f + t \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi_{-t}) \left. \frac{d\varphi_{-t}^i}{dt} \right|_{t=0} \right) (-1) = f - t \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} X_i \right) = f - tXf. \end{aligned}$$

Ahora, hacemos actuar el límite de la proposición sobre una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y aplicamos lo obtenido en el paso anterior.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(a)}) - Y_a(f)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\varphi_t(a)}(f \circ \varphi_{-t}) - Y_a(f)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\varphi_t(a)}(f - tXf) - Y_a(f)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\varphi_t(a)}(f) - Y_{\varphi_0(a)}(f)}{t} - Y_a(Xf) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Yf)(\varphi_t(a)) - (Yf)(\varphi_0(a))}{t} - Y_a(Xf) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(Yf)(\varphi_t(a)) \right|_{t=0} - Y_a(Xf) = \sum_i \frac{\partial(Yf)}{\partial x^i}(\varphi_0(a)) \left. \frac{d\varphi_t^i(a)}{dt} \right|_{t=0} - Y_a(Xf) \\ &= \sum_i \frac{\partial(Yf)}{\partial x^i} X_a^i - Y_a(Xf) = d_a(Yf)(X_a) - Y_a(Xf) = X_a(Yf) - Y_a(Xf) = [X, Y]_a(f). \end{aligned}$$

□

2. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

En este apartado se introducirán los aspectos básicos de la cohomología de de Rham, recordando brevemente las ideas fundamentales de las formas diferenciales.

Dado un abierto U de \mathbb{R}^m , una r -forma diferencial o forma diferencial de grado r es una aplicación

$$\alpha : U \rightarrow \text{Alt}^r(\mathbb{R}^m),$$

donde $\text{Alt}^r(\mathbb{R}^m)$ es el espacio vectorial de formas alternadas de grado r sobre \mathbb{R}^m . La extensión de esta definición a una variedad M consiste en tomar como espacio vectorial sobre el que actúan las formas el tangente a la variedad en cada punto:

$$\text{Alt}^r(M) = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times \text{Alt}^r(T_x M).$$

Por tanto, una r -forma diferencial sobre una variedad M es una aplicación

$$\alpha : M \rightarrow \text{Alt}^r(M)$$

que a cada punto p de la variedad le asigna una forma diferencial de dominio $T_p M$. Denotaremos por $\Gamma^r(M)$ al conjunto de las r -formas diferenciales de una variedad M .

Recordamos que una r -forma es diferenciable si, actuando sobre r campos diferenciables de M , la aplicación resultante es diferenciable y que, dado un sistema de coordenadas $\{\mathbf{x}_i\}_1^m$, la colección de r -formas $\{d\mathbf{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_{i_r} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m\}$ constituye una base de $\Gamma^r(M)$.

Dada una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades de la misma dimensión, podemos definir un homomorfismo entre $\Gamma^r(M)$ y $\Gamma^r(N)$ por medio de la diferencial $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$, que relaciona ambos espacios tangentes. Así, tenemos la aplicación

$$f^* : \Gamma^r(N) \rightarrow \Gamma^r(M), \quad \omega_x \mapsto (f^* \omega)_{f^{-1}(x)} = (d_{f^{-1}(x)} f)^* \omega_x.$$

Concretamente, dados r vectores tangentes $v_1, \dots, v_r \in T_{f^{-1}(x)} N$, esta expresión se corresponde con $(d_{f^{-1}(x)} f)^* \omega_x(v_1, \dots, v_r) = \omega_{f^{-1}(x)}(d_{f^{-1}(x)} f(v_1), \dots, d_{f^{-1}(x)} f(v_r))$.

Un sencillo ejemplo de 1-forma, cuya generalización proporciona uno de los conceptos fundamentales de la cohomología, es la diferencial de funciones.

Ejemplo 2.1. Dada una variedad M y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable, se tiene que su diferencial es una forma de grado 1:

$$\begin{aligned} df : M &\rightarrow \Gamma^1(M) \\ x &\mapsto (df)_x = d_x f. \end{aligned}$$

La diferenciabilidad se comprueba fácilmente a partir de la expresión de un campo X en coordenadas locales: $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Por tanto, $Xf = \sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df(X)$ es diferenciable.

Tras este ejemplo, aprovechamos para recordar, por medio de un teorema que asegura su existencia, las propiedades de la *diferencial exterior*.

Teorema 2.2. *Existe una única aplicación $d : \Gamma^r(M) \rightarrow \Gamma^{r+1}(M)$ tal que:*

- i) para $r = 0$, d es la diferencial de funciones,
- ii) $d \circ d = 0$ y,
- iii) si α y β son dos formas tales que r es el grado de la primera, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$.

Se puede comprobar que esta aplicación se porta bien con el homomorfismo f^* ; es decir, dada una aplicación diferenciable $f : N \rightarrow M$ y el homomorfismo $f^* : \Gamma^r(M) \rightarrow \Gamma^r(N)$, se cumple la relación

$$d \circ f^* = f^* \circ d.$$

Definición 2.3. Se dice que una forma diferencial α es *cerrada* si $d\alpha = 0$ y *exacta*, si existe otra forma β tal que $d\beta = \alpha$.

Se pueden definir, por tanto, dos subespacios importantes de $\Gamma^r(M)$: denotaremos por $Z^r(M)$ al subespacio de r -formas cerradas de M y por $B^r(M)$ al de las exactas.

Es inmediato observar, por la propiedad ii) de la diferencial exterior, que todas las formas exactas son cerradas, es decir, $B^r(M) \subset Z^r(M)$. Además, teniendo en cuenta que al aplicar la diferencial d elevamos el grado de las formas, obtenemos que $B^r(M)$ es la imagen de $d : \Gamma^{r-1}(M) \rightarrow \Gamma^r(M)$ y que Z^r es el núcleo de $d : \Gamma^r(M) \rightarrow \Gamma^{r+1}(M)$.

Definición 2.4. A partir de dichos elementos, se define el *r -ésimo grupo de cohomología de de Rham* como

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M).$$

Estos grupos forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , al igual que lo hacían $\Gamma^r(M)$. A la dimensión b_r de $H^r(M)$ se le denomina *r -ésimo número de Betti* de M y, a sus elementos, *clases de cohomología*.

Los grupos de cohomología constituyen unos invariantes algebraicos asociados a cada variedad, pues se conservan por difeomorfismos y, como veremos más adelante, también por aplicaciones continuas.

Además de tales grupos, se puede considerar su suma directa

$$H^*(M) = H^0(M) \oplus \cdots \oplus H^m(M),$$

siendo m la dimensión de M y $H^0(M)$, el núcleo de $d : \Gamma^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Gamma^1(M)$, es decir, las funciones diferenciables localmente constantes. (Obsérvese que $\Gamma^r(M) = \{0\}$ para $k > m$.)

Observación 2.5. Aclaremos que $H^0(M)$ depende del número n de componentes conexas de M pues una función continua es constante si y sólo si lo es en cada una de ellas. Así, $H^0(M)$ está formado por las funciones que son constantes en *cada* componente conexa; de este modo, es fácil observar que la dimensión de este espacio en concreto es el número de dichas componentes ($b_0 = n$) y que es isomorfo a \mathbb{R}^n .

Como sucedía con Γ^r , dadas dos variedades M y N , se pueden relacionar los elementos de $H^r(M)$ con los de $H^r(N)$ a través de una función diferenciable $f : M \rightarrow N$. Puesto que la diferencial y f^* conmutan, se obtiene que $f^*(Z^r(N)) \subset Z^r(M)$ y que $f^*(B^r(N)) \subset B^r(M)$.

En efecto, sea una forma $\omega \in Z^r(N)$, es decir, $d\omega = 0$ y, por tanto, $f^*(d\omega) = 0$. Pero $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$, con lo que se obtiene $f^*\omega \in Z^r(M)$. Por otro lado, sea $\omega \in B^r(N)$, entonces existe $\eta \in \Gamma^{r-1}(N)$ tal que $\omega = d\eta$. De un modo análogo al caso anterior, se observa que $f^*\omega = f^*(d\eta) = d(f^*\eta)$, es decir, $f^*\omega \in B^r(M)$.

Por ende, f^* induce un homomorfismo de $H^r(N)$ en $H^r(M)$ y se cumplen propiedades análogas a las del homomorfismo $f^* : \Gamma^r(N) \rightarrow \Gamma^r(M)$, como $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ y, si $f = \text{Id}_M$, entonces $f^* = \text{Id}_{H^r(M)}$. Éste permite relacionar dichos invariantes algebraicos, dadas dos variedades y una función diferenciable entre ellas. Si dos variedades son difeomorfas, sus grupos de cohomología serán isomorfos.

De un modo semejante a como acaba de hacerse, se definen los homónimos de estos espacios, *con soporte compacto*.

Definición 2.6. Denotaremos por $\Gamma_c^r(M)$ al conjunto de r -formas diferenciales con soporte compacto, es decir, aquellas tales que el conjunto de puntos sobre los que no son nulas tiene adherencia compacta.

Siguiendo esa línea, se define $Z_c^r(M)$ como el conjunto de r -formas cerradas con soporte compacto. En cambio, $B_c^r(M)$ está constituido por las r -formas exactas que poseen una primitiva con soporte compacto.

Observación 2.7. Tal y como se define $B_c^r(M)$, por estar contenido en $\Gamma_c^r(M)$, toda forma de dicho subconjunto tiene soporte compacto, pero no todas las formas exactas que tienen soporte compacto se encuentran ahí, pues pueden no tener primitiva con soporte compacto.

Para definir los homomorfismos $f^* : H_c^r(N) \rightarrow H_c^r(M)$ con soporte compacto, hace falta que f sea *propia*, es decir, que las imágenes inversas de conjuntos compactos sean

compactas. Con esto, si ω tiene soporte compacto, $f^*\omega$ también. Nótese que si las variedades son compactas, toda aplicación continua lo cumple ya que la imagen inversa de un conjunto compacto será cerrada en un compacto, por tanto, compacta.

Al igual que para el caso general, se sigue dando el contenido $B_c^r(M) \subset Z_c^r(M)$ y se puede definir el *r-ésimo grupo de cohomología de de Rham con soportes compactos*

$$H_c^r(M) = Z_c^r(M)/B_c^r(M).$$

Evidentemente, si M es compacta, estos conjuntos coinciden con los definidos previamente.

Estas últimas definiciones serán básicas en el desarrollo de las secciones posteriores, por ejemplo, para la integral de formas, que se realiza sobre aquellas con soporte compacto.

3. DERIVADA DE LIE DE FORMAS Y PRODUCTO INTERIOR

Como se anticipó en la primera sección, la definición de derivada de Lie se puede extender a las formas diferenciales tomando una expresión semejante. También se introduce en este apartado el producto interior y algunas relaciones interesantes que guarda con la derivada de Lie.

Definición 3.1. Dado un campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$ y su flujo φ , la *derivada de Lie de una r-forma* ω , con $r \geq 1$, es

$$(L_X\omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega_{\varphi_t(p)} - \omega_p}{t}.$$

Debemos comprobar que este objeto está bien definido, es decir, que al calcular la derivada de una r -forma, se obtiene otra.

En efecto, sea $\omega = \omega_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ para $r \geq 1$. Observamos que

$$\begin{aligned} \varphi_t^* \omega &= (\omega_{i_1, \dots, i_r} \circ \varphi_t) \varphi_t^* dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_t^* dx_{i_r} = (\omega_{i_1, \dots, i_r} \circ \varphi_t) d(\varphi_t^* x_{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\varphi_t^* x_{i_r}) \\ &= (\omega_{i_1, \dots, i_r} \circ \varphi_t) d(x_{i_1} \circ \varphi_t) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ \varphi_t) = (\omega_{i_1, \dots, i_r} \circ \varphi_t) d(\varphi_t^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\varphi_t^{i_r}) \\ &= (\omega_{i_1, \dots, i_r} \circ \varphi_t) \left(\sum_{j_1=1}^m \frac{\partial \varphi_t^{i_1}}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_r=1}^m \frac{\partial \varphi_t^{i_r}}{\partial x_{j_r}} dx_{j_r} \right) \\ &= (\omega_{i_1, \dots, i_r} \circ \varphi_t) \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_r=1}^m \frac{\partial \varphi_t^{i_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial \varphi_t^{i_r}}{\partial x_{j_r}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}. \end{aligned}$$

De la anterior cadena de sumatorios se extraen, a lo sumo, $\binom{m}{r}$ coeficientes y productos de formas, que agruparemos bajo el índice K . De este modo, podemos expresar

$$\varphi_t^* \omega = \sum_K f_K(t, x) dx_K.$$

Sustituyendo en la expresión del límite y teniendo en cuenta que $\varphi_0^* \omega = \omega$, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega - \omega}{t} = \sum_K \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_K(t, x) - f_K(0, x)}{t} d\mathbf{x}_K = \sum_K \frac{\partial f_K}{\partial t}(0, x) d\mathbf{x}_K,$$

una forma diferencial de grado r .

Por último, tratamos el caso $r = 0$, para el que $\omega = f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Si observamos que $\varphi_t^* \omega = \varphi_t^* f = f \circ \varphi_t$, se concluye fácilmente la igualdad

$$L_X \omega = L_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi_t - f \circ \varphi_0}{t} = \frac{\partial (f \circ \varphi_t)}{\partial t},$$

que no es más que otra aplicación diferenciable de M en \mathbb{R} , una forma de grado 0.

Definición 3.2. Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define el *producto interior*

$$i_X : \Gamma^{r+1}(M) \rightarrow \Gamma^r(M), \quad \omega \mapsto i_X \omega,$$

$$i_X \omega : \mathfrak{X}^r(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X_1, \dots, X_r) \mapsto \omega(X, X_1, \dots, X_r).$$

Para el caso particular de una aplicación diferenciable, $\omega = f$, se define por $i_X f = 0$.

Entre las posibles expresiones que relacionan las derivaciones, la fórmula de Cartan destaca por su sencillez.

Proposición 3.3. Fórmula de Cartan

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

Demostración. Primero, recordemos que $i_X f = 0$ independientemente del campo. Ahora,

$$i_X(df) = df(X) = Xf = L_X(f),$$

así que se cumple para funciones. Procedemos a comprobarlo para diferenciales de funciones.

$$i_X(d(df)) + d(i_X(df)) = i_X(0) + d(df(X)) = 0 + d(L_X f).$$

Como se cumple para funciones, $L_X \circ d = d \circ i_X \circ d$ cuando actuamos sobre f , con lo que

$$L_X(df) = d(i_X(df)) = d(L_X(f)).$$

Por último, como $\omega \in \Gamma^r(M)$ se puede expresar localmente mediante $\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_r} d\mathbf{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}_{i_r}$, se sigue el resultado para r -formas. \square

Unas simples composiciones con la diferencial exterior nos proporcionan el siguiente resultado:

Corolario 3.4.

$$L_X \circ d = d \circ L_X.$$

Gracias a la fórmula de Cartan y a este corolario, podemos obtener otras igualdades interesantes que relacionan la derivada de Lie y el producto interior.

Proposición 3.5. *El producto interior y la derivada de Lie verifican las relaciones*

$$i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X, \quad L_f X \omega = f L_X \omega + df \wedge i_X \omega,$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Gamma^r(M)$ y $f \in C^\infty(M)$.

Demostración.

1. Comprobemos que se cumple para el caso de $\omega = f$:

$$L_X(i_Y(f)) - i_Y(L_X(f)) = L_X(0) - i_Y(Xf) = 0 = i_{[X,Y]}f.$$

Ahora, como una forma de grado r se puede expresar como una suma de productos exteriores de r diferenciales de funciones, demostramos el caso para $\omega = df$, con ayuda de la fórmula de Cartan.

$$\begin{aligned} L_X(i_Y(df)) - i_Y(L_X(df)) &= L_X(df(Y)) - i_Y(dL_X(f)) = L_X(Yf) - i_Y(d(Xf)) \\ &= X(Yf) - d(Xf)(Y) = XY(f) - YX(f) \\ &= [X, Y]f = df([X, Y]) = i_{[X,Y]}df. \end{aligned}$$

2. Debido a la fórmula de Cartan y a que se cumple $i_{fX}\omega = fi_X\omega$, tenemos

$$\begin{aligned} L_{fX}\omega &= i_{fX}d\omega + di_{fX}\omega = fi_Xd\omega + d(fi_X\omega) = fi_Xd\omega + (df \wedge i_X\omega + fdi_X\omega) \\ &= f(i_Xd\omega + di_X\omega) + df \wedge i_X\omega = fL_X\omega + df \wedge i_X\omega. \end{aligned}$$

□

Por último, presentamos un método para calcular la derivada de Lie de formas por medio del corchete de Lie de campos.

Proposición 3.6. *Dada la forma diferencial $\omega \in \Gamma^r(M)$ y los campos $X_1, \dots, X_r \in (M)$, para $r \geq 1$, se cumple*

$$(L_X\omega)(X_1, \dots, X_r) = X\omega(X_1, \dots, X_r) - \sum_i \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r).$$

Demostración. Se demostrará por inducción sobre el grado de ω . Para ello, sea ω una 1-forma, entonces,

$$(L_X\omega)(X_1) = i_{X_1}L_X\omega = L_Xi_{X_1}\omega - i_{[X,X_1]}\omega = L_X(\omega(X_1)) - \omega([X, X_1]).$$

Ahora, supongamos que se cumple para $r - 1$, es decir,

$$(L_X\omega)(X_2, \dots, X_r) = L_X\omega(X_2, \dots, X_r) - \sum_{i=2}^r \omega(X_2, \dots, [X, X_i], \dots, X_r),$$

y veamos que también se cumple para r .

$$\begin{aligned} (L_X\omega)(X_1, \dots, X_r) &= i_{X_1}(L_X\omega)(X_2, \dots, X_r) \\ &= i_{X_1}L_X\omega(X_2, \dots, X_r) - i_{X_1} \sum_{i=2}^r \omega(X_2, \dots, [X, X_i], \dots, X_r) \\ &= (L_Xi_{X_1} - i_{[X,X_1]})\omega(X_2, \dots, X_r) - \sum_{i=2}^r \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r) \\ &= L_X\omega(X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r) \end{aligned}$$

□

4. EL ÚLTIMO GRUPO DE COHOMOLOGÍA

En esta sección se tratará, esencialmente, la integral de formas y su relación con la cohomología. Para ello, se recordará la definición básica de integral de una forma en una variedad M de dimensión m y se extenderá dicha definición a las clases del *último grupo de cohomología con soporte compacto* $H_c^m(M)$.

Consideraremos, pues, el conjunto $\Gamma_c^m(M)$ para definir la integral de una forma diferencial; primero, en un espacio afín cualquiera U , y a continuación, en la variedad M .

Definición 4.1. Dada $\omega \in \Gamma_c^m(U)$, para un abierto U del espacio (o semiespacio) afín \mathbb{E}^m de dimensión m , expresada como $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ y siendo $f : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable con el mismo soporte que ω , se define

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{E}^m} f.$$

Proposición y definición 4.2. Dada una variedad orientada M , existe una *única forma lineal*

$$\int_M : \Gamma_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_M \omega,$$

tal que, si \mathbf{x} es el sistema de coordenadas de M asociado a una parametrización φ y cuyo dominio contiene al soporte de ω , entonces $\int_M \omega = \varepsilon \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* \omega$; $\varepsilon = +1$ si \mathbf{x} es compatible con la orientación y $\varepsilon = -1$ en caso contrario.

Destacamos que esta integral se calcula tomando una colección de cartas que recubra a la variedad y una partición diferenciable de la unidad subordinada a dichas cartas. Asimismo, recordando el teorema de Stokes,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}, \quad \omega \in \Gamma_c^{m-1}(M),$$

se deduce que si la variedad no tiene borde, la integral $\int_M d\omega$ es nula para toda $\omega \in \Gamma_c^{m-1}(M)$. Esto nos será de utilidad para proposiciones posteriores.

Observación 4.3. Es conveniente para esta sección indicar que si una variedad M de dimensión m es orientable, siempre existe una forma de grado máximo nunca nula. Efectivamente, dada una orientación y recubriendo M con dominios U_i (que podemos suponer conexos) de unos sistemas de coordenadas $\mathbf{x}^{(i)}$ compatibles con la orientación fijada, en cada dominio U_i tenemos la forma nunca nula $\omega_i = d\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_m^{(i)} \in \Gamma^m(U_i)$. Ahora, a partir de esta colección, se construye una forma nunca nula en toda la variedad por medio de una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_i\}$ subordinada a los dominios U_i :

$$\omega = \sum_i \theta_i \omega_i \in \Gamma^m(M).$$

Para comprobar que nunca es nula, remarcamos que en las intersecciones $U_i \cap U_j$, la fórmula del cambio de variable relaciona las formas ω_i y ω_j mediante una aplicación λ_{ij} , que es siempre positiva pues se trata del determinante del cambio de coordenadas y ambos son compatibles con la orientación. Entonces, dado un punto $p \in M$, tendremos $\theta_i(p) \neq 0$ para unos índices i_k concretos y, sin pérdida de generalidad, podemos considerar

$p \in U_{i_1}$. Desarrollando la expresión anterior para esos índices y cambiando de variable adecuadamente,

$$\omega_p = \sum_k \theta_{i_k}(p) \omega_{i_k,p} = \sum_k (\theta_{i_k}(p) \lambda_{i_k i_1}) \omega_{i_1,p}.$$

Es fácil ver que la forma no es nula por cómo se ha definido, ya que λ_{ij} es siempre positiva.

Proposición 4.4. *Sean una forma $\omega \in \Gamma^m(M)$ nunca nula y $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función no idénticamente nula, con soporte compacto y que no cambia de signo. Entonces, $h\omega$ tiene el soporte de h y $\int_M h\omega \neq 0$.*

Demostración. Sea $\{(U_i, \mathbf{x}^{(i)})\}$ un conjunto de cartas con dominios conexos, que recubren M y son compatibles con su orientación. Denotamos $\{\mathbf{x}_k^{(i)}\}_{k=1}^m$ las coordenadas del i -ésimo sistema.

Consideremos en U_i , como base de las formas diferenciales de grado máximo, la forma $d\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_m^{(i)}$. Por tanto, dada la forma ω del enunciado, se verifica que su restricción a dicho dominio será múltiplo de esa forma por una función diferenciable nunca nula:

$$\omega|_{U_i} = \lambda_i d\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_m^{(i)}, \quad \lambda : U_i \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por otro lado, en una intersección no vacía de dominios, $U_i \cap U_j$, se cumple

$$\lambda_i d\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_m^{(i)} = \omega|_{U_i \cap U_j} = \lambda_j d\mathbf{x}_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_m^{(j)},$$

con lo que se tiene la relación para el cambio de coordenadas

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}_k^{(j)}}{\partial \mathbf{x}_l^{(i)}} \right) > 0.$$

La positividad se debe a la compatibilidad de los sistemas de coordenadas con una misma orientación, y ello proporciona que las funciones λ_i tengan todas el mismo signo (que escogeremos, sin pérdida de generalidad, positivo).

Tomemos ahora una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_i\}$ subordinada a los dominios $\{U_i\}$ y observemos que

$$(\mathbf{x}_i^{-1})^* \omega|_{U_i} = (\lambda_i \circ \mathbf{x}_i^{-1}) d((\mathbf{x}_i^{-1})^* \mathbf{x}_1^{(i)}) \wedge \cdots \wedge d((\mathbf{x}_i^{-1})^* \mathbf{x}_m^{(i)}) = (\lambda_i \circ \mathbf{x}_i^{-1}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Entonces,

$$\int_M h\omega = \sum_i \int_{\mathbf{x}_i(U_i)} (\theta_i h \lambda_i)(\mathbf{x}_i^{-1}(x)) dx.$$

Puesto que hemos considerado a las funciones $\lambda_i > 0$, si la integral se anulara, por ser los integrandos no negativos, para cada sumando tendríamos que $\theta_i h$ se anula en U_i . Además, por estar el soporte de θ_i contenido en U_i , se anularían también en toda la variedad y, puesto que $h = (\sum_i \theta_i) h = \sum_i \theta_i h$, obtendríamos que h es idénticamente nula, contra la hipótesis. Por tanto, $\int_M h\omega \neq 0$. \square

De un modo semejante a como se hace al inicio de la sección, se puede definir la *integral de clases de cohomología con soporte compacto*.

Proposición 4.5. *Si M es una variedad sin borde, la integral*

$$\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega,$$

es una forma lineal bien definida y no nula.

Demostración. La linealidad se deriva directamente de la linealidad de la integral. Para ver que está bien definida, debemos comprobar que el resultado es independiente del representante elegido de la clase $[\omega]$.

Sea la forma $\alpha \in [\omega]$, entonces se tiene que $\omega = \alpha + d\eta$ para una cierta forma $\eta \in \Gamma_c^{m-1}(M)$. Por tanto:

$$\int_M \alpha = \int_M (\omega - d\eta) = \int_M \omega - \int_{\partial M} \eta = \int_M \omega + 0 = \int_M \omega,$$

por el teorema de Stokes, según se explicó ya. Finalmente, podemos afirmar que la forma lineal \int_M no es idénticamente nula: siempre existe una forma nunca nula en una variedad orientable y, por la proposición anterior, se puede encontrar a partir de ésta una forma con soporte compacto cuya integral sea distinta de cero. \square

Proposición 4.6. *Si M no tiene borde y es conexa, la forma lineal anterior es un isomorfismo.*

Demostración. Puesto que tenemos una aplicación lineal entre espacios vectoriales y la dimensión de \mathbb{R} como tal es 1, comprobar que es un isomorfismo equivale a comprobar que $\dim(H_c^m(M)) = 1$; es decir, que dada una forma de clase $[\omega]$ cuya integral no sea nula, todas las demás clases son múltiplos de ésta.

Consideremos $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ de integral no nula, cuyo soporte esté contenido en un abierto D difeomorfo a \mathbb{R}^m y veamos que, para toda $\alpha \in \Gamma_c^m(M)$, $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega]$. Podemos suponer que el soporte de α también está en D . En efecto, como M es conexa, existe una cadena U_0, U_1, \dots, U_r de abiertos difeomorfos a \mathbb{R}^m y tales que el soporte de α esté contenido en U_0 , $U_r = D$ y $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Dada esa cadena, para cada $i = 1, \dots, r$ existe $\omega_i \in \Gamma_c^m(M)$ de integral no nula y con soporte contenido en $U_{i-1} \cap U_i$. Si se cumple la proporcionalidad de clases dentro de un mismo abierto, entonces $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega_1]$, que lo es a $[\omega_r]$ gracias a la cadena, y esta última, a $[\omega]$, validando la simplificación. Por otro lado, como toda aplicación con soporte compacto se puede extender por cero fuera del abierto que lo contiene, podemos suponer que $D = M = \mathbb{R}^m$.

Ahora, si $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega]$, existirá $c \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha - c\omega$ tenga una primitiva con soporte compacto o, equivalentemente, tal que la integral sea nula. Esto se traduce en que

$$\alpha - c\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

para cierta función diferenciable f de integral nula.

Si $\alpha - c\omega$ es exacta, su primitiva será la forma $\eta = \det(X, \dots)$ para cierto campo $X = (X_1, \dots, X_m)$ del que f es su divergencia. Efectivamente, dado el campo $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$,

$\eta = \det(X, \dots)$ es una forma diferencial de grado $m - 1$,

$$\eta = \det(X, \dots) = \sum_i c_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m,$$

cuyos coeficientes son

$$c_i = \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) = (-1)^{i-1} X_i.$$

Al calcular su diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_i \sum_j (-1)^{i-1} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m \\ &= \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

Entonces, $f = \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$. En última instancia, para demostrar el enunciado original basta demostrar que si f tiene soporte compacto e integral nula, es posible encontrar el campo X con soporte compacto que cumple dicha relación. Con esto en mente, se probará lo siguiente:

Sea $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ una función diferenciable con soporte compacto y sea, dado $n \leq m$, $x = (y, z)$ con $y = (x_1, \dots, x_n)$ y $z = (x_{n+1}, \dots, x_m)$. Si $\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy \equiv 0$, entonces

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$$

para n funciones con soporte compacto $X_1(x), \dots, X_n(x)$.

Procedemos por inducción. Para $n = 1$,

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(y, z) dy$$

tiene soporte compacto ya que, si x_1 es suficientemente pequeño, no se evalúa en el soporte de f y, si es grande, se abarca en su totalidad con lo que, siendo nula la integral de f , tenemos

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(y, z) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z) dy = 0.$$

Ahora, supongamos que el enunciado se cumple para $n-1$, y denotemos $y' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Sea $\varphi(y')$ diferenciable, con soporte compacto y tal que $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y') dy' = 1$; con ella podemos definir

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad h(x) = \varphi(y') \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, x_n, z) du.$$

Como f y φ tienen soporte compacto, g también; además, por cómo se ha definido, $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y', x_n, z) dy' \equiv 0$. Entonces, por inducción, existen $n-1$ funciones $X_1(x), \dots, X_{n-1}(x)$

de soporte compacto tales que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x).$$

Para nuestro fin, observemos que podemos tomar $h(x) = \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x)$ siendo

$$X_n(x) = X_n(y', x_n, z) = \varphi(y') \int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt,$$

que tiene soporte compacto. Efectivamente, como f y φ lo tienen, si $\|y'\|$ es muy grande, entonces $\varphi(y') = 0$; para $\|z\|$ muy grande o x_n pequeño, $f(u, t, z) = 0$ y, si x_n suficientemente grande,

$$\int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy = 0$$

para $y = (y', x_n)$. Por tanto, tenemos $X_1(x), \dots, X_n(x)$ de soporte compacto y tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x).$$

□

Tras haber probado que la integral en cohomología es un isomorfismo, podremos ver en la sección 6 cómo se relacionan las integrales sobre dos variedades distintas vía imagen inversa, lo que proporcionará la definición del grado de una aplicación.

5. LEMA DE POINCARÉ Y HOMOTOPÍA

En esta sección se presentará el operador de Poincaré y se empleará como herramienta para definir los grupos de cohomología como invariantes topológicos, no sólo diferenciables.

Teorema 5.1. Operador de Poincaré. *Sean $k \in \mathbb{N}$ e $I = [0, 1]$. Entonces, existe un operador lineal*

$$\mathcal{L} : \Gamma^k(M \times I) \rightarrow \Gamma^{k-1}(M)$$

tal que

$$i_1^* - i_0^* = d \circ \mathcal{L} + \mathcal{L} \circ d,$$

donde i_s es la aplicación que a cada $p \in M$ le asigna $(p, s) \in M \times I$ para $s = 0, 1$. Este operador transforma formas con soporte compacto en formas con soporte compacto.

Demostración. Consideremos las proyecciones $t : M \times I \rightarrow I$ y $\pi : M \times I \rightarrow M$. Entonces, si (U, \mathbf{x}) es un sistema de coordenadas de M , tenemos que $(\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 \circ \pi, \dots, \bar{\mathbf{x}}_m = \mathbf{x}_m \circ \pi, t)$ constituye un sistema de coordenadas para $U \times I$. Por tanto, dado $(p, t) \in M \times I$, se puede visualizar $T_{(p,t)}(M \times I)$ como $T_p M \oplus T_t I$.

A continuación afirmamos que, dada $\omega \in \Gamma^k(M \times I)$, ésta se puede escribir, con unicidad, en la forma

$$\omega = \omega' + dt \wedge \eta,$$

verificándose $\omega'(v_1, \dots, v_k) = 0$ para $v_i \in \bigcup_{(p,t)}(\{\bar{0}_p\} \times T_t I)$ y la propiedad análoga para $\eta \in \Gamma^{k-1}(M \times I)$. En efecto, dado (U, \mathbf{x}) sistema de coordenadas de M , tenemos que

$$\omega|_U = \omega'_U + dt \wedge \eta_U = \sum_J f_J d\bar{\mathbf{x}}_J + dt \wedge \sum_{\hat{J}} g_{\hat{J}} d\bar{\mathbf{x}}_{\hat{J}},$$

para ciertas familias de colecciones J y \hat{J} de k y $k-1$ índices respectivamente. De aquí se deduce que $\omega'|_U = \omega'_U$ y $\eta|_U = \eta_U$, lo que nos permite construir punto a punto dichas formas: dado $p \in M$, se toma cualquier (U, \mathbf{x}) tal que $p \in U$ para realizar la asignación $\omega'(p) = \omega_U(p)$ y $\eta(p) = \eta_U(p)$.

Teniendo en cuenta este preámbulo, procedemos a definir el operador de homotopía mediante la expresión

$$(\mathcal{L}\omega)_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 \eta_{(p,t)}(v_1, \dots, v_{k-1}) dt.$$

Nótese que si ω tiene soporte compacto, $\eta_{(p,t)} = 0$ para todo $t \in I$ y todo p fuera del compacto. Luego $\mathcal{L}\omega_p = 0$ para p fuera de tal compacto.

Es trivialmente lineal por la linealidad de la integral, por lo que sólo debemos probar que $i_1^* \omega - i_0^* \omega = d(\mathcal{L}\omega) + \mathcal{L}(d\omega)$. Beneficiándonos de esa misma linealidad, probémoslo en los casos en los que, de acuerdo a la descomposición previa, o bien ω tiene la forma del primer sumando, o bien tiene la del segundo.

En el primer caso, sea $\omega|_{U \times I} = f d\bar{\mathbf{x}}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathbf{x}}_{i_k} = f d\bar{\mathbf{x}}_J$. Aplicando la diferencial exterior obtenemos $d\omega|_{U \times I} = \gamma + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge d\bar{\mathbf{x}}_J$ para cierta forma γ de grado $k+1$ que no involucra a dt . Aplicamos \mathcal{L} sobre esta forma para obtener

$$\mathcal{L}(d\omega)_p = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial t}(p, t) d\mathbf{x}_J \right) dt = [f(p, 1) - f(p, 0)] d\mathbf{x}_J = i_1^* \omega_p - i_0^* \omega_p.$$

La última igualdad se debe a que

$$i_s^* \omega_p = (f \circ i_s)_p d(\bar{\mathbf{x}}_{J_1} \circ i_s)_p \wedge \dots \wedge d(\bar{\mathbf{x}}_{J_k} \circ i_s)_p = f(p, s) d\mathbf{x}_J.$$

Por otro lado, dada la definición de \mathcal{L} , $\mathcal{L}\omega = 0$, con lo que se verifica la igualdad buscada.

En el segundo caso, sea $\omega|_{U \times I} = f dt \wedge d\bar{\mathbf{x}}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathbf{x}}_{i_{k-1}} = f dt \wedge d\bar{\mathbf{x}}_J$ y observemos que, por ser $t \circ i_s = s$ un valor constante (una vez se toma $s = 0, 1$), tendremos $d(t \circ i_s) = 0$, y, por ende, $i_1^* \omega_p - i_0^* \omega_p$ también se anula. De este modo, sólo debemos comprobar que

$d(\mathcal{L}\omega_p) = -\mathcal{L}(d\omega_p)$. Pero:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(d\omega_p) = \mathcal{L} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{x}}_l} d\bar{\mathbf{x}}_l \wedge dt \wedge d\bar{\mathbf{x}}_J \right) = -\mathcal{L} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{x}}_l} dt \wedge d\bar{\mathbf{x}}_l \wedge d\bar{\mathbf{x}}_J \right) \\ \quad = -\sum_{l=1}^m \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{x}}_l} d\mathbf{x}_l \wedge d\mathbf{x}_J dt, \\ d(\mathcal{L}\omega_p) = d \left(\int_0^1 f d\mathbf{x}_J dt \right) = \sum_{l=1}^m d\mathbf{x}_l \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}_l} \int_0^1 f d\mathbf{x}_J dt \right) \\ \quad = \sum_{l=1}^m \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{x}}_l} d\mathbf{x}_l \wedge d\mathbf{x}_J dt. \end{array} \right.$$

□

Tras definir el operador de Poincaré, podremos utilizarlo para probar la siguiente afirmación sobre aplicaciones homótopas:

Proposición 5.2. *Sean M y N dos variedades diferenciables y $f, g : M \rightarrow N$ diferenciables (propias) y homótopas por una homotopía (propia) diferenciable. Entonces, los homomorfismos $f^*, g^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ ($f^*, g^* : H_c^r(N) \rightarrow H_c^r(M)$) son iguales.*

Demostración. Para comprobar que $f^* = g^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$, podemos observar que, dada $\omega \in Z^r(N)$, $(f^* - g^*)\omega$ es cero en $H^r(M)$, en otras palabras, que es exacta. Sea $H : M \times I \rightarrow N$ una homotopía entre f y g , es decir, se cumple $H \circ i_1 = f$ y $H \circ i_0 = g$. Entonces, comprobamos que

$$d(\mathcal{L}(H^*\omega)) + \mathcal{L}(d(H^*\omega)) = d(\mathcal{L}(H^*\omega)) = i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega) = f^*\omega - g^*\omega.$$

Por tanto, $f^*\omega - g^*\omega$ es exacta. La demostración vale también para el caso propio. □

Si deseamos extender adecuadamente la cohomología de de Rham a aplicaciones continuas, debemos ser capaces de aproximarlas por diferenciables. Para tal fin, nos basaremos en los siguientes resultados:

Proposición 5.3. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde y $f : X \rightarrow N$ una aplicación continua (propia). Entonces existe una aplicación diferenciable (diferenciable propia) $g : X \rightarrow N$ (propiamente) homótopa a f .*

Proposición 5.4. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ localmente cerrado y $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde. Si dos aplicaciones diferenciables $f, g : X \rightarrow N$ son (propiamente) homótopas, entonces lo son mediante una homotopía (propia) diferenciable.*

Omitimos las demostraciones ya que no forman parte del objeto principal de estudio de este trabajo. Con estas proposiciones en mente, podemos demostrar lo siguiente:

Proposición 5.5. Sean $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua (propia) y $g, h : M \rightarrow N$ dos aplicaciones diferenciables (propias) y (propiamente) homótopas a f . Entonces

$$g^* = h^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M) \quad (g^* = h^* : H_c^r(N) \rightarrow H_c^r(M)).$$

Demostración. Por hipótesis, tenemos que g y h son (propiamente) homótopas y por 5.4, lo son por una homotopía (propia) diferenciable. Entonces, aplicando 5.2, $g^* = h^*$. \square

Esto nos permite dar la siguiente definición para aplicaciones continuas.

Definición 5.6. Dada una aplicación continua (propia) $f : M \rightarrow N$, tomando cualquier aplicación diferenciable (propia) $g : M \rightarrow N$ (propiamente) homótopa a f (que existe por 5.3), se define su homomorfismo asociado f^* mediante

$$f^* = g^*.$$

Con esta definición, podemos ver que se cumplen los resultados esperados para aplicaciones continuas.

Proposición 5.7. Dadas dos aplicaciones continuas (propias) $f, g : M \rightarrow N$ y (propiamente) homótopas, entonces $f^* = g^*$.

Demostración. Se deduce directamente de la definición previa y 5.2. \square

Con ayuda del operador de homotopía definido al inicio de la sección, demostraremos un caso particular en el que se cumple que las formas cerradas son exactas.

Lema 5.8. Lema de Poincaré. Si M es una variedad contráctil, entonces toda forma cerrada es exacta.

Demostración. Por ser M variedad contráctil, dado un punto $p_0 \in M$, existe una homotopía $H : M \times I \rightarrow M$ tal que $H(p, 1) = p$ y $H(p, 0) \equiv p_0$, y que podemos suponer diferenciable por 5.4. Haciendo uso de la aplicación i_s de 5.1, se pueden reescribir estas condiciones como $H \circ i_1 = \text{Id}_M$ y $H \circ i_0 \equiv p_0$.

Sea $\omega \in Z(M)$ una forma cerrada. Por lo anterior,

$$\omega = (H \circ i_1)^* \omega = i_1^*(H^* \omega)$$

y, análogamente,

$$0 = (H \circ i_0)^* \omega = i_0^*(H^* \omega)$$

ya que $H \circ i_0$ es constante. Por la conmutatividad del homomorfismo H^* con d , y por ser ω cerrada, se tiene que $d(H^* \omega) = H^*(d\omega) = 0$. Entonces,

$$d(\mathcal{L}(H^* \omega)) = d(\mathcal{L}(H^* \omega)) + \mathcal{L}(d(H^* \omega)) = i_1^*(H^* \omega) - i_0^*(H^* \omega) = \omega - 0 = \omega.$$

Puesto que se ha hallado una forma tal que su diferencial sea ω , se concluye que la última es exacta. \square

De este lema se deduce directamente el siguiente corolario, aunque proporcionaremos una prueba muy sencilla empleando otros métodos.

Corolario 5.9. *Si M es una variedad contráctil, entonces $H^r(M) = 0$ para todo $r \geq 1$.*

Demostración. Como Id_M es homótopa a una aplicación constante, entonces

$$\text{Id}_{H^r(M)} = \text{Id}_M^* = (\text{cte.})^* = 0.$$

□

No enunciamos el corolario para una variedad propiamente contráctil porque tal variedad sería compacta y la cohomología con soportes compactos es la cohomología usual.

Corolario 5.10. *Sea M una variedad diferenciable compacta, conexa, orientable y sin borde, de dimensión m . Entonces $H^m(M) \neq 0$ y, por tanto, M no es contráctil.*

Demostración. Toda $\omega \in \Gamma^m(M)$ es cerrada. Supongamos que no se anula nunca (dicha forma existe ya que la variedad es orientable). Veamos que no puede ser exacta.

Tenemos que la integral de la forma no se anula ya que la variedad es compacta y, puesto que la integral de clases de cohomología de $H_c^m(M)$ es un isomorfismo, la clase de esta forma no es nula, luego ω no es exacta. □

Remarcamos en este punto la importancia de diferenciar los grupos $H^r(M)$ y $H_c^r(M)$. Por ejemplo, debido al corolario 5.9, $H^2(\mathbb{R}^2) = 0$, mientras que el hecho de que la integral en cohomología sea un isomorfismo nos proporciona $H_c^2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

6. GRADO DE UNA APLICACIÓN CONTINUA

En esta sección, introduciremos, primero, el grado de una aplicación diferenciable entre variedades de la misma dimensión, conexas y orientadas, para luego definir el de una continua. Se trata de una aplicación que conecta la topología con el álgebra y, como veremos más adelante, en la siguiente sección, toma valores en \mathbb{Z} , conectando lo continuo con lo discreto.

Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable propia entre variedades de dimensión m . En la sección 4 estudiamos las formas

$$\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \int_N : H_c^m(N) \rightarrow \mathbb{R},$$

y comprobamos que eran isomorfismos. Por tanto, estas tres aplicaciones determinan una cuarta $\varphi_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(N) & \xrightarrow{f^*} & H_c^m(M) \\ f_N \downarrow & & \downarrow f_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi_f} & \mathbb{R} \end{array}$$

Definición 6.1. Se define el *grado de f* , una aplicación diferenciable propia, como

$$\delta(f) = \varphi_f(1).$$

A la vista de esto, dada una forma $\omega \in \Gamma_c^m(N)$ observamos que

$$\int_M f^*\omega = \delta(f) \int_N \omega.$$

Vemos que, por la definición de la integral, el signo del grado cambia si se invierte la orientación de alguna de las variedades. En particular, para aplicaciones de la variedad en ella misma, $f : M \rightarrow M$, el signo es independiente de la orientación. Así, esta fórmula se puede considerar como una versión general del *teorema del cambio de variable*, que dice lo siguiente:

Dado un difeomorfismo $f : N \rightarrow M$ que conserva (resp. invierte) la orientación y dada $\omega \in \Gamma_c^m(M)$, entonces

$$\int_M \omega = \int_N f^*\omega \quad \left(\text{resp.} \quad \int_M \omega = - \int_N f^*\omega \right).$$

En efecto, $\omega \mapsto \int_N f^*\omega$ (resp. $\omega \mapsto - \int_N f^*\omega$) cumple las condiciones de la definición de la integral y, al ser ésta única, deben coincidir. Por otro lado, si $\omega = h dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, entonces $f^*\omega = (h \circ f) \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, lo que se corresponde con la fórmula del cambio de variables. En otras palabras, el grado de un difeomorfismo $f : N \rightarrow M$ es $\delta(f) = \pm 1$, positivo si f conserva la orientación y negativo en caso contrario.

Presentamos como ejemplo una cualidad que podemos deducir de una aplicación diferenciable si su grado no es nulo.

Ejemplo 6.2. Si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable propia y $\delta(f) \neq 0$, entonces f es sobreyectiva. En efecto, si f no fuera sobreyectiva, podríamos considerar el conjunto no vacío $N \setminus f(M)$ (que es abierto porque toda aplicación propia es cerrada) y una forma $\omega \in \Gamma_c^m(N)$ con su soporte contenido en él y tal que $\int_N \omega \neq 0$ (que existe por la proposición 4.4). Entonces,

$$\delta(f) \int_N \omega = \int_M f^*\omega = \int_M 0 = 0$$

con lo que, necesariamente, $\delta(f) = 0$.

Aplicando el teorema de Stokes, podemos ver cómo afecta el borde de una variedad al grado de una aplicación.

Proposición 6.3. Teorema del borde. Sean M, N dos variedades y $f : M \rightarrow N$ aplicación diferenciable propia. Si M es el borde de otra variedad W y existe una extensión diferenciable propia $\hat{f} : W \rightarrow N$ tal que $\hat{f}|_{\partial W} = f$, entonces $\delta(f) = 0$.

Demostración. Dada una forma ω de grado máximo sobre N con integral no nula, por hipótesis tenemos $\hat{f}^*\omega|_M = f^*\omega$, con lo que

$$\int_M f^*\omega = \int_{\partial W} \hat{f}^*\omega|_{\partial W} = \int_W d(\hat{f}^*\omega) = \int_W \hat{f}^*(d\omega) = 0$$

por el teorema de Stokes y puesto que, como ω era de grado máximo en N , $d\omega = 0$. Por tanto, dado que

$$0 = \int_M f^* \omega = \delta(f) \int_N \omega,$$

necesariamente $\delta(f) = 0$. □

De cara a poder definir sin ambigüedad el grado de una aplicación continua, veamos que se cumple lo siguiente:

Teorema 6.4. *Dos aplicaciones diferenciables propias $f, g : M \rightarrow N$ que son propiamente homótopas tienen el mismo grado.*

Demostración. Por las nociones presentadas en la sección de homotopía, si f y g son homótopas, entonces $f^* = g^*$, de donde se deduce trivialmente el resultado. □

De este enunciado podemos extraer directamente que si $f, g : M \rightarrow N$ son dos difeomorfismos propiamente homótopos, entonces $\delta(f) = \delta(g)$ y ambos conservan o invierten la orientación a la vez.

También es sencillo ver, como consecuencia del teorema, que en el caso particular de que una aplicación diferenciable propia sea propiamente homótopa a una aplicación constante o a la identidad, entonces tiene grado cero o uno respectivamente.

Este teorema proporciona una herramienta para distinguir entre clases de homotopía de aplicaciones diferenciables propias, pero, a su vez, nos brinda la definición del grado de una aplicación continua.

Definición 6.5. Dada una aplicación continua propia $f : M \rightarrow N$, se define su grado como $\delta(f) = \delta(g)$, para una aplicación diferenciable propia $g : M \rightarrow N$ que es propiamente homótopa a f .

Este grado está bien definido ya que, por 5.3, sabemos que para una aplicación continua propia siempre existe una diferenciable propia a la que es propiamente homótopa y, por la proposición anterior, se puede tomar cualquiera de éstas para definir su grado.

Análogamente al caso de aplicaciones diferenciables, de la definición y 6.4, se deduce:

Proposición 6.6. *Si $f, g : M \rightarrow N$ son dos aplicaciones continuas propias y propiamente homótopas, entonces tienen el mismo grado.*

También es de interés estudiar qué relación guarda el grado respecto a la composición de aplicaciones.

Proposición 6.7. *Dadas $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ dos aplicaciones continuas propias, se tiene que $\delta(g \circ f) = \delta(f)\delta(g)$.*

Demostración. Primero, por 5.3, existen dos aplicaciones diferenciables propias \hat{f} y \hat{g} a las que f y g son propiamente homótopas, respectivamente. Sean H la homotopía entre

f y \widehat{f} y F la homotopía entre g y \widehat{g} . Entonces,

$$g \circ f \stackrel{F \circ f}{\simeq} \widehat{g} \circ f \stackrel{\widehat{g} \circ H}{\simeq} \widehat{g} \circ \widehat{f}.$$

Puesto que $g \circ f$ es homótopa a la aplicación diferenciable $\widehat{g} \circ \widehat{f}$, tienen el mismo grado. Ahora, dadas las aplicaciones diferenciables \widehat{f} y \widehat{g} , observamos que, dada $\omega \in \Gamma_c^m(P)$,

$$\delta(\widehat{g} \circ \widehat{f}) \int_P \omega = \int_M (\widehat{g} \circ \widehat{f})^* \omega = \delta(\widehat{f}) \int_N \widehat{g}^* \omega = \delta(\widehat{f}) \delta(\widehat{g}) \int_P \omega.$$

Por tanto,

$$\delta(g \circ f) = \delta(\widehat{g} \circ \widehat{f}) = \delta(\widehat{f}) \delta(\widehat{g}) = \delta(f) \delta(g).$$

□

Tras definir el grado para aplicaciones continuas, se puede probar un resultado análogo al teorema del borde para este caso.

Proposición 6.8. *Sean M, N dos variedades y $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua propia. Si M es el borde de otra variedad W y existe una extensión continua propia $\widehat{f} : W \rightarrow N$ tal que $\widehat{f}|_{\partial W} = f$, entonces $\delta(f) = 0$.*

Demostración. Consideremos la extensión $\widehat{f} : W \rightarrow N$, entonces, existe una aplicación diferenciable propia $\widehat{g} : W \rightarrow N$ a la que es propiamente homótopa. Sea $\widehat{H} : W \times [0, 1] \rightarrow N$ dicha homotopía, de modo que $\widehat{H}_0 = \widehat{f}$ y $\widehat{H}_1 = \widehat{g}$. Tomando la restricción al borde, obtenemos la homotopía $H = \widehat{H}|_{\partial W \times [0, 1]} : \partial W \times [0, 1] \rightarrow N$, que verifica $H_0 = \widehat{f}|_{\partial W} = f$ y que nos permite definir una aplicación diferenciable propia g mediante $H_1 = \widehat{g}|_{\partial W} = g$. Con esto, hemos obtenido una aplicación diferenciable g con una extensión diferenciable \widehat{g} , cumpliendo las hipótesis de 6.3. Por tanto,

$$0 = \delta(g) \stackrel{6.4}{=} \delta(f).$$

□

7. CÁLCULO DEL GRADO DE BROUWER-KRONECKER

En esta sección demostraremos que el grado de una aplicación no puede tomar cualquier valor, sino que estos son siempre números enteros, como ya se había anticipado. Para ello, recordemos antes la definición de valor regular, así como un teorema que nos asegura la existencia de estos.

Definición 7.1. Decimos que, dada la aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre variedades no necesariamente compactas ni conexas, $b \in N$ es un *valor regular* si, o bien $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, o bien la aplicación $f_{*,p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobreyectiva para cada $p \in f^{-1}(b)$.

Teorema 7.2. Teorema de Sard. *Dada $f : M \rightarrow N$ diferenciable, el conjunto de valores no regulares de f tiene medida nula en N , luego interior vacío.*

A continuación, pasemos al objetivo troncal de la sección.

Teorema 7.3. Sean M, N dos variedades de dimensión m y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable propia. Sea $b \in N$ un valor regular de f . Entonces,

$$\delta(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f^{-1}(b) = \emptyset, \\ \sum_{p \in f^{-1}(b)} \text{sign}_p(f), & \text{si } f^{-1}(b) \neq \emptyset. \end{cases}$$

La signatura de f es $\text{sign}_p(f) = 1$ si $f_{*,p} : T_p M \rightarrow T_b N$ preserva la orientación y $\text{sign}_p(f) = -1$, si la invierte. Por tanto, el grado δ siempre es un número entero.

Demostración. Si $f^{-1}(b) = \emptyset$, f no es sobreyectiva y $\delta(f) = 0$. Veamos el caso $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ para lo que probaremos primero que dicho conjunto es finito. Como f es propia, $f^{-1}(b)$ es un conjunto compacto. Para cada $p \in f^{-1}(b)$ existe un entorno abierto U_p tal que $f|_{U_p}$ es biyectiva, con lo que $U_p \cap f^{-1}(b) = \{p\}$. De este modo tenemos una colección de abiertos U_p que constituye un recubrimiento para $f^{-1}(b)$, así que, por ser compacto este conjunto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, lo que necesariamente implica que $f^{-1}(b)$ es finito.

Sean entonces $f^{-1}(b) = \{p_1, \dots, p_k\}$ y U_i entornos abiertos en M de los puntos p_i , y, como antes, suficientemente pequeños para que $U_i \cap U_j = \emptyset$ y las restricciones $f|_{U_i}$ sean difeomorfismos sobre las imágenes. Tenemos que $A = M \setminus \{U_1 \cup \dots \cup U_k\}$ es compacto y su imagen por f , también.

Como $b \notin f(A)$, podemos tomar un entorno V suyo tal que $V \cap f(A) = \emptyset$ y $V \subset f(U_1) \cup \dots \cup f(U_k)$. Esto nos permite escribir $f^{-1}(V)$ como la unión disjunta de los abiertos $W_i = f^{-1}(V) \cap U_i$ y tal que $f|_{W_i} : W_i \rightarrow V$ es difeomorfismo. Si consideramos ahora una forma $\omega \in \Gamma_c^m(N)$ con su soporte contenido en V y de modo que $\int_N \omega \neq 0$, tendremos que el soporte de $f^*\omega$ estará contenido en $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^k W_i$. Así,

$$\delta(f) \int_N \omega = \int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^k \int_{W_i} f^*\omega.$$

Según f preserve o invierta la orientación en cada W_i , por ser difeomorfismo,

$$\int_{W_i} f^*\omega = \text{sign}_{p_i}(f) \int_V \omega = \text{sign}_{p_i}(f) \int_N \omega,$$

con lo que

$$\delta(f) = \sum_{i=1}^k \text{sign}_{p_i}(f).$$

□

Observación 7.4. Remarcamos que la definición anterior no depende realmente del valor regular elegido puesto que hemos definido previamente el grado mediante la integral en cohomología, lo que nos permite calcularlo escogiendo el valor regular que encontremos más cómodo. Este grado se denota $\text{deg}(f)$ y se denomina *grado de Brouwer-Kronecker*.

Veamos ahora un par de casos sencillos: una aplicación sobre el círculo unidad, que ejemplifica cómo se calcula el grado de Brouwer-Kronecker y la aplicación antipodal.

Ejemplo 7.5. Sean el círculo unidad $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, orientado en sentido antihorario, y la aplicación diferenciable $\varphi_k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $\varphi_k(z) = z^k$, para k entero. Por el teorema anterior tenemos que $\delta(\varphi_k) = k$.

En efecto, dado un punto $p = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, tendrá $|k|$ preimágenes por φ_k , gráficamente serán $|k|$ puntos tales que cualesquiera dos consecutivos equidistan una distancia fija $2\pi/|k|$. Por otro lado, φ preserva la orientación, lo que nos proporciona el resultado aplicando la expresión de la signatura en función del signo de k .

Teniendo en cuenta que el grado no depende del valor regular escogido, podríamos tomar $p = 1$ para el cálculo, correspondiéndose $\varphi_k^{-1}(1)$ con el conjunto de las raíces k -ésimas de la unidad.

Ejemplo 7.6. La aplicación antipodal $\sigma = -\text{Id} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ tiene grado $(-1)^{m+1}$, es decir, uno si m es impar y menos uno en caso contrario.

Puesto que σ es un difeomorfismo, tendrá grado $\delta(\sigma) = \pm 1$ según qué ocurra con la orientación. Tomemos, por ejemplo, el polo norte $a_N = (0, \dots, 0, 1)$, cuya imagen será el polo sur $\sigma(a_N) = a_S = (0, \dots, 0, -1)$. Los hiperplanos tangentes $T_{a_N}\mathbb{S}^m$ y $T_{a_S}\mathbb{S}^m$ coinciden como espacios lineales pero tienen orientaciones opuestas. Como σ es lineal, $d_{a_N}\sigma = \sigma$ y lleva la base $\{u_1, \dots, u_m\}$ a $\{-u_1, \dots, -u_m\}$. El determinante de la segunda base respecto de la primera es $(-1)^m$: si m es par, las bases definen la misma orientación, si m es impar, son opuestas. Por tanto, una base positiva de $T_{a_N}\mathbb{S}^m$ será llevada a una negativa de $T_{a_S}\mathbb{S}^m$ si m es par, o positiva si es impar; es decir, σ invierte o conserva la orientación si m es par o impar respectivamente. Así, $\text{deg}(\sigma) = -1$ si m es par y $\text{deg}(\sigma) = 1$ si m es impar.

Podemos visualizar cómo actúa la aplicación antipodal sobre \mathbb{S}^1 y \mathbb{S}^2 con la figura 1. En el caso de \mathbb{S}^1 , vemos que la diferencial de la antipodal lleva el vector u de la base a $-u$, manteniendo la orientación fijada, mientras que en \mathbb{S}^2 , transforma la base $\{u, v\}$ en $\{-u, -v\}$ que es la orientación opuesta a $\{u, -v\}$.

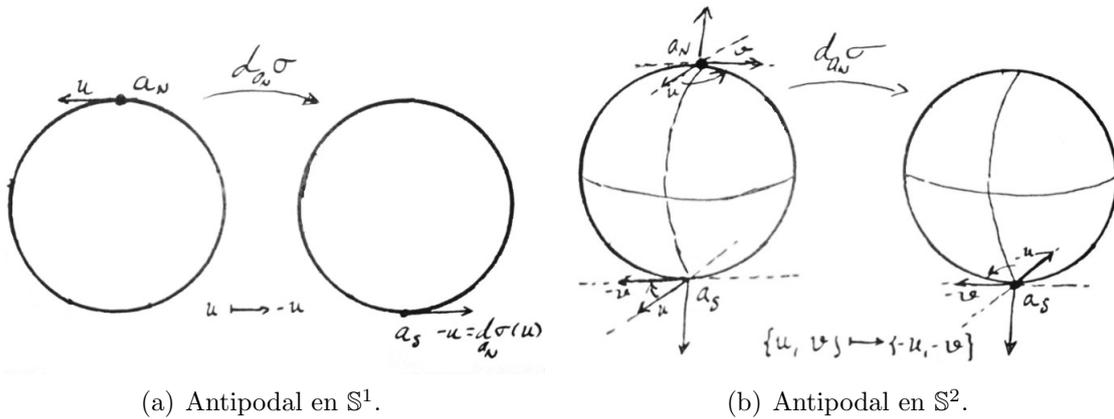


FIGURA 1. Aplicación antipodal.

Este último ejemplo será de utilidad en la próxima sección, para demostrar el teorema de la bola peluda de Brouwer.

8. TEOREMAS DE BROUWER

En esta sección se demostrarán algunos teoremas de Brouwer, utilizando como herramientas las afirmaciones que hemos probado en las secciones anteriores. Antes de ello, recordamos la definición de *retracto*:

Definición 8.1. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Una *retracción sobre A* es una aplicación continua $\rho : X \rightarrow A$ que restringida a A es la identidad, es decir, deja fijo A . En ese caso, se dice que A es un *retracto* de X .

Teorema 8.2. Teorema de no retracción del disco. *La esfera \mathbb{S}^m no es un retracto propio del disco $D^{m+1} := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$.*

Demostración. De acuerdo al enunciado, no puede darse el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^m & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{S}^m \\ \downarrow i & \nearrow \rho & \\ D^{m+1} & & \end{array}$$

siendo i la inclusión y $\rho : D^{m+1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ una aplicación continua propia tal que $\rho|_{\mathbb{S}^m} = \text{Id}_{\mathbb{S}^m}$. Supongamos que sí existe dicho diagrama. Entonces tendríamos el homomorfismo identidad como la composición $\text{Id}_{H^m(\mathbb{S}^m)} = i^* \circ \rho^*$,

$$H^m(\mathbb{S}^m) \xrightarrow{\rho^*} H^m(D^{m+1}) \xrightarrow{i^*} H^m(\mathbb{S}^m),$$

lo que implicaría que ρ^* tiene que ser inyectivo. Ahora bien, tenemos que $H^m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{R}$, ya que la esfera \mathbb{S}^m es compacta, y $H^m(D^{m+1}) = 0$ porque D^{m+1} es contráctil, con lo que ρ^* no podría ser inyectivo, llegamos a una contradicción. \square

En realidad, puede obtenerse una versión más general de este teorema, aplicado a una variedad cualquiera con borde. Veámoslo.

Teorema 8.3. Teorema de no retracción. *Dada una variedad M con borde, ∂M no es un retracto propio de M .*

Demostración. Al igual que en el caso previo, comprobemos que no puede darse el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \partial M & \xrightarrow{\text{Id}} & \partial M \\ \downarrow i & \nearrow \rho & \\ M & & \end{array}$$

Si se verificara el diagrama para una retracción continua propia ρ , podríamos aplicar el teorema del borde para aplicaciones continuas, 6.8: tenemos la aplicación identidad $\text{Id}_{\partial M} : \partial M \rightarrow \partial M$ y una extensión suya $\widehat{\text{Id}}_{\partial M} := \rho : M \rightarrow \partial M$ continua propia tal que $\rho|_{\partial M} = \text{Id}_{\partial M}$. Por tanto, el grado de la aplicación identidad sería $\delta(\text{Id}_{\partial M}) = 0$, contradiciendo que éste vale uno. \square

Estos dos teoremas nos ayudan a probar de una forma sencilla el teorema del punto fijo:

Teorema 8.4. Teorema del punto fijo de Brouwer. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ homeomorfo a la bola cerrada. Entonces toda aplicación continua $f : M \rightarrow M$ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Basta considerar el caso $M = D^{m+1}$. Supongamos que f no tiene ningún punto fijo y definamos una aplicación $\rho(x)$ como sigue: para cada $x \in D^{m+1}$, elegimos $\rho(x) \in \mathbb{S}^m$ como el punto del borde del disco que está más cercano a x que a $f(x)$, en la recta que pasa por ellos. Unos sencillos cálculos nos permiten obtener la expresión explícita

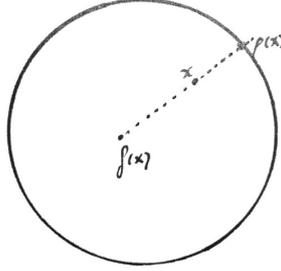


FIGURA 2. Aplicación ρ .

de ρ en términos del vector $u = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ (que está bien definido porque suponemos que f no tiene puntos fijos):

$$\rho(x) = x + \lambda u, \quad \lambda = -\langle x, u \rangle + \sqrt{\langle x, u \rangle^2 - \|x\|^2 + 1}.$$

Entonces $\rho : D^{m+1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es una aplicación continua (y propia ya que el disco D^{m+1} es compacto) tal que $\rho(x) = \text{Id}_{\mathbb{S}^m}(x)$ si $x \in \mathbb{S}^m$, lo cual es absurdo pues el teorema 8.2 nos asegura que no existe ninguna aplicación continua $f : D^{m+1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ que deje fija \mathbb{S}^m . \square

Proporcionamos ahora un lema que relaciona la existencia de un determinado campo con la posibilidad de definir una homotopía entre la identidad y la aplicación antipodal. Aplicando dicho lema podremos, a continuación, demostrar el teorema de la bola peluda.

Lema 8.5. *Si existe un campo vectorial X continuo y nunca nulo en \mathbb{S}^m , entonces la identidad $\text{Id}_{\mathbb{S}^m}$ es homótopa a la aplicación antipodal $\sigma : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$.*

Demostración. Sea $X : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ un campo continuo en las hipótesis del enunciado, que cumple $\langle p, X(p) \rangle = 0$ para cada $p \in \mathbb{S}^m$ por ser tangente a la esfera. Entonces, como nunca es nulo, podemos construir

$$H : \mathbb{S}^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^m, \quad (p, t) \mapsto \left(p \cos \pi t + \frac{X(p)}{\|X(p)\|} \sin \pi t \right),$$

que es una homotopía bien definida (pues $\|X(p)\| \neq 0$) entre la identidad y σ . \square

Notemos que si la identidad y la antipodal son homótopas, tienen el mismo grado, a saber, $\deg(\sigma) = \deg(\text{Id}) = 1$, pero esto sólo puede darse si m es impar, como se vio en el ejemplo de la sección 7.

Teorema 8.6. Teorema de la bola peluda de Brouwer. *La esfera $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ tiene un campo vectorial tangente continuo que no se anula en ningún punto si y sólo si m es impar.*

Demostración. Si m es impar, $m + 1 = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, el campo

$$X_x = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$$

es diferenciable, nunca nulo y $X_x \in T_x \mathbb{S}^m$ ya que $\langle x, X_x \rangle = 0$.

Por otro lado, si existiera un campo nunca nulo sobre la esfera, la aplicación identidad y la antipodal serían homótopas por 8.5 y hemos estudiado que esa circunstancia se da si y sólo si m es impar. \square

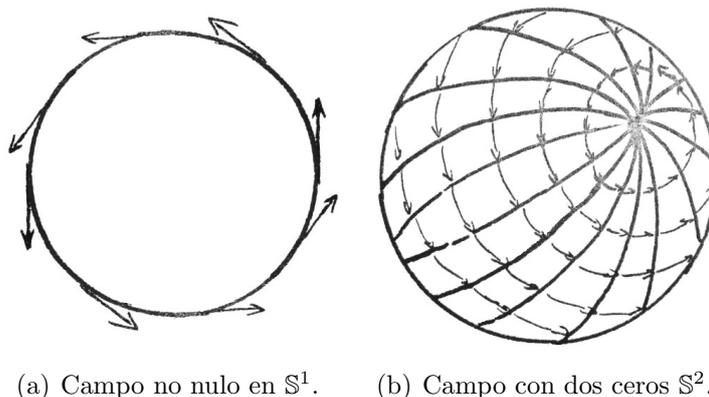


FIGURA 3. Campos tangentes a esferas.

En la figura 3 podemos ver, a la izquierda, el tipo de campo que se puede definir para esferas de dimensión impar y, a la derecha, la esfera \mathbb{S}^2 , sobre la que no se puede considerar un campo sin ceros y para la que se proporciona uno con dos valores nulos.

9. TEOREMA DE LA INVARIANZA DEL DOMINIO

En esta sección demostraremos el teorema de la invarianza del dominio. Este teorema asegura que, si f es una aplicación continua e inyectiva, cuyo dominio es abierto, la continuidad de la inversa f^{-1} está garantizada. Para probar este resultado, serán necesarios el teorema de Sard, que ya enunciamos (7.2), y el teorema del punto fijo, que juega un papel importante.

Teorema 9.1. Teorema de invarianza del dominio. *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua inyectiva definida en un abierto U de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Entonces $f(U)$ es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y f un homeomorfismo de U sobre $f(U)$.*

Demostración. Si $f(U)$ fuera un conjunto abierto, entonces f sería una aplicación abierta y, puesto que es sobreyectiva sobre su imagen $f(U)$, tendríamos que $f : U \rightarrow f(U)$ es una aplicación continua, biyectiva y abierta, por tanto, un homeomorfismo. Así que lo único que debemos comprobar es la primera parte, que equivale a lo siguiente:

Sea $B \subset U$ una bola cerrada de centro x_0 y radio r . Entonces $f(x_0)$ es un punto interior de $f(B)$.

Por simplicidad, puede suponerse que $x_0 = 0$. Supondremos que $f(0)$ no es un punto interior de $f(B)$ y llegaremos a una contradicción.

Puesto que B es compacto, $f(B)$ también. Así, como todo conjunto cerrado en un compacto es a su vez un conjunto compacto, cualquier conjunto cerrado de B tendrá imagen cerrada en $f(B)$. Entonces, $f : B \rightarrow f(B) = C$ es una aplicación continua, biyectiva y cerrada, por tanto, homeomorfismo. Sea $g : C \rightarrow B$ su inversa, que ya hemos establecido que es continua, y que al ser C compacto, por el teorema de extensión de Tietze, posee una extensión continua $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como $G(f(0)) = g(f(0)) = 0$, por la continuidad de G tenemos que

Dado $r > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $\|y - f(0)\| < \delta$, entonces $\|G(y)\| < \frac{r}{4}$.

Ahora, como $f(0)$ no está en el interior de C , existe $c \notin C$ tal que $\|f(0) - c\| < \frac{\delta}{2}$; de este modo, $f(0)$ no pertenece al conjunto compacto

$$T := \{y \in C : \|y - c\| \geq \frac{\delta}{2}\} \subset C.$$

Como g es inyectiva y $g(f(0)) = 0$, no hay otro punto de C en el que g se anule, así que

$$\eta = \min\{r, \|g(y)\| : y \in T\} > 0.$$

Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ la esfera definida por $\|y - c\| = \frac{\delta}{2}$ y el conjunto compacto $K = S \cup T$. Construimos la aplicación continua $\lambda : C \rightarrow K$ mediante

$$\lambda(y) = \begin{cases} y \in T & \text{si } \|y - c\| \geq \frac{\delta}{2}, \\ c + \frac{\delta}{2} \frac{y-c}{\|y-c\|} \in S & \text{si } \|y - c\| \leq \frac{\delta}{2}, \end{cases}$$

que está bien definida ya que $c \notin C$, luego $\|y - c\|$ no se anula nunca.

A continuación, aplicando el teorema de aproximación de Weierstrass, según el cual los polinomios son densos en el espacio de aplicaciones continuas, tenemos una aplicación polinómica $P : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|P(y) - G(y)\| \leq \frac{\eta}{4} \quad \forall y \in K.$$

Entonces, como P es diferenciable y $S \subset K \subset \mathbb{R}^n$ es una esfera de dimensión $n - 1$, aplicando el teorema de Sard resulta que $P(S)$ tiene interior vacío. Efectivamente, la aplicación

$$d_a P : T_a S \rightarrow \mathbb{R}^n$$

nunca es sobreyectiva ya que la dimensión de $T_a S$ es menor que n . De este modo, el conjunto de valores regulares de P , a saber, $\mathbb{R}^n \setminus P(S)$, es denso en \mathbb{R}^n , lo que implica que el interior de $P(S)$ es vacío. Entonces, para todo $x \in P(S)$ y todo radio $\varepsilon > 0$, resulta que $B_\varepsilon(x) \cap P(S)^c$ no es vacío y esto nos permite tomar $u \notin P(S)$ tal que $\|u\| < \frac{\eta}{4}$. Definamos

la aplicación $Q = P - u$ y veamos que no tiene ceros en K . En efecto, si $Q(a) = 0$ para algún $a \in K$, tendríamos $P(a) = u$ y $a \notin S$, con lo que $a \in T$, pero

$$\|G(a)\| \leq \|G(a) - P(a)\| + \|P(a)\| \leq \frac{\eta}{4} + \|u\| < \eta,$$

contradiciendo la definición de η . De aquí se deduce que

La aplicación continua $h : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $h(y) = Q(\lambda(y))$ no tiene ceros en C .

Veamos que esto es una contradicción, que hemos provocado al suponer que $f(x_0)$ no era un punto interior de $f(B)$.

Supongamos primero que $\|g(y) - h(y)\| \leq r$ para todo $y \in C$ (que será probado más adelante). Entonces, la aplicación continua

$$\mu : B \rightarrow B, \quad x \mapsto x - h(f(x))$$

está bien definida ya que

$$\|\mu(x)\| = \|x - h(f(x))\| = \|g(f(x)) - h(f(x))\| \leq r.$$

Como B es homeomorfo al disco D^n , el teorema del punto fijo de Brouwer afirma que existe un punto fijo para la aplicación μ , es decir, existe $a \in B$ tal que $\mu(a) = a - h(f(a)) = a$. Por tanto, $h(f(a)) = 0$, teniendo h un cero en $f(B) = C$ y contradiciendo la última afirmación remarcada.

Por último, queda demostrar que $\|g(y) - h(y)\| \leq r$ para todo $y \in C$. Si $\|y - c\| \geq \frac{\delta}{2}$, entonces $\lambda(y) = y \in T$ y

$$\|g(y) - h(y)\| = \|g(y) - Q(y)\| \leq \|g(y) - P(y)\| + \|u\| < \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} < \eta \leq r.$$

Por otro lado, si $\|y - c\| < \frac{\delta}{2}$, tenemos que $\lambda(y) \in S$, es decir, $\|\lambda(y) - c\| = \frac{\delta}{2}$. Sea z cualquiera de y o $\lambda(y)$, entonces

$$\|z - f(0)\| \leq \|z - c\| + \|c - f(0)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Esto implica que, por la continuidad de G , $\|G(z)\| \leq \frac{r}{4}$. Así, $\|g(y)\|, \|G(\lambda(y))\| \leq \frac{r}{4}$ y

$$\begin{aligned} \|g(y) - h(y)\| &= \|g(y) - Q(\lambda(y))\| = \|g(y) - P(\lambda(y)) + u\| \\ &\leq \|g(y)\| + \|G(\lambda(y))\| + \|P(\lambda(y)) - G(\lambda(y))\| + \|u\| \\ &\leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} \leq r. \end{aligned}$$

□

10. CONSTRUCCIONES EN ESFERAS

En este apartado nos centraremos en algunos resultados sobre las esferas \mathbb{S}^m . Proporcionaremos un método para extender aplicaciones sobre esferas de una determinada dimensión a esferas de dimensión superior, lo que nos permitirá generalizar algunas afirmaciones y veremos que, dada una variedad M compacta, conexa y orientada, existe una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de cualquier grado $k \in \mathbb{Z}$.

Indicamos la notación que se seguirá en esta sección. Sea $\mathbb{S}^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$ la esfera de dimensión m , llamando $a_N := (0, \dots, 0, 1)$, $a_S := (0, \dots, 0, -1)$, $H_N := \{x \in \mathbb{S}^m : x_{m+1} \geq 0\}$ y $H_S := \{x \in \mathbb{S}^m : x_{m+1} \leq 0\}$. También observamos que se puede obtener la esfera de dimensión $m - 1$ como una subvariedad de la de dimensión m , mediante una ecuación implícita, $\mathbb{S}^{m-1} := \{x \in \mathbb{S}^m : x_{m+1} = 0\}$.

Ahora, definamos una aplicación diferenciable $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que mediará la extensión mencionada previamente, y tal que

- i) es monótona creciente y $\psi(-t) = -\psi(t)$,
- ii) $|\psi(t)| \leq \pi/2$ para todo punto y $\psi(t) = \pi/2$ si $t > 1 - \varepsilon > 0$,
- iii) $\psi'(0) > 0$.

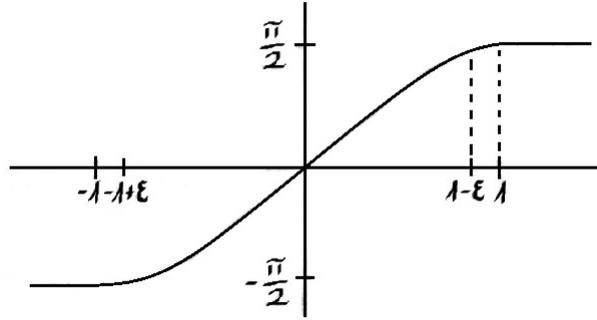


FIGURA 4. Aplicación $\psi(t)$.

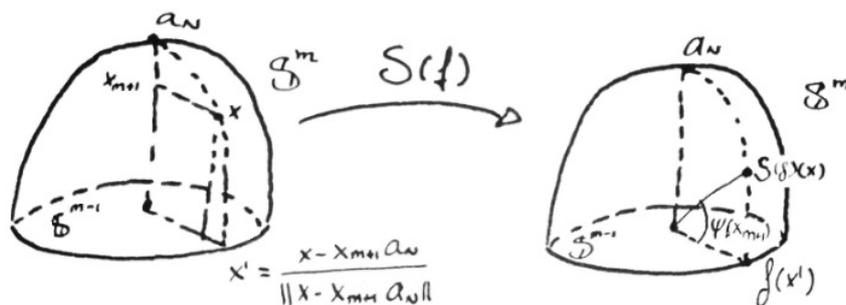
Con esta aplicación en mente, cuya gráfica se puede observar en la figura 4, pasamos a definir el elemento clave de esta sección, la aplicación con la que se lleva a cabo la extensión a dimensión superior.

Definición 10.1. Dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, se define la *suspensión* de f , $S(f) : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$, como

$$S(f)(x) = \begin{cases} a_N, & x = a_N, \\ \sin \psi(x_{m+1})a_N + \cos \psi(x_{m+1})f\left(\frac{x - x_{m+1}a_N}{\|x - x_{m+1}a_N\|}\right), & x \neq a_N, \\ a_S, & x = a_S. \end{cases}$$

Detengámonos a analizar el comportamiento de este objeto. Por un lado, $S(f)|_{x_{m+1}=0} = f$ y la preimagen de \mathbb{S}^{m-1} es la preimagen por f ; por otro, $\sin \psi(x_{m+1})$ nos permite desplazarnos por la dimensión añadida, mientras que $\cos \psi(x_{m+1})$ nos desplaza en hipersuperficies paralelas a \mathbb{S}^{m-1} . Por tanto, la suspensión de f la extiende a esferas de una dimensión más. Además, observamos que las imágenes de los dos hemisferios quedan contenidas en ellos mismos, es decir, $S(f)(H_N) \subset H_N$ y $S(f)(H_S) \subset H_S$. Estas apreciaciones quedan más claras con la gráfica 5.

Veamos un par de conclusiones que se pueden extraer sobre esta aplicación en lo que se refiere a las homotopías y al grado.


 FIGURA 5. Suspensión $S(f)$.

- Proposición 10.2.**
1. Si $f, g : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ son dos aplicaciones continuas homótopas, entonces lo son sus suspensiones.
 2. Dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, se cumple que $\deg(f) = \deg(S(f))$.

Demostración.

1. Sea $h : \mathbb{S}^{m-1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ la homotopía entre f y g . Consideramos $h_t(x) = h(x, t)$ y tomamos $H : \mathbb{S}^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^m$ tal que $H(x, t) = S(h_t)(x)$. Se comprueba sin dificultad, verificando los requisitos de las homotopías, que H lo es entre las suspensiones de f y g .
2. Sin pérdida de generalidad, por 5.3 podemos suponer que f es diferenciable. Sea entonces $\alpha \in \mathbb{S}^{m-1}$ un valor regular de f y recordemos que, por la definición de suspensión, se tiene que $f^{-1}(\alpha) = (S(f))^{-1}(\alpha)$. Al calcular la matriz jacobiana J_S de $S(f)$, aparecen unas nuevas fila y columna respecto a la de f , entonces, para $\alpha \in \mathbb{S}^{m-1}$, ésta tiene una submatriz cuadrada de orden m asociada a f : $(J_{S_{ij}})$, $i, j = 1, \dots, m$ y un término $J_{S_{m+1, m+1}}$ que es no nulo porque $\psi'(0) > 0$. Por tanto, también es valor regular de la suspensión. Además, de esta misma observación es fácil extraer que f y su suspensión restringida a \mathbb{S}^{m-1} se comportan del mismo modo respecto a la orientación, con lo que $\text{sign}_p(f) = \text{sign}_p(S(f))$ para cada $p \in f^{-1}(\alpha)$. Por tanto, $\deg(f) = \deg(S(f))$. □

Tras estas afirmaciones obtenemos un resultado de gran interés, así como un método para construir una aplicación con cualquier grado.

Corolario 10.3. *Dados una variedad M de dimensión m , compacta, conexa y orientada, y un número entero k , existe una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado k .*

Demostración. Si $M = \mathbb{S}^m$, por el ejemplo de la aplicación $\varphi_k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ y la proposición anterior, aplicando suspensiones sucesivamente, se obtiene el resultado.

Para el caso general, empecemos por $k = \pm 1$. Sea $g : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ una aplicación diferenciable tal que a_N sea valor regular con una única preimagen (que comprobaremos que existe) y U un abierto de M difeomorfo a \mathbb{R}^m . Consideremos una función diferenciable

meseta que cumple

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Tomando $U \equiv \mathbb{R}^m$ y $\tau(x) = \mu(\|x\|^2)$, podemos definir $g : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ por medio de

$$g(x) = \begin{cases} (0, \dots, 0, -1), & \text{si } x \notin U, \\ \left(\frac{2\tau(x)x_1}{\tau(x)^2 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2\tau(x)x_m}{\tau(x)^2 + \|x\|^2}, \frac{\tau(x)^2 - \|x\|^2}{\tau(x)^2 + \|x\|^2} \right), & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida. Si $x \in U$ y $\|x\| \geq 1$, entonces $\tau(x) = 0$ y $g(x) = a_S$. Según la expresión de la proyección estereográfica desde el polo norte, para $\tau(x) \neq 0$ tenemos

$$g(x) = \pi^{-1} \left(\frac{x}{\tau(x)} \right).$$

Entonces, $g = \pi^{-1}$ cuando $\|x\| \leq 1/2$. También se cumple que $x = 0$ es la única preimagen de a_N : si $a_N = g(x)$, se tiene $\tau(x) \neq 0$ y $a_N = g(x) = \pi^{-1} (x/\tau(x))$, que se da si y sólo si $x = 0$.

De este modo, hemos obtenido una aplicación g de grado $\deg(g) = \pm 1$. Para $k \in \mathbb{Z}$, sea, por el primer caso, una aplicación diferenciable $h : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ con grado $\deg(h) = k$. Entonces, componiendo con g , tenemos $\deg(h \circ g) = \deg(h)\deg(g) = \deg^2(g)k = k$. \square

11. TEOREMA DE HOPF

En esta sección se demostrará el *teorema de Hopf*, según el cual el grado determina la clase de homotopía de las aplicaciones entre esferas. (En el apéndice se proporcionan la definición de difeotopía y un par de teoremas relativos a éstas, que serán necesarios para la demostración del teorema de Hopf.)

A continuación, incluimos un ejemplo acerca de homotopías sobre esferas, que también será de utilidad para la prueba, pues es conveniente observar con antelación que se puede definir una homotopía entre aplicaciones que cumplen no tener imágenes antipodales.

Ejemplo 11.1. En la esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, dos aplicaciones continuas propias $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ tales que $\|\varphi(x) - \psi(x)\| < 2$, es decir, cuyas imágenes no son antipodales, son homótopas.

Para verlo, basta tomar una interpolación normalizada

$$H(x, t) = \frac{t\varphi(x) + (1-t)\psi(x)}{\|t\varphi(x) + (1-t)\psi(x)\|}.$$

En efecto, el único caso en el que $\|t\varphi(x) + (1-t)\psi(x)\| = 0$ es cuando $\varphi(x) = -\psi(x)$, pero esto implica que $\|\varphi(x) - \psi(x)\| = 2$ en dicho punto. Por tanto, si no hay imágenes antipodales, el segmento de interpolación no pasa por el origen. Bajo estas condiciones, $\delta(\varphi) = \delta(\psi)$.

Sin más preámbulo, procedemos con el objetivo principal de la sección, demostrar el teorema de Hopf.

Teorema 11.2. Teorema de Hopf. *Si $f, g : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ son dos aplicaciones continuas con el mismo grado, entonces f es homótopa a g .*

Demostración. Consideremos en primer lugar el caso $m = 1$, es decir, veamos que si $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ son dos aplicaciones continuas tales que $\deg(f) = \deg(g)$, entonces son homótopas. Recordemos para ello que toda aplicación continua $\varphi : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tiene una elevación $\bar{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}$, única salvo traslaciones por un número entero; entonces, dada $e(\theta) = \exp(i\theta)$, si $a_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $e(a_0) = \exp(ia_0) = \varphi(0)$, existe una única elevación $\bar{\varphi}$ tal que $\bar{\varphi}(0) = a_0$. Empleando esta observación sobre el caso que nos atañe (trataremos sólo f pero se aplica también a g), dada $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, se considerará $f \circ e$ la aplicación sobre la que se aplica la afirmación previa, teniendo h como elevación:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ e \downarrow & & \downarrow e \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Observamos que $f(e^{i \cdot 0}) = f(1) = z \in \mathbb{S}^1$ y $z = e^{ia_0}$ para cierto $a_0 \in \mathbb{R}$. Por tanto, existe una aplicación $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(e^{i\theta}) = e^{ih(\theta)}$, $h(0) = a_0$ y tal que $h(\theta + 2\pi) - h(\theta)$ es una aplicación continua que toma valores discretos de $2\pi\mathbb{Z}$, es decir, $h(\theta + 2\pi) - h(\theta) = 2\pi k$ para $k \in \mathbb{Z}$ fijo. La última afirmación se deduce de lo siguiente:

$$1 = \frac{f(e^{i(\theta+2\pi)})}{f(e^{i\theta})} = e^{h(\theta+2\pi)-h(\theta)}.$$

Hacemos notar que

$$(1-t)h(\theta+2\pi) + tk(\theta+2\pi) = (1-t)h(\theta) + tk\theta + 2k\pi.$$

Tomando $H(\theta, t) = \exp(i[(1-t)h(\theta) + tk\theta])$ (que está bien definida por la relación anterior), f es homótopa a $\varphi_k = \exp(ik\theta) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ y $k = \deg(\varphi_k) = \deg(f)$. Entonces, como f y g son homótopas a φ_k , lo son entre sí.

El resto, se demuestra por inducción sobre m . Supongamos que se cumple para $m-1$ y que tenemos $f, g : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ tales que $\deg(f) = \deg(g)$. Comprobemos, en varios pasos, que existen $\varphi, \psi : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ tales que f y g son homótopas a $S(\varphi)$ y $S(\psi)$ respectivamente.

1. Sean $f_1 : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ y $\varphi : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ dos aplicaciones continuas tales que $f_1(H_N) \subset H_N$, $f_1(H_S) \subset H_S$ y $f_1|_{\mathbb{S}^{m-1}} = \varphi$. Entonces, dadas las propiedades de f_1 , φ y su suspensión $S(\varphi)$, para todo punto $x \in \mathbb{S}^m$ la imagen por f_1 y por $S(\varphi)$ no están en hemisferios distintos, y no serán antipodales: $f_1(x) \neq -S(\varphi)(x)$. Por tanto, se puede definir una homotopía entre f_1 y $S(\varphi)$:

$$H(x, t) = \frac{tf_1(x) + (1-t)S(\varphi)(x)}{\|tf_1(x) + (1-t)S(\varphi)(x)\|}.$$

2. Tras esto, comprobamos que toda función diferenciable $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ es homótopa a otra $f_2 : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ tal que $a_N \notin f_2(H_S)$ y $a_S \notin f_2(H_N)$.

Sean p, q dos valores regulares de f y $f^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_k\}$, $f^{-1}(q) = \{q_1, \dots, q_l\}$ los conjuntos de sus preimágenes. Por el teorema 11.6, existen dos difeotopías $F^\alpha(x, t), F^\beta(x, t)$ para dos difeomorfismos $\alpha, \beta : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ (es decir, $F^\alpha(x, 1) = \alpha(x)$ y $F^\beta(x, 1) = \beta(x)$) tales que $\alpha(p_i) \in \mathbb{S}^m \setminus H_S$, $\alpha(q_j) \in \mathbb{S}^m \setminus H_N$, $\beta(p) = a_N$ y $\beta(q) = a_S$. La aplicación obtenida al componer adecuadamente, $f_2 = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$, cumple las características del enunciado.

3. A continuación, podemos ver que la aplicación continua $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ es homótopa a la $f_1 : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ definida en el primer paso ($f_1(H_N) \subset H_N$ y $f_1(H_S) \subset H_S$).

Por el paso anterior, se puede tomar $a_S \notin f(H_N)$ y $a_N \notin f(H_S)$. Por ser $f(H_N), f(H_S)$ compactos, existe un cierto $0 < a < 1$, tal que $f(H_N) \subset U_a := \{x \in \mathbb{S}^m : x_{m+1} > -a\}$ y $f(H_S) \subset V_a := \{x \in \mathbb{S}^m : x_{m+1} < a\}$.

Sea $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $\lambda(t) = 0$ si $|t| > (a+1)/2 > a$ y $\lambda(t) = 1$ si $|t| \leq a$. A partir de esta aplicación, definimos $h : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$

$$h(x) = \frac{x - \lambda(x_{m+1})x_{m+1}a_N}{\|x - \lambda(x_{m+1})x_{m+1}a_N\|}.$$

Puede comprobarse que el denominador no se anula: por la expresión de $h(x)$, sólo podría anularse si $x = a_N$, pero en ese caso, $\lambda(x_{m+1}) = \lambda(1) = 0$ independientemente de a . Además, esta función cumple que $h(x) \neq -x$ y, mediante

$$H(x, t) = \frac{th(x) + (1-t)x}{\|th(x) + (1-t)x\|},$$

tenemos que h es homótopa a la identidad (en el ejemplo del inicio de la sección vimos que esta homotopía estaba bien definida). Estudiando un poco el término $x - \lambda(x_{m+1})x_{m+1}a_N$ vemos que se cumple $h(U_a) \subset H_N$ y $h(V_a) \subset H_S$. En efecto, dado $x \in \mathbb{S}^m$, si $0 \leq |x_{m+1}| \leq a$, $h(x)$ pertenece al ecuador; si $x_{m+1} > a$ o $x_{m+1} < -a$, le resta o suma una fracción de $|x_{m+1}|a_N$ (o deja como está).

De este modo, componiendo f con h , se obtiene que $f_1 = h \circ f$ cumple todas las condiciones del enunciado.

Por tanto, existen dos aplicaciones continuas $\varphi, \psi : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ tales que f y g son homótopas a $S(\varphi)$ y $S(\psi)$ respectivamente. Entonces,

$$\deg(S(\varphi)) = \deg(f) = \deg(g) = \deg(S(\psi)).$$

Pero $\deg(\varphi) = \deg(S(\varphi)) = \deg(S(\psi)) = \deg(\psi)$ y por hipótesis de inducción, φ y ψ son homótopas, pero las suspensiones de ambas aplicaciones son homótopas a f y g . Por tanto, f y g también lo son. \square

Recordamos que el recíproco de este teorema también se cumple y se obtuvo en la sección 6, por tanto, el grado nos permite distinguir la clase de homotopía en la que se encuentra una aplicación continua. Por otro lado, en la sección 10 se probó que, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, entre una variedad compacta de dimensión m y la esfera \mathbb{S}^m existe una aplicación con dicho grado. Por ende, el grado define una biyección entre \mathbb{Z} y el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$. De hecho, a ese conjunto se le dota geoméricamente de una estructura de grupo, siendo el grado un isomorfismo de grupos.

Ejemplo 11.3. En la sección 8 habíamos podido comprobar que, dada \mathbb{S}^m , si m era impar existía un campo tangente sin ceros sobre la variedad, lo cual implicaba que la aplicación identidad y la antipodal eran homótopas.

En cambio, este resultado lo podemos obtener de otro modo por medio del teorema que acabamos de demostrar ya que, si m es impar, $\deg(\sigma) = (-1)^{m+1} = 1 = \deg(\text{Id})$. Por tanto, el teorema de Hopf implica que las aplicaciones son homótopas.

APÉNDICE

En este apartado se proporcionarán un par de resultados acerca de *difeotopías*, que serán necesarios para demostrar el teorema de Hopf.

Definición 11.4. Sea M una variedad. Una *difeotopía* de M es una homotopía $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $F_0 = \text{Id}_M$ y F_t es un difeomorfismo para todo t .

Si F es una difeotopía, se dice que es la *identidad fuera de un compacto* $K \subset M$ si $F_t(x) = x$ para $x \notin K$. También se dice que F une $x \in M$ y $F_1(x)$.

Teorema 11.5. Sean M una variedad diferenciable sin borde, conexa y x_0, x_1 dos puntos de M . Entonces, existe una difeotopía uniendo x_0 y x_1 que es la identidad fuera de un compacto $K \subset M$ que es entorno de ambos.

Demostración. Primero estudiemos una versión local del teorema. Consideremos un entorno U de x_0 y x_1 , abierto en M , que podemos tomar difeomorfo a \mathbb{R}^m . Entonces, para comprobar que se cumple el enunciado localmente, es suficiente probar que

Todo punto $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|y\| < 1$ es difeótopo al origen de coordenadas por una difeotopía F que cumple $F_t(x) = x$ para $\|x\| \geq 1$.

Fijemos un punto $y \in B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < r\}$ para un $r < 1$ y sea $\theta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable meseta tal que $\theta \equiv 1$ en $\overline{B_r(0)}$ y $\theta \equiv 0$ si $\|x\| > 1$. Consideremos en $B_r(0)$ el campo constante

$$Y = \frac{y}{\|y\|},$$

que podemos extender por cero a todo \mathbb{R}^m usando la función meseta $\theta(x)$. Unas simples comprobaciones permiten afirmar que, en dicho entorno,

$$\psi_t(x) = x + t \frac{y}{\|y\|}.$$

es el flujo completo cuyo generador infinitesimal es el campo Y . Efectivamente, tomando en ese entorno el sistema de coordenadas canónico, tenemos

$$Y_a(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{x}_i \circ \psi_s) \Big|_{(0,a)} = \frac{\partial}{\partial s} \left(x_i + t \frac{y_i}{\|y\|} \right) \Big|_{(0,a)} = \frac{y_i}{\|y\|},$$

$$\psi_0(x) = x, \quad \text{y} \quad \psi_t(\psi_s(x)) = \psi_t \left(x + s \frac{y}{\|y\|} \right) = x + t \frac{y}{\|y\|} + s \frac{y}{\|y\|} = \psi_{t+s}(x).$$

Con este flujo podemos definir una homotopía $F : \mathbb{R}^m \times [0, \|y\|] \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $F(x, t) = \psi_t(x)$, que es la difeotopía que buscamos. Primero, $F_0(x) = \psi_0(x) = x$ y F_t es difeomorfismo para cada $t \in [0, \|y\|]$, pues $\psi_t(x)$ lo es. Además, si $x + t \frac{y}{\|y\|}$ no pertenece a $B_r(0)$, entonces $F_t(x) = x$ debido a la función meseta θ y, por último, $F_{\|y\|}(0) = y$.

Ahora, este resultado se traslada al caso inicial tomando en M la función meseta que es idénticamente uno en un entorno $V \subset U$ de x_0, x_1 y cero fuera de U y obteniendo los *pullbacks* X y $\varphi_t(x)$ del campo Y y el flujo $\psi_t(x)$ respectivamente, de modo que $F' := \varphi_t(x) : M \times [0, t_0] \rightarrow M$ sea la difeotopía buscada.

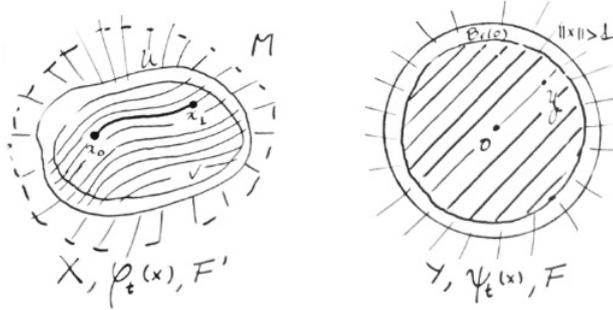


FIGURA 6. Difeotopía local.

Tras obtener la versión local, la generalización a toda la variedad es sencilla. Para ello, sólo debemos ver que si x_0 y x_1 son difeótopos por una difeotopía $F^{(1)}$ y x_1 y x_2 lo son por $F^{(2)}$, entonces existe una difeotopía F uniendo x_0 y x_2 ; si las dos difeotopías originales eran la identidad fuera de dos compactos $K^{(1)}, K^{(2)}$, entonces F lo es fuera de otro compacto. Lo haremos con ayuda de una función diferenciable meseta $\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como en la figura 7 y que nos servirá para conectar las dos difeotopías.

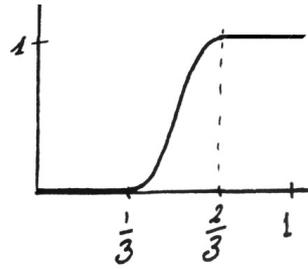


FIGURA 7. Función meseta μ .

Definimos entonces $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ mediante

$$F(x, t) = \begin{cases} F^{(1)}(x, \mu(2t)), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F^{(2)}(F_1^{(1)}, \mu(2t - 1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Efectivamente, F es la difeotopía que deseamos, pues

1. $F_0 = F_0^{(1)} = \text{Id}_M$ y $F_1(x_0) = F_1^{(2)}(F_1^{(1)}(x_0)) = x_2$,
2. $F_t = F_1^{(1)}$ si $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$ y $F_t = F_0^{(2)} \circ F_1^{(1)}$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}$,

3. Si $x \notin K^{(1)} \cup K^{(2)}$, entonces $F^{(1)}(x, t) = F^{(2)}(x, t) = x$, con lo que $F(x, t) = x$.

Tenemos entonces que F une x_0 con x_2 y es la identidad fuera del compacto $K^{(1)} \cup K^{(2)}$.

Finalmente, como M es conexa, dados dos puntos x_0 y x , podemos construir una cadena de abiertos U_i , $i = 1, \dots, r$ que conecte a ambos y aplicar este proceso reiteradamente para unos determinados puntos $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$ ($1 \leq i \leq r-1$): primero consideramos dos difeotopías entre x_0 y x_1 y entre x_1 y x_2 , con las que definimos una entre x_0 y x_2 ; con ésta y la difeotopía entre x_2 y x_3 construimos una entre x_0 y x_3, \dots , hasta llegar a formarla entre x_0 y $x = x_{r-1}$. \square

Podemos ver, con el siguiente teorema, que este resultado también se cumple para colecciones finitas de puntos $\{a_1, \dots, a_p\}, \{b_1, \dots, b_p\}$:

Teorema 11.6. *Sean M una variedad de dimensión $m \geq 2$, $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_p\}$ dos colecciones finitas de puntos de M y A un abierto conexo que contenga a ambas. Entonces estos dos conjuntos son difeótopos por una difeotopía que es la identidad fuera de un compacto $K \subset A$ que los contiene.*

Demostración. Se demostrará por inducción sobre el número p de parejas de puntos. El caso $p = 1$ se corresponde con el teorema anterior; supongamos que se cumple para $p - 1$ y veamos que, entonces, también lo hace para p .

Por hipótesis de inducción, existe una difeotopía $F^{(p-1)}$ de la variedad $M \setminus \{a_p, b_p\}$ que une a_i con b_i para $i = 1, \dots, p-1$ y que es la identidad fuera de un compacto $K^{(p-1)}$ contenido en $A \setminus \{a_p, b_p\}$, que es conexo porque $m \geq 2$. Entonces, podemos extender con la identidad la difeotopía $F^{(p-1)}$ a una definida en toda M . Sea ahora $F^{(p)}$ la difeotopía que une a_p con b_p y que es la identidad fuera de un compacto $K^{(p)}$ contenido en $A \setminus \{a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}\}$, también conexo. Podemos extender $F^{(p)}$ con la identidad a una difeotopía de M . Por tanto, $F = F^{(p-1)} \circ F^{(p)}$ es la difeotopía de M que queremos, pues nos permite unir *paso a paso*, primero los puntos a_p y b_p , fijando las $p - 1$ parejas restantes, y luego dichas parejas, dejando fija la *unión* entre los dos primeros. \square

REFERENCIAS

- [1] J.M. GAMBOA, J.M. RUIZ: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*. Sanz y Torres, Madrid 2016.
- [2] I. MADSEN, J. TORNEHAVE: *From Calculus to Cohomology. De Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [3] E. OUTERELO, J.A. ROJO, J.M. RUIZ: *Topología Diferencial*. Sanz y Torres, Madrid 2014.
- [4] E. OUTERELO, J.M. RUIZ: *Mapping Degree Theory*. American Mathematical Society, Real Sociedad Matemática Española, 2009.
- [5] C.T.C.WALL: *A Geometric Introduction to Topology*. Addison-Wesley, 1972.
- [6] J. BOCHNAK: *Differential Geometry*. Notas manuscritas Vrije Universiteit, Amsterdam 1980.
- [7] N. STRAUMANN: *General Relativity with Applications to Astrophysics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.