# Determinación finita en anillos de series

**José F. Fernando*** **y Jesús M. Ruiz***

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid
Cantoblanco, 28049 Madrid, España
josefrancisco.fernando@uam.es

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, España
jesusr@mat.ucm.es

*Dedicado al Profesor Enrique Outerelo Domínguez.*

**ABSTRACT**

En este trabajo obtenemos algunos resultados básicos sobre determinación finita y clasificación de singularidades para series con coeficientes en un cuerpo de característica cero. Estos resultados son clásicos para coeficientes complejos, y reales, pero requieren una revisión cuidadosa para cuerpos más generales.

*2000 Mathematics Subject Classification:* 32S05, 14B07, 14H20.

*Key words:* Determinación finita, casideterminación finita, clasificación de singularidades simples.

## 1. Introducción

No es necesario explicar la importancia de la noción de determinación finita en el estudio de las singularidades de cualquier tipo: diferenciable, analítico real y/o complejo, algebroide... Basta leer el magnifico survey [Wa], y las demostraciones detalladas de

*Ambos autores han sido parcialmente subvencionados por el proyecto de investigación BFM 2002-04979.

[MaOu] para hacerse una buena idea de ello. Dentro de la gran variedad de problemas que se pueden considerar en este campo, nuestro objetivo aquí es obtener una generalización modesta del teorema más básico de determinación finita. Hay que decir por otra parte que esa generalización se plantea de manera natural al abordar algunos problemas de Geometría Real relacionados con las sumas de cuadrados (véase [Rz]). Otras generalizaciones, obtenidas por procedimientos mucho más sofisticados, pueden verse en [CuSr].

Para ser precisos, recordemos las notaciones y terminología habituales. En lo sucesivo $K$ denota un cuerpo de característica cero y $K[[x]] = K[[x_1, \dots, x_n]]$ el anillo de series formales en $n$-variables con coeficientes en $K$; para $n = 1$ se suele preferir la notación $K[[t]]$. Como es bien sabido, el anillo $K[[x]]$ tiene un comportamiento algebraico excelente. Por ejemplo, es local regular de dimensión $n$, y su ideal maximal es $\mathfrak{m}_n = (x_1, \dots, x_n)K[[x]]$. El *ideal jacobiano* de una serie $f \in K[[x]]$ es el ideal $J(f)$ generado por las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Dadas dos series $f, g \in \mathfrak{m}$ diremos que

- $f$ es *casi-equivalente* a $g$ si existe un automorfismo $\Phi$ de $K[[x]]$ tal que $\Phi(f)$ y $g$ generan el mismo ideal de $K[[x]]$, es decir, si existe una unidad $u \in K[[x]]$ tal que $\Phi(f) = ug$. Nótese que $f, g$ son casi-equivalentes si y sólo si las $K$-álgebras $K[[x]]/(f)$, $K[[x]]/(g)$ son $K$-isomorfas.

- $f$ es *equivalente* a $g$ si existe un automorfismo $\Phi$ de $K[[x]]$ tal que $\Phi(f) = g$.

El concepto fundamental es el siguiente:

**Definición 1.1** *Se dice que una serie $f \in \mathfrak{m}$ está* $k$-casideterminada *(resp.* $k$-determinada*) cuando toda otra serie $g \equiv f \mod \mathfrak{m}^{k+1}$ es casiequivalente (resp. equivalente) a $f$. Si $f$ está $k$-casideterminada (resp. $k$-determinada) para algún $k \geq 1$, entonces se dice que $f$ está* finitamente casideterminada *(resp.* finitamente determinada*).*

Por ejemplo, toda serie $k$-casideterminada (resp. $k$-determinada) es casiequivalente (resp. equivalente) a un polinomio de grado $k$.

El principal resultado general que se puede probar es el siguiente:

**Teorema 1.2** *Toda serie $f \in \mathfrak{m}^2 \subset K[[x]]$ tal que $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}J(f) + (f)$ (resp. $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}J(f)$) está $k$-casideterminada (resp. $k$-determinada).*

En el caso de que el cuerpo $K$ tenga una valoración y por tanto un valor absoluto, todo esto se reformula para series convergentes. No detallaremos esto aquí.

La aplicación más evidente del teorema 1.2 es la clasificación de singularidades. De manera razonable, siempre se comienza esa clasificación por las singularidades más sencillas, sencillez que se refiere a algún tipo de invariante u operación geométrica.

En este sentido, se introducen las denominadas *singularidades simples*. Para describir este concepto, nos fijamos ahora en el caso complejo, es decir, en los gérmenes de función holomorfa en el origen $0 \in \mathbb{C}^n$, o, equivalentemente, en las series convergentes $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0} = \mathbb{C}\{x\}$.

Una *singularidad simple* es un germen de función holomorfa $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ que tiene una cantidad finita de tipos de equivalencia de deformaciones infinitesimales. En [JoPf, 9.2.7] se prueba el siguiente teorema de clasificación:

**Teorema 1.3** *Los tipos de equivalencia de las singularidades simples complejas son exactamente los siguientes:*

$$\begin{aligned}
&A_k : f(x) = x_1^k + x_2^2 + \cdots + x_n^2, && k \geq 1,\\
&D_k : f(x) = x_1^k + x_1x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2, && k \geq 3,\\
&E_6 : f(x) = x_1^3 + x_2^4 + x_3^2 + \cdots + x_n^2,\\
&E_7 : f(x) = x_1^3 + x_1x_2^3 + x_3^2 + \cdots + x_n^2,\\
&E_8 : f(x) = x_1^3 + x_2^5 + x_3^2 + \cdots + x_n^2.
\end{aligned}$$

Algo parecido se puede hacer en el caso real, aunque aparecen algunos tipos más, debido a que $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado:

**Teorema 1.4** *Los tipos de equivalencia de las singularidades simples reales son exactamente los siguientes:*

$$\begin{aligned}
&A_{2k+1,s} : f(x) = x_1^{2k+1} + x_2^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2, \ \ k \geq 0,\\
&A_{2k,s}^+ : f(x) = x_1^{2k} + x_2^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2, \ \ k \geq 1,\\
&A_{2k,s}^- : f(x) = -x_1^{2k} + x_2^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2, \ \ k \geq 1,
\end{aligned}$$

*con* $1 \leq s \leq n$, *y*

$$\begin{aligned}
&D_{k,s}^+ : f(x) = x_1^k + x_1x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2, \ \ k \geq 3,\\
&D_{k,s}^- : f(x) = -x_1^k + x_1x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2, \ \ k \geq 3,\\
&E_{6,s}^+ : f(x) = x_1^3 + x_2^4 + x_3^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2,\\
&E_{6,s}^- : f(x) = x_1^3 - x_2^4 + x_3^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2,\\
&E_{7,s} : f(x) = x_1^3 + x_1x_2^3 + x_3^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2,\\
&E_{8,s} : f(x) = x_1^3 + x_2^5 + x_3^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \cdots - x_n^2,
\end{aligned}$$

*con* $2 \leq s \leq n$.

Si se quiere hacer lo mismo para un cuerpo $K$ más general, se tiene que aclarar qué es una *deformación infinitesimal* $F_t$ *de una serie* $f \in K[[x]]$. Pero esto es sencillo: $F_t$ es simplemente una serie en una variable adicional $F_t = F(t,x) \in K[[t,x]]$ tal que $F_0 = F(0,x) = f$. La dificultad es que en general no tiene sentido el procedimiento propio de $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$: evaluar en $t \in K^n$ suficientemente próximo al origen. Para remediar esto se considera $F_t \in K((t))[[x]]$, de manera que podemos estudiar el tipo de equivalencia de $F_t$ sobre el cuerpo $K((t))$; para apreciar esta interpretación, piénsese que de este modo $t$ es infinitesimal respecto de$K$.

Todo esto se aplica, con cierto cuidado pero sin sorpresas mayores, si $K$ es real o algebraicamente cerrado. Sin embargo, al intentar ir más allá surgen dificultades significativas. Veamos un ejemplo ilustrativo:

**Ejemplo 1.5** Consideramos la serie $f(x,y) = x^2 + y^3 \in \mathbb{Q}[[x,y]]$ y las deformaciones $F_p(x,y) = x^2 + y^3 + pt^2y^2 \in Q[[t,x,y]]$ donde $p \geq 1$ es un número primo. En el anillo $\mathbb{Q}((t))[[x,y]]$ la serie $F_{p,t}(x,y) = F_p(t,x,y)$ es equivalente a $G_p = x^2 + py^2$. Sin embargo, para $p,q$ primos distintos, las series $G_p, G_q$ no son equivalentes en $\mathbb{Q}((t))[[x,y]]$.

Al hacer los cómputos del ejemplo anterior, se advierte que la obstrucción principal es que los polinomios del tipo $t^{2k} - a^2$ no tienen necesariamente raíces (como ocurre en los números complejos y en los números reales). Teniendo todo esto en cuenta, la noción adecuada de simplicidad para un cuerpo arbitrario $K$ de caracteristica cero debe tener carácter absoluto, y aplicarse al cierre algebraico de los cuerpos considerados, como se hace típicamente en geometría algebraica. Para ello consideramos el cierre algebraico $\bar{K}$ de $K$, y el cuerpo $\bar{K}((t^*))$ de series de Puiseux con coeficientes en $\bar{K}$. Entonces:

**Definición 1.6** *Una serie* $f \in \mathfrak{m} \subset K[[x]]$ *se llama* simple *si en* $\bar{K}((t^*))[[x]]$ *tiene una cantidad finita de tipos de equivalencia de deformaciones infinitesimales* $F_t = F(t,x) \in \bar{K}[[t,x]]$.

Una propiedad importante de estas singularidades simples es la siguiente (bien conocida en los casos real y complejo):

**Proposición 1.7** *Toda singularidad simple* $f$ *es* aislada, *es decir, el ideal* $J^*(f) = J(f) + (f)$ *contiene una potencia del ideal maximal.*

*Demostración.* La demostración para $K$ algebraicamente cerrado es la misma de [JoPf, 9.3.19], y para $K$ arbitrario, se sigue de ser fielmente plana la extensión $K[[x]] \subset \bar{K}[[x]]$. □

Hay que señalar que para definir las singularidades aisladas puede usarse el ideal jacobiano $J$ en lugar de su modificación $J^*$; esto se debe a que $f \in \sqrt{J(f)}$ (hecho importante que aquí no necesitamos). Preferimos el enunciado con $J^*$, pues lo natural es pensar que los puntos singulares de $f = 0$ estén dados por las ecuaciones

$$f = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Dicho esto, se establece el siguiente teorema de clasificación:

**Teorema 1.8** *Los tipos de equivalencia de las singularidades simples de* $K[[x]]$ *son los siguientes:*

$$\begin{array}{ll}
A_{2k}: & f(x) = a_1x_1^{2k} + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \cdots + a_nx_n^2, \quad k \geq 1, \\
A_{2k+1}: & f(x) = a_1x_1^{2k+1} + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \cdots + a_nx_n^2, \; k \geq 0, \\
D_3^*: & f(x) = a_0x_1^3 + a_1x_1x_2^2 + a_2x_2^3 + a_3x_3^2 + \cdots + a_nx_n^2, \\
 & \qquad\qquad a_0t^3 + a_1t^2 + a_2 \in K[t] \quad \textit{irreducible} \\
D_k: & f(x) = a_1x_1^k + a_2x_1x_2^2 + a_3x_3^2 + \cdots + a_nx_n^2, \;\; k \geq 3, \\
E_6: & f(x) = a_1x_1^3 + a_2x_2^4 + a_3x_3^2 + \cdots + a_nx_n^2, \\
E_7: & f(x) = a_1x_1^3 + a_2x_1x_2^3 + a_3x_3^2 + \cdots + a_nx_n^2, \\
E_8: & f(x) = a_1x_1^3 + a_2x_2^5 + a_3x_3^2 + \cdots + a_nx_n^2.
\end{array}$$

*con todos los coeficientes* $a_i \neq 0$.

**Observación 1.9** Algunas singularidades del enunciado anterior pueden simplificarse algo más aún. Por ejemplo, si hacemos el cambio $(x_1, x_2) \mapsto (a_1^3a_2^2x_1, a_1^2a_2x_2)$ en $E_8$, podemos suponer $a_1 = a_2$. Sin embargo, las simplificaciones significativas dependen de cómo se puedan manipular los coeficientes en $K$. En todo caso, dos singularidades de tipos distintos no son nunca equivalentes. Nótese que si $K$ es un cuerpo real o algebraicamente cerrado no se tiene el tipo $D_3^*$.

Los autores deseamos agradecer al Prof. Enrique Outerelo toda la ayuda ofrecida durante nuestra formación y el desarrollo de nuestra actividad profesional. Su presencia constante, su ejemplo y su dedicación durante todos estos años han sido el mejor estímulo posible; muchas cosas hubieran sido imposibles sin él. Queden así expresados nuestro respeto y nuestra admiración por su dilatada labor como matemático, maestro y compañero.

## 2. Demostración del teorema de determinación finita

En esta sección demostraremos el teorema 1.2. Empezamos por establecer el siguiente lema, que probamos utilizando el argumento de [JoPf, 9.1.7], pero con *(i)* las modificaciones imprescindibles para $K \neq \mathbb{C}$, y *(ii)* ciertas precisiones significativas incluso para $K = \mathbb{C}$.

**Lema 2.1** *Sean* $F \in K[[x,y]] = K[[x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m]]$ *y* $c \geq 0$ *un entero. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(1) Se cumple*

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} \in (x)^c\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\Big) + (F)$$

$$\textit{(resp. } \frac{\partial F}{\partial y_j} \in (x)^c\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\Big) \textit{ )}$$

*para todo* $j = 1\dots m$.

*(2) Existen series* $u,\varphi_1,\dots,\varphi_n \in K[[x,y]]$ *tales que:*

- $u(x,0) = 1$ *(resp.* $u = 1$*),*
- $\varphi_i(x,0) = x_i$,
- $\varphi_i - x_i \in (x)^c = (x_1,\dots,x_n)^c \subset K[[x,y]]$
- $F(\varphi,0) = u(x,y)F(x,y)$, *donde* $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

*Demostración de* (2) $\Rightarrow$ (1). Por las hipótesis, la sustitución $(x,y) \mapsto (\varphi,y)$ define un automorfismo $K[[x,y]] \to K[[x,y]]$ (teorema de las funciones implícitas), que coincide con la identidad mod $(x)^c$. Su inverso, que cumplirá lo mismo, estará definido por una sustitución $(x,y) \mapsto (\psi,y) = (\psi_1,\dots,\psi_n,y)$; en particular $\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} \in (x)^c$.

Ahora hacemos $x = \psi$ en la igualdad $F(\varphi(x,y),0) = u(x,y)F(x,y)$, para obtener $F(x,0) = u(\psi,y)F(\psi,y)$. Derivando respecto a $y_j$ queda:

$$0 = u(\psi,y)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\psi,y)\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial F}{\partial y_j}(\psi,y)\right) + gF(\psi,y) = 0.$$

En fin, hacemos $x = \varphi$ en esta expresión y obtenemos:

$$u\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(\varphi,y) + \frac{\partial F}{\partial y_j}\right) + hF = 0,$$

de donde por ser $u$ unidad se deduce (1). Si $u = 1$, entonces $g = 0$ y resulta la versión correspondiente de (1). $\square$

*Demostración de* (1) $\Rightarrow$ (2). Consiste esencialmente en resolver formalmente ecuaciones diferenciales ordinarias, que es un asunto puramente algebraico. En primer lugar, por hipótesis existen $\xi_1, \ldots, \xi_n \in (x)^c K[[x,y]]$ y $\zeta \in K[[x,y]]$ tales que

$$\frac{\partial F}{\partial y_m} = -\zeta \cdot F + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (*)$$

(esta expresión incluye el caso en el que $\zeta = 0$). Ahora, buscamos las soluciones $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ del sistema

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \xi_i(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m - t), \ 1 \leq i \leq n.$$

Serán $\Phi_i = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} a_{ik} t^k$, $a_{ik} \in K[[x,y]]$, y derivando respecto de $t$ en $t = 0$ se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{i0} &= \Phi_i(0) \\ a_{i1} &= \xi_i(a_{10}, \ldots, a_{n0}, y) \\ 2a_{i2} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(a_{10}, \ldots, a_{n0}, y)\, a_{k1} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_m}(a_{10}, \ldots, a_{n0}, y) \\ &\vdots \end{aligned}$$

De este modo, fijadas las condiciones iniciales $\Phi_i(0)$, se determinan sucesivamente todos los $a_{ik}$ a partir de los anteriores $a_{j\ell}$. En nuestro caso, tomamos $\Phi_i(0) = x_i$. Por otra parte, la condición $\xi_i \in (x)^c$ implica que cualquier solución cumple $a_{ik} \in (x)^c$ para $k \geq 1$.

A continuación, consideramos la ecuación diferencial (lineal)

$$\frac{dU}{dt} = \zeta(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m - t)U.$$

En este caso, todas las soluciones se obtienen a partir de una: si $U = U_1(x,y,t)$ es la solución con condición inicial $U(0) = 1$, todas las demás son múltiplos suyos. En particular $U = U_1(x,y,t)F(x,y)$ es la solución con condición inicial $U(0) = F(x,y)$. Pero por otra parte, esta solución es

$$U = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m - t).$$

En efecto, es claro que se cumple la condición inicial requerida, y derivando comprobamos que es una solución. Escribimos $z = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m - t)$ para simplificar la notación:

$$\frac{d}{dt}F(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(z)\frac{d\Phi_i}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_m}(z) = \zeta(z)F(z),$$

en vista de $(*)$. En suma, concluimos que

$$F(\Phi_1, \dots, \Phi_n, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m - t) = U_1(x, y, t)F(x, y).$$

Finalmente, sustituyendo $t = y_m$, definimos:

$$\varphi_i(x, y) = \Phi(x, y, y_m), u(x, y) = U_1(x, y, y_m),$$

y se comprueba inmediatamente que se cumplen las condiciones de (2), con la siguiente versión de la cuarta:

$$F(\varphi(x, y), y_1, \dots, y_{m-1}, 0) = u(x, y)F(x, y). \qquad (**).$$

Obsérvese además que en el caso $\zeta = 0$ se tiene $U_1 \equiv 1$.

Repitiendo el argumento se hacen sucesivamente cero las variables restantes. Indiquemos brevemente cómo. Por lo que acabamos de ver, existen $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n), w$ tales que

$$F(\phi(x, y), y_1, \dots, y_{m-2}, 0, y_m) = w(x, y)F(x, y).$$

Entonces, haciendo la sustitución $x = \phi, y_{m-1} = 0$ en $(**)$, resulta:

$$F(\psi(x, y), y_1, \dots, y_{m-2}, 0, 0) = v(x, y)F(x, y),$$

con

$$\begin{cases} \psi(x, y) & = \varphi(\phi(x, y), y_1, \dots, y_{m-2}, 0, y_m) \\ v(x, y) & = u(\phi(x, y), y_1, \dots, y_{m-2}, 0, y_m)w(x, y) \end{cases}$$

Las otras condiciones que deben cumplir $\psi, v$ se siguen fácilmente de que las cumplen $\varphi, u$ y $\phi, w$. $\square$

La demostración del teorema de determinación finita en el caso analítico sólo utiliza el lema 2.1 para $m = 1$. La idea básica es interpolar dos series $f, g \in \mathfrak{m}$ que van a ser equivalentes mediante la deformación $F_t = (1 - t)f + tg$. A continuación se obtiene el criterio para determinar cuando dos series $F_t, F_{t'}$ son equivalentes para $t, t'$ suficientemente próximos. Finalmente, utilizando que $[0, 1]$ es compacto se determina en un número finito de pasos cuándo $f, g$ son equivalentes. Nótese que este criterio requiere la substitución de la variable $y$ del lema 2.1 por valores $t, t' \in \mathbb{C}$. Pero este tipo de sustituciones no pueden realizarse en un anillo de series formales. Por ello, la prueba de 1.2 será sustancialmente diferente.

*Demostración del Teorema 1.2.* Recordemos que $\mathfrak{m} = (x) = (x_1, \dots, x_n)K[[x]]$, y supongamos que $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}J(f) + (f)$ (resp. $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}J(f)$), y veamos que $f$ esta $k$-casideterminada (resp. $k$-determinada).

Sea $g \in K[[x]]$ tal que $h = f - g \in (x)^{k+1}$. Tenemos que mostrar que $f$ y $g$ son casiequivalentes (resp. equivalentes). Para ello, consideramos nuevas variables $y = (y_1, \dots, y_n)$, y el anillo $K[[x, y]]$ cuyo ideal maximal es $\mathfrak{n} = (x, y) =$

$(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)K[[x,y]]$. Como $h\in(x)^{k+1}$, existen series $h_1,\dots,h_n\in(x)^k$ tales $h=x_1h_1+\cdots+x_nh_n$, y definimos

$$F(x,y)=f+\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)h_i\in K[[x,y]].$$

Afirmamos que

$$(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)+(f)\subset(x)\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)+(F)$$

$$(\text{resp. } (x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\subset(x)\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\ )$$

En efecto, derivando tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}=h_j+\sum_i(x_i+y_i)\frac{\partial h}{\partial x_j}\in\mathfrak{n}\,(x)^{k-1},$$

de manera que

$$\begin{aligned}(x)\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)+(f)&\subset(x)\left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)+(F)+\mathfrak{n}\,(x)^k\\&\subset(x)\left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)+(F)+\mathfrak{n}\left((x)\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)+(f)\right)\end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned}(x)\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)&\subset(x)\left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)+\mathfrak{n}\,(x)^k\\&\subset(x)\left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)+\mathfrak{n}\,(x)\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)\ )\end{aligned}$$

y del lema de Nakayama se sigue lo que se quiere.

De la afirmación que acabamos de probar resulta que

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}=h_j\in(x)^k\subset(x)\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)+(f)\subset(x)\left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)+(F)$$

(resp.

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}=h_j\in(x)^k\subset(x)\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)\subset(x)\left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)\ )$$

y por 2.1 existen $u,\varphi_1,\dots,\varphi_n\in K[[x,y]]$ tales que:

- $u(x,0)=1$ (resp. $u\equiv 1$),

- $\varphi_i(x, 0) = x_i$,
- $\varphi_i - x_i \in (x)$,
- $F(\varphi, 0) = u(x, y)F(x, y)$, donde $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Por las condiciones segunda y tercera, podemos escribir

$$\varphi_i = x_i + \sum_{k,\ell=1}^{n} x_k y_\ell \zeta_{k\ell}(x, y)$$

En consecuencia, $x_i \mapsto \psi_i(x) = \varphi_i(x, -x)$ define un automorfismo de $K[[x]]$, y:

$$g(\psi(x)) = F(\psi(x), 0) = F(\varphi(x, -x), 0) = u(x, -x)F(x, -x) = u(x, -x)f(x)$$

$$(\text{resp. } g(\psi(x)) = F(\psi(x), 0) = F(\varphi(x, -x), 0) = F(x, -x) = f(x)\ ).$$

Esto significa que $f$ es casiequivalente (resp. equivalente) a $g$, y hemos concluido. $\square$

Terminamos esta sección con algunos ejemplos de series finitamente determinadas. Para comprobarlo utilizamos en todos los casos el teorema 1.2:

**Ejemplos 2.2** Sean $a, b \in K$ elementos no nulos. Entonces tenemos que:

*(i)* Si $f(x, y) = ax^k + by^2$ con $k \geq 2$, entonces $J(f) = (x^{k-1}, y)$ y $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}J(f)$. Así, $f$ está $k$-determinada.

*(ii)* Si $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ entonces $J(f) = (3ax^2 + by^2, 2bxy + 3cy^2)$. Se cumple que $\mathfrak{m}^3 \subset \mathfrak{m}J(f) = (3ax^3 + bxy^2, 3ax^2y + by^3, 2bx^2y + 3cxy^2, 2bxy^2 + 3cy^3)$ si y sólo si las 3-formas $\{3ax^3 + bxy^2, 3ax^2y + by^3, 2bx^2y + 3cxy^2, 2axy^2 + 3cy^3\}$ son linealmente independientes, si y sólo si $4ab^3 + 27a^2c^2 \neq 0$. Por tanto, si el discriminante $-4ab^3 - 27^2b^2$ de $f(x, 1)$ es no nulo, entonces $f$ está 3-determinada.

*(iii)* Si $f(x, y) = axy^2 + bx^k$ con $k \geq 3$, entonces $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}J(f)$, con lo que $f$ está $k$-determinada.

*(iv)* Si $f(x, y) = ax^3 + by^4$, tenemos $\mathfrak{m}^4 \subset \mathfrak{m}J(f)$, y, $f$ está 4-determinada.

*(v)* Si $f(x, y) = ax^3 + bxy^3$, entonces $\mathfrak{m}^5 \subset \mathfrak{m}J(f)$. De este modo $f$ está 5-determinada.

*(vi)* Si $f(x, y) = ax^3 + by^5$, se tiene $\mathfrak{m}^5 \subset \mathfrak{m}J(f)$. Así, $f$ está 5-determinada.

## 3. Clasificación de singularidades simples

El objetivo de esta sección es la demostración del teorema 1.8. Como es habitual, denotamos $\mathfrak{m}$ el ideal maximal del anillo de series $K[[x]] = K[[x_1, \ldots, x_n]]$. Empezamos estableciendo en nuestro contexto un resultado bien conocido para gérmenes reales o complejos:

**Lema 3.1 (Morse generalizado)** *Consideremos una serie* $f \in K[[x]]$ *de orden* 2 *cuya* hessiana $H_f = \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\big)$ *tiene rango* $r \geq 1$*. Entonces* $f$ *es equivalente a una serie de la forma* $g(x') + q(x'')$*, donde*

1. $g(x') \in K[[x']] = K[[x_1, \ldots, x_{n-r}]]$ *tiene orden* $\geq 3$*, y su tipo de equivalencia está determinado por* $f$*.*

2. $q(x'') \in K[x''] = K[x_{n-r+1}, \ldots, x_n]$ *es una forma cuadrática diagonal, congruente con la hessiana* $H_f$*.*

En este enunciado debe entenderse $g \equiv 0$ si $r = n$: este es el teorema original de Morse, que luego se generalizaría a hessianas singulares.

*Demostración.* Denotemos $s = n - r$. En primer lugar, mediante un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que la hessiana es una forma cuádratica diagonal, de manera que la forma inicial de $f$ es $a_{s+1}x_{s+1}^2 + \cdots + a_n x_n^2$, $a_{s+i} \neq 0$. Ahora consideramos el sistema de ecuaciones

$$h_i(x', x'') = \frac{\partial f}{\partial x_{s+i}}(x', x'') = 0 \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Como $\frac{D(h_1,\ldots,h_r)}{D(x_{s+1},\ldots,x_n)}(0,0) = a_{s+1} \cdots a_n \neq 0$, dicho sistema tiene una solución $x'' = \zeta(x')$, y después del cambio de coordenadas $(x', x'') \mapsto (x', x'' + \zeta(x'))$ podemos suponer que $\frac{\partial f}{\partial x_{s+i}}(x', 0) = 0$ para $1 \leq i \leq r$. Por tanto, desarrollando en serie de Taylor respecto de las variables $x''$, no aparecen términos de grado 1, y tenemos:

$$f(x) = f(x', 0) + \sum_{i,j=1}^{r} h_{ij}(x) x_{s+i} x_{s+j}.$$

Promediando, podemos suponer que $h_{ij} = h_{ji}$, de manera que la matriz $(h_{ij}(x))$ es simétrica, y define una forma cuadrática $Q(x)$ de dimensión $r = n - s$ sobre el anillo $K[[x]]$; por construcción $Q(0)$ es la caja de rango $r$ de la hessiana. Resulta que es muy fácil diagonalizar $Q(x)$ *sobre el anillo* $K[[x]]$.

Para ello, se construye por inducción del modo usual una base $\{u_1(x), \ldots, u_r(x)\}$ ortonormal respecto de $Q(x)$, de tipo triangular:

$$\begin{cases} u_1(x) = (1, 0, \ldots, 0) \\ u_i(x) = (u_{i1}(x), \ldots, u_{i\,i-1}(x), 1, 0, \ldots, 0), \quad \text{con} \quad u_{ij}(0) = 0. \end{cases}$$

Estos $u_{ij} = u_{ij}(x)$ son las soluciones del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{i-1\,1} & u_{i-1\,2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} h_{11} & \cdots & h_{1i-1} & h_{1i} \\ h_{21} & \cdots & h_{2\,i-1} & h_{2i} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_{i-1\,1} & \cdots & h_{i-1\,i-1} & h_{i-1\,i} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{i\,i-1} \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante $\Delta_i(x)$ es una unidad en $K[[x]]$, pues $\Delta_i(0) = a_{s+1} \cdots a_{s+i-1} \neq 0$. Por tanto, el sistema se puede resolver en el anillo $K[[x]]$, y sus soluciones $u_{ij}$ cumplen $u_{ij}(0) = -h_{ji}(0)/a_j = 0$.

Así, los $u_{ij}(x)$ definen una matriz triangular $U(x)$ cuyo determinante es 1, y tiene inversa $V(x) = U^{-1}(x)$ con coeficientes en el mismo anillo $K[[x]]$. Además, la matriz diagonal $E(x) = U(x)Q(x)U^t(x)$ tiene coeficientes $e_{ii}(x) = a_i w_i^2(x)$ con $w_i(0) = 1$, y podemos escribir:

$$\sum h_{ij}(x) x_{s+i} x_{s+j} = x'' Q(x) x''^t = x'' V(x) E(x) V^t(x) x''^t = a_{s+1} y_{s+1}^2 + \cdots + a_n y_n^2,$$

donde

$$(y_{s+1}, \ldots, y_n) = (x_{s+1}, \ldots, x_n) V(x) \begin{pmatrix} w_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & w_r(x) \end{pmatrix}$$

Pero estas $y'' = (y_{s+1}, \ldots, y_n)$ definen un cambio de coordenadas, pues un cálculo directo proporciona $\frac{\partial y_i}{\partial x_i}(0) = 1$, y $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(0) = 0$ si $i \neq j$.

En conclusión, hemos obtenido la serie $f(x', 0) + q(y'')$, que es equivalente a $f$ y tiene la forma deseada. Por construcción, la forma cuadrática $q$ es congruente a la hessiana, pero esto es en realidad trivial: dos series equivalentes tienen siempre *linealmente equivalentes* las formas iniciales, y si esas formas iniciales son de grado dos, la equivalencia lineal es la congruencia de formas cuadráticas.

Falta estudiar el tipo de equivalencia de $g(x') = f(x', 0)$ como dice el enunciado. Para ello, supongamos que $f$ es equivalente a $g^*(x') + q^*(x'')$ y veamos que entonces $g(x')$ es equivalente a $g^*(x')$. En primer lugar, por lo que acabamos de decir, la forma cuadrática $q^*(x'')$ es congruente con la hessiana de $f$, luego con $q(x'')$, y después de un cambio lineal que sólo involucra a las variables $x''$, podemos simplemente suponer $q^*(x'') = q(x'') = \sum_{i=1}^r a_{s+i} x_{s+i}^2$.

La situación es que mediante un cambio de coordenadas

$$x' \mapsto \psi'(x', x''), \quad x'' \mapsto \psi''(x', x''),$$

se cumple

$$g(\psi'(x', x'')) + q(\psi''(x', x'')) = g^*(x') + q(x'').$$

Si denotamos por $l_i'(x') + l_i''(x'')$ la forma inicial (lineal) de $\psi_{s+i}(x', x'')$, resulta:

$$\sum_{i=1}^{r} a_{s+i} l_i'(x')^2 + 2\sum_{i=1}^{r} a_{s+i} l_i'(x') l_i''(x'') + \sum_{i=1}^{r} a_{s+i} l_i''(x'')^2 = \sum_{i=1}^{r} a_{s+i} x_{s+i}^2,$$

y comparando variables en ambos miembros deducimos

$$\sum_{i=1}^{r} a_{s+i} l_i''(x'')^2 = \sum_{i=1}^{r} a_{s+i} x_{s+i}^2\,, \qquad 2\sum_{i=1}^{r} a_{s+i} l_{s+i}'(x') l_{s+i}''(x'') = 0.$$

La primera de estas igualdades muestra que las formas lineales $l_1''(x''), \dots, l_r''(x'')$ son independientes, y por ello de la segunda de deduce que $l_1'(x') = \cdots = l_r'(x') \equiv 0$. En consecuencia, mediante un cambio lineal que sólo afecta a las variables $x''$, podemos suponer que $\psi_{s+i}(x', x'') = x_{s+i} + \varphi_{s+i}(x', x'')$, $\varphi_{s+i}$ de orden $\geq 2$, para $i = 1, \dots, r$. Tenemos pues:

$$\begin{aligned} q(\psi''(x', x'')) &= \sum_{i=1}^{r} a_{s+i} x_{s+i}^2 + 2\sum_{i=1}^{r} a_{s+i} x_{s+i} \varphi_{s+i}(x', x'') + \sum_{i=1}^{r} a_{s+i} \varphi_{s+i}(x', x'')^2 \\ &= q(x'') + \sum_{i=1}^{r} a_{s+i} (2x_{s+i} + \varphi_{s+i}(x', x''))\varphi_{s+i}(x', x''), \end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$g(\psi'(x', x'')) = g^*(x') - \sum_{i=1}^{r} a_{s+i}(2x_{s+i} + \varphi_{s+i}(x', x''))\varphi_{s+i}(x', x'').$$

Si los factores $2x_{s+i} + \varphi_{s+i}(x', x'')$ fueran todos nulos, habríamos terminado, pues $x' \mapsto \psi'(x', 0)$ es un cambio de coordenadas. En efecto, por cálculo directo obtenemos:

$$0 \neq \frac{D(\psi_1, \dots, \psi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(0, 0) = \frac{D(\psi_1, \dots, \psi_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(0, 0)$$

(recuérdese que las formas iniciales de $\psi_{s+1}, \dots, \psi_n$ son $x_{s+1}, \dots, x_n$). Pero esos factores no son realmente nulos, y debemos afinar el argumento.

Para hacerlo, consideramos el sistema

$$g_i(x', x'') = 2x_{s+i} + \varphi_{s+i}(x', x'') = 0 \qquad (1 \leq i \leq r),$$

cuyo jacobiano es no nulo: $\frac{D(g_1, \dots, g_r)}{D(x_{s+1}, \dots, x_n)}(0, 0) = 2^r$, y tiene por tanto solución $x'' = \xi(x')$. Obviamente:

$$g(\psi'(x', \xi(x'))) = g^*(x'),$$

y hemos terminado, pues $x' \mapsto \eta(x') = \psi'(x', \xi(x'))$ es un cambio de coordenadas. En efecto, como las series $\varphi_{s+i}$ tienen orden $\geq 2$, también lo tienen las series $\xi_{s+i}$, de manera que

$$\frac{D(\eta_1,\ldots,\eta_s)}{D(x_1,\ldots,x_s)}(0,0) = \frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_s)}{D(x_1,\ldots,x_s)}(0,0) \neq 0.$$

□

El lema anterior proporciona una primera simplificación de las singularidades que nos interesan. En efecto, una serie $f \in K[[x_1,\ldots,x_n]]$ como en ese lema es simple si y sólo si lo es $g$ [JoPf, 9.2.10], de manera que podemos suponer que $f$ tiene orden $\geq 3$. Entonces, por [JoPf, 9.3.19], resulta que $n \leq 2$. Pero si $n = 1$, la singularidad es siempre simple, y si $n = 2$, entonces el orden de $f$ debe ser exactamente 3 (de nuevo por [JoPf, 9.3.19]). Repasando el enunciado del teorema 1.8, vemos que los tipos $A_{2k}$ y $A_{2k+1}$ corresponden a las series de orden 2, y debemos encontrar los demás tipos clasificando las singularidades simples de orden 3 en dos variables.

Teniendo esto en cuenta la demostración del teorema 1.8 se completa con el siguiente resultado:

**Proposición 3.2** *Sea $f \in K[[x,y]]$ una serie simple de orden 3. Entonces $f$ es equivalente a una de las singularidades siguientes:*

$D_3^*: f(x,y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$, *irreducible en* $K[x,y]$,

$D_k: f(x,y) = ax^2y + by^k$, $k \geq 3$,

$E_6: f(x,y) = ax^3 + by^4$,

$E_7: f(x,y) = ax^3 + bxy^3$,

$E_8: f(x,y) = ax^3 + by^5$.

*con* $a, b, c \in K \setminus \{0\}$.

*Demostración.* Supongamos primero que la forma inicial $P$ (de grado 3) de $f$ es irreducible. Entonces, después de un cambio de coordenadas, $P = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ para cierto $a \neq 0$, y como consecuencia de 2.2*(ii)*, $P$ está 3-determinado. Concluimos que $f$ es equivalente a $P$ (tipo $D_3^*$).

Así, en lo sucesivo suponemos que la forma inicial $P$ de $f$ es reducible, y de nuevo tras un cambio de coordenadas, $P$ es uno de los polinomios siguientes

$$x(ax^2 + by^2),\ ax^2y,\ ax^3,$$

donde $a, b \neq 0$. En el primer caso, se aplica de nuevo 2.2*(ii)* con $c = 0$, y $P$ está 3-determinado, con lo que $f$ es equivalente a $P$ (tipo $D_3$ con las variables permutadas).

Supongamos ahora que $P = ax^2y$. Entonces, denotando $s \geq 4$ el orden de $\varphi = f - ax^2y$, podemos escribir

$$f(x,y) = ax^2y + \alpha_0 y^s + \alpha_1 xy^{s-1} + \alpha_2 x^2$$

con $\alpha_i \in K[[x,y]]$ y $\alpha_2$ tiene orden $\geq s-2$. En esta situación, se comprueba por cálculo directo que después del cambio de coordenadas

$$(x,y) \mapsto \big(x - \tfrac{\alpha_1(0)}{2a} y^{s-2},\, y - \tfrac{1}{a}\alpha_2\big)$$

podemos suponer $f = ax^2y + by^s + \psi_1$ donde $b \in K$ y $\psi_1$ tiene orden $\geq s+1$. Si $b = 0$ repetimos el proceso, hasta encontrar un entero $k \geq s$ tal que $f = ax^2y + by^k \mod (x,y)^{k+1}$, con $b \neq 0$. En ese caso, $ax^2y + by^k$ está $k$-determinado por 2.2*(iii)*, y es pues equivalente a $f$: hemos obtenido el tipo $D_k$ del enunciado. Se trata pues de demostrar que en algún momento se obtiene ese coeficiente no nulo $b$. Pero sabemos que $f$ es una singularidad aislada (proposición 1.7), luego $(x,y)^k \subset J^*(f)$ para cierto entero $k \geq 1$. Como el ideal $J^*(f)$ no depende de las coordenadas, deducimos que

$$(x,y)^k \subset J^*(ax^2y + by^s + \psi_1).$$

Así, si $b$ es nulo y sigue siéndolo después de repetir el proceso $\ell$ veces, resulta $f = ax^2y + \psi_\ell$ con $\psi_\ell \in (x,y)^{s+\ell}$, de modo que

$$y^k \in (x,y)^k \subset J^*(ax^2y + \psi_\ell) = J^*(ax^2y) = (x^2y, xy, x^2) \subset (x) \mod (x,y)^{s-1+\ell}.$$

Claramente esto es imposible si $\ell \geq k$, lo que zanja el caso $P = ax^2y$.

Estudiemos pues el último caso $P = ax^3$. Utilizaremos la condición $f \notin (x,y^2)^3$, que se cumple por [JoPf, 9.3.19]. Procedemos del modo siguiente. Como $f(x,0) = ax^3 + \ldots$, por el teorema de preparación de Weierstrass, podemos escribir:

$$f = u\big(x^3 + \alpha(y)x^2 + \beta(y)x + \gamma(y)\big),$$

con $u(0,0) \neq 0$ y $\alpha, \beta, \gamma \in K[[y]]$ tienen respectivamente órdenes $\geq 2,3,4$. Mediante el truco habitual de tomar $x - \frac{1}{3}\alpha(y)$ como nueva coordenada, podemos suponer que $\alpha \equiv 0$. Entonces, si $\beta \equiv 0$ (resp $\gamma \equiv 0$) encontramos unidades $v, w \in K[[x,y]]$ tales que $f = a(xv)^3 + b(yw)^k$ (resp $f = a(xv)^3 + b(yw)^k(xv)$), y tomando $(xv, yw)$ como nuevas coordenadas obtenemos $f = ax^3 + by^k$ con $k \geq 4$ (resp. $f = ax^3 + by^kx$ con $k \geq 3$). Como $f \notin (x,y^2)^3$, debe ser $k = 4$ o 5, y tenemos los tipos $E_6$ o $E_8$ (resp. $k = 3$, y tenemos el tipo $E_7$). También terminamos fácilmente si el orden $k$ de $\gamma$ es menor o igual que el orden $\ell$ de $\beta$, pues entonces podemos factorizar

$$\beta(y)x + \gamma(y) = y^k v(x,y)$$

para cierta unidad $v \in K[[x,y]]$, y razonando como antes encontramos los tipos $E_6$ o $E_8$. Por tanto, sea $\ell < k$. Si fuera $\ell \geq 5$, tendríamos $k \geq 6$ y $f \in (x,y^2)^3$, lo que no es posible. Así, $\ell = 3$ o 4, y hay varias posibilidades:

*(i)* Si $\ell = 3$, es $f = u(x^3+v(y)y^3x+w(y)y^k)$, y escalando las variables con unidades como anteriormente, conseguimos a $f = ax^3+by^3x+\zeta y^k$, $\zeta(0,0) \neq 0$, $a, b \in K$. Por ser 5-determinada la serie $ax^3+by^3x$ (2.2*(iv)*), si $k \geq 6$, $f$ es del tipo $E_7$, luego basta considerar los casos *(i1)* $k = 4$, *(i2)* $k = 5$.

*(ii)* Si $\ell = 4$, como $f \notin (x, y^2)^3$, necesariamente $k = 5$, y razonando como es habitual, ahora obtenemos $f = ax^3+by^4x+\zeta y^5$, $\zeta(0,0) \neq 0$, $a, b \in K$.

Resolvemos a continuación separadamente los tres casos a los que hemos reducido nuestra serie $f$.

*(i1)* $f = ax^3+bxy^3+\zeta y^4$, $\zeta(0,0) = c \neq 0$.

Se hace el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x \mapsto x + \frac{b^4}{256c^3a}x^2 - \frac{b^3}{24c^2a}xy + \frac{b^2}{8ca}y^2, \\ y \mapsto y - \frac{b}{4c}x, \end{cases}$$

y resulta $f = ax^3+cy^4+\varphi$, con $\varphi \in (x,y)^5$. Por 2.2*(iv)*, $ax^3+cy^4$ es una serie 4-determinada, y $f$ es del tipo $E_6$.

*(i2)* $f = ax^3+bxy^3+\zeta y^5$, $\zeta(0,0) = c \neq 0$.

Después del cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &\mapsto x - \frac{a^2c^3}{3b^5}x^2 - \frac{ac^2}{b^3}xy - \frac{c}{b}y^2 - \frac{a^4c^6}{3b^{10}}x^3 - \frac{5a^3c^5}{3b^8}x^2y - \frac{2a^2c^4}{b^6}xy^2 - \frac{5ac^3}{9b^4}y^3, \\ y &\mapsto y + \frac{ac}{b^2}x - \frac{4ac^2}{3b^3}y^2, \end{aligned}$$

resulta $f = ax^3+bxy^3+\psi$ con $\psi \in (x,y)^6$ y de nuevo, como la serie $ax^3+bxy^3$ está 5-determinada concluimos que $f$ es equivalente a $ax^3+bxy^3$, que es el tipo $E_7$.

*(ii)* $f = ax^3+bxy^4+\zeta y^5$, $\zeta(0,0) = c \neq 0$.

Ahora el cambio es:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x - \frac{4b^5}{9375c^4a}x^3 + \frac{b^4}{125c^3a}x^2y - \frac{4b^3}{75c^2a}xy^2 + \frac{2b^2}{15ca}y^3, \\ y &\mapsto y - \frac{b}{5c}x, \end{aligned}$$

y tenemos que $f = ax^3+cy^5+\psi$ donde $\psi \in (x,y)^6$. Como $ax^3+cy^5$ es una serie 5-determinada (véase 2.2*(vi)*) entonces $f$ es equivalente a $ax^3+cy^5$, que es del tipo $E_8$. $\square$

## Referencias

[CuSr] S.D. Cutkosky, H. Srinivasan: *Equivalence and finite determinancy of mappings.* J. Algebra **188** (1997), 16–57.

[JoPf] T. de Jong, G. Pfister: *Local Analytic Geometry, basic theory and applications.* Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2000.

[MaOu] J. Margalef, E. Outerelo: *Singularidades de aplicaciones diferenciables.* Investigaciones en Topología, C.S.I.C., Madrid 1978.

[Rz] J.M. Ruiz: *Sums of two squares in analytic rings.* Math. Z. **230** (1999), 317–328.

[Wa] C.T.C. Wall: *Finite determinancy of smooth map-germs.* Bull. London Math. Soc. **13** (1981), 481–539.