La dimensión de los espacios osculadores a una variedad algebraica

Raquel Mallavibarrena

Departamento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040 Madrid, España
raquelm@mat.ucm.es

Para el profesor Enrique Outerelo, con agradecimiento.

ABSTRACT

En esta breve nota se muestran resultados y ejemplos obtenidos por varios autores sobre el problema clásico del estudio de las dimensiones de los espacios osculadores a una variedad algebraica proyectiva y su relación con la geometría de la variedad

2000 Mathematics Subject Classification: 14C20, 14J60.
Key words: Fibrado de jets, espacio osculador, superficies regladas, variedades de Veronese.

1. Introducción

Sea X una variedad algebraica irreducible y lisa, inmersa en un espacio proyectivo complejo, $\mathbf{P}^N$. El estudio de los espacios osculadores a la variedad X en cada uno de sus puntos es un tema clásico que permite conocer mejor la geometría de estas variedades y obtener a la vez información sobre la especificidad de las variedades algebraicas frente a las analíticas, diferenciables, ...

Al no tener X puntos singulares, sabemos que todos sus espacios tangentes a ella tienen la misma dimensión, que coincide con la de X; la llamamos n. Por tanto, la pregunta por la dimensión de los espacios osculadores a X empieza a tener sentido a partir de los espacios lineales de orden de contacto mayor que dos con X. Es decir, se trata de estudiar la dimensión de los espacios lineales que pasan por un punto de X y cuyas direcciones están generadas por los vectores dados por las derivadas hasta orden $k \geq 2$ de las coordenadas locales de X en el punto.

En esta breve nota se muestran resultados y ejemplos obtenidos por varios autores en las últimas décadas sobre este tema. Dada la amplitud y dificultad del problema si lo planteamos en toda su generalidad, con frecuencia se van tratando determinados tipos de variedades o se eligen aspectos determinados. Aquí en concreto, se abordarán dos cuestiones:

a) Cotas inferiores para la dimensión de los espacios osculadores.

b) Caracterización de ciertas variedades por la dimensión de sus espacios osculadores.

2. Definiciones básicas

Trabajaremos siempre con variedades $X \subset \mathbf{P}^N$ no degeneradas, es decir, que no están contenidas en ningún hiperplano de $\mathbf{P}^N$. Sea $L := (\vartheta_{\mathbf{P}^N}(1))_X$, el fibrado lineal que define las secciones hiperplanas de X. Sea V el subespacio vectorial de $H^0(L)$ que da lugar a la inmersión de X en $\mathbf{P}^N$.

Para cada entero $k \geq 0$, sea $J_k L$ el fibrado de jets de orden k de L, y sea $j_k : V \otimes \vartheta_S \rightarrow J_k L$ el homomorfismo de haces que lleva cada sección s de V a su k-jet $j_{k,x}(X)$, para todo $x \in X$.

Entonces, el *espacio osculador de orden* k a X en x está definido como $Osc_x^k(X) := \mathbf{P}(Im(j_{k,x}))$

Si identificamos $\mathbf{P}^N$ con $\mathbf{P}(V)$ (conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1 de V), vemos que $Osc_x^k(X)$ es un subespacio lineal de $\mathbf{P}^N$.

Si además, tenemos en cuenta que el rango de $J_k L$ es $\binom{k+n}{n}$, entonces

$$\dim(Osc_x^k(X)) \leq \binom{k+n}{n} - 1$$

Si $k \geq 2$, esta desigualdad puede ser estricta y ello da lugar a los *puntos de hiperosculación* de X (o también llamados *de inflexión*) de orden k.

De la definición de espacio osculador se deduce inmediatamente que si $j \leq k$, entonces $Osc_x^j(X) \subset Osc_x^k(X)$

3. Curvas algebraicas lisas

Si X tiene dimensión uno, y al ser $\mathbb{C}$ un cuerpo de característica cero, se puede demostrar que X tiene como mucho una cantidad finita de puntos de inflexión. Ver por ejemplo [1], pág.37.

También es un resultado conocido que la única curva de $\mathbf{P}^N$ sin puntos de inflexión de ningún orden es la curva racional normal ([1], pág.39)

En cuanto a la dimensión mínima de los espacios osculadores, se pueden encontrar ejemplos de curvas con puntos de inflexión de cualquier orden, k, cuyos espacios osculadores de orden superior coinciden todos con el espacio osculador de orden k. Por tanto, podemos llegar a puntos cuyo espacios osculadores de orden $\leq k$ coinciden con la recta tangente a la curva en ese punto. Una manera de encontrar estos ejemplos es elegir una curva racional normal (de grado suficientemente alto) en su espacio correspondiente y proyectarla desde un punto que pertenezca a un espacio osculador de orden k y que a la vez no esté en ninguna bisecante a la curva (esto es posible por un cálculo de dimensiones), se consigue asíun punto de inflexión en la curva proyectada, proyectando ahora desde un punto del espacio osculador obtenido vamos bajando la dimensión del espacio osculador en el punto correspondiente de la curva proyectada hasta llegar a que coincida con la recta tangente, como queríamos.

4. Superficies

Si X tiene dimensión dos aparecen diferencias sustanciales con el caso de las curvas: existen superficies, como las regladas, en las que todos los espacios osculadores de cierto orden, $k \geq 2$ tienen dimensión menor que la esperada:

Veamos lo que ocurre en el caso de las superficies regladas lisas: [5]

Podemos tomar coordenadas locales (u, v) en torno a cada punto $x \in X$, de tal modo que las coordenadas homogéneas x_i $(i = 0, ..., N)$ de los puntos de X cerca de x, localmente, se pueden escribir $x_i = a_i(u) + vb_i(u)$, donde a_i y b_i son funciones holomorfas de u. Como cada sección $s \in V$ es una combinación lineal $s = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$, vemos que la derivada segunda s_{vv} se anula en todos los puntos. Por lo tanto, $\dim(Osc_x^2(X)) \leq 4$ para todos los puntos $x \in X$.

Análogamente se llega a que $\dim(Osc_x^k(X)) \leq 2k$ para todo $x \in X$.

Otros ejemplos de superficies no regladas que verifican esta propiedad pueden encontrarse en [12], sección 3, [3], Teorema 4, o [10], Teorema 3.2.

La situación descrita hace que tenga sentido hablar de *superficies k-regulares* (todos los espacios osculadores de orden k tienen dimensión máxima), *genéricamente k-regulares* (el espacio osculador de orden k general tiene dimensión máxima) ([6], [7]), y *no k-regulares* (regladas, etc, ningún espacio osculador de orden k tiene máxima dimensión).

A la hora de buscar cotas inferiores a la dimensión de los espacios osculadores de orden k tendremos que estudiar ejemplos de superficies genéricamente k regulares o no k-regulares.

Para superficies regladas, tenemos el resultado siguiente de Lanteri ([5], pág.449): Sea $S \subset \mathbf{P}^N$ $(N \geq 5)$ cualquier superficie reglada lisa sobre una curva también lisa. Entonces $\dim(Osc_x^2(S)) \geq 3$ para cada $x \in X$.

Por lo tanto no puede ocurrir en las superficies regladas sobre curvas que un espacio osculador de orden dos o mayor coincida con el plano tangente en el punto de la superficie.

Sin embargo, existen ejemplos de superficies no regladas en las que hay puntos de ellas cuyo espacio osculador segundo coincide con el plano tangente. Podemos encontrarlos en las superficies de Del Pezzo $(X, L = -K_X)$: Si $K_X^2 = 6$ obtenemos una superficie lisa de grado 6 en $\mathbf{P^6}$, que es isomorfa al plano proyectivo explotado en tres puntos no alineados. Proyectando ésta desde un punto que no está en ninguna bisecante a X obtenemos una superficie Y de $\mathbf{P}^5$ isomorfa a X. Esta superficie Y tiene una geometría muy especial y fue estudiada en un principio por Togliatti([12]) y posteriormente por otros autores ([11], ejemplo 2.4, [8], Proposición 4.3). Se pueden encontrar en ella seis puntos (ver referencias) para los cuales el espacio osculador segundo tiene dimensión 2 y por tanto coincide con el plano tangente.

Perkinson muestra en [10] (teorema 3.2, casos (4) y (5)) dos superficies tóricas para las cuales el espacio osculador segundo en una cantidad finita de puntos tiene dimensión dos. También en [9], Lema 4.1.i, se estudia otro caso de inmersión de superficie de Del Pezzo con esta propiedad.

Las técnicas utilizadas en estas referencias suelen consistir en el manejo de sistemas lineales de divisores en las superficies a los que se imponen ciertas condiciones y la geometría propia de cada tipo de superficie.

5. Caracterizaciones de variedades

Observamos en primer lugar que las variedades que resultan de aplicar inmersiones de Veronese a los distintos espacios proyectivos (variedades de Veronese) tienen la propiedad siguiente:

Si $(X, L) = (\mathbf{P}^r, \vartheta_{\mathbf{P}^r}(n))$, *entonces* $Osc^n_x(X) = \mathbf{P}^N$, *para todo* $x \in X$, *donde* $N = \binom{n+r}{r} - 1$.

En el artículo [4] se prueba que la única variedad lisa de dimensión r de $\mathbf{P}^N$, con $N = \binom{n+r}{r} - 1$ tal que el espacio osculador de orden n es en cada punto el total, $\mathbf{P}^N$, es la correspondiente variedad de Veronese, $(X, L) = (\mathbf{P}^r, \vartheta_{\mathbf{P}^r}(n))$.

Es decir, que las variedades de Veronese están caracterizadas por la propiedad de tener los espacios osculadores de orden máximo en todos los puntos coincidentes con el espacio total.

Otra caracterización es la de las superficies regladas lisas sobre curvas lisas que son racionales, normales y equilibradas, es decir, superficies regladas sobre $\mathbf{P}^1$ cuyo haz invertible asociado de rango 2 es $\vartheta_{\mathbf{P}^1}(a) \oplus \vartheta_{\mathbf{P}^1}(a)$ para algún natural $a \geq 1$.

La caracterización es un resultado que aparece en [11] y [2] y la propiedad que caracteriza es:

Todos los espacios osculadores de orden 2 *tienen dimensión menor o igual que* 4, *y los espacios osculadores de orden* n, *donde* $n = \binom{N-1}{2}$, *tienen dimensión* $2n$.

En ese caso, X es una superficie reglada lisa racional normal de grado $2n$, equilibrada de tipo (n, n) y que está inmersa en $\mathbf{P}^N$ donde $N = 2n + 1$.

Terminamos esta nota señalando que la conjetura de que la misma propiedad caracterizaba las superficies regladas lisas racionales normales semi-equilibradas ([11]), estando unas inmersas en espacios de dimensión impar y otras en espacios de dimensión par, tiene varios contraejemplos, incluso de superfcies regladas también. Ver por ejemplo [5], teorema A, y [10], pág.496 para superficies tóricas.

Por tanto, uno de los problemas abiertos en este contexto es identificar qué superficies inmersas en espacios de dimensiń par verifican la propiedad anterior.

Referencias

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris: *Geometry of Algebraic Curves I.* Grundlehren der Math. **267,** Springer Verlag, Berlin 1985.

[2] E. Ballico, R. Piene, H. Tai: *A characterization of balanced rational normal surface scrolls in terms of their osculating spaces II.* Math. Scand. **70** (1992), 204–206.

[3] R.H. Dye: *Osculating hyperplanes and quartic combinant of the nonsingular model of the Kummer and Weddle surfaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **92** (1982), 205–220.

[4] W. Fulton, S. Kleiman, R. Piene, H. Tai: *Some intrinsic and extrinsic characterizations of the projective space.* Bull. Soc. Math. France **113** (1985), 205–210.

[5] A. Lanteri: *On the osculatory behavior of surface scrolls.* Le Matematiche **LV** (2000), Fasc.II, 447–458.

[6] A. Lanteri, R. Mallavibarrena: *Higher order dual varieties of projective surfaces.* Comm. in Algebra **27** (1999), 4827–4851.

[7] ———: *Higher order dual varieties of generically k-regular surfaces.* Arch. Math. (Basel) **75** (2000), 75–80.

[8] ———: *Osculatory behavior and second dual varieties of Del Pezzo surfaces.* Adv. Geometry **1** (2001), 345–363.

[9] ———: *Jets of antimulticanonical bundles on Del Pezzo surfaces of degree* ≤ 2. Algebraic Geometry. A volume in Memory of Paolo Francia, Beltrametti-Catanese-Ciliberto-Lanteri-Pedrini (eds.), Walter de Gruyter, Berlin 2002.

[10] D. Perkinson: *Inflections of toric varieties.* Michigan Math. J. **48** (2000), 483–515.

[11] R. Piene, H. Tai: *A characterization of balanced rational normal scrolls in terms of their osculating spaces.* Enumerative Geometry Proc. Sitges 1987 (Xambó ed.), Lecture Notes Math. **1436** (1990), 215–224.

[12] E. Togliatti: *Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano una equaziones di Laplace.* Comm. Math. Helv. **1** (1929), 255–272.