11 de abril de 2020

Un teorema de Sierpinski

Manuel Morán

Se llama *continuo* a un espacio topológico compacto, conexo y Hausdorff. El siguiente resultado se debe a Waclaw Sierpinski (1882–1969).

Teorema. *Un continuo no es unión numerable no trivial de cerrados disjuntos.*

Demostración. Por reducción al absurdo suponemos $X = \bigcup_{k\geq 1} F_k$ con los F_k cerrados disjuntos y al menos dos de ellos no vacíos: $2 \leq \#\{k : F_k \neq \varnothing\}$. Afirmamos que:

(1) *Existe un continuo $X_1 \subset X$ tal que $X_1 \cap F_1 = \varnothing$ y $2 \leq \#\{k : F_k \cap X_1 \neq \varnothing\}$.*

En efecto, si $F_1 = \varnothing$ basta tomar $X_1 = X$, por tanto supondremos $F_1 \neq \varnothing$. Por hipótesis existe $i_1 \neq 1$ con $F_{i_1} \neq \varnothing$. Por ser F_1 y F_{i_1} compactos disjuntos en un espacio Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U \supset F_1$, $V \supset F_{i_1}$. Más aún, $\overline{V} \cap U = \varnothing$, pues si hubiera un punto $x \in \overline{V} \cap U$, por ser adherente a V su entorno U tendría intersección no vacía $U \cap V \neq \varnothing$.

Ahora, como F_{i_1} es no vacío, tomamos $x \in F_{i_1}$ y consideramos la componente conexa $C(x)$ de x en $\overline{V}$. Claramente $C(x)$ es un continuo, y por construcción $C(x) \cap F_1 = \varnothing$. Vamos a ver que

(2) *$C(x)$ coincide con la intersección de todos los conjuntos $B \subset \overline{V}$ que contienen al punto x son a la vez cerrados y abiertos en $\overline{V}$.*

Denotemos esa intersección $A = \bigcap B$. Cada uno de los B es abierto y cerrado en $\overline{V}$ por tanto $B \cap C(x)$ es abierto y cerrado en $C(x)$. Como además $B \cap C(x) \neq \varnothing$ (contiene al punto x), concluimos que $B \cap C(x) = C(x)$, esto es $C(x) \subset B$. En suma, $C(x)$ está contenido en $A = \bigcap B$. Para el otro contenido $A \subset C(x)$, probaremos que

(3) *A es conexo.*

Supongamos $A = K_1 \cup K_2$, con K_1, K_2 cerrados disjuntos de A. Como A es cerrado en $\overline{V}$, que lo es en X, los dos conjuntos K_1, K_2 son cerrados en X y por tanto compactos. Por ser X Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos W_1, W_2 de X tales que $W_1 \supset K_1$ y $W_2 \supset K_2$. El punto x estará en uno de los K_i, por ejemplo $x \in K_1 \subset W_1$.

De $A = \bigcap B \subset W_1 \cup W_2$ tomando complementarios resulta $\bigcup (X \setminus B) \supset (X \setminus W_1) \cap (X \setminus W_2)$. Este último conjunto es cerrado en X, luego compacto, y podremos extraer un subrecubrimiento finito

$$\bigcup_{\text{finito}} (X \setminus B) \supset (X \setminus W_1) \cap (X \setminus W_2).$$

Tomando complementarios de nuevo:

$$\bigcap_{\text{finito}} B \subset W_1 \cup W_2,$$

y la intersección *finita* de la izquierda, que denotamos B_0, es un conjunto abierto y cerrado de $\overline{V}$ que contiene al punto x. Ahora observamos que

(4) $B_0^* = B_0 \cap W_1$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $\overline{V}$ *que contiene a* x.

Ciertamente, como W_1 y W_2 son disjuntos y $B_0 \subset W_1 \cup W_2$ tenemos

$$B_0 \cap W_1 = B_0 \cap (X \setminus W_2),$$

y el lado izquierdo de esta desigualdad nos dice que el conjunto es abierto, mientras el lado derecho nos dice que es cerrado.

De (4) deducimos que B_0^* es uno de los B que intervienen en la intersección $A = \bigcap B$. Por consiguiente

$$K_2 \subset A = \bigcap B \subset B_0^* \subset W_1,$$

luego $K_2 \subset W_1 \cap W_2 = \varnothing$.

Todo esto muestra que no podemos escribir A como unión de dos cerrados disjuntos no vacíos, luego A es conexo y queda probado (2): $C(x) = A$.

Para completar la demostración de (1), observemos que si $C(x) \not\subset V$, como $C(x) \subset \bigcup_k F_k$, debe existir $i_2 \neq i_1$ con $F_{i_2} \cap C(x) \neq \varnothing$, y $X_1 = C(x)$ sería el continuo buscado. Así que veamos que efectivamente

(5) $C(x) \not\subset V$.

Pero, si $C(x) = \bigcap B \subset V$, tomando complementarios

$$\bigcup (X \setminus B) \supset X \setminus V,$$

y como $X \setminus V$ es compacto, debe haber un subrecubrimiento finito

$$\bigcup_{\text{finita}} (X \setminus B) \supset X \setminus V.$$

De nuevo complementando, obtenemos $\bigcap_{\text{finita}} B \subset V$. Tal intersección finita es: (i) abierto en $\overline{V}$, luego en V, luego en X, y (ii) cerrado en $\overline{V}$, luego en X. Además, contiene al punto x, y como X es conexo, resulta que coincide con todo X. Hemos llegado a una contradicción: $X \subset V$ y $X \setminus V \supset U \neq \varnothing$. Esto completa la demostración de nuestra afirmación (1).

Ahora, podemos repetir todo el argumento con $X_1 = \bigcup_k F_k \cap X_1$ para obtener otro continuo $X_2 \subset X_1$ tal que $X_2 \cap F_2 = \varnothing$ y al menos dos cerrados $F_k \cap X_2$ no vacíos. Es claro que por inducción, empezando con $X_0 = X$, obtenemos una colección numerable de continuos encajados $X_n \subset X_{n-1}$, $n \geq 1$, tales que

$$X_n \cap F_n = \varnothing \qquad \text{y} \qquad 2 \leq \#\{k : F_k \cap X_n \neq \varnothing\}.$$

Es claro que esta sucesión de cerrados X_n tiene la propiedad de la intersección finita:

$$X_1 \cap \cdots \cap X_p = X_p \neq \varnothing,$$

para cualquier $p \geq 1$, luego como X es compacto, $\bigcap_n X_n \neq \varnothing$.

Por fin, sea z un punto de esa última intersección. Al estar z en X, podemos encontrar un F_k que lo contiene, y por ello:

$$z \in F_k \cap \bigcap_n X_n \subset F_k \cap X_k = \varnothing.$$

Este absurdo termina la demostración del teorema. $\square$

Ilustremos la utilidad del resultado anterior con un ejemplo:

Ejemplo 1. *En un conjunto numerable X con la topología $\mathcal{T}_{CF}$ de los complementos finitos todos los caminos son constantes.*

Consideremos un camino $\sigma : [0,1] \to X$ continuo para $\mathcal{T}_{CF}$. Por ser σ una aplicación continua y ser los puntos $x \in X$ cerrados en $\mathcal{T}_{CF}$, $\sigma^{-1}(x)$ es cerrado en $[0,1]$. Como las imágenes inversas $\sigma^{-1}(x)$ son disjuntas y recubren el continuo $[0,1]$, por el teorema de Sierpinski existe una única $\sigma^{-1}(x_0) \neq \varnothing$. Por tanto $[0,1] = \sigma^{-1}(x_0)$, o lo que es lo mismo $\sigma[0,1] = \{x_0\}$ y σ es constante. $\square$

Como contrapartida tenemos lo siguiente:

Ejemplo 2. *Sea X un conjunto con cardinal al menos la potencia del continuo. Equipado con la topología $\mathcal{T}_{CF}$ de los complementos finitos X es conexo por arcos.*

Obsérvese que si admitimos la hipótesis del continuo, X es simplemente no numerable.

Sean $a, b \in X$. Por la hipótesis, existe una aplicación inyectiva $\sigma : (0,1) \to X \setminus \{a,b\}$, que se extiende a $[0,1]$ definiendo $\sigma(0) = a, \sigma(1) = b$. Resulta que esta extensión es continua: si $F \subset X$ es cerrado, es finito, luego $\sigma^{-1}(F)$ es finito, luego cerrado, en $[0,1]$. Por tanto, σ es un arco de a a b.