Colaboración de Einstein con los grandes matemáticos de la época en la teoría de la relatividad

Concepción Romo

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, Spain
romosan@mat.ucm.es

Tengo la satisfacción de dedicar este trabajo a D. Enrique Outerelo Domínguez, admirable matemático y mejor amigo, como testimonio de afecto y reconocimiento a sus excelentes clases de Topología.

ABSTRACT

El objetivo de este trabajo es el estudio del papel que tuvieron las matemáticas en la Teoría de la Relatividad. Para ello estudiaremos la recepción dada a dicha teoría por los matemáticos de la época y su colaboración con Einstein.

1. Conexiones entre las matemáticas y la física

En la Teoría de la Relatividad, la dinámica matemática es la que indicó el siguiente paso a dar. Existían motivos físicos para buscar un tensor de segundo orden, pero ¿por qué seleccionar precisamente el tensor de Ricci? La respuesta es obvia, porque existía un aparato matemático, previamente desarrollado por Gauss, Riemann, Ricci y Levi–Civita, con alguna de las características deseadas por Einstein. Es decir "el físico fuerza, o imprime, sus principios en un esquema matemático previamente existente".

Newton construyó en su teoría de fluxiones el cálculo con el propósito específico de estudiar los movimientos diferenciales (la variable fluente era el tiempo y el fluxión la velocidad instamtanea). Esto es, el análisis que es la disciplina que ha dominado el pensamiento matemático durante más de dos siglos, debe su origen a la física. Otro ejemplo que se suele utilizar es el del desarrollo de las ecuaciones diferenciales

y de lo que ahora se conoce como cálculo avanzado, ambos íntimamente unidos a la articulación del programa newtoniano durante el siglo XVIII.

Otro ejemplo de la conexión entre las matemáticas y la física viene explicado en un interesante trabajo debido a K. McCrimmon, "Jordan Algebras and their Aplications", *American Mathematical Society,* vol.84, n.4 (1978), donde se expone el desarrollo histórico y las conexiones de la teoría de los sistemas de Jordan con otras disciplinas, como son la Física, el Análisis Funcional y la Geometría Diferencial. Destacamos del artículo de McCrimmon lo siguiente:

Las álgebras de Jordan aparecen en los años treinta como un módulo algebraico para descubrir el comportamiento de los observables de la Mecánica cuántica (el espacio vectorial real de los operadores hermíticos de un espacio de Hilbert complejo donde el producto es construido simetrizando la composición ab de operadores: $ab = 1/2(ab + ba)$.

2. Papel e importancia de la simetría en la física

La historia de la física, desde la introducción de sus leyes más inmediatas hasta los actuales tanteos por formular las interacciones fundamentales, está inspirada por una misteriosa confianza en la simetría.

2-a) Las simetrías en la Mecánica Clásica

Euler entre 1731 y 1765, elabora las simetrías esenciales, temporales y espacio-temporales de la dinámica newtoniana. A él podemos atribuir la formulación explícita del Principio de Relatividad Clásica.

2-b) Las simetrías de la Física Relativista

Henri Poincaré por su parte vislumbraba la necesidad de un "Principio de Relatividad general". Al comentar (Palermo 1906) un nuevo trabajo de Lorentz, demuestra que las transformaciones espacio-temporales de que allí se habla forman matemáticamente un grupo, que él decide llamar grupo de Lorentz. Así nos llega la herramienta matemática necesaria para expresar con precisión la nueva invarianza relativista. Cuando Minkowski introduzca el espacio tiempo cuadridimensional con su nueva métrica, la mera formulación cuadri-vectorial o cuadri-tensorial de las leyes físicas pondrá de manifiesto su invariancia relativista. Esta se convertirá en verdadero principio de simetría ("postulado" que decía Einstein). Es esa ley constitucional, a la que han de obedecer las leyes físicas concretas, como los fenómenos concretos han de obedecer a las leyes.

2-c) Simetrías en la Física Cuántica

La física cuántica nueva que se había introducido en forma de mecánica matricial (1925) y mecánica ondulatoria (1926), explicaba la dinámica del átomo considerando las magnitudes físicas como operadores lineales y hermíticos (no conmutativos) que

actuan sobre un cierto espacio de Hilbert de estados físicos (superponibles entre sí). Muy pronto se vió la eficacia del estudio de los diversos grupos de simetría para conocer regularidades y reglas de selección en las transiciones atómicas. Los grupos de simetría actuan linealmente sobre el espacio de Hilbert recibiendo así nuevas representaciones.

2-d) Simetrías de las moléculas poliatómicas

En muchos casos se logra determinar la energía potencial de la molécula y sus frecuencias normales, tomando en cuenta la simetría interior de la molécula.

Por ejemplo a la molécula de agua le corresponde el grupo cuaternario de Klein (producto directo de dos grupos cíclicos de segundo orden), y a la molécula de fósforo que tiene la forma de tetraedro regular en cuyos vértices se disponen los átomos del fósforo, le corresponde el grupo simétrico S de orden 24.

En la actualidad el desarrollo de la teoría estructural de las moléculas resulta díficil concebirlo sin la ayuda de la teoría de grupos.

3. Apuntes acerca de la recepción dada a la teoría de la relatividad por los matemáticos de la época

En 1915 el nombre de Einstein significaba mucho, siendo sus trabajos seguidos con mucha atención por sus colegas científicos.

Desde un punto de vista más amplio se pueden distinguir, dos centros importantes de recepción a la relatividad general: Leiden y Gotinga.

3-a) Leiden

En Leiden se encuentra lo que entonces era la más prestigiosa universidad holandesa. Por sus claustros paseaban Lorentz, Kamerlingh–Onnes, Droste, Willen de Sitter etc.

Lorentz aceptó la relatividad general muy pronto y colaboró de manera importante a su desarrollo. Lorentz y Droste fueron los primeros en desarrollar de forma ímplícita lo que hoy llamamos formalismo de Einstein–Infeld–Hoffmann (1938).

Willes de Sitter, catedrático de astronomía teórica, fué uno de los primeros en interesarse por los problemas astronómicos que se derivaban de la teoría de la relatividad.

La teoría de Einstein facilitó el camino a la mecánica cuántica, en tanto que entrenó a algunos de sus principales artífices en el uso de técnicas matemáticas tales como matrices, análisis tensorial, álgebra de operadores, principios variacionales y sistemas con propiedades no clásicas (p.e. variedades riemannianas) que juegan un importante papel a la teoría cuántica de 1925.

3-b) Gotinga

Fué muy importante la actividad de los físicos y matemáticos de la Universidad de Gotinga y la trascendencia de sus trabajos.

Hilbert, lo mismo que otros miembros de la élite de Gotinga, Minkowski, Wiechert, Weyl, Born, y Nordstróm, deseaban inicialmente una relatividad "general electromagnética ". El tinte electromagnético cedió paso al matemático. se pueden citar como ejemplos significativos Emmy Noether, Tullio Levi–Civita, Johannes Schouten, Oscar Veblen y Elie Cartan. Un capítulo importante de este aspecto matemático lo constituye el apoyo que esta encontró, merced al famoso programa de Erlangen de Klein. La tesis principal de Klein según la cual la geometría se reduce al estudio de aquellos objetos que se mantienen invariantes bajo un determinado grupo de transformación, y que por consiguiente existen tantas geometrías como grupos de transformación, se ajustaba muy bien a lo que constituye la esencia de la relatividad especial como de la general, con sus nociones de invariancia Lorentz e invariancia general.

Minkowski fué el gran matemático de la teoría de la relatividad. La teoría de la relatividad especial resolvió la crisis en que se encontraba la física a finales del siglo XIX. Sólo por este motivo está más que justificado el prestigio que la teoría de Einstein ha tenido y tiene en la física. Ahora bien, la relatividad especial no sólo tiene prestigio, sino que también está rodeada de una cierta aureola de excelencia gracias a la formulación geométrica cuadridimensional que Hermann Minkowski le dió a partir de 1908.

Somos capaces de visualizar experiencias en tres dimensiones, y si se nos dice que el marco geométrico de una teoría requiere cuatro dimensiones nuestro interés se aviva, si a todo esto le unimos la importancia que para el desarrollo de la teoría de la relatividad general tuvo el espacio-tiempo minkowskiano, vale la pena estudiar como Minkowski llegó a esta representación geométrica y lo que representaba para él.

Minkowski, profesor de la Universidad de Gotinga, fué un gran matemático. Títulos como "La geometría de los números" (1896) son característicos de su obra, cuyo extraordinario talento geométrico se hizo evidente cuando a la edad de diecisiete años ganó el gran premio de la academia francesa con un tratamiento geométrico de la teoría de las formas cuadráticas.

Intuición geométrica por un lado y su formación como matemático por otro, llevarían a Minkowski a mantener que debido a la "armonía preestablecida entre las matemáticas y la naturaleza", la geometría puede utilizarse como una llave para el descubrimiento físico y que la teoría de la relatividad hallaba la justificación en ser la teoría física de estructura geométrica más satisfactoria.

4. Colaboración de Einstein con los grandes matemáticos de la época

La atmósfera científica que rodeaba a Einstein fué un factor muy importante. Einstein utilizó los resultados de los grandes matemáticos del momento. Citaremos a los más representativos.

4-a) Einstein y Poincaré

Poincaré fué un matemático cuyas preocupaciones metodológicas afectaron profundamente a sus trabajos tanto en física como en matemáticas. En "El valor de la ciencia" escribió: "No tenemos la intuición directa de la simultaneidad, ni tampoco la de la igualdad de dos duraciones".

Se plantea si Poincaré descubrió o no la teoría de la relatividad especial (independiente de Einstein naturalmente). Responder a esta pregunta no es todo lo sencillo que en principio pudiera parecer. De hecho en la literatura relativa a este tema las posturas que hasta ahora se han mantenido son dos,claramente antagónicas entre sí. En realidad parece que la teoría de la relatividad especial fué desarrollada no sólo por Einstein, como se acepta habitualmente, sino también por Poincaré, aunque este último no la formulase con la claridad y brevedad del primero.

4-b) Einstein y Hilbert

David Hilbert no fué únicamente un eminente matemático, sino que también se interesó vivamente por el desarrollo de la física. Se convirtió en un ferviente admirador de las ideas que Gustav Mie y Einstein estaban introduciendo en electrodinámica y gravitación, respectivamente. El resultado de esta admiración surgió el 20 de noviembre de 1915, fecha en la que Hilbert leía, en la Real Academia de Ciencias de Gotinga, una comunicación en la que obtenía las ecuaciones del campo gravitacional de la relatividad general.

4-c) Einstein y Grossmann

La colaboración entre estos dos científicos dió como fruto tres artículos, que en realidad se componen de dos partes: la física, escrita por Einstein, y la matemática a cargo de Grossmann.

Grossmann introdujo las nociones de tensor (de cualquier rango) covariante y contravariante (siguiendo para ello a Levi–Civita), así como los símbolos de Christoffel.

Para Grossmann no había duda de que "el significadon decisivo de estas estructuras (tensores) para la geometría diferencial de una variedad, definida por su elemento de línea, hace a priori probable, que estos tensores generales puedan ser importantes también para el problema de las ecuaciones diferenciales de un campo gravitacional".

4-d) Einstein y Weyl

En muchos sentidos, la teoría unificada de campos más atractiva y más profunda es la teoría de Hermann Weyl de 1918. Weyl se dió cuenta de que la geometría rieman-

niana sobre la que reposa la teoría de la relatividad general no deja libertad suficiente para introducir, geometrizándolo, el campo electromagnético, por este motivo desarrolló una generalización de la geometría riemanniana. La nueva geometría conducía a la teoría de campos más autoconsistente jamás concebida, puesto que erradicaba la "acción a distancia" incluso de la geometría. Einstein utilizó los resultados de Weyl.

5. Blas Cabrera y la teoría de la relatividad general La polémica Eistein–Hilbert

Blas Cabrera fué uno de los artífices de la invitación a España a Einstein. Tras su aceptación se planificaron numerosos preparativos para la visita que tendría lugar en 1923. Cabrera fué el encargado de pronunciar la Laudatio a Einstein con motivo de su nombramiento como Académico correspondiente extranjero de la Real Academia de Ciencias. A las reuniones de Einstein y Cabrera asistía Andrés Segovia, que tocaba algunas composiciones en honor del ilustre visitante.

Es este contexto en el que hay que situar su libro sobre "Teoría de la Relatividad", que es una obra divulgativa de gran calidad. Aunque se limite a una verdadera anécdota, resulta muy original el recurso de Cabrera para obtener una intuición en una geometría de dos dimensiones. Recurre a un habitante de ese mundo al que denomina homoide. También llama la atención por su gran claridad su exposición sobre la noción de curvatura.

La formulación matemática de la Teoría de la Relatividad General da lugar a polémicas que no parecen bien conocidas por el público en general. La cuestión es que por tan sólo unas semanas, la Teoría de la Relatividad General aparecía publicada en un artículo de Hilbert en 1915, previamente al de Einstein. Einstein había visitado unos meses antes a Hilbert en Gotinga, impartiendo un seminario sobre el tema, en el que explicó el punto que le quedaba aún por culminar. En ese tiempo las relaciones entre ambos eran muy buenas (parece que Einstein pernoctó en casa de Hilbert). Más tarde, Hilbert encontró una manera de poner la última pieza del rompecabezas genial ideado por Einstein. Para ello recurrió una vez más a las técnicas del Cálculo de Variaciones (véase, por ejemplo la exposición de Weinberg, 1972). En todo caso, Einstein encontraría independientemente otra manera distinta de culminar su hallazgo. El tema ha sido tratado en los textos de Mehra (1974) y Sanchez–Ron (1983) (véase Earman y Glymom, 1979).

Más recientemente, historiadores científicos, han consultado las galeradas del artículo de Hilbert, detectando importantes cambios posteriores a la fecha de entrega del manuscrito (vease Corry, Renn y Stachel, 1.997). La relación entre estas dos figuras se quebró a partir de entonces (vease Reid, 1970, y Earman y Glymour, 1979). De que Hilbert no quedó nada satisfecho de esa incursión suya en la Teoría de la Relatividad da buena prueba el que de las 22 secciones en las que se dividen los tres volúmenes que recopilan sus obras completas (Hilbert 1965) no aparezca más que una (la 16)

relacionada con la Teoría de la Relatividad en la que aparece el citado artículo de 1915 y otro posterior de 1924 (Hilbert 1924)

Referencias

[1] L. Corry, J. Renn, J. Stachel: *Belated Decision in the Hilbert–Einstein Priority Dispute.* Science **278** (1997), 1270–1273.

[2] J. Earman, C. Glymour: *Einstein and Hilbert: Two months in the History of General Relativity.* Arch. Hist. Exact. Sci. **19** (1979), 291–308.

[3] D. Hilbert: *Die Grundlagen der Physik.* Math. Ann. **92** (1924), 1.

[4] ———: *Collected papers.* Cheslea Publ. Co., New York 1965.

[5] M.J. Klein: *Einstein and the Wave-Particle Duality.* The Natural Philosopher.

[6] J. Mehra: *Einstein, Hilbert and the Theory of Gravitation.* Reidel, Dordrecht 1974.

[7] H. Poincaré: *La valeur de la science.* Flammarion, Paris 1905.

[8] C. Reid: *Hilbert.* Springer-Verlag, Berlin 1970.

[9] J.M. Sánchez–Ron: *El origen y desarrollo de la relatividad.* Alianza Universidad, Madrid 1983.

[10] S. Weinberg: *Gravitation and cosmology. Principles and applications of the general theory of relativity.* John Wiley & sons, New York 1972.