# Multiplicidad de intersección y resultantes

**María Jesús de la Puente**

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense
28034–Madrid, Spain
mariajesus_delapuente@mat.ucm.es

*Dedicado al Profesor Enrique Outerelo.*

**ABSTRACT**

En este artículo se demuestra que la multiplicidad de intersección de dos curvas algebraicas planas complejas definida usando resultantes no depende del sistema proyectivo de coordenadas elegido. La clave de la demostración consiste en descomponer la matriz de cambio de coordenadas en producto finito de matrices sencillas, por así decir, y, para cada una de dichas matrices sencillas $M$, demostrar que existe una biyección entre las raíces de la resultante de dos formas $F, G$ y la resultante de las formas transformadas $F^M, G^M$, conservándose las multiplicidades de las raíces. Se hace abundante uso de las muchas propiedades de las resultantes.

*2000 Mathematics Subject Classification:* 14H50, 13P99.
*Key words:* Multiplicidad de intersección, resultante.

## Introducción

La multiplicidad de intersección $m$ de dos curvas algebraicas $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ en un punto $P$ común a ambas es una noción muy intuitiva: $m$ alcanzará el valor 1, mínimo posible, si ambas curvas son lisas en $P$ y sus tangentes en $P$ son distintas. Por el contrario, $m$ será grande si las dos curvas tienen un alto contacto en $P$, lo que puede venir motivado porque $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ compartan tangente en $P$ o porque alguna de las curvas sea singular en $P$. Recordemos además el justamente famoso *teorema de Bezout*, según el cual la suma de las multiplicidades de intersección de dos curvas sin componentes en común es igual al producto de los grados de dichas curvas. Se trata de un teorema de carácter local–global, ya que la multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto es un asunto local.

Los libros de texto más elementales sobre curvas algebraicas definen la multiplicidad de intersección de dos curvas, recurriendo a las resultantes: véase [4], [6], [13], entre otros. Todos afirman que esta definición es independiente del sistema proyectivo de coordenadas elegido pero ninguno demuestra este hecho. Los autores basan su aserto en la existencia de definiciones alternativas de multiplicidad de intersección que son intrínsecas.

Nosotros hemos encontrado una demostración de dicha independencia en términos elementales, que expondremos a continuación, en la sección segunda. Las diversas propiedades de las resultantes que se usarán en dicha sección quedan recogidas, sin demostración, en la sección tercera.

Aprovechamos la oportunidad para agradecer a J.M. Gamboa el haber detectado algunos errores en versiones anteriores de este artículo.

## 1. Sobre la definición de multiplicidad de intersección

**Definición 1.1** *Sea un sistema proyectivo de coordenadas*

$$\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; P_4\}$$

*y sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ curvas algebraicas sin componentes en común y en las siguientes condiciones:*

1. *$P_2 \notin \mathcal{C}$ o $P_2 \notin \mathcal{D}$,*

2. *cada recta que pasa por $P_2$ contiene, a lo sumo, un punto de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, i.e., no hay un par de puntos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ alineados con $P_2$.*

*Sean $F, G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ formas minimales para $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ de grados respectivos $m, n \geq 1$. Gracias a la primera hipótesis, tenemos $\deg_Y F = \deg F$ o $\deg_Y G = \deg G$, por lo que la resultante $R^Y_{F,G}$ es homogénea de grado $mn$ en las variables $X, Z$, según el teorema 2.5.*

*Sean $(a : b : c)$ las coordenadas de un punto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ respecto de $\mathcal{R}$. Definimos*

$$\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \begin{cases} 0, & si\ P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}, \\ k, & si\ P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}, \end{cases}$$

*donde $k$ es la multiplicidad de $(a : c) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ como raíz de $R^Y_{F,G}$. La cantidad anterior se denomina **multiplicidad de intersección de las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en el punto $P$**.*

Nótese que si $(a : c)$ es raíz de $R^Y_{F,G}$, entonces el valor $b \in \mathbb{C}$ que satisface

$$(a : b : c) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$$

existe, por ser $\mathbb{C}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y es único, gracias a la segunda hipótesis. Se ha de notar, además, la equivalencia de los sistemas

$$\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \\ R^Y_{F,G} = 0 \end{cases}$$

gracias a la proposición 2.3.

Veamos ahora que la definición anterior es *independiente del sistema de referencia proyectivo elegido*. Dados dos sistemas de referencia proyectivos

$$\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; P_4\},$$
$$\mathcal{R}' = \{P'_1, P'_2, P'_3; P'_4\},$$

denotemos por $X, Y, Z$ (resp. $X', Y', Z'$) las variables respecto de $\mathcal{R}$ (resp $\mathcal{R}'$). La relación entre unas y otras es

$$M \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

donde $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ es una matriz no singular, determinada de modo único, salvo producto por constantes no nulas.

Si $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ es una forma de grado positivo arbitraria, tenemos

$$F(X, Y, Z) =$$
$$F(m_{11}X' + m_{12}Y' + m_{13}Z', m_{21}X' + m_{22}Y' + m_{23}Z', m_{31}X' + m_{32}Y' + m_{33}Z')$$

y definimos $F^M(X', Y', Z') \in \mathbb{C}[X', Y', Z']$ mediante la expresión anterior, i.e.,

$$F(X, Y, Z) = F^M(X', Y', Z').$$

Es sencillo comprobar que $\deg F = \deg F^M$. Tampoco es difícil verificar que $F$ es irreducible si y solo si $F^M$ es irreducible. Además, si consideramos la descomposición de $F$ en factores irreducibles

$$F = F_1^{k_1} F_2^{k_2} \cdots F_r^{k_r},$$

es fácil ver que

$$F^M = G_1^{k_1} G_2^{k_2} \cdots G_r^{k_r}$$

es la correspondiente descomposición de $F^M$, con $F_j^M = G_j$, para $j = 1, \ldots, r$; aquí tenemos $1 \le r \le \deg F$, $k_j \in \mathbb{N}$, $F_j \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ forma irreducible,

$$\deg F = \sum_{j=1}^{r} k_j \deg F_j$$

y $F_i, F_j$ formas primas entre sí, cuando $i \neq j$.

Vamos a considerar los cambios de coordenadas desde el siguiente punto de vista.

**Definición 1.2** *Sea* $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ *una matriz no singular. Con las notaciones anteriores, diremos que* el cambio proyectivo de coordenadas asociado a $M$ conserva el grado en la primera (resp. segunda, tercera) variable *si para cada forma* $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ *se tiene*

$$\deg_X F = \deg_{X'} F^M,$$

*(resp.* $\deg_Y F = \deg_{Y'} F^M$, $\deg_Z F = \deg_{Z'} F^M$*).*

Analicemos algunos ejemplos sencillos.

**Ejemplo 1.3** Los cambios de coordenadas que permutan variables, también permutan los correspondientes grados. Por ejemplo, la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

corresponde a permutar las variables primera y segunda, y es evidente que

$$\deg_X F = \deg_{Y'} F^P, \qquad \deg_Y F = \deg_{X'} F^P.$$

**Ejemplo 1.4** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ arbitrarios y $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Es fácil comprobar que los cambios asociados a las matrices

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

conservan el grado en la primera variable. Análogamente, los cambios asociados a las matrices

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

(resp.

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;)$$

conservan el grado en la segunda (resp. tercera) variable.

**Ejemplo 1.5** Sean $e, f \in \mathbb{C}$ no ambos nulos y

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & f & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Existen formas $F, G, H \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ tales que el cambio de coordenadas asociado a la matriz $V_2$ conserva, aumenta o disminuye el grado en la segunda variable, respectivamente. En efecto, si $e \neq 0 \neq f$, basta tomar

$$F = Y, \qquad G = Z, \qquad H = Y - \frac{X}{e},$$

   y obtenemos

$$F^{V_2} = Y', \qquad G^{V_2} = fY' + Z', \qquad H^{V_2} = -\frac{X'}{e}.$$

2. Por otra parte, el cambio de coordenadas asociado a la matriz $V_2$ conserva el grado en la primera variable. Esto es debido al ejercicio anterior y la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & f & 1 \end{pmatrix} = V_2,$$

   siendo las matrices del miembro de la izquierda de tipo $H_1, S_1$. Por análogas razones, el cambio de coordenadas asociado a la matriz $V_2$ conserva el grado en la tercera variable.

Se tienen propiedades análogas para las matrices

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente lema es la razón por la que nos hemos fijado en los tipos de matrices anteriores: $P, V_k, H_k, S_k$.

**Lema 1.6** *Sea $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ una matriz no singular. Dado $k \in \{1, 2, 3\}$, con las notaciones de los ejemplos 1.4, 1.5, tenemos*

1. *si $m_{kk} = 1$, existen matrices únicas $V_k, H_k, S_k \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tales que*

$$M = V_k H_k S_k, \tag{1.1}$$

2. *si $m_{kk} = 0$, existen $s \in \mathbb{C}$ no nulo y matrices $V_k, H_k, S_k, P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tales que*

$$M = sPV_k H_k S_k,$$

   *donde $P$ es una matriz de permutación.*

*Demostración.* Veamos el caso $k = 2$, por ejemplo.

1. Se trata de encontrar $a, b, e, f, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, tales que se verifique la igualdad (1.1). Nótese que $\det V_2 = \det H_2 = 1$ y, entonces tendremos
$$0 \neq \alpha\delta - \beta\gamma = \det S_2 = \det M.$$
La segunda columna del producto $V_2 H_2 S_2$ es
$$\begin{pmatrix} e \\ 1 \\ f \end{pmatrix}$$
y, por tanto, tendremos
$$e = m_{12}, \qquad f = m_{32}.$$
Así, multiplicando por la matriz inversa de $V_2$ en la igualdad (1.1), buscamos $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ que satisfagan la igualdad
$$\begin{pmatrix} m_{11} - m_{12}m_{21} & 0 & m_{13} - m_{12}m_{23} \\ m_{21} & 1 & m_{23} \\ m_{31} - m_{32}m_{21} & 0 & m_{33} - m_{32}m_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ a\alpha + b\gamma & 1 & a\beta + b\delta \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$
De aquí se deducen los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; estos son
$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & m_{11} - m_{12}m_{21}, \\ \beta & = & m_{13} - m_{12}m_{23}, \\ \gamma & = & m_{31} - m_{32}m_{21}, \\ \delta & = & m_{33} - m_{32}m_{23}. \end{array}$$
Finalmente, resolviendo el sistema
$$\begin{array}{rcccl} m_{21} & = & a\alpha + b\gamma & = & a(m_{11} - m_{12}m_{21}) + b(m_{31} - m_{32}m_{21}), \\ m_{23} & = & a\beta + b\delta & = & a(m_{13} - m_{12}m_{23}) + b(m_{33} - m_{32}m_{23},) \end{array}$$
en las incógnitas $a, b$, obtenemos
$$a = \frac{\det \begin{pmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{pmatrix}}{\det M}, \qquad b = \frac{\det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{21} & m_{23} \end{pmatrix}}{\det M}.$$

2. Si $m_{22} = 0$, entonces $m_{12} \neq 0$ o $m_{32} \neq 0$; supongamos, por ejemplo, lo segundo. Tomemos entonces $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $s = m_{32}$. Aplicando el apartado anterior a la matriz $s^{-1}PA$ y teniendo en cuenta que $P^{-1} = P$, concluimos.

$\square$

Recordemos ahora las condiciones en las que se aplica la definición 1.1: dadas curvas $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sin componentes en común, existe $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que

1. $P_k \notin \mathcal{C}$ o $P_k \notin \mathcal{D}$,

2. no hay un par de puntos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ alineados con $P_k$.

También se puede expresar lo anterior en términos de las formas minimales $F, G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ de $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, respectivamente, como sigue: $F, G$ no tienen factores en común y existe $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que

1. $F$ o $G$ es pseudomónico en $Y$, i.e., $\deg F = \deg_Y F$ o $\deg G = \deg_Y G$,

2. para cada raíz $(x : z)$ de la resultante $R^Y_{F,G}$ existe un único $y \in \mathbb{C}$ tal que $(x : y : z) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Localmente tenemos lo siguiente. Sean $\mathcal{C}^*, \mathcal{D}^* \subset \mathbb{C}^2$ curvas algebraicas. Sea un punto $P \in \mathbb{C}^2$ y supongamos que no existe una componente $\mathcal{E}^*$ común a $\mathcal{C}^*, \mathcal{D}^*$ tal que $P \in \mathcal{E}^*$. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ las clausuras proyectivas respectivas. Supongamos que

1. $P_2 \notin \mathcal{C}$ o $P_2 \notin \mathcal{D}$, y

2. no existe ningún punto de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ alineado con $P$ y $P_2$.

Si $P$ tiene coordenadas $(0, y)$ entonces

$$\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}^*, \mathcal{D}^*) = \mathrm{ord}\, R^Y_{f,g},$$

donde $f$ y $g \in \mathbb{C}[X, Y]$ denotan polinomios minimales para $\mathcal{C}^*$ y $\mathcal{D}^*$ respectivamente.

Veamos ahora *cómo influyen los diversos cambios de coordenadas proyectivos sobre las resultantes.*

En primer lugar, estudiemos el caso de las matrices de permutación. Este caso se reduce a comprobar que *la multiplicidad es independiente de la variable que se elija para hacer la resultante, cuando dicha elección es posible.* Bastará analizar el caso de las variables $X, Y$.

**Proposición 1.7** *Sean dos curvas $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sin componentes en común tales que*

1. *$P_1 \notin \mathcal{C}$ o $P_1 \notin \mathcal{D}$,*

2. *$P_2 \notin \mathcal{C}$ o $P_2 \notin \mathcal{D}$,*

3. *no hay un par de puntos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ alineados con $P_1$ ni con $P_2$.*

*Sean $F, G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ formas minimales para $\mathcal{C}, \mathcal{D}$. Existe una biyección entre los conjuntos de raíces de $R^X_{F,G}$ y de $R^Y_{F,G}$, conservándose las multiplicidades.*

*Demostración.* Pongamos $\deg F = m, \deg G = n$. Por las hipótesis de pseudomonicidad tenemos

$$\deg R^X_{F,G} = \deg R^Y_{F,G} = mn.$$

La resultante $R^X_{F,G}$ es homogénea en las variables $Y, Z$ luego, por el teorema fundamental del álgebra, podemos escribir

$$R^X_{F,G} = \prod_{j=1}^{\alpha} (c_j Y - b_j Z)^{\alpha_j},$$

con $\sum_{j=1}^{\alpha} \alpha_j = mn$ y los pares $(b_j, c_j) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no proporcionales dos a dos. Análogamente tenemos

$$R^Y_{F,G} = \prod_{k=1}^{\beta} (\tilde{c}_k X - \tilde{a}_k Z)^{\beta_k},$$

con $\sum_{k=1}^{\beta} \beta_k = mn$ y los pares $(\tilde{a}_k, \tilde{c}_k) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no proporcionales dos a dos. Ahora bien, de la hipótesis 3 y de la equivalencia de los sistemas

$$\left\{ \begin{array}{r} F = 0 \\ G = 0 \\ R^X_{F,G} = 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{r} F = 0 \\ G = 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{r} F = 0 \\ G = 0 \\ R^Y_{F,G} = 0 \end{array} \right.$$

se deduce que, para cada $j \in \{1, \ldots, \alpha\}$ existe un único $a_j$ tal que el punto $(a_j : b_j : c_j)$ es raíz de $F$ y de $G$, de donde se sigue que existe un único $k \in \{1, \ldots, \beta\}$ tal que $(a_j, c_j)$ es proporcional a $(\tilde{a}_k, \tilde{c}_k)$. Esto define la biyeción que conserva las multiplicidades buscada. $\square$

A continuación no ocuparemos de los *cambios de coordenadas que conserven el grado en una variable*; por ejemplo, en la segunda. Los resultados para cambios que conserven el grado en las variables primera y tercera serán análogos.

**Proposición 1.8** *Con las notaciones del ejemplo 1.4, dadas dos formas $F, G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ sin factores en común, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $R^Y_{F,G} = R^{Y'}_{F^{H_2}, G^{H_2}}$,
2. *existe una biyección entre los conjuntos de raíces de $R^Y_{F,G}$ y de $R^{Y'}_{F^{S_2}, G^{S_2}}$, conservándose las multiplicidades.*

*Demostración.* Pongamos $\deg_Y F = m, \deg_Y G = n$.

1. Si $F$ o $G$ no depende de $Y$, la conclusión es sencilla de obtener: si, por ejemplo, $n = 0$, entonces $G = G^{H_2}$ y

$$R^Y_{F,G} = G^m = R^{Y'}_{F^{H_2}, G^{H_2}},$$

según la observación 2.1(3).

Supongamos ahora que tanto $F$ como $G$ depende de $Y$. Sea $A$ un cuerpo algebraicamente cerrado que contenga $\mathbb{C}[X, Z]$ como subanillo y escribamos

$$\begin{aligned} F = & \quad c(Y - c_1)(Y - c_2)\cdots(Y - c_m), \\ G = & \quad d(Y - d_1)(Y - d_2)\cdots(Y - d_n), \end{aligned}$$

con $c \neq 0 \neq d$, $c_i, d_j \in A$. Según la proposición 2.7, tenemos

$$R^Y_{F,G} = c^n d^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (c_i - d_j).$$

Observemos que la matriz $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no altera las variables primera y tercera y que

$$Y' = Y - aX - bZ.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} F^{H_2} = & \quad c(Y' - c'_1)(Y' - c'_2)\cdots(Y' - c'_m), \\ G^{H_2} = & \quad d(Y' - d'_1)(Y' - d'_2)\cdots(Y' - d'_n), \end{aligned}$$

donde

$$c'_i = c_i - aX' - bZ', \qquad d'_j = d_j - aX' - bZ',$$

para $i = 1, \ldots m, \quad j = 1, \ldots, n$. Por tanto,

$$c_i - d_j = c'_i - d'_j$$

y de aquí se sigue el resultado, ya que

$$R^{Y'}_{F^{H_2}, G^{H_2}} = c^n d^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (c'_i - d'_j).$$

2. El cambio de coordenadas asociado a la matriz $S_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}$ separa, por así decir, la variable segunda de las otras variables, alterando solo estas últimas. Por ello, dados $p, q \in \mathbb{C}$ no ambos nulos y $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $(qX - pZ)^k$ es factor de $R^Y_{F,G}$ si y solo si

$$\left(q(\alpha X' + \beta Z') - p(\gamma X' + \delta Z')\right)^k = \left((q\alpha - p\gamma)X' - (p\delta - q\beta)Z'\right)^k$$

es factor de $R^{Y'}_{F^{S_2}, G^{S_2}}$. Así pues, a la raíz $(p : q)$ de $R^Y_{F,G}$ le corresponde la raíz

$$(p\delta - q\beta : q\alpha - p\gamma)$$

de $R^{Y'}_{F^{S_2}, G^{S_2}}$, conservándose la multiplicidad. $\square$

Concluimos esta sección con el resultado de independencia buscado.

**Teorema 1.9** *Dados dos sistemas proyectivos de referencia*

$$\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; P_4\}, \qquad \mathcal{R}' = \{P'_1, P'_2, P'_3; P'_4\}$$

*y dos curvas* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *sin componentes en común tales que existen* $k, j \in \{1,2,3\}$ *con*

1. $P_k \notin \mathcal{C}$ *o* $P_k \notin \mathcal{D}$,
2. $P'_j \notin \mathcal{C}$ *o* $P'_j \notin \mathcal{D}$,
3. *no hay un par de puntos de* $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ *alineados con* $P_k$ *ni con* $P'_j$.

*Entonces se obtiene el mismo resultado calculando la multiplicidad de intersección de* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *en un punto cualquiera de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *con uno u otro sistema.*

*Demostración.* Sean $F, G \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ formas minimales para $\mathcal{C}, \mathcal{D}$. Denotemos por $X, Y, Z$ (resp. $X', Y', Z'$) las variables respecto de $\mathcal{R}$ (resp $\mathcal{R}'$) y sea

$$M \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

donde $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ es no singular.

El caso $k \neq j$ ha sido resuelto en la proposición 1.7. Supongamos pues que $k = j$; por ejemplo, $k = 2$. Aquí, distinguiremos dos casos.

1. Si $m_{22} \neq 0$. Multiplicando $M$ por una constante, podemos suponer $m_{22} = 1$. Aplicando el lema 1.6, tenemos

$$M = V_2 H_2 S_2.$$

Gracias a la Proposición 1.8, las multiplicidades de las raíces de las resultantes se conservan con el cambio de coordenadas asociado a la matriz producto $H_2 S_2$. Solo nos queda, pues, analizar el caso en que tengamos

$$M = V_2 = \begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & f & 1 \end{pmatrix}.$$

Debemos probar que existe una biyección entre los conjuntos de raíces de la resultante $R^Y_{F,G}$ y la resultante de $R^{Y'}_{F^{V_2}, G^{V_2}}$, conservándose las multiplicidades. Aquí distinguiremos, de nuevo, dos casos.

(a) Si existe $l \in \{1,3\}$ tal que
- $P_l \notin \mathcal{C}$ o $P_l \notin \mathcal{D}$,
- $P'_l \notin \mathcal{C}$ o $P'_l \notin \mathcal{D}$,
- no hay un par de puntos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ alineados con $P_l$ ni con $P'_l$.

Entonces, según vimos en el ejemplo 1.5, existen matrices $H_1, S_1, H_3, S_3 \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tales que

$$V_2 = H_1 S_1 = H_3 S_3.$$

Ahora, gracias a la proposición 1.7 y el ejemplo 1.4, concluimos sin dificultad, pues también podemos calcular las multiplicidades de intersección, bien con el par de resultantes

$$R^X_{F,G}, \qquad R^{X'}_{F^{V_2},G^{V_2}},$$

si $l = 1$, o con

$$R^Z_{F,G}, \qquad R^{Z'}_{F^{V_2},G^{V_2}},$$

si $l = 3$.

(b) Si, por el contrario, tenemos

$$P_1, P_3, P'_1, P'_3 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}, \tag{1.2}$$

entonces nos vemos obligados a usar resultantes respecto de la segunda variable, al trabajar tanto con la referencia $\mathcal{R}$ como con $\mathcal{R}'$.

A la vista de la matriz $V_2$, obtenemos que las coordenadas de $P'_1, P'_2, P'_3$ respecto de $\mathcal{R}$ son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ f \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, de donde deducimos

$$P_1 = P'_1, \qquad P_3 = P'_3, \qquad Y = Y'.$$

Comprobamos que los puntos fijos de la transformación proyectiva asociada a la matriz $V_2$ son los de la recta $Y = 0$ y que, por tanto, la restricción de la transformación anterior al abierto afín $Y \neq 0$ es, sencillamente, la traslación de vector $v = (e, f) = \overrightarrow{P'_2 P_2}$.

Podemos suponer que las curvas $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son irreducibles, sin pérdida de generalidad. Pongamos $\deg F = m, \deg G = n$. La condición (1.2) proporciona las expresiones

$$F = YU + XZW, \qquad G = YS + XZT,$$

donde $W, T \in \mathbb{C}[X,Z]$, $\quad U, S \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ son formas de grado $m-2, n-2, m-1, n-1$, respectivamente. Ninguna de las formas $W, T, U, S$ es nula, por la irreducibilidad de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Distingamos ahora dos casos.

- Si $Y = 0$, a la vista de $V_2$ tenemos $X = X', Z = Z'$, luego

  $$F^{V_2}(X', 0, Z') = F(X, 0, Z), \qquad G^{V_2}(X', 0, Z') = G(X, 0, Z),$$

  y los sistemas equivalentes

  $$\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \\ R^Y_{F,G} = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} XZW = 0 \\ XZT = 0 \\ R^Y_{F,G} = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} X'Z'W(X', Z') = 0 \\ X'Z'T(X', Z') = 0 \\ R^{Y'}_{F^{V_2},G^{V_2}} = 0 \\ Y' = 0 \end{cases}$$

  proporcionan los puntos $P_1, P_3$, y quizá otros, en $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ sobre la recta de ecuación $Y = 0$, con las mismas multiplicidades, tanto si se calculan con $R^Y_{F,G}$ como con $R^{Y'}_{F^{V_2},G^{V_2}}$.
- Si $Y \neq 0$, el problema de encontrar una biyección, que conserve las multiplicidades, entre las raíces de $R^Y_{F,G}$ y las raíces de $R^{Y'}_{F^{V_2},G^{V_2}}$ se reduce a demostrar que, dadas dos curvas $\mathcal{C}^*, \mathcal{D}^* \subset \mathbb{C}^2$ y una traslación $\tau$ en $\mathbb{C}^2$, para cada punto $P \in \mathcal{C}^* \cap \mathcal{D}^*$ se tiene la igualdad

  $$\mathrm{mult}_{\tau(P)}(\tau(\mathcal{C}^*), \tau(\mathcal{D}^*)) = \mathrm{mult}_P(\mathcal{C}^*, \mathcal{D}^*),$$

  lo que resulta un sencillo ejercicio.

(c) Si $m_{22} = 0$. Tenemos

$$M = sPV_2H_2S_2,$$

según el lema 1.6. El cambio correspondiente al producto de matrices $V_2H_2S_2$ se resuelve como en el apartado anterior y el asociado a la matriz $sP$ se resuelve con la proposición 1.7.

□

## 2. Resultantes

La resultante de dos polinomios es una herramienta útil en el manejo de dos polinomios, gracias a sus tres propiedades principales:

- es una combinación de los polinomios dados,
- detecta la existencia de factores comunes de dichos polinomios,
- elimina una variable.

Veamos a continuación la definición y las propiedades más relevantes de la misma. Las demostraciones se pueden consultar en diversos textos: véase [3], [9].

Sea $A$ un dominio; usualmente tendremos $A = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Consideremos dos polinomios no ambos constantes

$$f = a_0 Y^m + a_1 Y^{m-1} + \cdots + a_m,$$

$$g = b_0 Y^n + b_1 Y^{n-1} + \cdots + b_n$$

en $\in A[Y]$. Se define la *resultante de $f$ y $g$ respecto de la indeterminada $Y$* como el elemento de $A$ siguiente

$$R^Y_{f,g} = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ n \text{ filas} \\ \\ \\ \\ m \text{ filas.} \\ \\ \\ \end{array}$$

La matriz cuadrada anterior, de tamaño $n + m$, se llama **matriz de Sylvester** de $f$ y $g$. Claramente, $R^Y_{f,g}$ es una *expresión polinomial en los coeficientes de $f$ y $g$ con coeficientes enteros.* Además, $R^Y_{f,g}$ pertenece a $A$, i.e, *mediante la resultante eliminamos la indeterminada $Y$.*

Si $Y$ se sobreentiende, escribiremos $R_{f,g}$.

**Observaciones 2.1** (1) Si $a_0 \neq 0$ o $b_0 \neq 0$ entonces $R_{f,g}$ *está definida de modo único, salvo producto por un elemento no nulo de $A$.*

En efecto, supongamos que $a_0 = 0$ y $b_0 \neq 0$. Entonces $f = a_1 Y^{m-1} + \cdots + a_m$ y también podríamos escribir

$$R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_0 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ n \text{ filas} \\ \\ \\ m-1 \text{ filas.} \\ \\ \end{array}$$

Si al primer determinante lo llamamos $r_1$ y al segundo $r_2$, vemos que $r_1 = (-1)^{n+2} b_0 r_2$.

(2) *Si* $a_0 = b_0 = 0$ *entonces* $R_{f,g}$ *se anula.*

(3) *La definición tiene sentido incluso cuando uno de los polinomios es una constante no nula.*

En efecto, si $\deg f \geq 1$ y $\deg g = 0$ entonces

$$R_{f,g} = g^{\deg f} \neq 0.$$

(4) $R_{f,0} = 0$, *si* $\deg(f) \geq 1$.

Basta escribir el polinomio nulo como $0Y + 0$. □

Conviene ampliar la definición de resultante al caso de polinomios que no dependan de la variable $Y$ como sigue: dados polinomios $a, b \in A[Y]$ de grado cero en $Y$, sea

$$R^Y_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{si } a \neq 0 \neq b; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Ejemplos 2.2** Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

(1) Sean $f = 5Y^2 + Y + 2,\ g = 3Y + 1$. Tenemos

$$R^Y_{f,g} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20.$$

(2) Sean $A = \mathbb{K}[X],\ f = (X-3)Y^2 + (X+1)Y + 2,\ g = X(X-3)Y^3 + 5Y + 1$. Tenemos

$$R^Y_{f,g} = \begin{vmatrix} X-3 & X+1 & 2 & & \\ 0 & X-3 & X+1 & 2 & \\ 0 & 0 & X-3 & X+1 & 2 \\ X(X-3) & 0 & 5 & 1 & \\ & X(X-3) & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(X-3)(X^4 - 21X^3 + 63X^2 - 165X + 126).$$

□

El grado que se considera a continuación es *respecto de la variable* $Y$, si bien $A$ puede ser anillo de polinomios en otras indeterminadas.

**Proposición 2.3** *Sean* $A$ *un dominio y* $f, g \in A[Y]$ *ambos de grado positivo. Existen* $\varphi, \psi \in A[Y]$ *con* $\deg(\varphi) < \deg(g)$ *y* $\deg(\psi) < \deg(f)$ *tales que*

$$R_{f,g} = \varphi f + \psi g.$$

**Proposición 2.4** *Sean* $A$ *un DFU y* $f, g \in A[Y]$ *polinomios ambos de grado positivo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$f$ y $g$ poseen un factor común en $A[Y]$ de grado positivo.*
2. *$R_{f,g} = 0$.*

**Teorema 2.5** *Sean $A$ un dominio y $F, G \in A[X_1, \ldots, X_r, Y]$ polinomios homogéneos tales que*

$$d = \deg F \geq \deg_Y(F) = m \geq 1, \qquad e = \deg(G) \geq \deg_Y(G) = n \geq 1.$$

*Entonces $R^Y_{F,G} \in A[X_1, \ldots, X_r]$ es homogéneo de grado $em + dn - mn$.*

**Observaciones 2.6** (1) Si $d = m$ o $e = n$ obtenemos que *el grado de $R^Y_{F,G}$ es el producto de los grados de $F$ y de $G$.* Este hecho se usa sistemáticamente, junto con la condición primera de la definición de multiplicidad de intersección.

(2) Si $m = 0$ o $n = 0$, pero no ambos, también se verifica que *el grado de $R^Y_{F,G}$ es el producto de los grados de $F$ y de $G$,* gracias a la observación 2.1(3).

A continuación vemos nuevas maneras de expresar la resultante.

**Proposición 2.7** *Sean $A$ un dominio y polinomios en $A[Y]$*

$$\begin{aligned} f =& \quad c(Y - c_1)(Y - c_2) \cdots (Y - c_m), \\ g =& \quad d(Y - d_1)(Y - d_2) \cdots (Y - d_n) \end{aligned}$$

*con $c \neq 0 \neq d$, $c_i, d_j \in A$ y $m, n \geq 1$. Entonces*

$$R_{f,g} = c^n d^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (c_i - d_j) = c^n g(c_1) \cdots g(c_m).$$

*En particular, $R_{g,f} = d^m f(d_1) \ldots f(d_n) = (-1)^{mn} R_{f,g}$.*

**Corolario 2.8** *Sean $A$ un dominio y $f, g, h \in A[Y]$. Entonces*

$$R_{fh,g} = R_{f,g} R_{h,g}.$$

## Referencias


[1] E. Brieskorn, H. Knörrer: *Plane algebraic curves*. Birkhäuser-Verlag, 1986.

[2] A. Chenciner: *Courbes algebriques planes*. Publ. Math. Univ. Paris VII, 1978.

[3] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, varieties and algorithms*: Univiversity Texts Math., Springer-Verlag, Berlin 1992.

[4] G. Fischer: *Ebene algebraische Kurven*. Vieweg-Studium, 1994; traducción al inglés de L. Kay, Amer. Math. Soc. 2001.

[5] W. Fulton *Curvas algebraicas*. Ed. Reverté, Zaragoza 1971.

[6] C.G. Gibson: *Elementary geometry of algebraic curves: An undergraduate introduction.* Cambridge Univ. Press, 1998.

[7] K. Kendig *Elementary algebraic geometry.* Graduate Texts Math. **44,** Springer-Verlag, Berlin 1977.

[8] F. Kirwan: *Complex algebraic curves.* LMS Students Texts **23,** Cambridge Univ. Press, 1992.

[9] S. Lang: *Algebra.* Addison Wesley, 1984.

[10] M. Namba: *Geometry of projective algebraic curves.* Monographs and textbooks in pure and applied math., Marcel Dekker, 1984.

[11] G. Orzech, M. Orzech: *Plane algebraic curves.* Monographs and textbooks in pure and applied math., Marcel Dekker, 1981.

[12] M. Reid: *Undergraduate algebraic geometry.* LMS Students Texts **12,** Cambridge Univ. Press, 1988.

[13] A. Seidenberg: *Elements of the theory of algebraic curves.* Addison–Wesley, 1968.

[14] I. Vainsencher: *Introduçao às curvas algébricas planas.* IMPA, Rio de Janeiro, 1996.

[15] R.J. Walker: *Algebraic curves.* Princeton Univ. Press, 1950.