Grafos de poliedros trivalentes

Raquel Díaz

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid
radiaz@mat.ucm.es

A Enrique Outerelo, con mucho cariño.

ABSTRACT

En este artículo estudiamos ciertas operaciones combinatorias entre poliedros que nos permiten transformar cualquier tipo combinatorio de poliedro en otro mediante un número finito de estas operaciones. Interpretamos este resultado como que un cierto grafo, cuyos nodos son poliedros, es conexo.

2000 Mathematics Subject Classification: 52B05, 52B10, 05C10.
Key words: Tipo combinatorio de poliedros, teorema de Steinitz, grafos 3-conexos.

Introducción

El presente trabajo está motivado por el problema de la enumeración de los distintos tipos combinatorios de poliedros. Fijados dos números n, v, el número de poliedros con n caras y v vértices es finito, aunque la cantidad exacta sólo se sabe para valores relativamente pequeños de n y v. Por ejemplo, para $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, el número total de poliedros con n caras (y cualquier número de vértices) es, respectivamente, 1, 2, 7, 34, 257, 2606 y 32300; las cantidades exactas de poliedros con n caras se han calculado hasta $n = 17$ ([2], [3]). Por el teorema de Steinitz, el problema de contar los tipos combinatorios de poliedros se reduce a contar grafos planos 3-conexos. Es mucho más fácil contar grafos con un vértice señalado como punto base ("rooted maps"), y a partir de aquí se han obtenido fórmulas que aproximan asintóticamente el número de poliedros ([5], [1]).

En este artículo estudiamos cómo relacionar los distintos tipos combinatorios de poliedros: definimos unas modificaciones locales en el grafo de un poliedro y probamos que, dados dos poliedros cualesquiera, siempre podemos pasar del uno al otro mediante un número finito de tales modificaciones. El principal trabajo se realiza dentro de la

clase de poliedros trivalentes (en cada vértice inciden tres aristas) con un número de caras n fijo (Teorema 2.2), y el resultado se puede interpretar de la siguiente manera. Se define un grafo $\mathcal{T}_n$ en el que los nodos son los poliedros trivalentes de n caras y dos poliedros se conectan con una arista si hay una modificación M_0 que transforma un poliedro en el otro; el Teorema 2.2 se traduce entonces en que este grafo es conexo.

El método de demostración del Teorema 2.2 consiste en conectar cada poliedro trivalente con n caras en un prisma de base un polígono de $n-2$ lados. Una pregunta natural es cómo invertir este proceso de forma ordenada de manera que a partir del prisma se obtengan todos los poliedros trivalentes de n caras. En la sección 4 realizamos este proceso para $n = 7, 8$.

En la sección 1 damos los preliminares, sobre poliedros y grafos, necesarios para el resto del artículo (como referencia, se puede ver [4]); en la sección 2 definimos las modificaciones entre poliedros y enunciamos los resultados; en la sección 3 demostramos el principal resultado.

1. Preliminares

Un *poliedro convexo* P es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$ definido como la intersección de un número finito de subespacios cerrados. Alternativamente, también se puede definir un poliedro convexo como la envoltura convexa de un número finito de puntos. Una *cara* del poliedro es la intersección $P \cap H$ donde H es un plano de $\mathbb{R}^3$ tal que el poliedro P está totalmente contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por H. La dimensión de la cara es la dimensión de su envoltura afín. Así, un *vértice* es una cara de dimensión 0, un *lado* es una cara de dimensión 1, y llamaremos *caras* a las caras de dimensión 2.

Dos poliedros P, Q son *combinatoriamente equivalentes* o del mismo *tipo combinatorio* si existe una aplicación ϕ del conjunto S_P de vértices, lados y caras de P en el conjunto S_Q de vértices, lados y caras de Q tal que $\phi(F_1) \subseteq \phi(F_2)$ si y sólo si $F_1 \subseteq F_2$. Ser del mismo tipo combinatorio es una relación de equivalencia. Llamaremos *poliedro combinatorio* a cada una de las clases. En este trabajo siempre vamos a tratar con poliedros, por lo que, en lo sucesivo, *poliedro* será siempre un poliedro combinatorio (si queremos referirnos a un elemento determinado de la clase podemos hablar de una *realización del poliedro* en $\mathbb{R}^3$).

El conjunto de vértices y lados de un poliedro es un grafo. Según la definición usual, un *grafo* $\mathcal{G}$ consiste en una terna (N, E, γ) donde N es un conjunto de *nodos* (o vértices), E es un conjunto de *aristas* y γ son las *relaciones de incidencia*, por las que a cada arista se le aplica un par de nodos (que pueden ser iguales); si $\gamma(e) = \{V_1, V_2\}$, se dice que la arista e incide en los nodos (o tiene como vértices o extremos) V_1, V_2. Observamos que esta definición de grafo permite *lazos*, es decir, aristas cuyos extremos coinciden, y *lados múltiples*, o aristas que tienen los mismos extremos. Un grafo es conexo si cada dos nodos se pueden unir por un camino de aristas (es decir, si $A, B \in N$, existen nodos $V_0 = A, V_1, \ldots, V_n = B$ tales que cada dos nodos consecutivos

son los extremos de alguna arista). Un *subgrafo* de $\mathcal{G}$ es un grafo (N', E', γ) donde $N' \subset N$, $E' \subset E$, y las relaciones de incidencia vienen inducidas por las de $\mathcal{G}$; el *subgrafo completo* de $\mathcal{G}$ generado por un subconjunto de nodos $N' \subset N$ es el subgrafo (N', E', γ) donde E' es el conjunto de todas las aristas de $\mathcal{G}$ con extremos en N'. Consideraremos dos grafos iguales si existe un isomorfismo entre ellos, es decir, biyecciones entre los conjuntos de nodos y los conjuntos de aristas que preservan las relaciones de incidencia.

Veremos que el grafo de un poliedro siempre es *plano*. Esto significa que el grafo se puede representar mediante puntos del plano y arcos del plano que los unen, según las relaciones de incidencia, y de forma que dos arcos distintos no se cortan, salvo en sus extremos (un arco es la imagen continua del intervalo $[0, 1]$, y homeomórfica del intervalo abierto $(0, 1)$). Lo que se obtiene de esta forma es un 1-complejo embebido en el plano, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$. Para concordar con la notación de aristas o lados de un poliedro, cuando hablemos de *aristas* de un grafo plano nos referiremos a los arcos mencionados anteriormente (de forma que las aristas son siempre homeomorfas a un intervalo cerrado o a una circunferencia); y llamaremos *aristas abiertas* a las aristas menos sus extremos (de forma que las aristas abiertas son homeomorfas a intervalos abiertos). Asimismo, llamaremos *caras abiertas* de un grafo plano $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ a las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{G}$, y *caras* a las clausuras de dichas componentes. Finalmente, llamaremos *borde* de una cara a la frontera de la cara abierta, que es unión de aristas del grafo. Si denotamos por C una cara, denotaremos la cara abierta por $\overset{\circ}{C}$. (Advertimos de la posible confusión que puede crear esta notación, puesto que en algunas ocasiones la cara abierta no coincide con el interior de la cara: este es el caso, por ejemplo, si el grafo es un polígono junto con una arista que une un vértice del polígono con un punto de su interior. Sin embargo, cuando utilicemos esta notación en el artículo, $\overset{\circ}{C}$ sí será el interior de C). Diremos que dos caras son *adyacentes* si sus bordes comparten una arista. Un grafo plano finito tiene una única cara no acotada, a la que llamamos *cara externa*.

Definición *Un grafo (plano, finito) con al menos $k+1$ vértices es k-conexo si no contiene lazos ni lados múltiples y el complementario de $k-1$ vértices cualesquiera genera un subgrafo completo conexo.*

En las demostraciones que siguen, utilizaremos la siguiente caracterización.

Un grafo (plano, finito) conexo es 3-conexo si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

C1. no contiene lazos;

C2. no contiene lados múltiples;

C3. al recorrer el borde de una cara no pasamos dos veces por un mismo vértice;

C4. si dos caras tienen dos vértices v, w en común, entonces también tienen una arista $e(v, w)$, de vértices v, w, en común.

A todo poliedro P se le puede asociar un grafo plano de la siguiente manera. Tomamos una realización del poliedro en $\mathbb{R}^3$, a la que seguimos llamando P. Elegimos una cara cualquiera C de P; sea H el plano que la contiene y H^- el semiespacio determinado por H que contiene al poliedro. Tomamos un plano Π paralelo a C en el semiespacio H^- y que no corte a P. Existe un punto $Q \notin P$ cercano a C desde el que podemos proyectar el 1-esqueleto de P (el conjunto de vértices y aristas) sobre Π de forma que ninguna arista se proyecte a un punto y ningún par de aristas se proyecten en aristas que se corten. La proyección de los vértices y aristas forma un grafo en Π, conexo y finito, al que llamaremos *diagrama de Schlegel* del poliedro P con respecto de la cara C, y denotaremos por P^1_C (el superíndice hace referencia a que el diagrama de Schlgel es un grafo isomorfo al 1-esqueleto del poliedro P). Observamos que las caras del poliedro P se proyectan sobre las caras del grafo P^1_C y que la cara C de P se proyecta sobre la cara externa de P^1_C.

El siguiente teorema caracteriza los poliedros mediante grafos.

Teorema (Steinitz) *Un grafo plano finito es un diagrama de Schlegel de un poliedro convexo si y solamente si tiene al menos* 4 *vértices y es* 3*-conexo.*

Debido a esta caracterización, siempre que trabajemos con un poliedro P podemos pensar en algún diagrama de Schlegel de P, eligiendo como cara externa la que nos convenga en cada caso.

2. Operaciones con poliedros

Sea $\mathcal{G}$ el grafo de un poliedro, que podemos pensar como un diagrama de Schlegel de dicho poliedro. Vamos a definir varias formas de modificar el grafo para convertirlo en otro $\mathcal{G}'$ ligeramente distinto y probaremos que $\mathcal{G}'$ es también el grafo de un poliedro.

M_1 *Duplicar un vértice y crear una arista.* Sea V un vértice del grafo $\mathcal{G}$ en el que inciden k aristas, con $k \geq 4$. Sean $A_1, ..., A_k$ las caras que inciden en V. Elegimos dos de estas caras, que no sean adyacentes, por ejemplo A_1, A_h, $h \neq 2, k-1$. Las aristas que inciden en V quedan divididas en dos grupos $e_1, ..., e_{h-1}$ y $e_h, ..., e_k$. La modificación consiste en cambiar V por una nueva arista e_0 con sus extremos V_1, V_2 distintos, de forma que $e_1, ..., e_{h-1}$ incidan en V_1 y $e_h, ..., e_k$ incidan en V_2. (Ver Figura 1)

M_2 *Suprimir una arista y colapsar sus extremos.* Sea e_0 una arista con vértices V_1, V_2. Sean A, C las caras incidentes en e_0, $B_1, ..., B_h$ las caras incidentes en V_1 y $D_1, ..., D_l$ las incidentes en V_2. Supongamos que se verifica:

- A, C tienen más de tres lados
- $B_i \cap D_j = \emptyset$, $\forall i = 1, ..., h$, $j = 1, ..., l$.

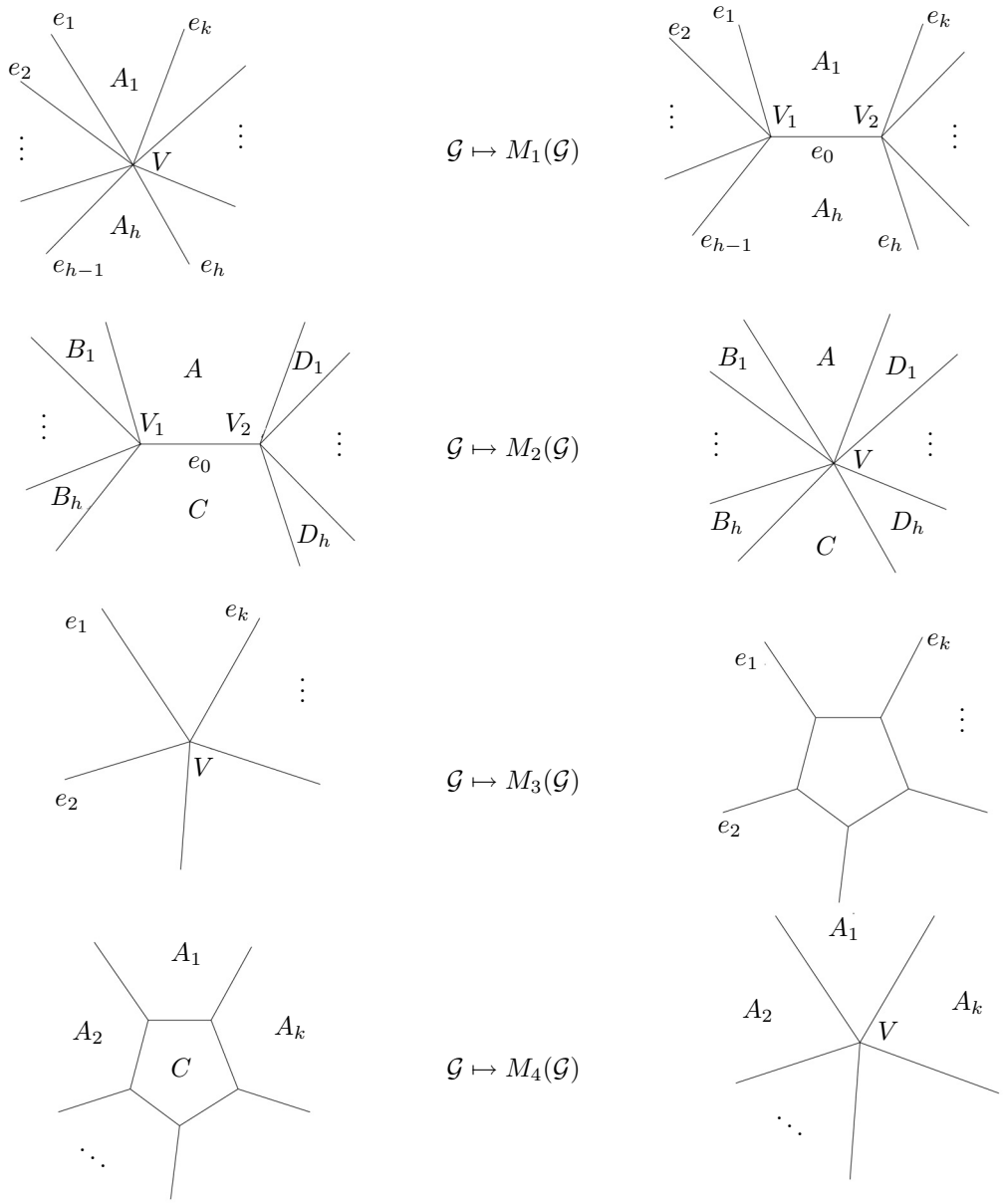

Figura 1: Modificaciones M_1, M_2, M_3, M_4

La modificación consiste en suprimir la arista e_0, e identificar los vértices V_1, V_2 a un único vértice V.

M_3 *Truncar un vértice.* Sea V un vértice de $\mathcal{G}$ y $e_1, ..., e_k$ las aristas incidentes. Esta modificación consiste en cambiar el vértice V por una pequeña cara de k lados con vértices en las aristas e_i.

M_4 *Eliminar una cara.* Sea C una cara de $\mathcal{G}$ con k lados. Supongamos que las caras $A_1, ..., A_k$ adyacentes a C forman un *k-elemento prismático* (esto es: A_i, A_{i+1} son adyacentes, A_k es adyacente a A_1 y ninguna terna de estas caras se cortan en un punto). Entonces la modificación consite en cambiar la cara C por un vértice V, de forma que las caras A_i son todas incidentes en V.

Proposición 2.1 *Si $\mathcal{G}$ es el diagrama de Schlegel de un poliedro convexo P entonces $\mathcal{G}' = M_i(\mathcal{G})$ es el diagrama de Schlegel de un poliedro convexo P', para $i = 1, 2, 3, 4D$*

Demostración. Utilizando el teorema de Steinitz, tenemos que ver que el grafo $\mathcal{G}'$ tiene al menos 4 vértices y es 3-conexo; para ver que es 3-conexo utilizamos las condiciones C1,...,C4 que lo caracterizan.

Es claro en todos los casos que si $\mathcal{G}$ es el grafo de un poliedro, $\mathcal{G}'$ tiene al menos 4 vértices: en las hipótesis de M_2, $\mathcal{G}$ tiene al menos 6 vértices y $\mathcal{G}'$ tendrá al menos 5 vértices; en las hipótesis de M_4, $\mathcal{G}$ tiene al menos $2k$ vértices, con $k \geq 3$, y $\mathcal{G}'$ tendrá $k + 1 (\geq 4)$ vértices; finalmente, las modificaciones M_1 y M_3 aumentan el número de vértices.

Las condiciones C1 y C3 se satisfacen trivialmente tras efectuar cualquiera de las modificaciones. Pueden aparecer lados múltiples si en alguna modificación se crea una arista cuyos extremos sean los vértices de una arista de $\mathcal{G}$, o si se suprime alguna arista de una cara triangular de $\mathcal{G}$ y se colapsan sus extremos. La primera situación nunca ocurre, porque cada vez que se crea una arista (M_1,M_3) se crea también alguno de sus extremos. Por otra parte, en las modificaciones M_2 y M_4 se suprimen aristas; pero en las hipótesis de estas modificaciones, las caras A, C y A_i, que son las que contienen las aristas que se suprimen, tienen todas más de tres lados. Por tanto, C2 también se satisface.

Finalmente, para comprobar la condición C4, examinamos las situaciones en las que pueden aparecen nuevos vértices comunes para algún par de caras. De nuevo, en las situaciones de M_1 y M_3 no hay ningún problema. En la situación de M_2, las caras B_i y D_j tienen en $\mathcal{G}'$ un nuevo vértice común, V, pero este vértice es el único porque esas caras eran disjuntas en $\mathcal{G}$ según las hipótesis. Análogamente para las caras A_i, A_j en la situación de M_4. En consecuencia, se cumple la condición C4. □

Observaciones

1. Las modificaciones M_1 y M_2 son inversas una de la otra; lo mismo pasa con las modificaciones M_3 y M_4.
2. M_1, M_2 preservan el número de caras del poliedro; M_3 aumenta en uno el número

de caras y M_4 lo disminuye.
3. Dado un poliedro arbitrario de n caras, podemos transformarlo en un poliedro trivalente de n caras mediante un número finito de modificaciones M_1.
4. Sean n, m con $m \geq n$. Dado un poliedro arbitrario de n caras, podemos transformarlo en un poliedro de m caras mediante un número finito de modificaciones M_3.

Podemos componer las modificaciones M_2, M_1 en ciertos casos particulares para obtener la siguiente modificación:

M_0 Sea e una arista de $\mathcal{G}$ con vértices trivalentes V_1, V_2; sean C_1, C_3 las caras incidentes en e, y C_2, C_4 las caras incidentes en V_1, V_2, respectivamente (ver Figura 2). Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

- C_1, C_3 no son triángulos;
- $C_2 \cap C_4 = \emptyset$.

Entonces podemos cambiar la arista e por otra arista e' de extremos V_1', V_2' de forma que C_2, C_4 son ahora incidentes en e' y C_1, C_3 inciden ahora en V_1', V_2', respectivamente.

Diremos que hemos aplicado la modificación M_0 a la arista e; llamaremos al poliedro transformado $M_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$, y siempre que no haya confusión entre las caras de $\mathcal{G}$ y las de $\mathcal{G}'$ las llamaremos de la misma manera, haciendo notar a qué poliedro pertenecen. Observamos que la modificación M_0 preserva el número de caras y transforma poliedros trivalentes en poliedros trivalentes.

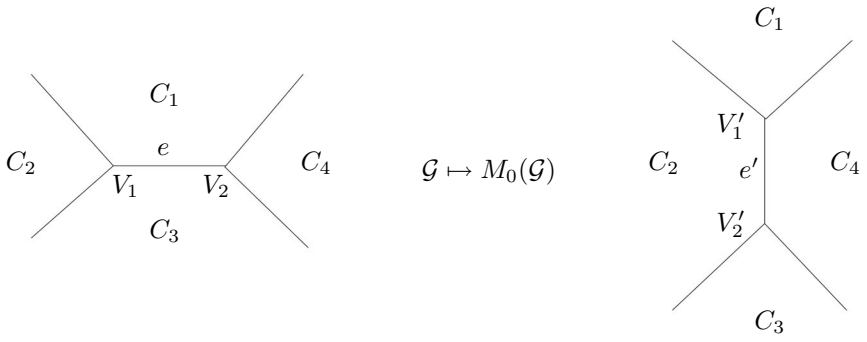

Figura 2: Modificación M_0

Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de poliedros convexos (abstractos) de n caras y $\mathcal{T}_n$ el conjunto de poliedros convexos *trivalentes* o *simples* (esto es, en cada vértice inciden 3 aristas) de n caras.

El principal resultado que obtenemos es el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Sean $P, Q \in \mathcal{T}_n$, $n \geq 4$, es decir, dos poliedros trivalentes cualesquiera con el mismo número de caras. Entonces podemos pasar de uno al otro mediante un número finito de modificaciones M_0.*

Podemos interpretar este resultado de la siguiente forma. Consideramos un grafo $(\mathcal{T}_n, \mathcal{E}, \gamma)$, que denotaremos abreviadamente por $\mathcal{T}_n$, donde los nodos son los poliedros trivalentes de n caras y dos de estos poliedros P_1, P_2 se conectan por una arista si P_1 se pueden transformar en P_2 mediante una modificación M_0. Llamamos a este grafo el *grafo de poliedros trivalentes de n caras*. El Teorema 2.2 significa entonces que este grafo es conexo, para cualquier $n \geq 4$.

Como consecuencia del Teorema 2.2 y de las observaciones 3 y 4 obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.3 *Dados P, Q poliedros arbitrarios de n caras, podemos pasar de uno a otro mediante un número finito de modificaciones M_1, M_2.*

Corolario 2.4 *Dados $P \in \mathcal{P}_n, Q \in \mathcal{P}_m$, podemos pasar de uno al otro mediante un número finito de modificaciones M_1, M_2, M_3, M_4.*

3. Demostración del Teorema 2.2

Los poliedros trivalentes satisfacen que si dos caras comparten un vértice entonces son adyacentes. Además, como en cada vértice inciden 3 aristas, y cada arista contiene dos vértices, se tiene que $3V = 2E$, done V es el número de vértices y E el número de aristas del poliedro. Combinando esto con la fórmula de Euler se tiene que un poliedro trivalente con n caras tiene $2(n-2)$ vértices y $3(n-2)$ aristas.

El tetraedro es el único poliedro con cuatro caras; suponemos pues que $n \geq 5$. Sea H_n el prisma de base un polígono de $n-2$ lados. Vamos a probar que todo poliedro $P \in \mathcal{T}_n$ se puede "conectar" con H_n mediante un número finito de modificaciones M_0. Con esto habremos probado el teorema.

Hacemos la demostración en dos etapas: en la primera modificamos el poliedro P hasta conseguir un poliedro P_1 con una cara con $n-2$ lados (Proposición 3.2). En la segunda etapa modificamos P_1 hasta conseguir un poliedro P_2 con dos caras disjuntas con $n-2$ lados cada una (Proposición 3.3). Al llegar aquí habremos terminado, pues $P_2 = H_n$, según el siguiente lema

Lema 3.1 *Sea $P \in \mathcal{T}_n$ y sean C, D dos caras disjuntas de P con $n-2$ lados cada una. Entonces $P = H_n$.*

Demostración. El número de vértices de las caras C y D es $2(n-2)$, por lo que el poliedro P no tiene más vértices que los de C y D. Sean v_1, v_2 dos vértices consecutivos de C. Sean e_1, e_2 las (únicas) aristas que inciden en estos vértices y no son aristas de C, y sea A la cara de P que incide en e_1, e_2. Los extremos de e_1, e_2 que no están en C deben estar en D y ser distintos pues, si no, la cara D contendría una de las aristas

e_1 ó e_2 y un vértice de C, y por tanto C y D serían adyacentes. Esto implica que A es un cuadrilátero adyacente a C y a D. Por tanto P es el prisma H_n. □

Proposición 3.2 *Sea $P \in \mathcal{T}_n$ con $n > 4$.*

(a) *Sea C una cara de P con k lados, $k < n-2$. Entonces podemos transformar, mediante un número finito de modificaciones M_0, el poliedro P en otro $P' \in \mathcal{T}_n$ en el que la cara C tiene $k+1$ lados.*

(b) *Podemos pasar de P a un poliedro P_1 con una cara de $n-2$ lados, mediante un número finito de modificaciones M_0.*

Demostración. La parte (b) se demuestra a partir de la parte (a) y de la observación de que, si el poliedro P no tiene ninguna cara de $n-2$ lados, entonces debe tener una cara con menos de $n-2$ lados (en efecto, si P tiene todas las caras de $n-1$ lados, entonces el número de aristas es $\frac{1}{2}n(n-1)$; pero como el poliedro es trivalente, tiene $3(n-2)$ aristas, con lo que $n = 3$ ó $n = 4$).

(a) Como C tiene $k < n-2$ lados, existe alguna cara de P no adyacente a C. Sea D una de ellas, y sea $E = e_1 \cup e_2 \cup ... \cup e_l$ una poligonal simple (i.e. sin circuitos cerrados) formada por aristas de P que une un vértice $V_0 \in C$ con otro $V_l \in D$, y tal que ninguna de las aristas e_i es arista de C ni de D. Podemos, además, elegir la cara D y la poligonal E de forma que todas las caras incidentes en alguna arista de E sean adyacentes a C. Para ello, basta considerar las caras adyacentes a las aristas $e_1, e_2, \ldots$ y tomar como D la primera de ellas que no sea adyacente a C, y como poligonal la formada por las aristas $e_1, e_2, \ldots$ que unen C y D.

Utilizaremos la siguiente notación: E es la poligonal formada por las aristas $e_1, e_2, ..., e_l$, cada una adyacente a la siguiente, que une los vértices V_0 de C y V_l de D. Llamamos $V_i = e_i \cap e_{i+1}$. Sean d_1, d_2 las aristas de D que inciden en V_l. Por ser el poliedro trivalente, para todo $i = 1, ..., l-1$ existe una única arista del poliedro que incide en V_i y que no está en E; llamamos a_i a esta arista. Para cada $i = 1, ..., l-1$, sea A_i la cara de P que incide en las aristas e_i, a_i. Finalmente sea R la cara que incide en las aristas e_l, d_1 y sea L la cara que incide en las aristas e_l, d_2.

Veamos que se verifican las siguientes propiedades:

(i) R, L tienen más de tres aristas;

(ii) $D \cap A_i = \emptyset$, para todo $i = 1, ..., l-1$.

Para probar (i), vemos que R es adyacente a C y a D e incide en una arista de E. Si R no tiene más aristas, es un triángulo, y entonces C y D comparten un vértice de R y por tanto son adyacentes. Por tanto R tiene al menos 4 aristas. La demostración es la misma para la cara L.

Para la demostración de (ii) utilizamos esencialmente el Teorema de la Curva de Jordan: toda curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ divide el plano en dos componentes conexas,

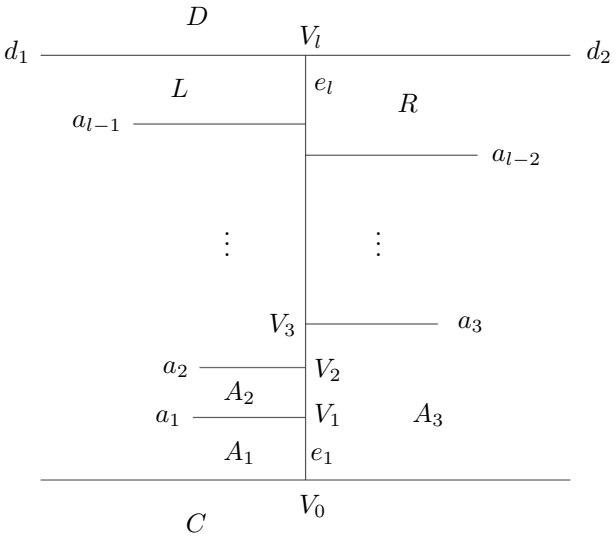

Figura 3: Poligonal E

una acotada y otra no acotada. Consideramos el diagrama de Schlegel P^1_C de P en el que la cara C es la cara externa de P^1_C (ver Figura 4)

Supongamos que existe $j = 1, ..., l-1$ tal que $D \cap A_j \neq \emptyset$. En este caso D, A_j son adyacentes; sea d la arista común. Por ser d, e_j aristas de A_j existe un arco α_1 con extremos en $Q_1 \in e_j$, $Q_2 \in d$ y cuyo interior está contenido en A_j. Sea α_2 un arco que empieza en Q_2 y recorre el borde de la cara D hasta V_l; sea α_3 un arco que empieza en V_l y recorre E hasta Q_1; entonces $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ y observamos que $\alpha \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$. Entonces α divide el plano en dos componentes conexas R_1, R_2, una de ellas, R_1, disjunta de C. Las caras abiertas $\overset{\circ}{R}$ y $\overset{\circ}{L}$ están en distintas componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$. Supongamos que $\overset{\circ}{R} \subset R_1$. Entonces R no puede ser adyacente a C (porque α no contiene ninguna arista de C), con lo que llegamos a una contradicción.

Las propiedades (i), (ii) nos permiten aplicar la modificación M_0 a la arista e_l:

– Si la poligonal E consta de una única arista $e_1 (= e_l)$, con la modificación en esta arista se consigue que la cara C tenga un lado más, con lo que se termina la demostración de la proposición.

– En el caso general, al aplicar la modificación M_0 a la arista e_l, obtenemos lo siguiente: $M_0(D) = D'$ sigue siendo disjunta de C; unimos C, D' mediante la poligonal E' formada por las aristas $e_1, ..., e_{l-1}$. La observación principal es que esta poligonal tiene una arista menos y satisface que todas las caras incidentes en alguna de sus aristas son adyacentes a C. Por tanto, podemos repetir el proceso anterior y aplicar

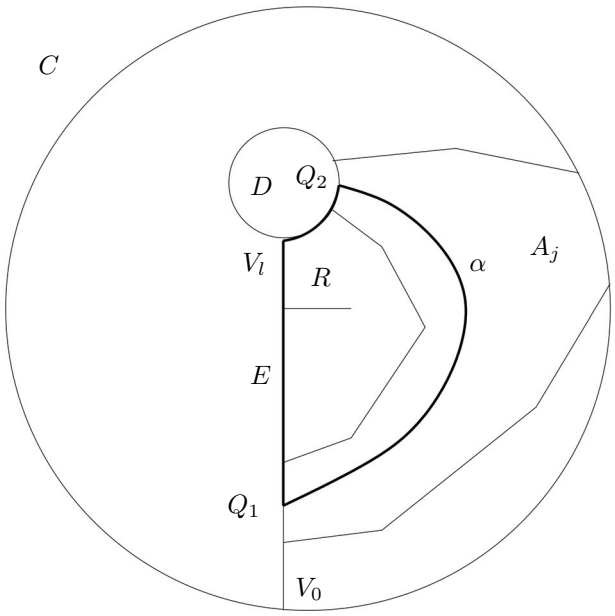

Figura 4: Demostración de la Proposición 3.2

una modificación M_0 a la arista e_{l-1}. De esta forma vamos disminuyendo el número de lados de la poligonal y, después de un número finito de modificaciones, habremos probado la proposición. □

El siguiente lema contiene la parte principal para la segunda parte de la demostración del Teorema 2.2

Lema 3.3 *Sea $P \in \mathcal{T}_n$, con $n > 4$, y C una cara de $n-2$ con k lados; sea D la única cara de P no adyacente a C. Supongamos que D tiene k lados, $k < n-2$. Entonces existe una modificación M_0 que satisface:*

(a) *$M_0(D)$ tiene $k+1$ lados*

(b) *$M_0(C) \cap M_0(D) = \emptyset$.*

Aplicando sucesivas veces este lema obtenemos un poliedro P_2 en el que la cara C tiene $n-2$ lados, la cara D tiene $n-2$ lados y ambas son disjuntas. Por el Lema 3.1, P_2 es un prisma n-agonal, y se completa la demostración del teorema.

Demostración. En primer lugar observamos que existe una arista e que sale de D y no llega a C. En efecto, supongamos que no es así. Sean $V_1, ..., V_k$ los vértices

de D (cada uno consecutivo al siguiente y el último consecutivo al primero), y sean $e_i, i = 1, ..., k$ las aristas con vértices $V_i \in D$ y $W_i \in C$. Como C tiene más vértices que D, existe un $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que los vértices W_j, W_{j+1} no son consecutivos en el borde de C (aquí, si $j = k$ entonces $j + 1 = 1$). Entonces la cara de P que contiene las aristas e_j, e_{j+1} contiene también dos aristas distintas de C y esto es imposible en un poliedro.

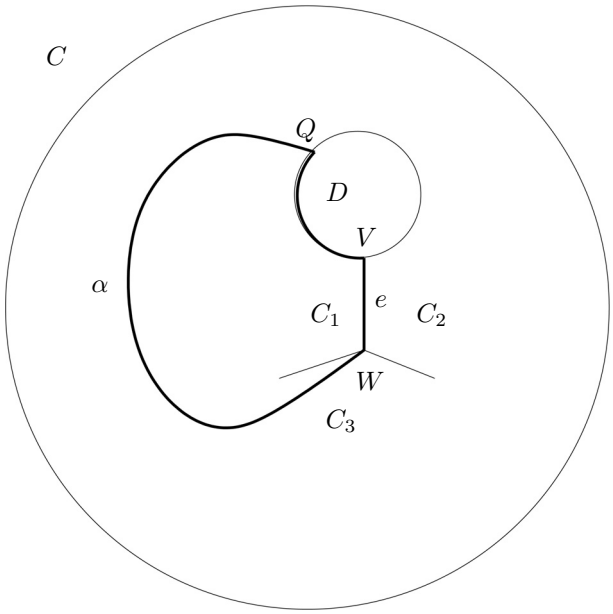

Figura 5: Demostración de la Proposición 3.3

Sea pues e una arista que sale de D y llega a una cara C_3 distinta de C. Denotamos por V, W los vértices de e, $V \in D$, $W \in C_3$. Sean C_1, C_2 las dos caras que inciden en e. Vamos a aplicar una modificación M_0 a la arista e, para lo cual comprobamos que se verifican las condiciones necesarias:

(i) C_1, C_2 tienen más de tres aristas: en efecto, C_1 es adyacente a C, C_2, C_3, D y todas estas caras son distintas, luego C_1 tiene al menos cuatro aristas (análogo para C_2).

(ii) C_3 y D no son adyacentes. Para verlo, construimos el diagrama de Schlegel del poliedro tomando C como la cara no acotada. Si C_3 y D fueran adyacentes, construimos una curva cerrada simple de la siguiente forma: sea α_1 un arco contenido en C_3 que une el vértice W con un vértice Q del borde de D; sea α_2 un arco en el borde de D que va de Q al vértice V; entonces $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup e$ es un arco de Jordan que descompone el plano en dos componentes conexas R_1, R_2, y C está contenida en

la componente no acotada. Las caras abiertas $\overset{\circ}{C}_1, \overset{\circ}{C}_2$ están en distintas componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$, con lo que una de ellas, por ejemplo, $\overset{\circ}{C}_1$, está en la componente acotada. Entonces C_1 no puede ser adyacente a C, con lo que llegamos a una contradicción.

Entonces podemos aplicar la modificación M_0 a la arista e y obtenemos que la cara $M_0(D)$ tiene una arista más. Esta nueva arista es arista de $M_0(C_3)$, con lo que $M_0(D) \cap M_0(C) = \emptyset$ (ver Figura 5). Esto termina la demostración del lema. □

4. Poliedros trivalentes con 7 y 8 caras

En esta sección estudiamos los grafos de poliedros trivalentes $\mathcal{T}_7$ y $\mathcal{T}_8$. Los poliedros trivalentes con 7 caras tienen 10 vértices, y hay 5 tipos combinatorios distintos. Los poliedros trivalentes con 8 caras tienen 12 vértices y hay 14 tipos combinatorios distintos. Partiendo del prisma de base pentagonal o hexagonal, respectivamente, realizamos modificaciones M_0, siguiendo los pasos inversos a los relizados en la demostración del Teorema 2.2. Teniendo cuidado de realizar todas las modificaciones M_0 *distintas* posibles, habremos construido un subgrafo de $\mathcal{T}_n$ que conecte todos los nodos de $\mathcal{T}_n$. En las figuras 6 y 7 damos estos subgrafos.

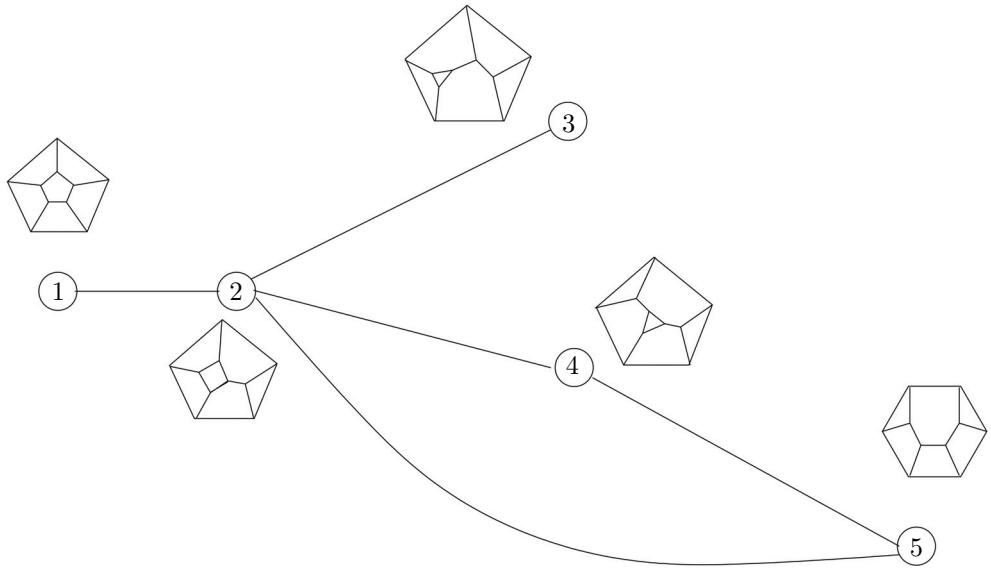

Figura 6: Subgrafo de $\mathcal{T}_7$

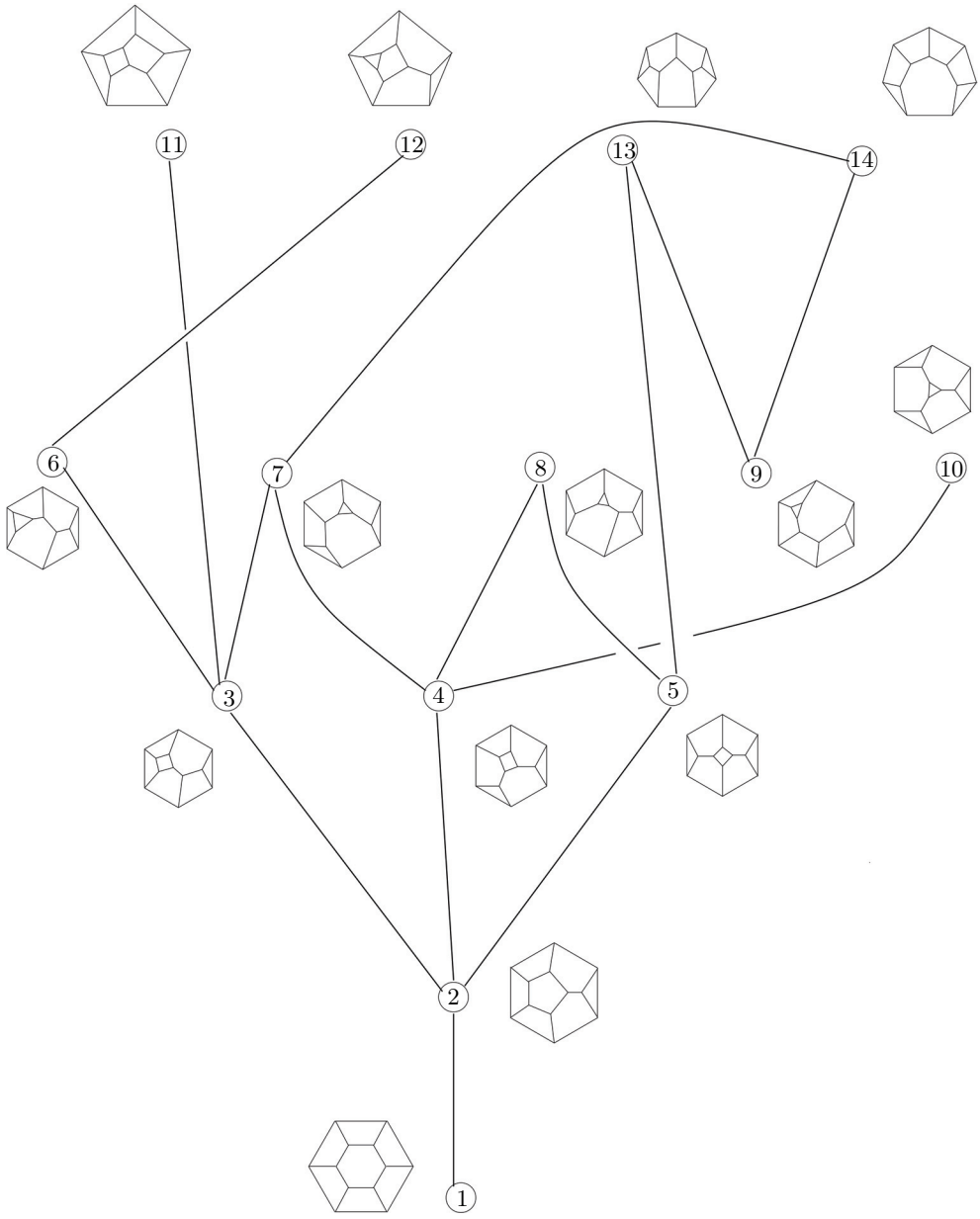

Figura 7: Subgrafo de $\mathcal{T}_8$

Referencias

[1] E.A. Bender, L.B. Richmond: *The asymptotic enumeration of rooted convex polyhedra*. J. Comb. Theory, Ser. B, **36** (1984), 276–283.

[2] A.J.W. Duijvestijn, P.J. Federico: *The number of polyhedral (3-connected planar) graphs*. Math. Comput. **37** (1981), 523–532.

[3] P. Engel: *On the enumeration of polyhedra*. Discrete Math. **41** (1982), 215–218.

[4] B. Grünbaum: *Convex polytopes*. Interscience Publishers, 1967.

[5] W.T. Tutte: *On the enumeration of polyhedra*. J. Comb. Theory, Ser. B, **28** (1980), 105–126.