Lecciones de GEOMETRÍA AFÍN

José Manuel Rodríguez-Sanjurjo & Jesús M. Ruiz

Universidad Complutense de Madrid

Prefacio

Estas notas recogen el contenido de las clases que hemos impartido durante varios años a enseñar la geometría lineal del espacio afín. La materia se tenía que cubrir en un par de meses en el mejor de los casos y en apenas uno en las situaciones más apuradas. La pretensión, a veces inverosímil, a veces viable, era:

- Introducir las nociones de espacio afín, subespacio afín y aplicación afín, distinguiéndolas muy bien de las propias de la geometría vectorial.
- Estudiar las posiciones relativas de los subespacios afines, paralelismo y cruzamientos, y la fórmula de Grassmann correspondiente.
- Plantear el problema de clasificación de aplicaciones afines en general, y resolverlo utilizando formas de Jordan. Hacer esto muy explícitamente al menos en dimensión 2.
- Definir rigurosamente las cuádricas afines y las nociones geométricas básicas: ceros, centros, singularidades y tangencias. Esto incluye los puntos de infinito.
- Clasificar las cuádricas afines, describiendo explícitamente todas las cónicas y todas las superficies cuádricas.

Pero todo lo que se pudiera explicar aquí donde se sistematiza y comprende bien es en el espacio proyectivo. En el espacio proyectivo se unifica, completa y entiende de verdad la geometría. La consecuencia más provechosa de la lectura de este libro sería el deseo y la necesidad de aprender Geometría Proyectiva.

Noviembre de 2010

Contenido

Tema 1. Espacios afines

En todo lo que sigue, consideramos un cuerpo base $\mathbb{K}$ de característica cero, que para nosotros siempre será el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. La primera definición es la siguiente:

Definición 1.1. Un *espacio afín (sobre* $\mathbb{K}$*)* es un conjunto no vacío X equipado con una *acción vectorial* γ, que es una aplicación

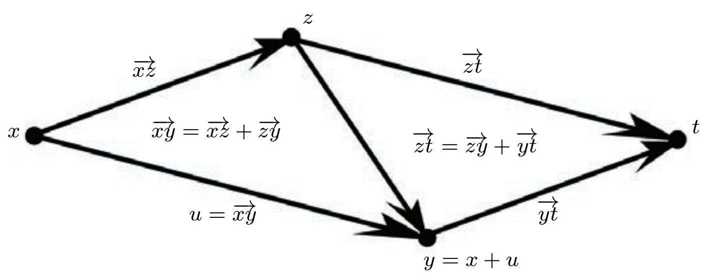
$$\gamma : X \times X \to \overrightarrow{X} : (x,y) \mapsto \gamma(x,y) = \overrightarrow{xy},$$

con valores en un espacio vectorial $\overrightarrow{X}$ sobre $\mathbb{K}$, tal que:

(a) Se cumple $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zy}$ para cualesquiera $x, y, z \in X$, y

(b) La aplicación $\gamma_x : X \to \overrightarrow{X} : y \mapsto \overrightarrow{xy}$ es biyectiva para algún $x \in X$.

Los elementos de X son los *puntos* y los vectores de $\overrightarrow{X}$ son las *direcciones*. Dados dos puntos $x, y \in X$ y el correspondiente vector $u = \overrightarrow{xy}$, diremos que x es el *origen de* u e y es el *extremo de* u; la igualdad $u = \overrightarrow{xy}$ se escribe también $y = x + u$, operación que se denomina *traslación*.



De la primera de las condiciones de esta definición se deducen inmediatamente varias propiedades naturales:

Observaciones 1.2. Sea X un espacio afín.

(1) Para cualquier punto $x \in X$ se cumple $\overrightarrow{xx} = 0$.

En efecto, la propiedad (a) para $x = y = z$ dice que $\overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx}$, luego $\overrightarrow{xx} = 0$.

(2) Dados $x, y \in X$, es $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$.

De nuevo por (a), ahora cuando $y = x$, resulta $\overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zx}$, y como $\overrightarrow{xx} = 0$, concluimos que los vectores $\overrightarrow{zx}$ y $\overrightarrow{xz}$ son opuestos.

(3) Dados cuatro puntos $x, y, z, t \in X$, si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$, entonces $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yt}$.

Aplicando dos veces (a) deducimos:

$$\overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zt} = \overrightarrow{xt} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yt},$$

de modo que si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$, restando este vector en ambos miembros queda $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yt}$. ∎

La condición (b) de la definición de espacio afín tiene el inconveniente de ser existencial, de modo que su comprobación parece requerir una exploración incierta. Pero esto es sólo aparente:

Proposición 1.3. *Sea X un espacio afín y γ su acción vectorial. Entonces la aplicación $\gamma_x : y \mapsto \overrightarrow{xy}$ es biyectiva para todo $x \in X$.*

Demostración. Sabemos que existe un punto $a \in X$ tal que la aplicación $\gamma_a : y \mapsto \overrightarrow{ay}$ es biyectiva, y debemos deducir lo mismo para cualquier $x \in X$.

Veamos primero que $\gamma_x : X \to \overrightarrow{X}$ es suprayectiva. Sea $u \in \overrightarrow{X}$, y consideremos el vector $\overrightarrow{ax} + u$. Por ser γ_a suprayectiva, existe $y \in X$ tal que $\overrightarrow{ax} + u = \overrightarrow{ay}$. Obtenemos:

$$u = \overrightarrow{ay} - \overrightarrow{ax} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ay} = \overrightarrow{xy} = \gamma_x(y).$$

Vista así la suprayectividad, pasemos a la inyectividad. Supongamos $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz}$. Entonces

$$\overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ay} = \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{az},$$

con lo que $\overrightarrow{ay} = \overrightarrow{az}$ y por ser γ_a inyectiva concluimos $y = z$. ∎

El modelo fundamental de espacio afín es el *espacio afín estándar* que denotamos $\mathbb{A}^n$, y está definido como sigue: (i) el conjunto X es $\mathbb{K}^n$, pero despojado de cualquier estructura, simplemente como conjunto de puntos, (ii) el espacio vectorial de direcciones $\overrightarrow{X}$ es $\mathbb{K}^n$, ahora sí considerado como espacio vectorial, y (iii) la acción vectorial es

$$\gamma(x, y) = \overrightarrow{xy} = y - x,$$

la resta hecha en el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$. Aunque al principio puede resultar ambiguo, en esta definición los elementos de $\mathbb{K}^n$ se contemplan a veces como puntos, a veces como vectores: en lo que acabamos de escribir, $y-x$ es un vector, pero x e y son puntos. Por eso siempre escribiremos $\mathbb{A}^n$ para denotar el espacio afín, y $\mathbb{R}^n$ para denotar el espacio vectorial.

Veremos más adelante que este es el modelo universal de espacio afín.

Definición 1.4. Sea X un espacio afín sobre $\mathbb{K}$. Un *subespacio afín de* X es un subconjunto no vacío $Y \subset X$ en el que la acción vectorial de X induce por restricción una estructura de espacio afín.

Analicemos lo que esta definición significa. Sea $\gamma : X \times X \to \overrightarrow{X}$ la acción vectorial de X, y consideremos su restricción

$$\gamma|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \gamma(Y \times Y) : (x, y) \mapsto \gamma(x, y) = \overrightarrow{xy}.$$

Dejemos de momento la condición de que $\gamma|_{Y\times Y}$ tome valores en un espacio vectorial, y veamos como se expresan con las condiciones (a) y (b). La primera condición se cumple para cualesquiera puntos de X, luego en particular para cualesquiera $x, y, z \in Y$. En cuanto a la segunda, como $Y \neq \varnothing$, tomemos un punto $a \in Y$. Como la aplicación $\gamma_a : X \to \overrightarrow{X}$ es biyectiva, su restricción a Y lo es, y prescribiendo su imagen, obtenemos una biyección

$$\gamma_a|_Y : Y \to \gamma_a(Y) = \{u = \overrightarrow{az} : z \in Y\};$$

Tenemos pues $Y = a+\gamma_a(Y)$, y para que Y sea un subespacio afín, es necesario que el conjunto $\gamma_a(Y)$ sea un subespacio vectorial de $\overrightarrow{X}$. Pero, además, esa condición es suficiente. En efecto, basta ver que si $\gamma_a(Y)$ es un subespacio vectorial, entonces

$$\gamma(Y \times Y) = \gamma_a(Y).$$

Pero si $x, y \in Y$, tenemos

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ay} = -\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay} \in \gamma_a(Y),$$

por estar suponiendo que $\gamma_a(Y)$ es subespacio vectorial.

Acabamos pues de demostrar que *un subconjunto $Y \subset X$ es un subespacio afín si y sólo si los vectores $\overrightarrow{az}, z \in Y$, constituyen un subespacio vectorial de $\overrightarrow{X}$*, que será el espacio de direcciones $\overrightarrow{Y}$ de Y. Otra forma de decir esto es que el subconjunto Y se puede escribir como $Y = a + V$ para un subespacio vectorial de $\overrightarrow{X}$ (obsérvese que V está completamente determinado por Y).

Observación 1.5. Acabamos de describir los subespacios afines como las *traslaciones* de los subespacios vectoriales. Esta sugerente terminología es estrictamente exacta en el caso del espacio afín estándar $\mathbb{A}^n$. Sea $Y \subset \mathbb{A}^n$ un subespacio afín y $V = \overrightarrow{Y}$ su espacio de direcciones. Para cualquier punto $a \in Y$, tenemos:

$$\begin{aligned} y = a + \overrightarrow{ay} \in Y \quad & \text{si y sólo si} \quad \overrightarrow{ay} \in V, \\ & \text{si y sólo si} \quad y - a \in V, \\ & \text{si y sólo si} \quad \mathrm{y} \in a + V. \end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad $Y = a + V$ significa exactamente lo que parece. ∎

Debe advertirse que los puntos son subespacios afines, con dirección $\{0\}$.

(1.6) Posiciones relativas de dos subespacios afines. Dos subespacios afines Y, Z de X pueden cortarse o no, en cuyo caso se pueden dar diversas situaciones. Si $Y \cap Z = \varnothing$, nosotros distinguiremos dos extremas: (i) si uno de los espacios de direcciones $\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ está contenido en el otro, diremos que Y y Z son *paralelos,* y (ii) si $\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z} = \{0\}$ diremos que Y y Z *se cruzan.* Obsérvese que entre la intersección nula y el contenido hay muchas posibilidades, tantas más cuanto mayor sea X. ∎

(1.7) Puntos de infinito. (1) El concepto de paralelismo es específico del espacio afín, pero conduce inevitablemente al concepto de *punto de infinito,* que es específico del *espacio proyectivo.* Aquí nos limitamos a la siguiente justificación heurística. Un punto de infinito puede entenderse como el punto en el que intersecarían dos rectas paralelas. Lo que comparten las rectas paralelas es la dirección, luego podemos considerar esa dirección como el punto de infinito en cuestión. Así pues, los puntos de infinito de X son las direcciones de $\overrightarrow{X}$. Para representar una dirección vale cualquier vector no nulo que la genere. Digámoslo una vez más: el punto de infinito de la recta $r = a + L[u]$ es la dirección $\overrightarrow{r} = L[u] \subset \overrightarrow{X}$, dirección representada por el vector u. Denotaremos el punto de infinito por $[u]$.

(2) Lo mismo que para rectas diremos para cualquier subespacio afín Y: sus puntos de infinito son las direcciones de $\overrightarrow{Y}$, que no son más que las direcciones de todas las rectas paralelas a Y. Según esto, dos subespacios afines Y, Z que no se cortan: (i) son paralelos si los puntos de infinito de uno son puntos de infinito del otro, y (ii) se cruzan si no tienen ningún punto de infinito común. ∎

Tema 2. Operaciones con subespacios afines

Sea X un espacio afín sobre $\mathbb{K}$ con espacio de direcciones $\overrightarrow{X}$. Veamos qué operaciones hacer con subespacios afines. La primera no tiene dificultad:

(2.1) Intersección de subespacios afines. Sea $(Y_i : i \in I)$ una familia de subespacios afines. Si la intersección $Y = \bigcap_i Y_i$ es no vacía, entonces es un subespacio afín con dirección

$$\overrightarrow{Y} = \bigcap_i \overrightarrow{Y_i}.$$

En efecto, sea $a \in Y$. Entonces $Y_i = a + Y_i$ para todo i, y se comprueba que

$$Y = a + \bigcap_i \overrightarrow{Y_i},$$

lo que implica la afirmación anterior. ∎

Una vez visto esto, podemos definir:

Definición 2.2. Sea $A \subset X$ un conjunto no vacío arbitrario. La intersección $V(A) = \bigcap_Y Y$ de todos los subespacios afines Y de X en los que está contenido A se denomina *subespacio afín generado por* A.

Por lo anterior, $V(A)$ es efectivamente un subespacio afín, y su dirección se puede expresar como sigue: si $a \in A$ es un punto cualquiera de A, entonces

$$\overrightarrow{V(A)} = L[\overrightarrow{ax} : x \in A].$$

En efecto, $\overrightarrow{V(A)}$ contiene todos los vectores que unen puntos suyos, en particular, puntos de A, de lo que se sigue el contenido de derecha a izquierda. Para el otro veamos que $V(A)$ está contenido en el subespacio afín $Y = a + L[\overrightarrow{ax} : x \in A]$. Esto se deducirá de que Y contiene a A: si $b \in A$, entonces

$$b = a + \overrightarrow{ab} \in a + L[\overrightarrow{ax} : x \in A] = Y.$$

Un caso particular importante es cuando A es la unión de dos subespacios afines $Y, Z \subset X$, en cuyo caso denotamos $V(A) = V(Y, Z)$. Se tiene

Proposición 2.3. *Consideremos dos puntos $a \in Y$, $b \in Z$. La dirección del subespacio afín $V(Y,Z)$ generado por Y y Z es*

$$\overrightarrow{V(Y,Z)} = L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}.$$

Si Y y Z no se cortan, entonces $L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}) = \{0\}$.

Demostración. Como $V(Y,Z)$ contiene los dos puntos a y b, el espacio de direcciones $\overrightarrow{V(Y,Z)}$ contiene al vector $\overrightarrow{ab}$. Como ese espacio de direcciones también contiene a $\overrightarrow{Y}$ y a $\overrightarrow{Z}$, deducimos el contenido de derecha a izquierda. Para el otro, veamos que $V(Y,Z)$ contiene al subespacio afín $T = a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$, comprobando que ese subespacio contiene a Y y a Z. Si $y \in Y$ tenemos

$$y = a + \overrightarrow{ay} \in a + \overrightarrow{Y} \subset a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z} = T,$$

y si $z \in Z$ tenemos

$$z = a + \overrightarrow{az} = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bz} \in a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Z} \subset a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z} = T.$$

Ahora supongamos que $L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}) \neq \{0\}$. Entonces necesariamente $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$, de manera que existen puntos $y \in Y$, $z \in Z$ tales que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ay} + \overrightarrow{bz}$. Resulta:

$$y = a + \overrightarrow{ay} = a + \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{bz} = b - \overrightarrow{bz} \in b + \overrightarrow{Z} = Z,$$

y por tanto $y \in Y \cap Z$. Esto prueba la afirmación final del enunciado. ∎

Hasta ahora no hemos dicho nada de dimensiones, pero en lo sucesivo supondremos siempre que $\overrightarrow{X}$ es de tipo finito, y por definición la dimensión de X, que denotamos $\dim(X)$, es la de $\overrightarrow{X}$; sea $n = \dim(X) = \dim(\overrightarrow{X})$. Si X se reduce a un punto, entonces tiene dimensión 0; si X tiene dimensión 1, se llama recta afín, y si tiene dimensión 2 se llama plano afín.

Todo subespacio afín $Y \subset X$ tiene espacio de direcciones $\overrightarrow{Y} \subset \overrightarrow{X}$ también de tipo finito, y con dimensión $\dim(Y) = \dim(\overrightarrow{Y}) \leq \dim(\overrightarrow{X}) = n$. La *codimensión* de Y de X es

$$\operatorname{codim}(Y) = \dim(X) - \dim(Y) = \dim(\overrightarrow{X}) - \dim(\overrightarrow{Y}) = \operatorname{codim}(\overrightarrow{Y}).$$

Como es habitual, un hiperplano afín es un subespacio afín de codimensión 1.

Dos puntos distintos $a, b \in X$ generan una recta afín, pues

$$V(a,b) = a + L[\overrightarrow{ab}] \quad \text{con } \overrightarrow{ab} \neq 0.$$

Decimos que tres puntos distintos $a, b, c \in X$ están *alineados* si uno de ellos pertenece a la recta que generan los otros dos.

El resultado básico sobre dimensiones de subespacios afines es la siguiente *fórmula de Grassmann:*

Proposición 2.4. *Sean $X, Y \subset X$ subespacios afines. Entonces*

$$\dim(V(Y,Z)) = \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}) + \begin{cases} 0 & \text{si } Y \cap Z \neq \varnothing. \\ 1 & \text{si } Y \cap Z = \varnothing. \end{cases}$$

Demostración. Como sabemos, dados dos puntos $a \in Y$, $b \in Z$, es

$$\overrightarrow{V(Y,Z)} = L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \dim(V(Y,Z)) &= \dim(L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}) \\ &= \dim(L[\overrightarrow{ab}]) + \dim(\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}) - \dim(L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})) \\ &= \dim(\overrightarrow{Y}) + \dim(\overrightarrow{Z}) - \dim(\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}) \\ &\qquad + \dim(L[\overrightarrow{ab}]) - \dim(L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})) \\ &= \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}) \\ &\qquad + \dim(L[\overrightarrow{ab}]) - \dim(L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})). \end{aligned}$$

Para terminar observamos que: (i) si Y y Z se cortan, podemos tomar $a = b$, y los dos últimos sumandos valen 0, y (ii) si Y y Z no se cortan, el último sumando es 0 y el penúltimo 1. ∎

Como ilustración, veamos cuales son las posibles posiciones relativas de rectas e hiperplanos en un espacio afín.

Ejemplos 2.5. Sea X un espacio afín de dimensión n.

(1) Un hiperplano de X y un punto fuera de él generan X.

En efecto, sea Y un hiperplano y $a \in X \setminus Y$. Entonces $V(a, Y) \supset Y$, luego la dimensión de $V(a, Y)$ es n, y $V(a, Y) = X$. También podemos usar la fórmula de Grassmann:

$$\begin{aligned}\dim(V(a, Y)) &= \dim(\{a\}) + \dim(Y) - \dim(\{0\} \cap \overrightarrow{Y}) + 1 \\ &= 0 + (n-1) - 0 + 1 = n.\end{aligned}$$

(2) Dos rectas distintas de X pueden cortarse en un punto, ser paralelas o cruzarse. En los dos primeros casos generan un plano, y en el tercero generan un subespacio afín de dimensión 3 de X.

Sean r y s dos rectas distintas de X. La dimensión de $\overrightarrow{r} \cap \overrightarrow{s}$ es 0 o 1. En el primer caso la fórmula de Grassmann dice que la dimensión de l,a variedad generada por las dos rectas es: (i) 2 si se cortan, (ii) 3 si no se cortan. Es decir, las dos rectas se cortan y generan un plano, o se cruzan y generan un subesapcio de dimensión 3. El caso que queda es que $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{s}$, y si pasaran por un mismo punto a, sería $r = a + \overrightarrow{r} = a + \overrightarrow{s} = s$. Por tanto, las rectas son paralelas.

(3) Dos hiperplanos distintos de X pueden ser paralelos o cortarse en un subespacio afín de codimensión 2. En todo caso generan X.

Sean Y y Z dos hiperplanos distintos. La dimensión de $\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}$ puede ser $n-1$ o n. En el primer caso, $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Z}$ y los planos son paralelos (si se cortaran en un punto a serían iguales: $Y = a + \overrightarrow{Y} = a + \overrightarrow{Z} = Z$). En el segundo caso, de la fórmula de Grassmann resulta

$$n \geq \dim(V(Y, Z)) = (n-1) + (n-1) - (n-2) + k = n + k,$$

luego $k = 0$, los hiperplanos se cortan en dimensión $n-2$, y generan X.

(4) Una recta y un hiperplano de X que no la contenga pueden cortarse en un punto o ser paralelos. En todo caso generan X. ∎

Sean r e Y una recta y un hiperplano de X. Una vez más miramos la dimensión d de la intersección $\overrightarrow{r} \cap \overrightarrow{Y}$, que puede ser 0 o 1, y aplicamos la formula de Grassmann:

$$n \geq \dim(V(r, Y)) = 1 + (n-1) - d + k = n - d + k.$$

Si $d = 0$, entonces $k = 0$, y la recta y el hiperplano se cortan en un punto. Si $d = 1$ y $k = 1$, entonces la recta y el hiperplano son paralelos. En estos dos casos, la recta y el hiperplano generan X. En fin, si $d = 1$ y $k = 0$, entonces la recta y el hiperplano se cortan en algún punto a, y $r = a + \overrightarrow{r} \subset a + \overrightarrow{Y} = Y$, contra la hipótesis.

(5) Para que dos subespacios Y, Z de X se crucen, la suma de sus dimensiones debe ser estrictamente menor que la dimensión de X.

En efecto, si se cruzan, la fórmula de Grassmann dice que

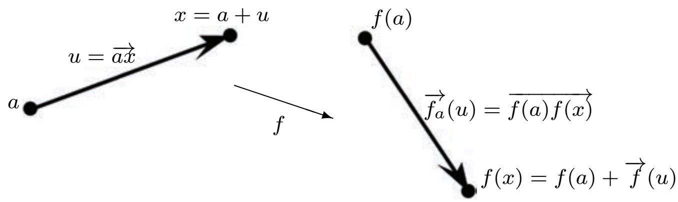
$$\begin{aligned}\dim(X) \geq \dim(V(Y,Z)) &= \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}) + 1\\ &= \dim(Y) + \dim(Z) - 0 + 1 > \dim(Y) + \dim(Z).\end{aligned}$$

Por ejemplo, la menor dimensión en que dos planos se cruzan es 5. ∎

Tema 3. Aplicaciones afines

Sean X e Y dos espacios afines (sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$), y sea $f : X \to Y$ una aplicación cualquiera. Para cada punto a de X definimos una aplicación entre los espacios de direcciones como sigue:

$$\overrightarrow{f_a} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y} : u = \overrightarrow{ax} \mapsto \overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f(a)f(x)}.$$



Podemos efectivamente hacerlo porque la acción $\gamma_a : x \mapsto \overrightarrow{ax}$ es biyectiva. Utilizando también la acción en el espacio Y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_a"'] & Y \arrow[d, "\gamma_{f(a)}"] \\ \overrightarrow{X} \arrow[r, "\overrightarrow{f}"] & \overrightarrow{Y} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d] & f(x) \arrow[d] \\ \overrightarrow{ax} \arrow[r] & \overrightarrow{f(a)x} \end{tikzcd}$$

La aplicación $\overrightarrow{f}$ no tiene ninguna propiedad especial, salvo que se imponga por definición. Y por ello se introduce la siguiente:

Definición 3.1. Una aplicación $f : X \to Y$ entre espacios afines se denomina *aplicación afín* si existe algún punto $a \in X$ tal que $\overrightarrow{f_a} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ es una aplicación lineal.

La condición del enunciado es la existencia de algún punto a tal que $\overrightarrow{f_a}$ sea lineal, pero de hecho, si esto se cumple para a, se cumple también para cualquier otro punto $b \in X$.

En efecto, sea $v = \overrightarrow{bx}$, y denotemos $u = \overrightarrow{ax}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f_b}(v) &= \overrightarrow{f(b)f(x)} = \overrightarrow{f(a)f(x)} - \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f_a}(\overrightarrow{ax}) - f_a(\overrightarrow{ab}) \\ &= \overrightarrow{f_a}(u) - \overrightarrow{f_a}(u - v) = \overrightarrow{f_a}(u) - \overrightarrow{f_a}(u) + \overrightarrow{f_a}(v) = \overrightarrow{f_a}(v), \end{aligned}$$

por ser $\overrightarrow{f_a}$ lineal. En consecuencia, $\overrightarrow{f_b} = \overrightarrow{f_a}$, y $\overrightarrow{f_b}$ es lineal.

Lo anterior muestra no sólo que todas las aplicaciones $\overrightarrow{f_x}$ son lineales, sino que todas coinciden. Prescindiremos pues del subíndice, y denotaremos $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$. Esta aplicación lineal es la *derivada* de f. Se tiene la siguiente fórmula:

$$f(x) = f(a) + \overrightarrow{f(a)f(x)} = f(a) + \overrightarrow{f}(u), \quad \text{para } x = a + u.$$

Observaciones 3.2. Las propiedades de una aplicación afín están determinadas en gran medida por su derivada. Es fácil probar los dos siguientes resultados utilizando el diagrama conmutativo anterior que describe la derivada mesiante las acciones vectoriales de X y de Y.

(1) Una aplicación afín $f : X \to Y$ es inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva) si y sólo si lo es su derivada.

(2) Sea $f : X \to Y$ una aplicación afín biyectiva. Entonces la aplicación inversa f^{-1} es también afín, y la derivada de f^{-1} es la aplicación lineal inversa de $\overrightarrow{f}$. ▮

Las aplicaciones afines transforman subespacios afines en subespacios afines:

Proposición 3.3. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación afín.*

(1) Si Z es un subespacio afín de X, su imagen $f(Z)$ es un subespacio afín de Y, y su dirección es $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{Z})$. Si $A \subset X$ genera Z, entonces $f(A)$ genera $f(Z)$.

(2) Si T es un subespacio afín de Y y su imagen inversa $f^{-1}(Z)$ es no vacía, entonces esa imagen inversa es un subespacio afín de X. En ese caso, la dirección de $f^{-1}(T)$ es $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{Z})$.

Demostración. (1) Como $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{Z})$ es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{Y}$, basta probar que $f(Z) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Z})$ para cualquier $a \in Z$. pero esta es una simple comprobación conjuntista. La segunda afirmación se deduce fácilmente, pues fijamos $a \in A$ y entonces $\overrightarrow{V(A)} = L[\overrightarrow{ab} : b \in A]$, de modo que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(V(A))} &= \overrightarrow{f}\big(\overrightarrow{V(A)}\big) = \overrightarrow{f}\big(L[\overrightarrow{ab} : b \in A]\big) \\
&= L[\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) : b \in A] = L[\overrightarrow{f(a)f(b)} : b \in A] \\
&= L[\overrightarrow{f(a)c} : c \in f(A)] = \overrightarrow{V(f(A))}.
\end{aligned}$$

Así:

$$f(Z) = f(V(A)) = f(a) + \overrightarrow{f(V(A))} = f(a) + \overrightarrow{V(f(A))} = V(f(A)).$$

(2) Es análoga a la anterior. Si existe algún punto $a \in f^{-1}(T)$, se comprueba que $f^{-1}(T) = a + \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{Z})$. ∎

De la anterior proposición se deducen dos propiedades muy importantes:

Proposición 3.4. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación afín. Entonces:*

(1) f conserva el paralelismo: *si $Z, T \subset X$ son subespacios afines paralelos, entonces $f(Z)$ y $f(Y)$ también lo son.*

(2) f conserva la alineación: *si a, b y $c \in X$ están alineados, entonces $f(a), f(b)$ y $f(c)$ lo están también.*

Demostración. (1) Si por ejemplo $\overrightarrow{Z} \subset \overrightarrow{T}$, entonces

$$\overrightarrow{f(Z)} = \overrightarrow{f}\big(\overrightarrow{Z}\big) \subset \overrightarrow{f}\big(\overrightarrow{T}\big) = \overrightarrow{f(T)},$$

y $f(Z)$ es paralelo a $f(T)$.

(2) Si a, b, c están alineados, digamos $c \in V(a, b)$, entonces

$$f(c) \in f(V(a, b)) = V(f(a), f(b)),$$

y los tres puntos $f(a), f(b)$ y $f(c)$ están alineados. ∎

(3.5) Formas afines. Una forma afín de un espacio afín X es una aplicación afin $f : X \to \mathbb{A}^1$ de X en la recta afín estándar. Su derivada es una forma lineal $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$, y como $\mathbb{A}^1$ tiene la estructura estándar, resulta:

$$\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{f(a)f(x)} = f(x) - f(a) = f(a + u) - f(a),$$

para $u = \overrightarrow{ax}$, $a, x \in X$.

Por otra parte, $\overrightarrow{f}$ es idénticamente nula o suprayectiva. En el primer caso, f es constante, y en el segundo es suprayectiva. Supongamos esto último. Entonces para cada $t \in \mathbb{A}^1$, la imagen inversa $f^{-1}(t)$ es un hiperplano afín Y de X con dirección $\overrightarrow{Y} = \ker(\overrightarrow{f})$. Para cada $a \in X$ ponemos $t = f(a)$ y resulta

$$a + \ker(\overrightarrow{f}) = f^{-1}(f(a)),$$

es decir, los $f^{-1}(t)$ son todos los hiperplanos con esa dirección. ∎

(3.6) Composición de aplicaciones afines. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones afines. La composición $h = g \circ f : X \to Z$ es también afín, y su derivada es la composición $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ de las derivadas.

En efecto, sea $u = \overrightarrow{ax} \in \overrightarrow{X}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h}(u) &= \overrightarrow{h(a)h(x)} = \overrightarrow{g(f(a))g(f(x))} = \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f(a)f(x)}\big)\\ &= \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax})\big) = \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f}(u)\big) = (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(u).\end{aligned}$$

Esta fórmula para la derivada de la composición se denomina *regla de la cadena.* ∎

Tema 4. Subespacios invariantes

Aquí consideraremos aplicaciones afines de un espacio afín X en sí mismo. Esto incluye en particular las aplicaciones afines biyectivas $f : X \to X$, denominadas *afinidades de* X; las afinidades de X forman un grupo para la composición de aplicaciones denominado *grupo afín de* X y denotado $\mathsf{GA}(X)$. Aunque a continuación no suponemos que las aplicaciones afines sean biyectivas, gran parte del interés de lo que hagamos corresponde a su aplicación a las afinidades.

El siguiente concepto es fundamental:

Definición 4.1. *Sea $f : X \to X$ una aplicación afín. Un punto fijo de f es un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Un subespacio afín $Y \subset X$ se denomina invariante si $f(Y) \subset Y$.*

Si f es una afinidad, sus subespacios invariantes cumplen de hecho $f(Y) = Y$. En general, el comportamiento de f está cifrado en la configuración de sus subespacios invariantes: cuántos hay de cada dimensión, y cuáles son sus posiciones relativas o *incidencias*. Nótese que los subespacios invariantes son una familia estable para las operaciones geométricas: la intersección de dos subespacios invariantes es invariante también, así como es invariante el subespacio afín que los dos generan.

A continuación discutimos la búsqueda de subespacios invariantes de una manera suficientemente completa para nuestros propósitos.

(4.2) Cálculo de subespacios afines invariantes. Sean $f : X \to X$ una aplicación afín y $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X}$ su derivada.

(1) En general, si un subespacio afín $Y \subset X$ es invariante, como $f(Y) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Y})$, resulta que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{Y}) \subset \overrightarrow{Y}$. Por tanto, la dirección de Y es un subespacio vectorial invariante de su derivada $\overrightarrow{f}$. Los subespacios invariantes de $\overrightarrow{f}$ se denominan *direcciones invariantes de f*. De esta manera, hay que determinar primero las direcciones invariantes $W \subset \overrightarrow{X}$, y averiguar luego si algún subespacio afín $Y = x + W$, $x \in X$, es invariante de$f$. Insistimos en que puede muy bien ocurrir que una dirección invariante no corresponda a ningún subespacio afín invariante.

(2) La búsqueda de direcciones invariantes es una tarea propia del Álgebra Lineal: autovalores, autovectores y formas de Jordan. Consideramos esto conocido,

con lo que pasamos a considerar una dirección invariante W y nos concentramos en determinar si hay subespacios afines invariantes con esa dirección.

Es claro que $Y = x + W$ es invariante si y sólo si $f(x) \in Y$, si y sólo si $\overrightarrow{xf(x)} \in W$, lo que nos sugiere definir el siguiente conjunto:

$$Z = \{x \in X : \overrightarrow{xf(x)} \in W\}.$$

Este conjunto puede ser vacío, en cuyo caso *no hay subespacios afines invariantes de dirección* W. Consecuentemente, supongamos $Z \neq \varnothing$. Afirmamos que Z es un subespacio afín de X.

En efecto, como Z no es vacío, elegimos un punto $a \in Z$ y analizamos cuándo un punto $x = a + u \in Z$. Tenemos

$$\overrightarrow{xf(x)} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f(a)f(x)} = \overrightarrow{af(a)} + (\overrightarrow{f(a)f(x)} - \overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f}(u) - u,$$

y como $\overrightarrow{af(a)} \in W$ concluimos que $\overrightarrow{xf(x)} \in W$ si y sólo si $\overrightarrow{f}(u) - u \in W$. Esto significa que $x \in Z$ si y sólo si $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{X}})(u) \in W$. En suma:

$$Z = a + (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{X}})^{-1}(W)$$

es un subespacio afín (y hemos calculado su dirección).

(2) Si suponemos que el subconjunto Z del apartado anterior es no vacío, y por tanto en subespacio afín, resulta que *es la unión de todos los subespacios afines invariantes de dirección* W. Esa unión puede reducirse a un subespacio invarianet $a + Y$, pero puede ser mayor, e incluso puede ser todo X. Esto último significa que todos los subespacios afines con dirección W son invariantes. En general, la conclusión es que los subespacios afines invariantes de dirección W son los subespacios afines $Y \subset Z$ de dirección W. ∎

Más adelante veremos cómo determinar Z mediante ecuaciones lineales.

(4.3) Puntos fijos. Sea $f : X \to X$ como en el párrafo anterior. El caso trivial de dirección invariante es $W = \{0\}$, que no tiene ningún interés desde el punto de vista vectorial. Aquí sí interesa, pues corresponde a los puntos fijos. Denotamos F al conjunto de todos ellos (es el conjunto Z de antes para $W = \{0\}$). Obsérvese además que F está contenido en los conjuntos Z del apartado anterior: la manera más sencilla de que $Y = x + W$ sea invariante es que x sea fijo.

(1) Supongamos que hay al menos un punto fijo a. Aplicando lo que hemos visto para W arbitrario, F es el subespacio afín $F = a + W(1)$, donde $W(1) \subset \overrightarrow{X}$ es el subespacio vectorial de los autovectores de $\overrightarrow{f}$ asociados al autovalor $\lambda = 1$. Si 1 no es autovalor de $\overrightarrow{f}$, esto sólo significa que $W(1) = \{0\}$ y a es el único punto fijo.

(2) Que F sea un subespacio afín es una información nada vanal. Implica por ejemplo que si hay dos puntos fijos distintos, entonces hay una recta de puntos fijos, y si fuera de esa recta hay otro punto fijo, entonces hay un plano de puntos fijos, y así sucesivamente.

(3) La existencia de puntos fijos simplifica grandemente la búsqueda de invariantes, pues reduce el estudio al caso vectorial. En efecto, supongamos que tenemos un punto fijo a. Entonces como acabamos de decir, $a \in Z$ para el conjunto Z asociado a cualquier subespacio vectorial invariante W de $\overrightarrow{f}$, y en la fórmula

$$Z = a + (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{X}})^{-1}(W)$$

disponemos de todos los datos para calcular Z.

(4) Las rectas vectoriales invariantes de la derivada $\overrightarrow{f}$ (que no corresponden necesariamente a rectas afines invariantes de f), podemos interpretarlas como *puntos fijos de infinito*. En efecto, sea u un autovector de la derivada. Dos rectas afines dadas $r = a + L[u]$ y $s = b + L[u]$ se transforman en $f(r) = f(a) + L[u]$ y $f(s) = f(b) + L[u]$, e interpretando los puntos de infinito como las intersecciones de rectas paralelas, el nuestro es $r \cap s = f(r) \cap f(s)$. Pero $f(r \cap s) \subset f(r) \cap f(s)$, luego f fija el punto de infinito en cuestión. ∎

Tema 5. Aplicaciones afines notables

En esta lección describimos algunas aplicaciones afines $f : X \to X$ de un espacio afín X en sí mismo, y en particular algunos subgrupos de $\mathsf{GA}(X)$, mediante construcciones geométricas interesantes.

(5.1) Traslaciones. Este tipo de aplicación es en realidad el que hace la diferencia entre la geometría afín y la vectorial.

(1) Fijemos un vector $w \in \overrightarrow{X}$. Entonces la aplicación $f : X \to X$ definida por $f(x) = x + w$ es afín; se denomina *traslación de vector* w. Para calcular su derivada, escribimos $u = \overrightarrow{ax}$ con $a, x \in X$, y resulta

$$\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{ax} = \overrightarrow{f(a)f(x)} = \overrightarrow{(a+u)(x+u)} = \overrightarrow{ax} = u.$$

Por tanto, la derivada es la identidad en $\overrightarrow{X}$, por supuesto lineal.

(2) Supongamos ahora que la derivada de una aplicación afín $f : X \to X$ es la identidad. Entonces f es una traslación: si $x = a + u$, tenemos

$$f(x) = f(a) + \overrightarrow{f}u = f(a) + u = a + \overrightarrow{af(a)} + u = a + u + \overrightarrow{af(a)} = x + \overrightarrow{af(a)},$$

luego f es la traslación de vector $w = \overrightarrow{af(a)}$.

(3) La composición de dos traslaciones es otra traslación, de vector la suma de los vectores de ambas. Toda traslación es biyectiva, con inversa la traslación de vector opuesto. Considerando la identidad como la traslación de vector nulo, las traslaciones forman un subgrupo del grupo afín $\mathsf{GA}(X)$.

(4) El comentario inicial de que las traslaciones hacen la diferencia con la geometría vectorial se expresa con el hecho de que *dos aplicaciones afines* $g, h : X \to X$ *con la misma derivada difieren en una traslación,* es decir, existe una traslación $f : X \to X$ tal que $h = f \circ g$.

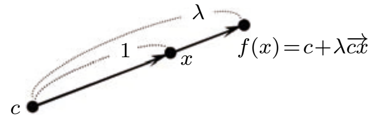
En efecto, fijemos cualquier punto $a \in X$ y sea $w = \overrightarrow{g(a)h(a)}$. Entonces para cada $x = a + u \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(a) + \overrightarrow{h}(u) = h(a) + \overrightarrow{g}(u) = (g(a) + w) + \overrightarrow{g}(u) \\ &= (g(a) + \overrightarrow{g}(u)) + w = g(x) + w = f(g(x)). \end{aligned}$$

En otras palabras, el vector $\overrightarrow{g(x)f(x)}$ es siempre el mismo. ∎

(5.2) Homotecias afines. (1) Fijemos un punto $c \in X$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 1$. Entonces la aplicación

$$f : X \to X : x \mapsto c + \lambda\overrightarrow{cx}$$



es afín; se denomina *homotecia de centro c y razón λ*.

Como en el caso anterior, se trata de calcular la derivada. Notemos además que c es un *punto fijo de f*: $f(c) = c$ (de hecho, el único). Así, si $u = \overrightarrow{ax}$ con $x \in X$, resulta

$$\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{cx}) = \overrightarrow{f(c)f(x)} = \overrightarrow{c(c+\lambda\overrightarrow{cx})} = \lambda\overrightarrow{cx} = \lambda u.$$

Por tanto, esta derivada es la homotecia vectorial de razón λ de $\overrightarrow{X}$, que es una aplicación lineal.

(2) La derivada caracteriza las homotecias afines. Sea $f : X \to X$ es una aplicación afín cuya derivada es la homotecia vectorial de razón λ. Dado $a \in X$ podemos escribir $f(x) = f(a) + \overrightarrow{f}(u) = f(a) + \lambda u$, y si a fiera un punto fijo ya tendríamos una homotecia. Así que busquemos un punto fijo $c = a + u$ de f:

$$a + u = c = f(c) = f(a) + \lambda u = a + \overrightarrow{af(a)} + \lambda u.$$

Se sigue que $u = \overrightarrow{af(a)} + \lambda u$, de donde $u = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{af(a)}$. Con este u (bien definido por ser $\lambda \neq 1$), el punto $c = a + u$ es un punto fijo de f, y hemos terminado.

(3) Es claro que si f es una homotecia de centro c y razón λ, entonces f^{-1} es la homotecia de centro c y de razón $1/\lambda$. Por tanto, las homotecias y sus inversos están en el grupo afín $GA(X)$.

(3) Veamos que resulta al componer dos homotecias f, g de centros y razones arbitarias; sean estas últimas λ y μ. Si denotamos $h = g \circ f$, por la regla de la cadena tenemos

$$\overrightarrow{h} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = (\mu \operatorname{Id}_X) \circ (\lambda \operatorname{Id}_X) = \mu\lambda \operatorname{Id}_X .$$

Así, se trata de una homotecia salvo si $\lambda\mu = 1$, en cuyo caso resulta la identidad, y h es una traslación.

(4) En fin, si componemos una homotecia f de razón λ con una traslación g, obtenemos una homotecia de razón λ. En efecto, basta calcular la derivada de esa composición. Por ejemplo, si $h = g \circ f$, obtenemos

$$\overrightarrow{h} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \operatorname{Id}_X \circ(\lambda \operatorname{Id}_X) = \lambda \operatorname{Id}_X .$$

Así pues, para formar un subgrupo del grupo afín con las homotecias hay que incluir las traslaciones. Este es el subgrupo de homotecias y traslaciones de X. ▮

(5.3) Proyecciones paralelas. (1) Sea $Y \subset X$ un subespacio afín y $W \subset \overrightarrow{X}$ un suplementario vectorial de $\overrightarrow{Y}$ en $\overrightarrow{X}$:

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} + W, \quad \dim(X) = \dim(Y) + \dim(W).$$

Denotamos $n = \dim(X)$. Entonces la aplicación

$$f : X \to X : x \mapsto (x + W) \cap Y$$

está bien definida.

Esto significa que $(x + W) \cap Y$ es un punto. Para verlo usamos la fórmula de Grassman:

$$n \geq \dim(V(x + W, Y)) = \dim(W) + \dim(Y) - \dim(W \cap \overrightarrow{Y}) + k = n + k.$$

Así, $k = 0$, con lo que $x + W$ e Y se cortan, y en un punto, pues

$$\dim((x + W) \cap Y) = \dim(W \cap \overrightarrow{Y}) = 0.$$

(2) Ahora veamos que f es una aplicación afín. Para ello decimos que su derivada es la proyección vectorial $\overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ asociada a la descomposición $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \oplus W$. Para ver esto, observamos que f fija cada punto de Y, y elegimos $a \in Y$. Sean $x \in X$ y $u = \overrightarrow{ax}$. Entonces $u = v + w$ con $v \in \overrightarrow{Y}$, $w \in W$; en particular, $v = \overrightarrow{ay}$ para cierto $y \in Y$. Resulta que

$$x - w = a + \overrightarrow{ax} - w = a + u - w = a + v = a + \overrightarrow{ay} = y,$$

y por tanto $y = x - w \in (x + W) \cap Y$. Concluimos que $f(x) = y$, y

$$\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{f(a)f(x)} = \overrightarrow{ay} = v,$$

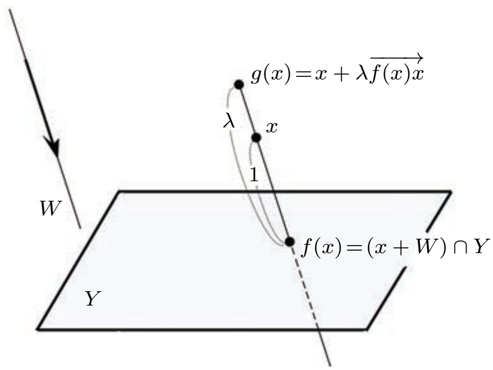
es decir, $\overrightarrow{f}(u)$ es la proyección vectorial de u sobre $\overrightarrow{Y}$ según W.

(3) Es claro que $f(X) \subset Y$, y como f fija todos los puntos de Y, de hecho $f(X) = Y$. La aplicación no es inyectiva: para cada $a \in Y$, $f^{-1}(a) = a + W$, que es un subespacio afín paralelo a W.

La aplicación f que acabamos de definir se llama *proyección de X sobre Y paralela a W*. ∎

(5.4) Dilataciones. Sea $f : X \to X$ la proyección sobre Y paralela a W (lo que significa que $\overrightarrow{Y}$ y W son suplementarios vectoriales), y sea $\lambda \in K$ un escalar $\neq 1$. Entonces la siguiente aplicación es afín:

$$g : X \to X : x \mapsto f(x) + \lambda\overrightarrow{f(x)x}.$$



En efecto, se comprueba sin dificultad que su derivada es

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} + \lambda(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{X}}),$$

que es una aplicación lineal.

(2) La aplicación g es biyectiva. Su inversa se define igual, pero utilizando $1/\lambda$.

(3) Esta aplicación g se denomina *dilatación de base Y, dirección W y razón λ*. Si la razón es $\lambda = -1$, recibe el nombre de *simetría* (respecto de Y con dirección W). Una simetría es su propia inversa. ∎

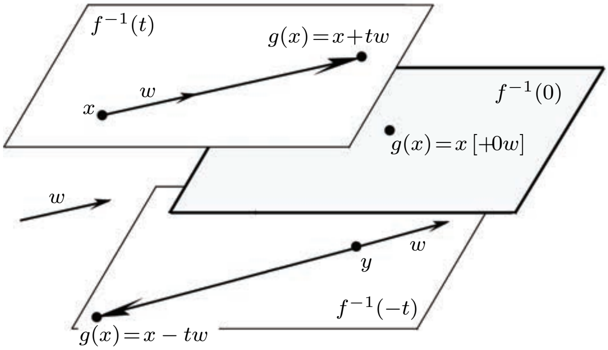
(5.5) Trasvecciones. Sea X un espacio afin sobre $\mathbb{K}$.

(1) Consideramos un vector $w \in \overrightarrow{X}$ y una forma afín no nula $f : X \to \mathbb{A}^1$ tal que $\overrightarrow{f}(w) = 0$. Definimos

$$g : X \to X : x \mapsto x + f(x)w.$$

Esta aplicación es afín, con derivada $\overrightarrow{g}(u) = u + \overrightarrow{f}(u)w$. Se ve que g fija todos los puntos del hiperplano $Y = f^{-1}(0)$, y la condición $\overrightarrow{f}(w) = 0$ significa que w es paralelo a Y.

Esta aplicación es una *trasvección respecto de Y con dirección w.*



(2) Las imágenes inversas $f^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{A}^1$, son los hiperplanos de dirección $\ker(\overrightarrow{f})$:

$$Y_t = a + \ker(\overrightarrow{f}) = f^{-1}(f(a)), \quad f(a) = t \in \mathbb{A}^1.$$

Si $x \in Y_t$ resulta $g(x) = x + tw$. Por tanto, g es una traslación en cada hiperplano Y_t, según un vector paralelo a w, que varía en cada hiperplano. Para $t = 0$ obtenemos simplemente la identidad en $Y = Y_0$, como ya sabíamos.

(3) Supongamos ahora que una aplicación afín $h : X \to X$ fija todos los puntos de un hiperplano afín Y, y que para un punto $a \in X \setminus Y$ el vector $\overrightarrow{ah(a)}$ es paralelo a Y. Entonces h es una trasvección.

En efecto, denotemos $w = \overrightarrow{af(a)}$. Como $\overrightarrow{Y}$ es un hiperplano del espacio vectorial $\overrightarrow{X}$, existe una forma lineal no nula $\varphi : \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$ cuyo núcleo es $\overrightarrow{Y}$. Consideramos un punto $c \in Y$, y definimos una forma afín $f : X \to \mathbb{A}^1$ por

$$f(x) = f(c + u) = \lambda\varphi(u), \quad u = \overrightarrow{cx}, x \in X,$$

donde $\lambda \neq 0$ se elige para que $f(a) = 1$. La derivada de f es $\lambda\varphi$, y se anula en w. Más generalmente, para cualquier $y \in Y$ tenemos $\overrightarrow{cy} \in \overrightarrow{Y} = \ker(\varphi)$, y $f(y) = 0$. Tras esta preparación consideramos la trasvección

$$g(x) = x + f(x)w,$$

y afirmamos que en realidad $g = h$. Por una parte,

$$g(a) = a + f(a)w = a + w = a + \overrightarrow{ah(a)} = h(a), \quad g(c) = h(c) = c.$$

y por tanto las derivadas de g y h coinciden en $\overrightarrow{ac} \notin \overrightarrow{Y}$. Pero ya sabemos que coindicen en el hiperplano $\overrightarrow{Y}$ (pues fijan todos los puntos de Y), luego las dos derivadas coinciden en todo el espacio $\overrightarrow{X}$, y concluimos

$$g(x) = g(c) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{cx}) = h(c) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{cx}) = h(x).$$

para todo $x \in X$. ∎

Sugerimos al lector que determine los subespacios invariantes de las aplicaciones afines que hemos definido en esta lección.

Tema 6. Referencias y coordenadas

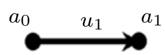
Sea X un espacio afín de dimension n. Diremos que los puntos $a_0, a_1, \dots, a_d$ de X son independientes si generan un subespacio afín de dimensión d. Esto significa que d es la dimensión de su espacio de direcciones

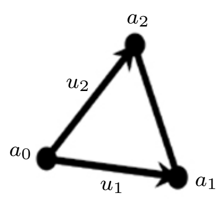
$$\overrightarrow{V(a_0, a_1, \dots, a_d)} = L[u_1, \dots, u_d], \quad u_j = \overrightarrow{a_0 a_j}, 1 \leq i \leq d.$$

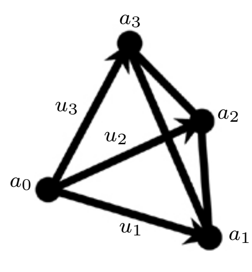
Esto equivale a que los vectores $u_1, \dots, u_d$ sean independientes. Se explica por qué se numeran los puntos a partir de cero, y se advierte que el orden de los puntos es irrelevante. También vemos que el número máximo de puntos independientes es $n+1$, en cuyo caso generan todo el espacio: $V(a_0, a_1, \dots, a_n) = X$. Por otra parte, si los puntos $a_0, a_1, \dots, a_r$ generan X, entonces los vectores $u_i = \overrightarrow{a_0 a_j}$, $1 \leq j \leq r$ generan $\overrightarrow{X}$. También se ve que el orden de los puntos es irrelevante, y que el número mínimo de generadores es $n+1$.

Definición 6.1. Una *referencia afín de X* es una colección ordenada de $n+1$ puntos $\mathcal{R} = \{a_0, \dots, a_n\}$ que generan X. El punto a_0 se denomina *origen de la referencia*.

Una referencia afín $\mathcal{R}$ puede describirse también del modo siguiente. Los n vectores $u_j = \overrightarrow{a_0 a_j}$, $1 \leq j \leq n$, generan $\overrightarrow{X}$, son de hecho una base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{X}$. Así, como $a_j = a_0 + u_j$, $1 \leq j \leq n$, la referencia $\mathcal{R}$ está completamente determinada por su origen a_0 y la base $\mathcal{B}$. A veces esta representación de $\mathcal{R}$ se *cartesiana*. Las figuras que siguen ilustran las referencias de una recta afín, de un plano afín y de un espacio afín de dimensión 3.



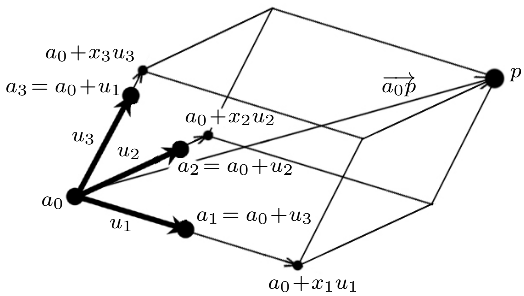




(6.2) Coordenadas en el espacio afín. Sea $\mathcal{R}$ una referencia de X, con origen a_0, base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, y $a_j = a_0 + u_j$, $1 \leq j \leq n$. Todo punto $p \in X$ se representa de una única manera como sigue:

$$p = a_0 + \overrightarrow{a_0 x} = a_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n,$$

y los coeficientes $x = (x_1, \dots, x_n)$ se denominan coordenadas de p respecto de la referencia $\mathcal{R}$. No son más que las coordenadas del vector $u = \overrightarrow{a_0p} \in \overrightarrow{X}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{X}$.



La propiedad importante de las coordenadas es que reducen la acción vectorial de X a la estándar de $\mathbb{A}^n$. Esto se plasma en el hecho siguiente:

Si p y q son dos puntos de X con coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ respecto de $\mathcal{R}$ respectivamente, entonces las coordenadas de $\overrightarrow{pq}$ respecto de $\mathcal{B}$ son $y - x = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

En efecto, tenemos

$$\overrightarrow{a_0p} = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n, \quad \overrightarrow{a_0q} = y_1u_1 + \cdots + y_nu_n,$$

con lo que

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{a_0y} - \overrightarrow{a_0x} = (y_1 - x_1)u_1 + \cdots + (y_n - x_n)u_n,$$

como decíamos.

A esto nos referimos en su momento al denominar al espacio afín estándar $\mathbb{A}^n$ modelo universal. ∎

(6.3) Cambio de coordenadas. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ dos referencias de un espacio afín X. Denotamos a_0 y b_0 sus orígenes y $\mathcal{B} = \{u_j\}$, $\mathcal{B}' = \{v_j\}$ las bases de $\overrightarrow{X}$ correspondientes. Un punto $p \in X$ tendrá coordenadas x respecto de $\mathcal{R}$ e y respecto de $\mathcal{R}'$. Queremos encontrar unas ecuaciones de *cambio de coordenadas,* que describan y en función de x.

Sean $c = (c_1, \dots, c_n)$ las coordenadas de a_0 respecto de $\mathcal{R}$. Por las definiciones tenemos

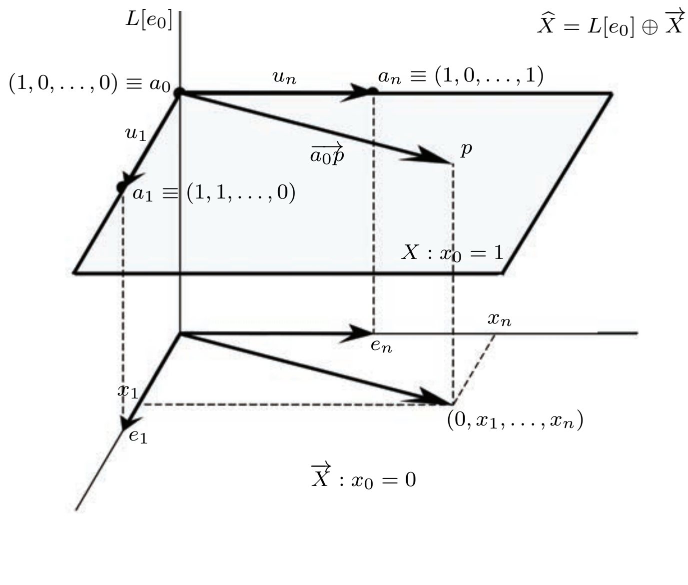
$$\overrightarrow{a_0p} = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n, \quad \overrightarrow{b_0p} = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n, \quad \overrightarrow{b_0a_0} = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n.$$

Ahora sea $C = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, esto es, la matriz que transforma coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ en coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$ (cuyas columnas son las coordenadas de los vectores u_j respecto de la base $\mathcal{B}'$). Por tanto, las coordenadas de $\overrightarrow{a_0p}$ respecto de $\mathcal{B}'$ son Mx^t. Pero por otra parte, sabemos que esas coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$ son $y - c$, luego concluimos $(y-c)^t = Mx^t$, es decir $y^t = c^t + Mx^t$. Ya tenemos las ecuaciones buscadas, que como es habitual en el esapcio afín, tienen términos independientes (las coordenadas del origen). Para escribir de manera más compacta se recurre al siguiente artificio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}.$$

Así la primera columna sigue la regla de formación de las columnas de C: consiste en las coordenadas de a_0 respecto de $\mathcal{R}'$. ∎

(6.4) Inmersión de un espacio afín como hiperplano. (1) Las coordenadas son el método más sencillo de identificar un espacio afín X de dimensión n con el espacio afín estándar $\mathbb{A}^n$. Sin embargo esto no es lo realmente interesante. Si se observan cómo se expresan los cambios de coordenadas, se concluye que las coordenadas permiten identificar X con el hiperplano $x_0 = 1$ de $\mathbb{A}^{n+1}$ denotando $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ las coordenadas de este espacio afín estándar. Expresaremos esta construcción con la notación $\widehat{X} = \mathbb{A}^{n+1}$. Como $X : x_0 = 1$, X no pasa por $(0, 0, \dots, 0)$, y su dirección $\overrightarrow{X}$ es el hiperplano vectorial $x_0 = 0$.



En otras palabras, una vez elegidas unas coordenadas x, los puntos de X se representan mediante $(1, x)$, y los vectores de $\overrightarrow{X}$ mediante $(0, x)$. Estos últimos generan las direcciones de $\overrightarrow{X}$, es decir, representan salvo proporcionalidad los puntos de infinito de X.

Estas coordenadas de puntos y vectores, que ayudan a diferenciar los unos de los otros, se ilustran en la figura anterior.

(2) En $\widehat{X}$ se tratan conjuntamente las nociones afines y vectoriales. Así, un punto es también un vector, aunque deba distinguirse en cada caso de lo que se trate. En cuanto a subespacios, los subespacios vectoriales son simplemente los subespacios afines que pasan por el punto $(0, 0, \ldots, 0)$.

(3) Las referencias afines de X son bases de $\widehat{X}$ cuyo primer vector/punto está en X, es decir tiene coordenada $x_0 = 1$, y los restantes están en $\overrightarrow{X}$, es decir, tienen coordenada $x_0 = 0$. Vemos también que las ecuaciones de cambio de referencia son simplemente las ecuaciones de cambio de base. ∎

Tema 7. Ecuaciones de subespacios afines

Una vez introducidas las referencias y las coordenadas respecto de ellas, todas las nociones propias del espacio afín se expresan mediante ecuaciones lineales *no necesariamente homogéneas*. Veámos cómo se hace para los subespacios afines.

Sea X un espacio afín.

(7.1) Ecuaciones de un subespacio afín. Sea $\mathcal{R}$ una referencia de X, con origen a_0, base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, y $a_i = a_0 + u_i$, $1 \leq i \leq n$. Sea Y un subespacio afín de X,

(1) Dado cualquier punto $p \in Y$ podemos escribir $Y = p + \overrightarrow{Y}$, y la dirección $\overrightarrow{Y}$ es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{X}$. Por tanto $\overrightarrow{Y}$ se puede describir mediante unas ecuaciones implícitas homogéneas $Az^t = 0$, en coordenadas z respecto de la base $\mathcal{B}$. Ahora bien, un punto $q \in Y$ si y sólo si el vector $u = \overrightarrow{pq}$ está en $\overrightarrow{Y}$. Si denotamos $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $c = (c_1, \dots, c_n)$ las coordenadas de q y p respecto de $\mathcal{R}$, las coordenadas z de u son $x - c$, y por tanto $u \in \overrightarrow{Y}$ si y sólo si $A(x-c)^t = 0$. Estas ecuaciones se pueden escribir $Ax^t = b^t$, donde $b^t = Ac^t$. De este modo, Y está descrito por unas ecuaciones implícitas *no necesariamente homogéneas*. Además, vemos que los términos independientes $b^t = Ac^t$ de esas ecuaciones se obtienen evaluándolas en las coordenadas c de un punto cualquiera de Y. También se desprende de lo anterior que unas ecuaciones de la dirección $\overrightarrow{Y}$ se obtienen prescindiendo de los términos independientes. Además,

$$\dim(Y) = \dim(\overrightarrow{Y}) = n - \mathrm{rg}(A).$$

(2) Recíprocamente, unas ecuaciones $Ax^t = b^t$ definen un subespacio afín con la sola restricción de ser compatibles. Si tenemos tales ecuaciones implícitas $Ax^t = b^t$, resolviéndolas tenemos unas *paramétricas* $x^t = M\lambda^t + c^t$. Estas paramétricas tienen términos independientes, y prescindiendo de ellos obtenemos unas paramétricas $x^t = M\lambda^t$ de $\overrightarrow{Y}$ (ahora ya no distinguimos mediante z las coordenadas en $\overrightarrow{X}$). Obsérvese que para $\lambda = 0$ obtenemos el punto de Y de coordenadas c^t.

(3) En fin, podemos escribir las ecuaciones de manera matricial más compacta

como en el caso de los cambios de coordenadas: las implícitas en la forma

$$Ax^t = b^t \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -b^t & A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix} = 0,$$

y las paramétricas así:

$$x^t = M\lambda^t + c^t \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & M \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^t \end{pmatrix}.$$

(4) Sumerjamos X en $\widehat{X} = \mathbb{A}^{n+1}$ como hiperplano, según hemos explicado al final de la lección anterior. Según hemos escrito antes las ecuaciones de los subespacios afines de X, resulta que no son más que las intersecciones de X con subespacios vectoriales de $\widehat{X}$. ▮

(7.2) Posiciones relativas de subespacios afines con ecuaciones. Sea X un espacio afín en el que tenemos fijada una referencia $\mathcal{R}$ y respecto de ella coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$. Sean Y, Z dos subespacios afines de X, descritos mediante ecuaciones implícitas $Ax^t = b^t$ y $Cx^t = d^t$ respectivamente. Los sistemas son compatibles y sus rangos respectivos r y s son las codimensiones de Y y Z; supongamos $r \geq s$. Reuniendo los dos sistemas obtenemos otro $(A|C)x^t = (b^t|c^t)$ que define la intersección $Y \cap Z$. Entonces:

(1) Los subespacios no se cortan cuando $\mathrm{rg}(A|C) < \mathrm{rg}(A|C|b^t|d^t)$.

(2) Los subespacios son paralelos cuando no se cortan y $\mathrm{rg}(A|C) = r$.

(3) Los subespacios se cruzan cuando no se cortan y $\mathrm{rg}(A|C) = n$.

En realidad esto es el teorema de Rouché-Frobenius y del hecho de que el sistema homogéneo de matriz $(A|C)$ define la intersección $\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}$ de las direcciones de los subespacios. ▮

(7.3) Coordenadas en subespacios afines. Sea $Y \subset X$ un subespacio afín de un espacio afín X. Para introducir coordenadas en Y basta elegir una referencia afín de Y, pero a veces es mejor hacer lo siguiente, que proporciona unas coordenadas de Y *adaptadas a* X.

(1) Sean $(x_1, \dots, x_n)$ coordenadas en X respecto de cierta referencia afín $\mathcal{R}$ de X que no es necesario precisar. Sean $Ax^t = b^t$ unas ecuaciones implícitas de Y en esas coordenadas. Si denotamos $d = \dim(Y)$, entonces el rango de ese sistema

(compatible) es $r = n - d$, y podemos despejar r de las incógnitas x_i de ese sistema en función de las $d = n - r$ restantes. Para facilitar la escritura, podemos suponer que despejamos las r últimas $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_n)$ en función de las d primeras $x' = (x_1, \dots, x_d)$:

$$\begin{cases} x_{d+1} = c_{d+1} + a_{d+1\,1}x_1 + \cdots + a_{d+1\,n}x_d, \\ \quad\cdots \\ \quad x_n = c_n + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n\,d}x_d, \end{cases}$$

que abreviamos $x'' = f(x')$. Esto nos dice como obtener todas las coordenadas (x', x'') de un punto de Y a partir de las d primeras x'. Podemos por tanto considerar éstas últimas como coordenadas en Y.

(2) Por supuesto, serán coordenadas respecto de cierta referencia afín $\mathcal{R}_Y$ de Y. Si se quieren especificar los puntos $a_0, a_1 \dots, a_d$ de esa referencia basta tener en cuenta que tendrán las coordenadas $x' = (x_1, \dots, x_d)$ siguientes

$$0 = (0, \dots, 0), e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1),$$

luego sus coordenadas respecto de la referencia inicial $\mathcal{R}$ de X serán:

$$(0, f(0)), (e_1, f(e_1)), \dots, (e_d, f(e_d)).$$

La conclusión de todo esto es que en Y basta quedarse con el número adecuado de las coordenadas en X; en cualquier momento podemos obtener las restantes. Es importante observar que no necesitamos especificar las referencias con que estamos operando. ▮

Tema 8. Ecuaciones de aplicaciones afines

En esta lección describimos las ecuaciones de las aplicaciones afines, y cómo se utilizan para estudiarlas.

(8.1) Ecuaciones de una aplicación afín. Sea $f : X \to Y$ una aplicación afín.

(1) Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ referencias de X y de Y, con orígenes a_0, b_0, bases $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$, y $a_i = a_0 + u_i$, $b_i = b_0 + v_i$, $1 \leq i \leq n$. Denotamos x las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ e y las coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$.

Sea M la matriz de la derivada $\overrightarrow{f}$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$: si x son las coordenadas de u respecto de $\mathcal{B}$, entonces Mx^t son las coordenadas de $\overrightarrow{f}(u)$ respecto de $\mathcal{B}'$. (Recordemos que las columnas de M son las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{f}(u_j)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.)

Sean ahora $p \in X$ y $q = f(p) \in Y$. Las coordenadas x de p respecto de $\mathcal{R}$ son las coordenadas de $u = \overrightarrow{a_0p}$ respecto de $\mathcal{B}$, luego Mx^t son las coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$ de $\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f(a_0)q}$. Por otra parte, las coordenadas de $\overrightarrow{f(a_0)q}$ respecto de $\mathcal{B}'$ son $y - m$, donde y, m so las coordenadas de q, $f(a_0)$ respecto de $\mathcal{R}'$. En conclusión, $y^t - m^t = Mx^t$, y tenemos las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$:

$$y^t = m^t + Mx^t \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m^t & M \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}.$$

Como en el cambio de base, la primera columna de la matriz por cajas se describe de manera similar a las columnas de M: consiste en las coordenadas de $f(a_0)$ respecto de $\mathcal{R}'$. Es inmediato comprobar que cualesquiera ecuaciones como las anteriores definen una aplicación afín f.

(2) Consideremos otras referencias en X e Y, y sean

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c'^t & C' \end{array}\right)$$

las matrices de cambio de coordenadas en X y en Y. Entonces la matriz de f respecto de las nuevas referencias se obtiene de la manera previsible:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m'^t & M' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c'^t & C' \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m^t & M \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right).$$

El lector comprobará esto fácilmente.

(3) En fin, es fácil expresar con precisión y demostrar que la matriz de la composición de dos aplicaciones afines se obtiene multiplicando las matrices de las dos aplicaciones afines en cuestión.

(4) Volviendo el apartado (1) vemos que f está determinada por los $n+1$ datos $f(a_0)$, $\overrightarrow{f}(u_1),\dots,\overrightarrow{f}(u_n)$ o equivalentemente por $f(a_0), f(a_1),\dots,f(a_n)$. En efecto, estos datos proporcionan las columnas de la matriz de f. También podemos decir: dados tales datos, existe una única f a la que corresponden.

(5) Si sumergimos X en $\widehat{X}=\mathbb{A}^{n+1}$ e Y en $\widehat{Y}=\mathbb{A}^{m+1}$ como hiperplanos, las aplicaciones afines $f:X\to Y$ son restricciones de aplicaciones lineales $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$, tales que $\widehat{f}(X)\subset Y$. Además, $\widehat{f}(\overrightarrow{X})\subset\overrightarrow{Y}$ y la restricción de $\widehat{f}$ a $\overrightarrow{X}$ es la derivada $\overrightarrow{f}$.

En efecto, basta observar que la matriz de $\widehat{f}$ es la de f respecto de las referencias elegidas en X e Y para las inmersiones ▮

(8.2) Ecuaciones de los subespacios invariantes de una aplicación afín. Sea $f:X\to X$ una aplicación afín y $\overrightarrow{f}:\overrightarrow{X}\to\overrightarrow{X}$ su derivada. Vamos a expresar con ecuaciones el cálculo de subespacios afines invariantes de f que se describió en la lección 6. Para ello consideramos las ecuaciones de f respecto de una referencia $\mathcal{R}$ dada,

$$f: y^t = m^t + Mx^t.$$

(1) Sea W una dirección invariante de f, es decir, un subespacio vectorial invariante de $\overrightarrow{f}$. Tendrá unas ecuaciones implícitas $Ax^t=0$ (en coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ asociada a $\mathcal{R}$). Veamos qué ecuaciones tendrá el conjunto $Z=\{x\in X:\overrightarrow{xf(x)}\in W\}$ unión de todos los subespacios afines invariantes de f con dirección W. Como las coordenadas de $\overrightarrow{xf(x)}$ respecto de $\mathcal{B}$ son y^t-x^t, las ecuaciones de Z son

$$0=A(m^t+Mx^t-x^t)=Am^t+A(M-I)x^t \rightsquigarrow A(M-I)x^t=-Am^t.$$

Este es un sistema lineal de ecuaciones (no homogéneo en general), que puede ser: (i) incompatible, y entonces no hay subespacios invariantes con dirección W, o (ii) compatible, y entonces define el subespacio afín Z.

(2) La codimensión de Z, si no es vacío, es el rango de la matriz $A(M-I)$. Por ejemplo, si $M-I$ es regular (es decir, si 1 no es autovalor de M), el rango

de $A(M-I)$ coincide con el de A, y Z es el único subespacio afín invariante con dirección W.

(3) Los puntos fijos corresponden a la matriz $A = I$, es decir, al sistema $m^t + Mx^t = x^t$.

(4) Para las rectas invariantes puede preferirse usar directamente los autovectores. Si w es un autovector de $\overrightarrow{f}$ asociado al autovalor λ, la unión de las rectas afines invariantes paralelas a w es

$$Z = \{x \in X : \overrightarrow{xf(x)}) \in L[w]\}.$$

Si denotamos c^t la columna de coordenadas de w respecto de $\mathcal{B}$, unas ecuaciones de Z se obtienen de

$$1 = \operatorname{rg}(y^t - x^t|c^t) = \operatorname{rg}(m^t + (M-I)x^t|c^t).$$

Al anular los menores de orden 2 de la matriz $(m^t + (M-I)x^t|c^t)$ se obtiene un sistema lineal que proporciona las rectas afines invariantes buscadas.

(5) Volviendo a (2), si W es un hiperplano, entonces A es una fila no nula, y $A(M-I)$ es una fila. Si esta fila es nula, es decir, si las coordenadas de la fila corrsponden a un autovector de M asociado al autovalor 1, entonces hay dos posibilidades: (i) que Am^t sea nulo también, en cuyo caso $Z = X$ y todos los hiperplanos afines paralelos a W son invariantes, o (ii) que $Am^t \neq 0$, en cuyo caso $Z = \varnothing$ y no hay hiperplanos afines invariantes paralelos a W. En fin, si la fila $A(M-I)$ no es nula, Z es un hiperplano afín, y (iii) Z es el único hiperplano afín invariante con dirección W.

En particular vemos que si existen hiperplanos afines invariantes con una dirección dada, hay uno nada más, o lo son todos los que tienen esa dirección. ∎

Tema 9. Clasificación de aplicaciones afines

Consideramos aquí el problema de clasificación de aplicaciones afines de la forma más directa y explícita: se trata de simplificar lo más posible las ecuaciones de una aplicación afín mediante la elección adecuada de coordenadas. Nos interesan las aplicaciones afines de un espacio afín en sí mismo, así que fijemos un espacio afín X, y a efectos de coordenadas, lo consideramos sumergido en el espacio estándar $\widehat{X} = \mathbb{A}^{n+1}$. Entonces una aplicación afín $f : X \to X$ se escribe mediante unas ecuaciones

$$y^t = m^t + Mx^t \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m^t & M \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}.$$

y si cambiamos de referencia, tendremos

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m'^t & M' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m^t & M \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right).$$

De esta manera, tenemos un problema de semejanza de matrices, las de la aplicación lineal $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ respecto distintas bases. Pero la matriz regular que expresa la semejanza es especial: su primera fila es $(1, 0, \ldots, 0)$. Esto significa que el primer vector de la nueva base está en $X : x_0 = 1$, y los demás en $\overrightarrow{X} : x_0 = 0$. Como hemos dicho antes, estas bases son precisamente las que corresponden a sistemas de referencia de X.

Obsérvese además que el hiperplano vectorial $\overrightarrow{X}$ es invariante, y que $\widehat{f}$ induce en él por restricción la derivada $\overrightarrow{f}$. Para resolver nuestro problema de semejanza tenemos que utilizar bases de Jordan de $\widehat{f}$ y de $\overrightarrow{f}$, es decir, debemos buscar conjuntamente las formas de Jordan de las dos matrices

$$\widehat{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m^t & M \end{array}\right) \quad \text{y} \quad M.$$

(9.1) Autovalores. Dada la forma de las matrices $\widehat{M}$ y M, es claro que sus polinomios característicos $\widehat{P}(T)$ y $P(T)$ difieren solo en una raíz:

$$\widehat{P}(T) = (1 - T)P(T).$$

Por tanto, o bien 1 no es autovalor de $\overrightarrow{f}$, o bien lo es con multiplicidad una unidad menor que su multiplicidad e como autovalor de $\widehat{f}$. En todo caso, el teorema de descomposición permite escribir

$$\widehat{X} = N(1) \oplus E, \quad \dim(N(1)) = e.$$

donde E es la suma directa de los subespacios invariantes maximales de los autovalores $\lambda \neq 1$. Como $\overrightarrow{X}$ es invariante por $\widehat{f}$, el mismo teorema de descomposición dice que es suma directa de subespacios invariantes de $N(1)$ y E, digamos $\overrightarrow{X} = V \oplus W$, $V \subset N(1)$, $W \subset E$. Pero $\overrightarrow{X}$ es un hiperplano, y V no puede coincidir con $N(1)$ por ser menor que $e = \dim(N(1))$ la multiplicidad de 1 en $P(T)$. Concluimos que $\overrightarrow{X} = V \oplus E$, con $\dim(V) = e - 1$. A la vista de esto, buscaremos una base de Jordan $\widehat{X}$ que consista:

(1) De una base de Jordan para el autovalor $\lambda = 1$ cuyo primer vector tenga coordenada $x_0 = 1$ y los restantes coordenada $x_0 = 0$.

(2) De una base de Jordan cualquiera para los restantes autovalores, pues sus subespacios invariantes maximales están todos contenidos en $\overrightarrow{X} : x_0 = 0$. ∎

(9.2) El autovalor $\lambda = 1$. Debemos utilizar ahora la cadena de subespacios invariantes de $\widehat{f}$ asociada a $\lambda = 1$,

$$\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_{\nu-1} \subsetneq N_\nu = N(1)$$

definida por

$$N_k = \ker(\widehat{f} - \mathrm{Id}_{\widehat{X}})^k, \quad k = 0, \ldots, \nu.$$

Esta cadena proporciona por restricción la cadena de subespacios invariantes de $\overrightarrow{f}$ asociada a 1:

$$\{0\} = N'_0 \subsetneq N'_1 \subset \cdots \subset N'_\nu = N'(1), \qquad N'_\ell = N_\ell \cap V$$

(obsérvese que ahora las desigualdades no son estrictas necesariamente). Como V tiene codimensión 1 en $N(1)$, en algún momento esta cadena deja de estar contenida en V, digamos

$$N_k \subset V, \quad N_{k+1} \not\subset V.$$

Entonces,

$$\begin{cases} N_\ell \cap V = N_\ell & \text{para } \ell = 1, \ldots, k, \\ \dim(N_\ell \cap V) = \dim(N_\ell) - 1 & \text{para } \ell = k+1, \ldots, \nu. \end{cases}$$

Esto significa que la sucesión de codimensiones de los N_ℓ y los N'_ℓ es la misma excepto para $\ell = k$, índice para el que es una unidad mayor la primera.

Para cada $u \in N(1)$, denotaremos $u^\ell = (\widehat{f} - \mathrm{Id}_{\widehat{X}})^\ell(u)$.

(1) Según lo anterior tenemos la siguiente tabla de Jordan:

$$
\begin{array}{l|ccc|ccc|c|ccc||c||c|ccc|}
N_\nu & u_{11} & \dots & u_{1s_1} & & & & & & & & & & & & \\
N_{\nu-1} & u^1_{11} & \dots & u^1_{1s_1} & u_{21} & \dots & u_{2s_2} & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & & & & \\
N_{k+1} & u^{p-1}_{11} & \dots & u^{p-1}_{1s_1} & u^{p-2}_{21} & \dots & u^{p-2}_{2s_2} & \dots & u_{p1} & \dots & u_{ps_p} & u_0 & & & & \\
N_k & u^{p}_{11} & \dots & u^{p}_{1s_1} & u^{p-1}_{21} & \dots & u^{p-1}_{2s_2} & \dots & u^1_{p1} & \dots & u^1_{ps_p} & u^1_0 & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\
N_1 & u^{\nu-1}_{11} & \dots & u^{\nu-1}_{1s_1} & u^{\nu-2}_{21} & \dots & u^{\nu-2}_{2s_2} & \dots & u^k_{p1} & \dots & u^k_{ps_p} & u^k_0 & \dots & u_{\nu 1} & \dots & u_{\nu s_\nu}
\end{array}
$$

Cada subespacio N_ℓ de la izquierda está generado por los vectores de su fila y de las que hay por debajo; si suprimimos u_0, esta regla vale para los N'_ℓ. Sin ninguna demostración, describimos la construcción de esta tabla. Empezamos con los N'_ℓ:

(i) $u_{11}, \dots, u_{1s_1}$ son una base de un suplementario de $N'_{\nu-1}$ en N'_ν.

(ii) $u^1_{11}, \dots, u^1_{1s_1}; u_{21}, \dots, u_{2s_2}$ son una base de un suplementario de $N'_{\nu-2}$ en $N'_{\nu-1}$.

(iii) $u^2_{11}, \dots, u^2_{1s_1}; u^1_{21}, \dots, u^1_{2s_2}; u_{31}, \dots, u_{3s_3}$ son una base de un suplementario de $N'_{\nu-3}$ en $N'_{\nu-2}$.

Y así sucesivamente vamos descendiendo en la cadena de los N'_ℓ. Al llegar a N'_{k+1} tenemos una base

$$u^{p-1}_{11}, \dots, u^{p-1}_{1s_1}; u^{p-2}_{21}, \dots, u^{p-2}_{2s_2}; \dots; u_{p1}, \dots, u_{ps_p}$$

de un suplementario de N'_k en N'_{k+1}. Ahora bien, la codimensión de N_k en N_{k+1} es una unidad mayor que la de N'_k en N'_{k+1}, y podemos añadir a los vectores anteriores otro

$$u_0 \in N_{k+1} \setminus N_k$$

hasta obtener una base de un suplementario de N_k en N_{k+1}.

Desde este paso, los subespacios N'_ℓ y N_ℓ coinciden, y seguimos el proceso con los N_ℓ hasta obtener en el último paso una base de N_1.

(2) La siguiente observación es esencial. Como V contiene a N_k y no a N_{k+1}, necesariamente $u_0 \notin V$, es decir $u_0 \notin \overrightarrow{X}$. Esto significa que la coordenada x_0 de u_0 es no nula, y dividiendo por ella podemos suponer $u_0 \in X : x_0 = 1$.

(3) Volviendo a la tabla de vectores, cada columna suya genera un subespacio invariante de $\widehat{f}$ del que la propia columna es base. La matriz de $\widehat{f}$ respecto de esa base es una *matriz elemental de Jordan*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda = 1.$$

A la columna encabezada por u_0 corresponde una tal caja de orden k.

(4) Una vez hecho lo anterior la base de Jordan consiste en los vectores de la tabla ordenados por columnas. Respecto de esa base la matriz de $\widehat{f}$ es diagonal por cajas elementales de Jordan de tamaños decrecientes. Pero en nuestra situación, tenemos una columna distinguida, la que comienza con el vector u_0. Pues bien, son los vectores de esta columna los que enumeramos primero en la base $\widehat{\mathcal{B}}_1$ que va a convenir. El resto de los vectores se van enumerando por columnas sin ningún cambio más. Esta reordenación de los vectores de $\widehat{\mathcal{B}}_1$ tiene el efecto de reordenar las cajas elementales de Jordan del autovalor 1. Ya no están por orden decreciente de tamaño: hemos colocado la primera una de tamaño k correspondiente a la columna que encabeza u_0. esta matriz se denota $\widehat{J}$. ∎

(9.3) Ecuaciones finales. En el párrafo anterior hemos explicado cómo se elige la base $\widehat{\mathcal{B}}_1$ del subespacio invariante maximal $N(1)$ asociado al autovalor 1. Para los otros autovalores no hay que hacer nada especial, pues todo tiene lugar en $\overrightarrow{X}$, así que añadimos a $\widehat{\mathcal{B}}_1$ bases de Jordan de esos otros autovalores hasta formar una base $\widehat{\mathcal{B}}$ de $\widehat{X}$.

Ahora observamos que: (i) el primer vector de $\widehat{\mathcal{B}}$ es u_0, que tiene primera coordenada $x_0 = 1$, es decir, está en X, y (ii) los demás vectores están en $\overrightarrow{X}$, con lo que forman una base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{X}$. Por tanto, tenemos una referencia afín $\mathcal{R}$ de X con origen $a_0 = u_0$ y base asociada $\mathcal{B}$. La matriz de f respecto de $\mathcal{R}$ es exactamente la matriz $\widehat{J}$ de $\widehat{f}$ respecto de $\widehat{\mathcal{B}}$.

Aquí terminamos. La matriz $\widehat{J}$ de f respecto de $\mathcal{R}$ es la matriz de Jordan de

$\widehat{M}$, diagonal por cajas elementales de Jordan, empezando con las del autovalor 1, y una de éstas recolocada la primera de todas, aunque no sea del tamaño máximo. Ésta es la *matriz de Jordan de la aplicación afín f*. ∎

Ejemplo 9.4. Apliquemos lo anterior a la recta afín $X = \mathbb{A}^1$. Hay sólo tres posibilidades:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right).$$

La afinidad $f : X \to X$ que corresponde a cada una de estas matrices es: (i) la identidad $x' = x$, (ii) una traslación $x' = 1 + x$, y (iii) una homotecia $x' = \lambda x$, de razón $\lambda(\neq 1)$ (si $\lambda = 0$ la afinidad es constante).

Estos son pues todos los tipos posibles de afinidades de una recta afín. ∎

Tema 10. Aplicaciones afines del plano

Vamos a aplicar lo anterior para describir todos las aplicaciones afines $f : X \to X$ de un plano afín X, digamos del plano afín estándar $X = \mathbb{A}^2$. Hay que considerar todas las posibles formas de Jordan $\widehat{J}$ que puede tener f:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right),$$
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{array}\right).$$

(λ, μ son distintos de 1 y entre sí, la última matriz es específica de caso real $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ con $\beta > 0$). No incluimos la matriz identidad, que corresponde a la identidad Id_X.

Para cada una de esas matrices se calculan los puntos fijos y las rectas invariantes.

Ejemplos 10.1. (1) La afinidad $f : X \to X$ correspondiente a la primera matriz de la lista es una traslación, pues su derivada $\overrightarrow{f}$ es la identidad. (La matriz de $\overrightarrow{f}$ es la caja J de orden 2×2 de la matriz $\widehat{J}$; J es la identidad en este caso.) Las ecuaciones de f en estas coordenadas son $x' = 1 + x$, $y' = y$, y el vector de traslación es

$$w = \overrightarrow{xf(x)} = (x' - x, y' - y) = (1, 0).$$

No hay puntos fijos y son invariantes todas las rectas paralelas a w, que tienen ecuaciones $y = c$.

(2) Analicemos la sexta matriz de la lista anterior. La aplicación $f : X \to X$ correspondiente tiene ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = 1 + x, \\ y' = \qquad \lambda y. \end{cases}$$

La primera ecuación muestra que no hay puntos fijos: $x \neq 1 + x$. En cuanto a las rectas invariantes, procedemos como sigue. Si $p = (x, y)$ es un punto de una recta invariante, la recta tiene la dirección del vector $\overrightarrow{pf(p)}$, que por ello debe ser un autovector de la derivada $\overrightarrow{f}$. La matriz de esa derivada es la caja J de orden 2×2 de la matriz $\widehat{J}$, y vemos que $\overrightarrow{f}$ tiene dos autovalores 1 y λ, con autovectores asociados $u=(1,0)$ y $v=(0,1)$ respectivamente. Ahora bien

$$\overrightarrow{pf(p)} = (x'-x, y'-x) = (1, (\lambda-1)y)$$

nunca es proporcional a $v=(0,1)$, y lo es a $u=(1,0)$ para $y=0$. En consecuencia las rectas invariantes son $(x,0)+L[(1,0)]$, $x\in\mathbb{K}$. Vemos que en realidad sólo hay una, de ecuación $y=0$ en estas coordenadas.

(3) Ahora nos fijamos en la cuarta matriz de la lista, es decir, estudiamos los invariantes de la afinidad de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

En este caso sí hay puntos fijos: verifican $x=x$, $y=\lambda y$, luego son los puntos de la recta afín $y=0$. Para encontrar las rectas invariantes, tenemos de nuevo los autovalores 1 y λ con autovectores $u=(1,0)$ y $v=(0,1)$, pero ahora

$$\overrightarrow{pf(p)} = (x'-x, y'-x) = (0, (\lambda-1)y)$$

es siempre proporcional a $v=(0,1)$. En consecuencia, las rectas invariantes son $p+L[(0,1)]$, $p\in X$, es decir, todas las rectas paralelas a $x=0$, de ecuaciones $x=a$. Si $\lambda=0$, tenemos simplemente $f(x,y)=(x,0)$, que es la proyección sobre $y=0$ paralela a $(1,0)$. Si $\lambda\neq 0$, tenemos la dilatación de razón λ correspondiente a esa proyección:

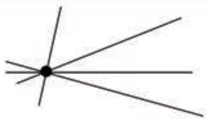
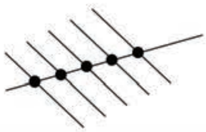
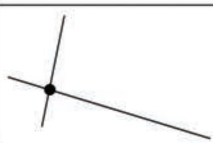
$$f(x,y) = (x,0) + \lambda\big((x,y)-(x,0)\big).$$

(4) Ahora escribimos lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right),$$

que nos dice que una aplicación afín del tipo (2) con $\lambda\neq 0$ es composición de una dilatación y una traslación (si $\lambda=0$, se componen una proyección y una traslación). ∎

Los ejemplos anteriores muestran cómo se estudian las matrices $\widehat{J}$. Haciéndolo con las nueve de la lista resulta la tabla siguiente, en la que incluimos unos dibujos que representan los puntos fijos y las rectas invariantes (a veces nada de nada).

$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$		Tipo: *traslación.* Ningún punto fijo; rectas invariantes las paralelas a la dirección de traslación. Todos los puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$		Tipo: *trasvección.* Una recta de puntos fijos; rectas invariantes la de puntos fijos y todas sus paralelas. Un único punto de infinito fijo (la dirección de trasvección).
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$		Tipo: *trasvección seguida de traslación no en la dirección de trasvección.* Ningún punto fijo; ninguna recta invariante. Un único punto de infinito fijo (la dirección de trasvección).
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$		Tipo: *homotecia (de razón λ).* Un único punto fijo (el centro de la homotecia); invariantes todas las rectas que pasan por el punto fijo. Todos los puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$		Tipo: *dilatación (de razón λ).* Una recta de puntos fijos (la base de la dilatación); rectas invariantes: la de puntos fijos y todas las paralelas a una dirección distinta (la de dilatación). Dos puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$		Tipo: *dilatación seguida de traslación no en la dirección de dilatación.* Ningún punto fijo; una única recta invariante (la base de la dilatación). Dos puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$		Tipo: *hiperbólico.* Un único punto fijo; dos rectas invariantes que pasan por él. Dos puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$		Tipo: *parabólico.* Un único punto fijo; una única recta invariante que pasa por él. Un único punto de infinito fijo.
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{array}\right)$		Tipo: *elíptico.* Un único punto fijo; ninguna recta invariante. Ningún punto de infinito fijo.

Los nombres que aparecen en los tres últimos casos responden al uso general siguiente: *hiperbólico* significa dos raíces (dos rectas invariantes en este caso), *parábolico* significa una raíz (una recta invariante), y *elíptico* ninguna (por eso este caso es específicamente real). Se observa que cada uno de los nueve casos tiene diferentes invariantes, luego *los puntos fijos y las rectas invariantes permiten distinguir el tipo de aplicación afín* de que se trata. Esta es una de las cualidades que debe tener una clasificación para ser útil. También se confirma que los puntos de infinito de las rectas invariantes son fijos, pero puede haber otros; incluso puede no haber rectas invariantes y sí puntos de infinito fijos. Las descripciones de la tercera columna se refieren a los casos en que ni λ ni μ son nulos, es decir, los casos en que la aplicación afín es biyectiva (por ser tener la derivada determinante no nulo). Ya hemos mostrado en los ejemplos anteriores a la tabla cómo se discute un caso en el que un autovalor se anula. Dejamos al lector como ejercicio que lo haga en los que quedan pendientes.

Tema 11. Cuádricas afines

Lo mismo que las formas cuadráticas de un espaco vectorial se definen a partir de la noción previa de forma bilineal simétrica, para definir las cuádricas afines debemos introducir el siguiente concepto:

Definición 11.1. Sea X un espacio afín. Una *forma biafín* de X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{A}^1$ que es afín *separadamente en cada variable.*

La condición del enunciado significa que para cualesquiera $a, b \in X$ las dos aplicaciones

$$\begin{cases} \varphi_b : X \to \mathbb{A}^1 : x \mapsto \varphi(x, b), \\ \varphi_a : X \to \mathbb{A}^1 : y \mapsto \varphi(a, y) \end{cases}$$

son afines, es decir, tienen derivadas lineales $\overrightarrow{\varphi}_b, \overrightarrow{\varphi}_a : \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$. En consecuencia, tenemos

$$\begin{cases} \varphi(a + u, b) = \varphi(a, b) + \overrightarrow{\varphi}_b(u), \\ \varphi(a, b + v) = \varphi(a, b) + \overrightarrow{\varphi}_a(v), \end{cases}$$

y escribimos

$$\varphi(a + u, b + v) = \varphi(a, b) + \overrightarrow{\varphi_b}(u) + \overrightarrow{\varphi_a}(v) + \overrightarrow{\varphi}(u, v).$$

La aplicación $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{X} \times \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$ definida por la fórmula anterior es una forma bilineal cuadrática, que no depende de los puntos a, b. Este hecho se comprueba de manera rutinaria, y no nos detenemos en ello. La fórmula anterior puede considerarse el desarrollo de φ en (a, b), con $\overrightarrow{\varphi_b}$ y $\overrightarrow{\varphi_a}$ como derivadas parciales respecto de la primera y segunda variable, y $\overrightarrow{\varphi}$ como derivada segunda. Comparando dos desarrollos diferentes de φ se deduce fácilmente que

$$\overrightarrow{\varphi_b}(u) = \overrightarrow{\varphi_a}(u) + \overrightarrow{\varphi}(u, w), \quad b = a + w.$$

Una consecuencia útil adicional es la siguiente. Para cada $b \in X$ la aplicación $varphi_b$ es afín, luego una imagen inversa del tipo

$$\varphi_b^{-1}(t) = \{x \in X : \varphi(x, b) = t\}$$

es, si no vacía, un subespacio afín con dirección $\ker(\overrightarrow{\varphi_b})$. Lo mismo se puede hacer con la primera variable.

Tras estas consideraciones podemos definir ya la noción central de esta lección.

Definición 11.2. Una aplicación biafín $\varphi : X \times X \to \mathbb{A}^1$ se denomina *simétrica* cuando $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$. Una *cuádrica afín* es una clase $[\varphi]$ de equivalencia por proporcionalidad de formas biafines simétricas φ no nulas.

Es facil ver que una forma biafín es simétrica si y sólo si sus derivadas parciales respecto de la primera y la segunda variable coinciden en cada punto, y la forma bilineal $\overrightarrow{\varphi}$ es simétrica.

Cuando X tiene dimensión 2 las cuádricas se llaman *cónicas,* y cuando tiene dimensión 3 se llaman *superficies cuádricas*. En dimensión 1 las cuádricas tiene sobre todo interés algebraico, y veremos que sirven para *contar multiplicidades.*

(11.3) Ceros de una cuádrica. (1) Obsérvese que si dos formas biafínes simétricas no nulas φ y ψ son proporcionales, $\varphi(x, x) = 0$ si y sólo si $\psi(x, x) = 0$. En consecuencia el conjunto $Q[\varphi] \subset X$ de los puntos que cumplen eso no depende en realidad de las formas sino de su clase de equivalencia, esto es, de la cuádrica $[\varphi]$. Denominamos esos puntos *ceros* o *puntos* de la cuádrica. No deben confundirse la cuádrica y sus ceros: estos no determinan aquélla.

(2) El conjunto de ceros $Q[\varphi]$ puede o no generar todo el espacio afín (puede incluso ser vacío); si no lo genera, existe un hiperplano afín $Y \subset X$ que contiene $Q[\varphi]$. Entonces podemos considerar la cuádrica definida en ese hiperplano, restringiendo la forma biafín φ a $Y \times Y$. ▮

(11.4) Centros de una cuádrica. Sea $[\varphi]$ una cuádrica afín, y fijemos un punto $a \in X$. Entonces para $x = a + u$ e $y = a + v$ tenemos

$$\varphi(x, y) = \varphi(a, a) + \overrightarrow{\varphi_a}(u) + \overrightarrow{\varphi_a}(v) + \overrightarrow{\varphi}(u, v).$$

(las dos derivadas parciales en a coinciden por la simetría de φ, así que la notación es consistente). Sea $Q = Q[\varphi]$ el conjunto de ceros de la cuádrica.

(1) Consideremos un punto $a \in X$ con la propiedad de que Q es invariante respecto de la simetría σ de centro a, es decir, $\sigma(Q) \subset Q$. Como la simetría es su propia inversa, esto equivale a que $\sigma(Q) = Q$. Veamos lo que esto significa. La simetría de centro a es la aplicación afín

$$\sigma(x) = a - u,\ u = \overrightarrow{ax},\ x \in X.$$

Queremos determinar cuando $x \in Q$ equivale a $\sigma(x) \in Q$, es decir, cuando $\varphi(x,x) = 0$ equivale $\varphi(\sigma(x),\sigma(x)) = 0$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\varphi(x,x) &= \varphi(a,a) + 2\overrightarrow{\varphi_a}(u) + \overrightarrow{\varphi}(u,u) \ \text{ y}\\ \varphi(\sigma(x),\sigma(x)) &= \varphi(a,a) + 2\overrightarrow{\varphi}_a(-u) + \overrightarrow{\varphi}(-u,-u)\\ &= \varphi(a,a) - 2\overrightarrow{\varphi}_a(u) + \overrightarrow{\varphi}(u,u),\end{aligned}$$

luego

$$\varphi(\sigma(x),\sigma(x)) = \varphi(x,x) + 4\overrightarrow{\varphi_a}(u).$$

Deducimos que Q es invariante por σ si y sólo si $\overrightarrow{\varphi_a}(u) = 0$ para todo $u \in \gamma_a(Q)$.

(2) Si Q genera todo el espacio Q, es decir, si Q tiene suficientes puntos, $\gamma_a(Q) = \overrightarrow{X}$, y la condición anterior es que la derivada parcial $\overrightarrow{\varphi_a}$ sea idénticamente nula. Sin embargo, Q puede tener muy pocos puntos, incluso ninguno, así que la invarianza por σ puede ser poco significativa. Por ello adoptamos la definición algebraica, y decimos que un punto $a \in X$ es un *centro* de la cuádrica si $\overrightarrow{\varphi_a} \equiv 0$. En otras palabras el desarrollo de φ en *a no tiene parte lineal:*

$$\varphi(x,y) = \varphi(a,a) + \overrightarrow{\varphi}(u,v).$$

Por supuesto, esto garantiza la invarianza por simetría respecto de a y equivale a ella si la cuádrica tiene suficientes ceros. Pero en general, un *centro de simetría* puede no ser un centro.

(3) Si hay centros, el conjunto $C = C[\varphi]$ de todos ellos es un subespacio afín de X. En efecto, podemos escribir :

$$C = \bigcap_{b\in X} \{a \in X : \varphi(x,b) = \varphi(a,b)\},$$

y si $C \neq \varnothing$, esta intersección de subespacios afínes es un subespacio afín.

(4) La búsqueda de todos los centros de simetría de Q puede hacerse como sigue. Supongamos que Q no es vacío, y está contenido en un hiperplano Y de X. Entonces las simetrías respecto de puntos *fuera de* Y trasforman Y en un hiperplano disjunto, luego $Q \subset Y$ no puede quedar invariante. En consecuencia, los centros de simetría deben estar en Y, y se puede considerar la restricción de la cuádrica a Y. Si Q genera Y, estamos en la buena situación geométrica. Si no, existe un hiperplano de Y que contiene Q, y se repite el razonamiento. En otras palabras, se buscan los centros de simetría de Q en el subespacio afín $V(Q)$ que genera. ∎

(11.5) Diámetros. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$.

(1) Se llama *diámetro* de la cuádrica a cualquier plano que pase por un centro suyo. Los diámetros revelan las simetrías de la cuádrica, en el sentido de que hay siempre simetrías respecto de ellos que dejan invariante el conjunto de ceros de la cuádrica.

(2) Sean Y un diámetro y $a \in Y$ un centro de $[\varphi]$. Por ser a un centro, el desarrollo de φ en a es del tipo:

$$\varphi(x, x) = \varphi(a, a) + 2\overrightarrow{\varphi}(u, u).$$

Afirmamos que el subespacio vectorial W *conjugado* de $\overrightarrow{Y}$ respecto de la forma cuadrática $\overrightarrow{\varphi}$ es no nulo, y las simetrías $\sigma : X \to X$ de base Y paralelas a un vector $w \in W$ dejan Q invariante.

En efecto, en primer lugar, si $u_1, \ldots, u_{n-1}$ generan $\overrightarrow{Y}$, W consiste en los vectores $w \in \overrightarrow{Y}$ tales que

$$\overrightarrow{\varphi}(u_1, w) = \cdots = \overrightarrow{\varphi}(u_{n-1}, w) = 0,$$

luego $\dim(W) \geq 1$. Consideramos pues un vector cualquiera w de W y la simetría σ paralela a w de base Y. Esta simetría se puede expresar como sigue:

$$\sigma : x = a + u + \lambda w \in a + (\overrightarrow{Y} \oplus L[w]) \mapsto x = a + u - \lambda w.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(x, x) &= \varphi(a, a) + 2\overrightarrow{\varphi}(u + \lambda w, u + \lambda w)\\ &= \varphi(a, a) + 2\overrightarrow{\varphi}(u, u) + 4\lambda\overrightarrow{\varphi}(u, w) + 2\lambda^2\overrightarrow{\varphi}(w, w)\end{aligned}$$

y por un cálculo similar

$$\varphi(\sigma(x), \sigma(x)) = \varphi(a, a) + 2\overrightarrow{\varphi}(u, u) - 4\lambda\overrightarrow{\varphi}(u, w) + 2\lambda^2\overrightarrow{\varphi}(w, w).$$

Ahora, puesto que w es conjugado de $\overrightarrow{Y}$ y $u \in \overrightarrow{Y}$, tenemos $\overrightarrow{\varphi}(u, w) = 0$, de modo que $\varphi(x, x) = \varphi(\sigma(x), \sigma(x))$. Esto significa que $x \in Q$ si y sólo si $\varphi(x) \in Q$, es decir, que Q es invariante por σ. ∎

(11.6) Puntos de infinito de una cuádrica. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$. Hemos visto en el párrafo anterior cómo la forma cuadrática $\overrightarrow{\varphi}$ interviene en las propiedades geométricas del lugar de ceros. Aquí la utilizamos para introducir otro concepto fundamental.

(1) Un vector $u \in \overrightarrow{X}$ se denomina *isótropo* si $\overrightarrow{\varphi}(u, u) = 0$. Un vector isótropo u de $\overrightarrow{\varphi}$ genera una *dirección asintótica* $L[u]$. Los puntos de infinito de la cuádrica son sus direcciones asintóticas. El conjunto de todos ellos se denota Q^∞.

Si la forma $\overrightarrow{\varphi}$ es idénticamente nula, esto es, si todas las direcciones son puntos de infinito de la cuádrica, entonces

$$\varphi(x, x) = \varphi(a, a) - 2\overrightarrow{\varphi}(u)$$

es una forma afín, y el conjunto Q de ceros es un hiperplano afín. Este caso lo consideramos impropio y no lo incluiremos la exposición.

(2) Si a es un centro de la cuádrica y u una dirección asintótica, la recta $a + L[u]$ se denomina *asíntota*. ∎

Tema 12. Tangencias

En esta lección estudiamos los conceptos fundamentales de recta tangente, punto singular, punto regular e hiperplano tangente. Con esto llegamos a la linde del espacio proyectivo, dándonos cuenta de la impedimenta que el geómetra afín debe sobrellevar.

La noción básica que debe aclararse es la de recta tangente. Empezamos con lo siguiente:

(12.1) Intersección de una cuádrica con una recta. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$, y consideremos una recta $r = a + L[u]$ que pasa por un punto $a \in X$. Queremos entender la intersección de Q con r.

Un punto $x = a + tu \in r$ pertenece a Q si y sólo si $\varphi(x, x) = 0$. Desarrollando en a obtenemos:

$$\varphi(x,x) = \varphi(a,a) + 2\overrightarrow{\varphi}_a(tu) + \overrightarrow{\varphi}(tu,tu) = \varphi(a,a) + 2t\overrightarrow{\varphi_a}(u) + t^2\overrightarrow{\varphi}(u,u).$$

Por tanto, $\varphi(x, x) = 0$ se reduce a una ecuación de grado ≤ 2 en t.

(1) Supongamos primero que $a \in Q$. Entonces $\varphi(a, a) = 0$ y $t = 0$ es una solución, que corresponde al punto $a \in r \cap Q$. Hay varias posibilidades:

(i) $\overrightarrow{\varphi}(u, u) = \overrightarrow{\varphi_a}(u) = 0$. La ecuación es idénticamente nula y $r \subset Q$. Además la recta y la cuádrica también comparten el punto de infinito $[u]$.

(ii) $\overrightarrow{\varphi}(u, u) \neq 0$, $\overrightarrow{\varphi_a}(u) = 0$. La ecuación es de grado dos con una sola solución, de multiplicidad 2. Resulta que $Q \cap r$ consiste en un punto *doble*. En este caso, el punto de infinito $[u]$ de r no pertenece a la cuádrica.

(iii) $\overrightarrow{\varphi}(u, u) = 0$, $\overrightarrow{\varphi_a}(u) \neq 0$. La ecuación es en realidad lineal y tiene una sola solución, de multiplicidad 1. Es decir, la intersección $Q \cap r$ se reduce al punto a, que es un punto *simple*. En este caso Q y r también comparten el punto de infinito $[u]$, luego podemos decir que la intersección de la cuádrica y la recta consiste en dos puntos simples, a y el de infinito.

(iv) $\overrightarrow{\varphi}(u, u) \neq 0$, $\overrightarrow{\varphi_a}(u) \neq 0$. La ecuación es de grado dos y tiene dos soluciones distintas, de multiplicidad 1. En este caso $Q \cap r$ consiste en dos puntos simples, y el punto de infinito de r no pertenece a la cuádrica.

(2) Ahora, para entender cómo se intersecan r y Q en el punto de infinito $[u]$, vemos éste como el límite de $a + tu$ cuando $t \to \infty$. Para ello, hacemos el cambio $t = 1/s$ y quitamos denominadores en la ecuación que estamos analizando, para obtener

$$0 = s^2\varphi(a,a) + 2s\overrightarrow{\varphi}_a(u) + \overrightarrow{\varphi}(u,u).$$

El punto de infinito está en la cuádrica si y sólo si $\overrightarrow{\varphi}(u,u) = 0$, es decir, si y sólo si esta ecuación tiene la solución $s = 0$ ($t = \infty$). Supuesto esto, la discusión es como la anterior: la recta puede estar completamente contenida en la cuádrica, cortarla en el punto de infinito solamente, o cortarla en ese punto y otro más.

Si esta explicación formal no es plenamente satisfactoria, piénsese que el infinito refleja fenómenos geométricos globales que no se pueden entender correctamente sin dar el salto cualitativo al espacio proyectivo. ▮

Después de esta discusión, que es en esencia la descripción de las cuádricas de una recta afín, podemos dar la primera definición de tangencia:

Definición 12.2. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X. Una recta $r \subset X$ es *tangente* a la cuádrica si está totamente contenida en ella o la corta en un único punto, contando los puntos de infinito; se dice que la recta es tangente a la cuádrica en los puntos de intersección. En caso contrario la recta es *trasversal* a la cuádrica.

Con las notaciones del párrafo previo, la tangencia se expresa analíticamente con al condición $\overrightarrow{\varphi_a}(u) = 0$. Por ejemplo, *una asíntota de una cuádrica es tangente ella en el punto de infinito.*

Llegamos aquí al concepto central de esta lección:

(12.3) Regularidad. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$.

(1) Un punto $a \in Q$ se llama *singular* si todas las rectas que pasan por a son tangentes a la cuádrica. Esto significa que la derivada $\overrightarrow{\varphi_a}$ es idénticamente nula, o equivalentemente que lo es la forma afín $\varphi_a : y \mapsto \varphi(a,y)$. En caso contrario, es decir, si $\overrightarrow{\varphi_a} \not\equiv 0$, decimos que a es un punto *regular*.

El conjunto de puntos singulares se denota $\mathrm{Sing}(Q)$, y el de puntos regulares $\mathrm{Reg}(Q)$.

Obviamente $Q = \mathrm{Sing}(Q) \cup \mathrm{Reg}(Q)$. El conjunto de puntos singulares, si es no vacío, es un subespacio afín de X.

En efecto, es una intersección de subespacios afines

$$\mathrm{Sing}(Q) = \bigcap_{b \in X} \{x \in X : \varphi(x, b) = 0\}.$$

(o bien no hay puntos singulares).

(2) También hay que definir la regularidad en infinito. Un punto de infinito $[u] \in Q^\infty$ se llama *singular* si todas las rectas paralelas a u son tangentes a la cuádrica. Esto equivale a que $\overrightarrow{\varphi_x}(u) = 0$ para todo $x \in X$, y puesto que

$$\overrightarrow{\varphi_x}(u) = \overrightarrow{\varphi_a}(u) + \overrightarrow{\varphi}(u, v), \quad x = a + v,$$

resulta que $[u]$ es singular si y sólo si: (i) $\overrightarrow{\varphi_a}(u) = 0$ para algún punto $a \in X$ y (ii) la forma lineal $\overrightarrow{\varphi}(u, \cdot)$ es idénticamente nula. El punto de infinito se llama *regular* si no es singular.

(3) La cuádrica se denomina (i) *singular* o *degenerada* si tiene puntos singulares (en Q o en Q^∞), y (ii) *regular* o *no degenerada* si no los tiene. Observamos que si la cuádrica no tiene puntos ($Q = Q^\infty = \varnothing$), es no degenerada. ▮

(12.4) Tangencias. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$. Sea $a \in Q$ un punto regular de la cuádrica.

(1) La forma afín $\varphi_a : y \mapsto \varphi(a, y)$ no es idénticamente nula, y $\varphi_a^{-1}(0)$ es un hiperplano afín de X que pasa por a, con dirección $\ker(\overrightarrow{\varphi_a})$. Este hiperplano afín se denomina *tangente a la cuádrica en el punto a;* se denota T_aQ.

(2) El hiperplano T_aQ se denomina tangente porque consiste exactamente en las rectas tangentes a la cuádrica en a.

En efecto, una recta afín $r = a + L[u]$ está contenida en T_aQ si y sólo si $u \in \overrightarrow{T_a}Q = \ker(\overrightarrow{\varphi_a})$, es decir si y sólo si $\overrightarrow{\varphi_a}(u) = 0$. Como ya vimos, esa es la condición para que r sea tangente a la cuádrica en a. ▮

(12.5) Tangencias en infinito. Indiquemos cómo se analiza la tangencia en un punto de infinito. Sea $[u]$ un punto de infinito de una cuádrica $[\varphi]$ de un espacio afín X.

(1) Consideramos un punto cualquiera $a \in X$ y la forma afín:

$$\varphi_u^\infty : y = a + v \mapsto \overrightarrow{\varphi_y}(u) = \overrightarrow{\varphi_a}(u) + \overrightarrow{\varphi}(u, v).$$

que obviamente no depende de u salvo proporcionalidad. Si el punto de infinito es singular la forma anterior es idénticamente nula y carece de interés, así que supondremos el punto de infinito regular.

(i) Si $\overrightarrow{\varphi}(u,\cdot) \not\equiv 0$, entonces φ_u^∞ no es constante y $T_uQ = (\varphi_u^\infty)^{-1}(0)$ es un hiperplano afín, que se llama *hiperplano tangente a la cuádrica en* $[u]$.

Nótese que $[u]$ es un punto de infinito de ese hiperplano.

(ii) Si $\overrightarrow{\varphi}(u,\cdot) \equiv 0$, entonces $\overrightarrow{\varphi_a}(u) \neq 0$, y la forma afín φ_u es constante no nula. Decimos que *la cuádrica es tangente en* $[u]$ *al hiperplano de infinito.*

(2) La terminología se justifica porque *una recta r es tangente a la cuádrica en infinito si y sólo si está contenida en el plano tangente en el punto de infinito.*

En efecto, por un lado $r = a + L[u]$ es tangente a la cuádrica en $[u]$ si y sólo si $\overrightarrow{\varphi}_a(u) = 0$. Pero por otro lado, r está contenida en T_uQ si y sólo si $0 = \varphi_u^\infty(a) = \overrightarrow{\varphi_a}(u)$. ∎

Tema 13. Polaridad

El estudio de la tangencia se completa con el de la polaridad. La estudiamos en esta lección.

(13.1) Polaridad. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$.

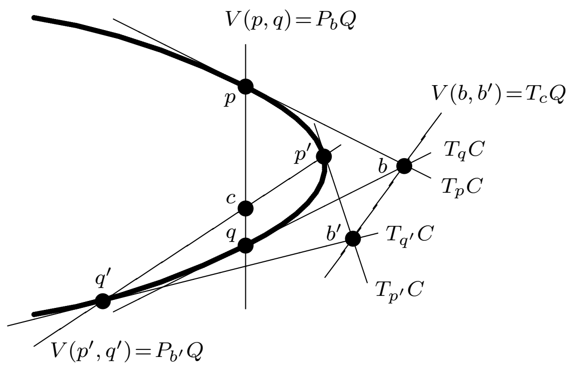
(1) Si $b \notin Q$, la forma afín $\varphi_b : x \mapsto \varphi(x, b)$ no es idénticamente nula, y si no es constante, $\varphi_b^{-1}(0)$ es un hiperplano afín que no pasa por b. Se denota P_bQ, y se denomina *hiperplano polar* de b respecto de la cuádrica.

(2) En realidad esta es la misma definición de hiperplano tangente aplicada a los puntos que no son ceros de la cuádrica. Por eso a veces se dice que *el hiperplano polar de un punto regular es el hiperplano tangente en ese punto*. Por la simetría de la forma biafín, $a \in P_bQ$ si y sólo si $b \in P_aQ$ ($a, b \in X$, esto vale también si uno o los dos puntos son ceros de la cuádrica).

(3) La polaridad es en realidad una forma de *dualidad*. En efecto, por al simetría tenemos:

$$T_bQ = V(b_1, \dots, b_n) \quad \text{si y sólo si} \quad b \in P_{b_1}Q \cap \cdots \cap P_{b_n}Q.$$

Esta dualidad se expresa en construcciones gráficas como la siguiente.



■

Los hiperplanos polares ya habían aparecido antes: para describir los puntos singulares como intersección de hiperplanos afines. En particular, un hiperplano polar P_bQ pasa por todos los puntos singulares de Q, es decir $P_bQ \supset \mathrm{Sing}(Q)$. Consideramos a continuación los puntos regulares.

(13.2) Polaridad y tangencias. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$, y sea $b \notin Q$ un punto cuyo hiperplano polar P_bQ está definido.

(1) Si $a \in Z$ es un punto regular que está en P_bQ, entonces $\varphi(a, b) = 0$, y b está en T_aQ, es decir, los puntos regulares de Q que están en P_bQ son *los puntos regulares cuyo hiperplano tangente pasa por* b. Todo esto se resume en la siguiente fórmula:

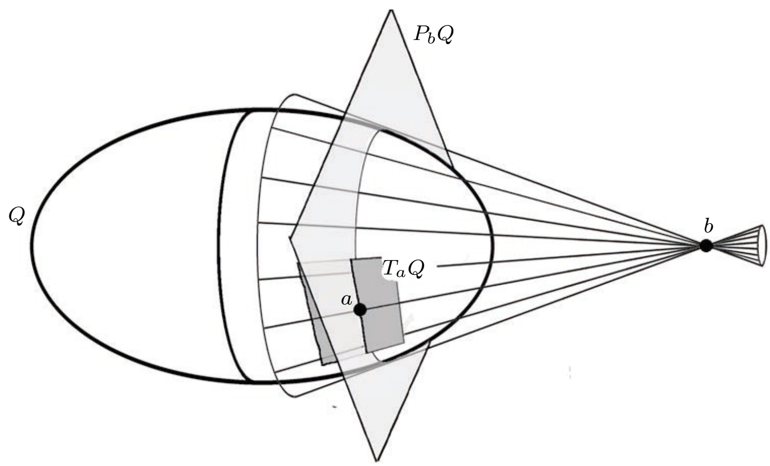
$$Q \cap P_bQ \setminus \mathrm{Sing}(Q) = \{x \in \mathrm{Reg}(Q) : b \in T_xQ\},$$

que nos permite entender los hiperplanos polares en términos de tangencias. El conjunto $Q \cap P_bQ$ es en realidad otra cuádrica, ésta en el espacio afín P_bQ, que es un hiperplano de X.

(2) Lo anterior nos dice si algún hiperplano tangente a la cuádrica pasa por b: si $Q \cap P_bQ \setminus \mathrm{Sing}(Q) \neq \varnothing$, entonces los hiperplanos tangentes en los puntos de este conjunto no vacío son precisamente los hiperplanos en cuestión.

(3) Otra forma de entender las cosas. Si $a \in Q$ no es singular, la recta $V(a, b)$ es tangente a la cuádrica si y sólo si está contenida en el hiperplano tangente T_aQ, si y sólo si $b \in T_aQ$, si y sólo si $a \in P_bQ$. Por tanto, $Q \cap P_bQ$ nos dice también qué rectas tangentes a la cuádrica pasan por b.

La figura siguiente ilustra lo que decimos.



(4) Aunque en la figura anterior no haya lugar a ello, por b también pueden pasar rectas tangentes a la cuádrica *en infinito*. Es decir, puede haber vectores

isótropos u tales que la recta $b+L[u]$ sea tangente a la cuádrica en $[u]$. Esto pasa cuando b está en el hiperplano polar de $[u]$, o sea, cuando $\overrightarrow{\varphi_b}(u)=0$. En particular, esas rectas $b+L[u]$ son paralelas a $P_bQ:\varphi(x,b)=0$.

(5) En fin, consideremos la cuádrica $[\psi]$ definida por la forma biafín

$$\psi(x,y)=\varphi(x,b)\varphi(b,y)-\varphi(b,b)\varphi(x,y)$$

y sus ceros $Q'=Q[\psi]$. Las cuádricas Q y Q' cortan el hiperplano polar P_bQ en los mismos puntos y en cada uno los hiperplanos tangentes a Q y Q' coinciden. El lugar de ceros Q' es la unión de todas las rectas que pasan por b y son tangentes a la cuádrica Q, incluidas las que son tangentes en puntos de infinito. Por eso decimos que Q' es el *cono tangente* a Q con vértice b. La comprobación de estas afirmaciones es un excelente ejercicio que requiere utilizar bien todos los conceptos introducidos anteriormente. ∎

(13.3) Polaridad en infinito. La polaridad se puede extender a los puntos de infinito. Hagámoslo aunque escondamos como tahúres el espacio proyectivo en la bocamanga. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X. Sea $[u]$ un punto de infinito de X, que no es una dirección asíntótica de la cuádrica (es decir, $[u]\notin Q^\infty$).

(1) Consideramos un punto cualquiera $a\in X$ y la forma afín:

$$\varphi_u^\infty : x=a+v\mapsto \overrightarrow{\varphi_x}(u)=\overrightarrow{\varphi_a}(u)+\overrightarrow{\varphi}(u,v).$$

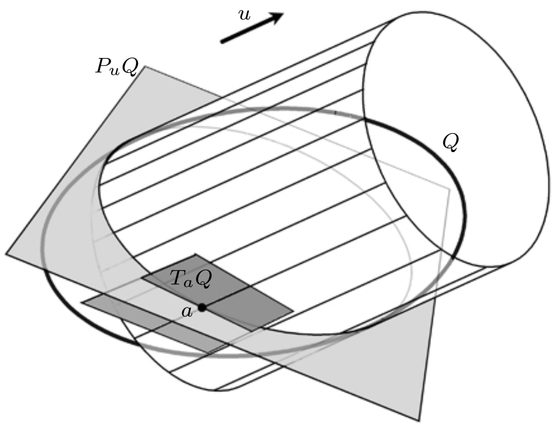
Como $\overrightarrow{\varphi}(u,u)\neq 0$, esta forma afín no es constante. Por tanto $P_uQ=(\varphi_u^\infty)^{-1}(0)$ es un hiperplano afín, que se llama *hiperplano polar respecto la cuádrica del punto de infinito* $[u]$.

(2) Si x es singular, $\overrightarrow{\varphi_x}\equiv 0$, luego $\varphi_u^\infty(x)=0$ y $x\in P_uQ$. Para puntos regulares tenemos:

$$Q\cap P_uQ\setminus \mathrm{Sing}(Q)=\{x\in \mathrm{Reg}(Q): u\in \overrightarrow{T_xQ}\}.$$

En efecto, si x es un punto regular de la cuádrica, su hiperplano tangente tiene por dirección $\ker(\overrightarrow{\varphi_x})$, luego u es una dirección de tangencia en x si y sólo si $\overrightarrow{\varphi_x}(u)=0$. Pero como $x\in Q$, es $\varphi_u^\infty(x)=\overrightarrow{\varphi_x}(u)$, luego $\overrightarrow{\varphi_x}(u)=0$ si y sólo si $x\in P_uQ$.

Obsérvese que esto dice qué rectas tangentes a la cuádrica son paralelas a u. Nótese que ninguna es tangente en infinito, pues $[u]$ no es un punto de la cuádrica.



(3) Sea $[\psi]$ la cuádrica definida por la forma biafín

$$\psi(x,y) = \overrightarrow{\varphi_x}(u)\overrightarrow{\varphi_y}(u) - \overrightarrow{\varphi}(u,u)\varphi(x,y)$$

y sus ceros $Q' = Q[\psi]$. Se tiene $Q \cap P_uQ = Q' \cap P_uQ$, y para cada punto a de esa intersección $T_aQ = T_aQ'$. El conjunto Q' consiste en todas las rectas paralelas a u y tangentes a la cuádrica Q. Decimos que Q es el *cilindro tangente* a Q paralelo a u. ∎

Tema 14. Ecuaciones de cuádricas afines

Como al estudiar los subespacios afines y las aplicaciones afines, podemos utilizar coordenadas para obtener las ecuaciones de una cuádrica. Con ellas se calculan todos los invariantes geométricos descritos en la lecciones anteriores.

(14.1) Ecuaciones de una cuádrica afín. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$. Fijemos una referencia afín $\mathcal{R}$ con origen a_0 y base asociada $\mathcal{B} = \{u_j\}$.

Calculemos $\varphi(p,q)$ para dos puntos $p, q \in X$ cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ son $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Desarrollando φ en a_0 obtenemos:

$$\begin{aligned}\varphi(p,q) &= \varphi(a_0,a_0) + \overrightarrow{\varphi_{a_0}}(u) + \overrightarrow{\varphi_{a_0}}(v) + \overrightarrow{\varphi}(u,v)\\ &= \varphi(a_0,a_0) + \overrightarrow{\varphi_{a_0}}\big(\textstyle\sum_i x_i u_i\big) + \overrightarrow{\varphi_{a_0}}\big(\textstyle\sum_j y_j u_j\big) + \overrightarrow{\varphi}\big(\textstyle\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j\big)\\ &= \varphi(a_0,a_0) + \sum_i x_i \overrightarrow{\varphi_{a_0}}(u_i) + \sum_j y_j \overrightarrow{\varphi_{a_0}}(u_j) + \sum_{ij} x_i y_j \overrightarrow{\varphi}(u_i,u_j).\end{aligned}$$

Ahora denotamos $\varphi(p,q) = \varphi(x,y)$, y

$$\begin{cases} m_0 = \varphi(a_0,a_0),\\ m_i = \overrightarrow{\varphi_{a_0}}(u_i),\ m = (m_i),\\ m_{ij} = \overrightarrow{\varphi}(u_i,u_j)\ M = (m_{ij}).\end{cases}$$

de manera que la igualdad anterior se escribe

$$\varphi(x,y) = m_0 + xm^t + my^t + xMy^t,$$

o más abreviadamente

$$\varphi(x,y) = (1,x)\,\widehat{M}\begin{pmatrix}1\\ y^t\end{pmatrix}, \quad \widehat{M} = \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m\\ \hline m^t & M\end{array}\right)$$

Observamos que m es la matriz de la forma lineal $\overrightarrow{\varphi_{a_0}}$ respecto de la base $\mathcal{B}$, y M la matriz de la forma bilineal simétrica $\overrightarrow{\varphi}$ respecto de esa misma base (luego $M = M^t$).

Hemos obtenido la *ecuación de la cuádrica* en coordenadas respecto de la referencia $\mathcal{R}$ y la *matriz* $\widehat{M}$ *de la cuádrica* en esas coordenadas. Ecuación y matriz están determinadas salvo proporcionalidad. ▮

En lo que sigue utilizamos los datos y notaciones del párrafo anterior.

(14.2) Puntos de la cuádrica. (1) Veamos qué coordenadas tienen los ceros de la cuádrica. El punto p está en Q si y sólo si $\varphi(p,p)=0$, es decir,

$$0=\varphi(x,x)=(1,x)\,\widehat{M}\begin{pmatrix}1\\x^t\end{pmatrix}=m_0+2\sum_i m_i x_i+\sum_{ij} m_{ij}x_ix_j.$$

Ahora bien para $i\neq j$ tenemos:

$$m_{ij}x_ix_j+m_{ji}x_jx_i=(m_{ij}+m_{ji})x_ix_j=2m_{ij}x_ix_j,$$

pues $M=M^t$, y concluimos:

$$0=\varphi(x,x)=m_0+2\sum_i m_ix_i+\sum_i m_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}m_{ij}x_ix_j.$$

Tenemos así un polinomio de segundo grado

$$Q(x)=c_0+\sum_i c_ix_i+\sum_{i\leq j}c_{ij}x_ix_j,$$

a partir de cuyos coeficientes se pueden recuperar los de $\widehat{M}$, porque M es simétrica. Ésta es la *ecuación de ceros* de la cuádrica (o *ecuación de* Q) en coordenadas respecto de $\mathcal{R}$. No debe confundirse la ecuación con sus soluciones. Éstas forman el conjunto de ceros Q, pero no determinan la cuádrica, mientras que la ecuación $Q(x)$ la determina (como acabamos de señalar, a partir de $Q(x)$ obtenemos la matriz $\widehat{M}$).

(2) Busquemos ahora los puntos de infinito Q^∞. Los vectores isótropos de $\overrightarrow{\varphi}$ serán los vectores u de coordenadas x respecto de $\mathcal{B}$ tales que $xMx^t=0$, es decir:

$$Q^\infty(x)=\sum_{i\leq j}c_{ij}x_ix_j=0,$$

o bien:

$$(0,x)\,\widehat{M}\begin{pmatrix}0\\x^t\end{pmatrix}=0.$$

Las soluciones de esta ecuación de grado dos representan salvo proporcionalidad los puntos de infinito de la cuádrica. ∎

(14.3) Centros y puntos singulares. (1) Un punto $a \in X$, cuyas coordenadas denotamos z, es un centro de la cuádrica si y sólo si:

$$\begin{aligned}0 \equiv \overrightarrow{\varphi_z}(x) &= \varphi(x,z) - \varphi(z,z)\\ &= (m_0 + xm^t + mz^t + xMz^t) - (m_0 + zm^t + mz^t + zMz^t)\\ &= x(m^t + Mz^t) - z(m^t + Mz^t).\end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple para todo x si y sólo si $m^t + Mz^t = 0$, luego este sistema de ecuaciones lineales define el conjunto de centros de la cuádrica.

(2) Un punto $a \in X$ es singular si es un cero y un centro. Por tanto, si y sólo si:

$$\begin{cases} m_0 + 2zm^t + zMz^t = 0, \\ m^t + Mz^t = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} m_0 + mz^t = 0, \\ m^t + Mz^t = 0. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales define pues los puntos singulares de Q.

(3) Un punto de infinito $[u] \in Q^\infty$ es singular si $\overrightarrow{\varphi_{a_0}}(u) = 0$ y $\overrightarrow{\varphi}(u,\cdot) \equiv 0$. Por tanto, denotando z las coordenadas de u respecto de la base $\mathcal{B}$ asociada a $\mathcal{R}$, resulta que u es singular si y sólo si

$$\begin{cases} mz^t = 0, \\ Mz^t = 0. \end{cases}$$

(4) Los sistemas que definen los puntos singulares de Q y de Q^∞ se pueden escribir como sigue:

$$\left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ z^t \end{pmatrix} = 0, \quad \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ z^t \end{pmatrix} = 0.$$

Denotemos $\widehat{x} = (x_0, x)$. Las soluciones del sistema $\widehat{M}\widehat{x}^t = 0$ pueden ser de dos tipos: (i) las que tienen $x_0 \neq 0$, que dividiendo por x_0 corresponden a los puntos singulares de Q, y (ii) las soluciones no triviales con $x_0 = 0$, que corresponden a los puntos singulares de Q^∞. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que la cuádrica sea no degenerada (es decir no tenga ningún punto singular), es que ese sistema homogéneo sólo tenga solución trivial, es decir, que la matriz $\widehat{M}$ sea regular: $\det(\widehat{M}) \neq 0$. ∎

(14.4) Hiperplanos tangentes. (1) Si $a \in Q$ es un punto regular con coordenadas z respecto de $\mathcal{R}$, entonces el hiperplano tangente a la cuádrica en a es

$$(1, x)\left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ z^t \end{pmatrix} = 0.$$

(2) Si $[u] \in Q^\infty$ es un punto regular de infinito con coordenadas z respecto de $\mathcal{B}$, entonces el hiperplano tangente a la cuádrica en $[u]$ es

$$(1, x) \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ z^t \end{pmatrix} = 0.$$

∎

(14.5) Hiperplanos polares. (1) Sea $a \notin Q$ un punto con coordenadas z respecto de $\mathcal{R}$. El hiperplano polar de a respecto la cuádrica es

$$(1, x) \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ z^t \end{pmatrix} = 0.$$

(2) Sea $[u] \notin Q^\infty$un punto de infinito, y denotemos z son las coordenadas de u respecto de $\mathcal{B}$. El hiperplano polar de $[u]$ respecto de la cuádrica es

$$(1, x) \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ z^t \end{pmatrix} = 0.$$

∎

Tema 15. Clasificación de cuádricas afines

Para clasificar cuádricas adoptamos el punto de vista más directo: utilizar ecuaciones para representarlas de la manera más sencilla posible, eligiendo adecuadamente las coordenadas que se utilicen. Sea X un espacio afín.

(15.1) Cambio de coordenadas. Sabemos cómo se calculan las ecuaciones $\varphi(x,y)$, $Q(x)$ y la matriz $\widehat{M}$ de una cuádrica $[\varphi]$ respecto de una la referencia $\mathcal{R}$ de X. Veamos ahora cómo varían al variar la referencia. Sean $\mathcal{R}'$ una segunda referencia de X y

$$\widehat{M}' = \left(\begin{array}{c|c} m_0' & m' \\ \hline m'^t & M' \end{array}\right)$$

la matriz de la cuádrica en coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$. Sea

$$\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right)$$

la matriz de cambio que transforma coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$ en coordenadas respecto de $\mathcal{R}$. Entonces

$$\widehat{M}' = \widehat{C}^t \widehat{M} \widehat{C}.$$

(2) Según lo anterior, las matrices de la misma cuádrica respecto de referencias diferentes son *congruentes* via la matriz regular $\widehat{C}$. Sin embargo si escribimos con más detalle esta congruencia tenemos:

$$\left(\begin{array}{c|c} m_0' & m' \\ \hline m'^t & M' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right)^t \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array}\right).$$

No es pues una congruencia sin condiciones, pues el cambio tiene prescrita la primera fila.

En todo caso es importante observar que también son congruentes M y M', y éstas sin condiciones. Sabremos sacar partido de esto.

(3) Vemos que *los rangos de las matrices $\widehat{M}$ y M de una cuádrica no dependen de las coordenadas*. En particular, que el determinante de una de esas matrices sea nulo no depende de las coordenadas. En el caso real podemos decir incluso

que caso de no ser nulo, el signo de uno de esos determinantes no depende de las coordenadas, según la dimensión.

En efecto, si sólo hacemos un cambio de coordenadas, el signo de esos determinantes no cambia, pero también hay que tener en cuenta que podemos cambiar de signo la ecuación. Esto significa cambiar de signo las matrices $\widehat{M}$ y M, lo que no cambia el signo del determinante de la que tenga orden par. ∎

Después de las anteriores explicaciones, procedemos a buscar ecuaciones sencillas para una cuádrica dada. Nos fijaremos para ello en la ecuación de ceros.

(15.2) Ecuación reducida de una cuádrica afín. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X, con conjunto de ceros $Q = Q[\varphi]$. Elegimos un origen cualquiera $a_0 \in X$ y consideramos el desarrollo de φ en a_0:

$$\varphi(p, q) = \varphi(a_0, a_0) + \overrightarrow{\varphi_{a_0}}(u) + \overrightarrow{\varphi_{a_0}}(v) + \overrightarrow{\varphi}(u, v).$$

(1) La primera simplificación consiste en elegir una base $\mathcal{B} = \{u_i\}$ de $\overrightarrow{X}$ que diagonalice la forma bilineal simétrica $\overrightarrow{\varphi}$, es decir, tal que: $\overrightarrow{\varphi}(u_i, u_j) = 0$ si $i \neq j$. Entonces la ecuación de ceros queda:

$$Q(x) = c_0 + \sum\nolimits_i c_i x_i + \sum\nolimits_i c_{ii} x_i^2.$$

(2) Supongamos ahora que el coeficiente c_{ii} no es nulo. Escribimos

$$c_i x_i + c_{ii} x_i^2 = -\tfrac{c_i^2}{4c_{ii}} + c_{ii}(\tfrac{c_i}{2c_{ii}} + x_i)^2,$$

y el cambio de coordenadas $y_i = \frac{c_i}{2c_{ii}} + x_i$ convierte la ecuación de ceros en

$$c_0 - \sum_{i:c_{ii}\neq 0} \tfrac{c_i^2}{4c_{ii}} + \sum_{j:c_{jj}=0} c_j x_j + \sum\nolimits_i c_{ii} y_i^2.$$

(3) Si el cambio anterior hace desaparecer la parte lineal, miramos el término independiente. Puede ser cero o no, y en este último caso podemos dividir por él, pues la ecuación está determinada salvo proporcionalidad. Nos queda pues (después de renombrar coeficientes y variables, y reordenar éstas)

$$Q(x) = c_0 + c_1 x_1^2 + \cdots + c_r x_r^2, \quad c_0 = 0, 1,\ c_1, \ldots, c_r \neq 0.$$

(4) Si después del cambio de (2) queda parte lineal, es decir, $c_j \neq 0$ para algún índice $j = k$, escribimos:

$$-y_k = c_0 - \sum_{i:c_{ii}\neq 0} \tfrac{c_i^2}{4c_{ii}} + \sum_{j:c_{jj}=0} c_j x_j,$$

y la ecuación queda (de nuevo renombrando coeficientes y variables, y reordenando éstas)

$$Q(x) = c_1x_1^2 + \cdots + c_rx_r^2 - x_n, \quad c_1, \dots, c_r \neq 0.$$

Las ecuaciones de (3) y (4) se denominan ecuaciones *reducidas*. ▮

(15.3) Clasificación en el caso complejo. Conservamos las notaciones del párrafo último. Supongamos que el cuerpo de escalares es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(1) Tomando $\sqrt{c_i}x_i$, $i = 1, \dots, r$, como nuevas coordenadas $\sqrt{c_i}x_i$ transforma las ecuaciones obtenidas en las siguientes:

$$Q(x) = c_0 + x_1^2 + \cdots + x_r^2,\ c_0 = 0, 1; \quad Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_n.$$

Estos son todos los posibles tipos de cuádricas complejas.

(2) Para clasificar una cuádrica dada, hay que reconocer r y c_0. Esto es fácil, porque la construcción nos dice que para cualquier matriz de la cuádrica

$$\widehat{M} = \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right)$$

se tiene

$$r = \mathrm{rg}(M), \quad c_0 = \mathrm{rg}(\widehat{M}) - \mathrm{rg}(M).$$

(3) Sólo hay dos cuádricas no degeneradas: $Q(x) = 1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n$ ($\det(\widehat{M}) \neq 0$). Los puntos singulares de las otras cuádricas son:

(i) De $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$, $r \leq n$: los ceros de $x_1 = \cdots = x_r = 0$, las direcciones asintóticas de $x_1 = \cdots = x_r = 0$.

(ii) De $Q(x) = 1 + x_1^2 + \cdots + x_r^2$, $r < n$: las direcciones asintóticas $x_1 = \cdots = x_r = 0$.

(iii) De $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 + x_n$, $r < n - 1$: las direcciones asintóticas de $x_1 = \cdots = x_r = x_n = 0$. ▮

(15.4) Clasificación en el caso real. Supongamos que el cuerpo de escalares es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Procedemos como en el complejo, pero ahora no se pueden extraer raíces de números negativos, así que el cambio que como nuevas coordenadas tomamos $\sqrt{c_i}x_i$ si $c_i > 0$ y $\sqrt{-c_i}x_i$ si $c_i < 0$. Esto proporciona las siguientes ecuaciones:

$$Q(x) = c_0 \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_r^2,\ c_0 = 0, 1; \quad Q(x) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_r^2 - x_n.$$

Aquí aún puede haber ecuaciones equivalentes. Por ejemplo, $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ y $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ lo son: la segunda se obtiene cambiando de signo la primera y reordenando las variables. No entraremos en la tarea quisquillosa de discernir estas diferencias. En todo caso se ve que hay una cantidad finita de tipos, pero más que en el caso complejo.

El lector puede detenerse a escribirlos todos y calcular sus centros y sus puntos singulares. Digamos que las cuádricas reales no degeneradas son

$$Q(x) = 1 \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2, \quad Q(x) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_{n-1}^2 - x_n. \qquad \blacksquare$$

Tema 16. Cónicas afines

En esta lección enumeramos todas las cuádricas del plano afín, es decir, todas las cónicas afines. Procedemos de la manera habitual cuando se tiene un resultado de clasificación como el de la lección anterior: se enumeran las posibles ecuaciones, y de cada una se determinan los elementos relevantes: ceros, centros, puntos singulares, etc. Esos datos sirven luego para caracterizar geométricamente el tipo de cada ecuación, pues no dependen de las coordenadas.

(16.1) Cónicas afines. En un plano afín consideramos coordenadas (x, y), y respecto de ellas escribimos todas las ecuaciones reducidas diferentes de la clasificación. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ son las nueve siguientes, que ordenamos por el rango de su matriz:

(1) De rango 3: $1 + x^2 + y^2$, $1 - x^2 + y^2$, $1 - x^2 - y^2$, $x^2 - y$.

Estas son las cónicas no degeneradas. Las degeneradas son:

(2) De rango 2: $1 + x^2$, $1 - x^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$.

(3) De rango 1: x^2.

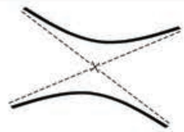
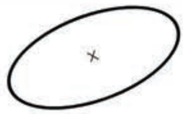
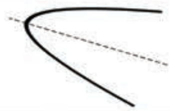
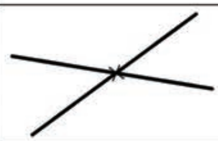
Todas las demás posibles ecuaciones son equivalentes a éstas. Por ejemplo $-x^2 - y$ equivale a la última de rango 3: basta cambiar de signo y hacer $y = -y'$. Otro ejemplo: $-x^2 + y^2$ equivale a $x^2 - y^2$, permutando las variables.

Como ya sabemos, algunas de las ecuaciones anteriores son equivalentes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cuerpo sobre el que quedan sólo cinco ecuaciones no equivalentes:

$$1 - x^2 + y^2,\ -x^2 + y,\ 1 - x^2,\ x^2 - y^2,\ x^2.$$

Obsérvese que hemos preferido utilizar algunos signos negativos. Los hemos hecho porque con esa elección los dibujos reales representan mejor la cónica compleja. Las sumas de cuadrados en el caso real sugieren la idea de acotación, algo que nunca se tiene en el caso real. ∎

A partir de estas ecuaciones se obtiene la tabla siguiente, en la que incluimos para cada cónica, su ecuación, su nombre, y los elementos que la distinguen. También se añade un dibujo significativo de cada una.

$1+x^2+y^2$ $\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$		*Cónica invisible no degenerada.* Un único centro, ningún cero, ningún punto de infinito.
$1-x^2+y^2$ $\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$		*Hipérbola.* No degenerada, un único centro, sus ceros generan el plano, dos puntos de infinito y dos asíntotas.
$1-x^2-y^2$ $\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$		*Elipse.* No degenerada, un único centro, sus ceros generan el plano, ningún punto de infinito.
x^2-y $\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$		*Parábola.* No degenerada, sin centros, sus ceros generan el plano, un único punto de infinito.
$1+x^2$ $\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$		*Cónica invisible degenerada.* Una recta de centros, ningún cero, un punto de infinito, que es singular, una asíntota.
$1-x^2$ $\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$		*Dos rectas paralelas.* Una recta de centros, sus ceros generan el plano, ningún cero singular, un único punto de infinito, que es singular, una asíntota.
x^2+y^2 $\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$		*Punto doble.* Un único centro, un único cero, que es singular, ningún punto de infinito.
x^2-y^2 $\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$		*Dos rectas trasversales.* Un único centro, que es un cero, sus ceros generan el plano, dos puntos de infinito, no singulares, dos asíntotas.
x^2 $\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$		*Una recta doble.* Una recta de centros, que son los ceros, todos singulares, un punto de infinito, que es singular, una asíntota.

En esta tabla, las cónicas reales "más degeneradas"pueden entenderse como la parte que se ve de una cónica compleja "imaginaria". Por ejemplo, el punto doble $x^2 + y^2 = 0$ es lo único que se ve de las dos rectas complejas trasversales $(x-\sqrt{-1}y)(x+\sqrt{-1}y)$. De manera similar la cónica degenerada vacía $1+x^2$ es la parte real de las dos rectas complejas paralelas $(x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})$. En cuanto a la cónica invisible no degenerada, proviene de una hipérbola compleja cuyos ceros son todos imaginarios (y por ello no los vemos). En todo caso, los dibujos reales son "reales", y cuando los usamos para representar una cónica compleja sólo son simbólicos. Piénsese que el plano complejo tiene dimensión real 4, así que es imposible dibujarlo plano.

Observación 16.2. Un buen uso de esta tabla permite clasificar fácilmente cualquier cónica a partir de su matriz

$$\widehat{M} = \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right)$$

En efecto, en primer lugar se calcula el determinante de $\widehat{M}$, para decidir si es una cónica degenerada o no. Si no lo es, se calculan los puntos de infinito, y su número nos dice el tipo. En el caso real tal vez haya que distinguir entre la cónica degenerada vacía y la elipse. Esto se puede hacer buscando el centro e intersecando con cualquier recta que pase por él.

Si la cónica es degenerada, los puntos de infinito también limitan la búsqueda. En el peor de los casos podemos tener que decidir entre la cónica degenerada vacía, un par de rectas paralelas o una recta doble. Lo más fácil es intersecar con una recta arbitraria, que dará nada, dos puntos distintos o un punto.

Pero en realidad, cualquier propiedad geométrica que la clasificación nos muestre en unos tipos y no en otros puede servir para esta tarea. Desde el punto de vista algebraico, el determinante de M también es útil: según sea nulo o no podremos reducir la búsqueda. En el caso real, el signo de ese determinante cuando no es nulo también limita el tipo. ∎

Tema 17. Superficies cuádricas afines

En esta lección hacemos lo que en la anterior, pero para cuádricas de un espacio afín X de dimensión 3, es decir, obtenemos las tablas de clasificación de las superficies cuádricas afines.

(17.1) Superficies cuádricas afines. En un espacio afín de dimensión 3 consideramos coordenadas (x, y, z), y respecto de ellas escribimos todas las ecuaciones reducidas diferentes de la clasificación. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ son las diecisiete siguientes, que ordenamos por el rango de su matriz:

(1) De rango 4: $1+x^2+y^2+z^2$, $1-x^2+y^2+z^2$, $1-x^2-y^2+z^2$, $1-x^2-y^2-z^2$, x^2+y^2-z, x^2-y^2-z.

Estas son las no degeneradas. Las de rangos menores, y por tanto degeneradas, son las siguientes:

(2) De rango 3: $1+x^2+y^2$, $1-x^2+y^2$, $1-x^2-y^2$, $x^2+y^2+z^2$, $x^2+y^2-z^2$, x^2-z.

Estas tiene un único punto singular, que puede ser un punto de infinito. Las demás cuádricas degeneradas, con infinitos puntos singulares son:

(3) De rango 2: $1+x^2$, $1-x^2$, x^2+y^2, x^2-y^2.

(4) De rango 1: x^2.

Como ya sabemos, algunas de las ecuaciones anteriores son equivalentes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cuerpo sobre el que quedan sólo ocho ecuaciones no equivalentes:

$$1-x^2-y^2+z^2,\ x^2-y^2-z,\ 1-x^2+y^2,$$
$$x^2+y^2-z^2,\ x^2-z,\ 1-x^2,\ x^2-y^2,\ x^2.$$

Por los mismos motivos que para cónicas, hemos preferido utilizar algunos signos negativos. ▮

Veamos con un par de ejemplos como se analizan las ecuaciones anteriores.

Ejemplo 17.2. Consideremos la cuádrica $1 - x^2 - y^2 + z^2$, cuya matriz es

$$\widehat{M} = \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right).$$

(1) En primer lugar vemos que es no degenerada, pues el determinante de esta matriz es $+1 \neq 0$. Para saber el aspecto del conjunto Q de sus ceros observamos que en cada plano $z = t$ los ceros cumplen $x^2 + y^2 = 1 + t^2 \geq 1$, luego tenemos elipses cada vez mayores a medida que $|t| \to +\infty$. Así, los ceros generan todo el espacio. Es fácil dibujar la superficie teniendo en cuenta que el plano $y = 0$ la corta según la hipérbola $x^2 - z^2 = 1$. Este tipo de secciones planas son muy útiles. Como ejercicio el lector puede comprobar que *cualquier plano corta a* Q.

(2) Los centros se obtienen resolviendo el sistema $mx^t + Mx^t = 0$, que en nuestro caso es $x = y = z = 0$,, y resulta un único centro, que no es un cero: $Q(0, 0, 0) = 1 \neq 0$. Por tanto, la cuádrica no tiene ceros singulares.

(3) Los puntos de infinito se obtienen resolviendo $xMx^t = 0$, que en nuestro caso es $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$. Las soluciones son $\big(\lambda, \mu, \pm\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\big)$, con λ, μ no nulos simultáneamente. Como dependen de dos parámetros, hay infinitas soluciones no proporcionales, luego infinitos puntos de infinito. Y ninguno es singular, pues $Mx^t = 0$ significa $-\lambda = -\mu = 0$.

(4) Calculemos además las secciones planas tangentes de Q. Sea $p = (a, b, c) \in Q$, con plano tangente $T_pQ : 1 - ax - by + cz = 0$. Supongamos $c \neq 0$ (el caso $c = 0$ se haría aparte). Resulta:

$$Q \cap T_pQ : \left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ 1 - ax - by + cz = 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} c^2z^2 = c^2x^2 + c^2y^2 - c^2 \\ c^2z^2 = (ax + by - 1)^2 \end{array} \right.$$

$$\rightsquigarrow c^2x^2 + c^2y^2 - c^2 = (ax + by - 1)^2$$

$$\rightsquigarrow (1 + c^2) - 2ax - 2by + (a^2 - c^2)x^2 + 2abxy + (b^2 - c^2)y^2 = 0.$$

La última ecuación es la de una cónica en las variables x, y, con matriz:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 + c^2 & a & b \\ \hline a & a^2 - c^2 & ab \\ b & ab & b^2 - c^2 \end{array}\right).$$

El determinante de esta matriz es $c^4(1 - a^2 - b^2 + c^2)$, luego nulo ya que $p \in Q$. Así, es una cónica degenerada, y para determinar cual miramos sus puntos de infinito. Vienen dados por la ecuación:

$$(a^2 - c^2)x^2 + 2abxy + (b^2 - c^2)y^2 = 0.$$

Viendo esta ecuación como un polinomio de grado 2 en x, su discriminante es

$$\Delta = a^2b^2y^2 - (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)y^2 = y^4c^4(a^2 + b^2 - c^2) = c^4 > 0,$$

luego hay dos soluciones, y por tanto dos puntos de infinito. La cónica es un par de rectas trasversales. También se puede decidir esto calculando el menor de orden dos señalado, que vale $-c^4 < 0$, lo que distingue a los pares de rectas trasversales.

(5) Los mismos cálculos anteriores cuando el plano no es tangente (es decir, cuando $1 - a^2 - b^2 + c^2 \neq 0$), dicen que su intersección con Q es una cónica con determinante no nulo, luego no degenerada. Y vacía no es, pues ya hemos dejado dicho que cualquier plano corta al conjunto Q.

(6) Lo anterior completa la discusión de las secciones de Q por planos que no pasan por el origen. Para éstos aparecen además secciones que son pares de rectas paralelas. No entramos en detalles. ∎

Ejemplo 17.3. Ahora analicemos la cuádrica $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, cuya matriz es

$$\widehat{M} = \left(\begin{array}{c|c} m_0 & m \\ \hline m^t & M \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right).$$

(1) Es degenerada, pues $\det(\widehat{M}) = 0$. El conjunto Q de sus ceros corta cada plano $z = t$ según la ecuación $x^2 + y^2 = t^2$, que es una elipse que es mayor a medida que $|t| \to +\infty$, y que colapsa al punto $(0, 0, 0)$ para $t \to 0$. Los ceros generan todo el espacio, y podríamos dibujar la superficie con esta información.

(2) El sistema $mx^t + Mx^t = 0$ de los centros tiene sólo la solución $x = y = z = 0$. Este único centro es un cero, que es el único cero singular.

(3) Los puntos de infinito están dados por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Como en el caso anterior, hay infinitos, pero ninguno singular.

(4) Calculemos la sección de Q por su plano tangente en $p = (a, b, c) \in Q$

$(a^2+b^2-c^2=0)$ con $c\neq 0$. Resulta:

$$Q\cap T_pQ:\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=0\\ ax+by-cz=0\end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} c^2z^2=c^2x^2+c^2y^2\\ c^2z^2=(ax+by)^2=a^2x^2+2abxy+b^2y^2\end{array}\right.$$

$$\rightsquigarrow (a^2-c^2)x^2+2abxy+(b^2-c^2)y^2=0,$$

ecuación de la cónica de matriz:

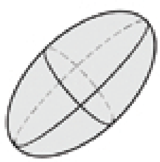
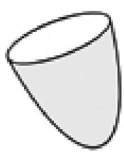
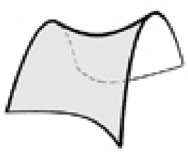
$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & a^2-c^2 & ab\\ 0 & ab & b^2-c^2\end{array}\right).$$

Argumentando como en el ejemplo anterior, esta vez resulta una recta doble.

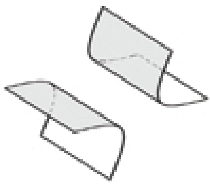
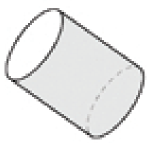
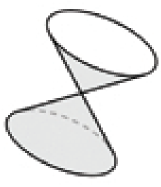
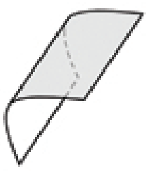
(5) La intersección con un plano no tangente es siempre una de las tres cónicas no degeneradas no vacías. ∎

De esta guisa se van analizando todas las ecuaciones para obtener las tres tablas que siguen. Las tablas permiten clasificar una superficie cuádrica dada, con el mismo enfoque que explicamos para la tabla de cónicas. Aquí hay más tipos, pero también más información. Si se aprovecha bien toda ella la clasificación puede hacerse rápidamente. El rango acelera la búsqueda, y cualquier información geométrica también. Por ejemplo, sólo dos cuádricas no degeneradas contienen rectas (y por ello se denominan *regladas*).

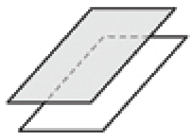
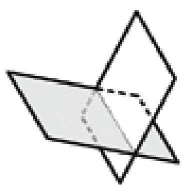
SUPERFICIES CUÁDRICAS NO DEGENERADAS

$1+x^2+y^2+z^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$		*Cuádrica invisible no degenerada.* Un único centro, sin ceros, sin puntos de infinito.
$1-x^2+y^2+z^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$		*Hiperboloide elíptico o de dos hojas* Un único centro, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas trasversales no vacías son elipses, hipérbolas o parábolas. Sus secciones planas tangentes son puntos.
$1-x^2-y^2+z^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$		*Hiperboloide hiperbólico o de una hoja.* Un único centro, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas trasversales son elipses, hipérbolas o parábolas, o pares de rectas paralelas. Sus secciones planas tangentes son pares de rectas trasversales.
$1-x^2-y^2-z^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$		*Elipsoide.* Un único centro, los ceros generan el espacio, ningún punto de infinito. Sus secciones planas trasversales no vacías son elipses. Sus secciones planas tangentes son puntos.
x^2+y^2-z $\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & -1/2 \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1/2 & & & 0 \end{array}\right)$		*Paraboloide elíptico.* Ningún centro, los ceros generan el espacio, un único punto de infinito. Sus secciones planas trasversales no vacías son elipses. Sus secciones planas tangentes son puntos.
x^2-y^2-z $\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & -1/2 \\ \hline & 1 & & \\ & & -1 & \\ -1/2 & & & 0 \end{array}\right)$		*Paraboloide hiperbólico o silla de montar.* Ningún centro, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas trasversales son elipses, hipérbolas o parábolas. Sus secciones planas tangentes son pares de rectas trasversales.

SUPERFICIES CUÁDRICAS DEGENERADAS
con un único punto singular

$1+x^2+y^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$		*Cuádrica invisible degenerada.* Recta de centros, sin ceros, un único punto de infinito, que es singular.
$1-x^2+y^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$		*Cilindro hiperbólico* Recta de centros, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas trasversales no vacías son pares de rectas paralelas o hipérbolas. Sus secciones planas tangentes son rectas dobles.
$1-x^2-y^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$		*Cilindro elíptico* Recta de centros, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas trasversales no vacías son pares de rectas paralelas o elipses. Sus secciones planas tangentes son rectas dobles.
$x^2+y^2+z^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$		*Punto doble.* Un único centro, que es su único cero, y su único punto singular, ningún punto de infinito.
$x^2+y^2-z^2$ $\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$		*Cono.* Un único centro, que es el único punto singular, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas trasversales son pares de rectas paralelas, elipses, hipérbolas o parábolas. Sus secciones planas tangentes son rectas dobles.
x^2-z $\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & -1/2 \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ -1/2 & & & 0 \end{array}\right)$		*Cilindro parabólico.* Ningún centro, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito, uno único de ellos singular. Sus secciones planas trasversales no vacías son pares de rectas paralelas o parábolas. Sus secciones planas tangentes son rectas dobles.

SUPERFICIES CUÁDRICAS DEGENERADAS
con infinitos puntos singulares

$1+x^2$ $\begin{pmatrix} \begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array} \end{pmatrix}$		*Cuádrica invisible muy degenerada* Plano de centros, sin ceros, infinitos puntos de infinito, todos singulares.
$1-x^2$ $\begin{pmatrix} \begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array} \end{pmatrix}$		*Dos planos paralelos* Plano de centros, los ceros generan el espacio y son no singulares, infinitos puntos de infinito de los que infinitos son singulares.
x^2+y^2 $\begin{pmatrix} \begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array} \end{pmatrix}$		*Recta doble.* Recta de centros, que son los ceros, y todos singulares, un único punto de infinito, que también es singular.
x^2-y^2 $\begin{pmatrix} \begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{array} \end{pmatrix}$		*Dos planos trasversales.* Recta de centros, que son puntos singulares, infinitos puntos de infinito de los que uno es singular.
x^2 $\begin{pmatrix} \begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array} \end{pmatrix}$		*Plano doble.* Plano de centros, que son los ceros, y todos puntos singulares, infinitos puntos de infinito, todos ellos singulares.