manuales matemáticas

José F. Fernando
J. Manuel Gamboa
Jesús M. Ruiz

Álgebra Lineal

Volumen 1

$$\Delta_n=\det\begin{pmatrix}1^2 & 2^2 & \cdots & n^2\\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2\end{pmatrix}=\begin{cases}1 & (n=1)\\ -7 & (n=2)\\ -8 & (n=3)\\ 0 & (n\geq 4)\end{cases}$$

sanz y torres

ÁLGEBRA LINEAL - I

UNED

José F. Fernando

J. Manuel Gamboa

Jesús M. Ruiz

Universidad Complutense de Madrid

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ -7 & (n=2) \\ -8 & (n=3) \\ 0 & (n \geq 4) \end{cases}$$

sanz y torres

ALGEBRA LINEAL. VOLUMEN 1

Vereda de los Barros, 17
Pol. Ind. Ventorro del Cano – 28925 Alcorcón (Madrid)
☏ 902 400 416 – 91 323 71 10
www.sanzytorres.com
libreria@sanzytorres.com
www.editorialsanzytorres.com
editorial@sanzytorres.com

ISBN (obra completa): 978-84-92948-10-9
ISBN: 978-84-96808-54-6
Depósito legal: M-36008-2011

Portada:
Javier Rojo Abuín

Impresión y encuadernación:
Safekat, S.L.

Prefacio

Este es un curso de Álgebra Lineal dividido en dos volúmenes, que totalizan cuatro capítulos y 20 lecciones. En conjunto, se cubre todo lo que a veces se denomina *geometría vectorial,* y se corresponde con los temarios de la materia que con motivo de los nuevos planes de estudios se han implantado en las Facultades de Ciencias, en particular Físicas y Matemáticas, en la Facultad de Informática y en las Escuelas Técnicas.

Basados en nuestra experiencia tras haber impartido cursos similares durante muchísimos años hemos pretendido escribir un texto muy directo, despojándolo de todos los formalismos evitables sin menoscabar el rigor ni en los enunciados ni en las pruebas de los mismos. En todo caso, nuestro objetivo esencial es explicar el significado verdadero de las cosas.

Como hemos dicho, el curso está dividido en cuatro capítulos, de los cuales este volumen contiene los dos primeros:

Capítulo I. *Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.*

Capítulo II. *Espacios vectoriales y aplicaciones lineales.*

Como su nombre indica, el capítulo I está dedicado al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales desde un punto de vista matricial, centrado en los conceptos de rango y determinante. El procedimiento elegido para ese estudio es el método de Gauss-Jordan. El capítulo II presenta y analiza los objetos propios del álgebra lineal: los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales. El énfasis se pone por supuesto en los espacios de tipo finito, y se termina con la noción clave de dualidad.

La materia está distribuida de manera que cada capítulo puede aligerarse a conveniencia sin que eso afecte a la consistencia de la presentación. En cualquier caso, confiamos en que este primer volumen pueda cubrirse en su totalidad, exceptuando tal vez la dualidad en la lección 10, que puede limitarse a rectas e hiperplanos.

Como pauta general, los ejemplos son muy numerosos y parte central de la exposición. Además, cada lección concluye con una colección de 15 problemas y ejercicios de dificultad variable (los que la tienen mayor están señalados con un ⚡). Al final de cada capítulo hay una sección con 50 cuestiones *verdadero/falso* con las que el lector podrá contrastar cómo ha asimilado los conceptos estudiados. Se incluyen en un apéndice las soluciones de todos los ejercicios, problemas y cuestiones propuestos en él. También hemos incluído una lista de símbolos que suele ser de ayuda para encontrar con rapidez el significado de una notación, y un índice terminológico, para la búsqueda correspondiente. Hay además una lista breve de lecturas recomendadas.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a las profesoras Concepción Fuertes y Celia Martínez, que han leído muy meticulosamente versiones preliminares, detectando numerosas erratas y errores y contribuyendo sustancialmente a que la exposición sea más ágil y consistente. Otra mención debemos al profesor José F. Ruiz, cuyos atinados comentarios críticos durante muchísimas conversaciones han influido notablemente en la presentación de partes importantes de la materia.

Un agradecimiento especial le debemos al profesor Emilio Bujalance y a sus alumnos de esta asignatura en la UNED. Estos últimos pusieron de manifiesto la necesidad de completar muchos detalles en la primera edición de esta obra y Emilio tuvo la paciencia de trasmitirnos aquellos puntos que resultaban oscuros para el alumnado y sugerirnos, con gran acierto, una exposición alternativa.

Jose F. Fernando, J. Manuel Gamboa, Jesús M. Ruiz
Pozuelo, Madrid, Majadahonda

12 de abril, 2011

Contenido

CAPÍTULO I

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Resumen. Este primer capítulo trata de lo que es consustancial al Álgebra Lineal: las *ecuaciones lineales.* En la primera lección se introducen los sistemas de ecuaciones lineales y se describe el método de Gauss-Jordan para su resolución. Para entender mejor dicha resolución, en la segunda lección se introducen las matrices y el rango, y se obtiene el teorema de Rouché-Frobenius. En la tercera lección se completa con detalle la presentación de las operaciones de matrices. La cuarta lección está dedicada al concepto de determinante y la quinta a cómo se utiliza éste para calcular rangos, matrices inversas y resolver sistemas determinados.

Todo esto se hace desde un punto de vista directo, basado en la idea elemental bien conocida de que un sistema se resuelve haciendo operaciones con sus ecuaciones. En realidad estas lecciones no pretenden descubrir al lector ningún método diferente del que ya conoce para resolver sistemas, sino explorar el contenido conceptual de ese mismo. Así, el lector no sabrá sólo resolver sistemas, sino que sabrá que lo sabe, en el sentido profundo que esto último tiene: el porqué y no sólo el para qué.

1. Sistemas de ecuaciones. El método de Gauss-Jordan

El objetivo de esta lección es obtener un algoritmo eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Recordamos que una *ecuación lineal (en n incógnitas* o *variables)* es una expresión del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los *coeficientes* a_i y el *término independiente* b son *escalares,* esto es, elementos del cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ sobre el que estemos trabajando, y las x_i son

El siguiente sin embargo sí lo es:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & 6x_4 & = & -5\,, \\ & x_2 & & + & 7x_4 & = & 8\,, \\ & & x_3 & - & 7x_4 & = & -6\,. \end{array}\right.$$

□

(1.9) Método de escalonamiento de Gauss-Jordan. Por este método se transforma, aplicando sucesivamente operaciones elementales, cualquier sistema no trivial en un sistema incompatible o en un sistema escalonado reducido. Describimos este algoritmo, que consta de varios pasos, como se programaría para que lo desarrollase una “máquina”.

Paso 0. Se toma $k = 1$.

Paso 1. Se examinan las ecuaciones a partir de la k-ésima inclusive: si hay alguna incompatible, el sistema es incompatible y hemos terminado; si hay triviales, se suprimen; si no hay otras ecuaciones, hemos terminado.

Paso 2. Si han quedado ecuaciones, se elige entre ellas una cuya primera incógnita x_{j_k} tenga índice j_k mínimo.

Paso 3. Se divide la ecuación elegida por el coeficiente de su primera incógnita x_{j_k}, y se intercambia la ecuación resultante con la k-ésima.

Paso 4. A cada ecuación distinta de la nueva k-ésima le restamos ésta multiplicada por el coeficiente que en aquélla tiene la incógnita x_{j_k}.

Paso 5. Se hace $k = k + 1$ y se vuelve al paso 1.

Vamos a resumir qué se hace y para qué en los pasos anteriores. Nótese primero que sólo se hacen operaciones elementales, con lo que se obtiene siempre un sistema equivalente al de partida. En el paso 1 se decide si hay que hacer realmente algo. Si hay en efecto que hacerlo, en el paso 2 se selecciona la incógnita y la ecuación que se usarán para mejorar el posible escalonamiento que ya se tenga. En el paso 3 se hace 1 el coeficiente de esa incógnita en esa ecuación, y se coloca la ecuación en el lugar pertinente. En el paso 4 se elimina la susodicha incógnita de las demás ecuaciones; obsérvese que aquí pueden producirse ecuaciones triviales (a partir de la $(k + 1)$-ésima). Y en el paso 5 se recomienza con otra incógnita posterior.

tienen alguna raíz común, entonces el determinante

$$R(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ filas} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ filas} \end{array}$$

es nulo. Se dice que $R(f,g)$, que es el determinante de una matriz de orden $m+n$, es la *resultante* de f y g.

(2) ¿Tiene alguna raíz múltiple (es decir, común con su derivada) el polinomio $f(T) = T^3 + T + 1$?

Cuestiones sobre sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

Número 1. Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si tiene rango máximo.

Número 2. Un sistema lineal no homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene siempre solución.

Número 3. El rango del producto de dos matrices es el máximo de los rangos de cada una.

Número 4. Si dos matrices no necesariamente cuadradas A y B cumplen $AB = I$, entonces ambas tienen rango máximo.

Número 5. Si los rangos de dos matrices cuadradas A y B de igual orden coinciden, y coinciden con el de su producto AB, entonces A, B y AB son invertibles las tres.

Número 6. Si un sistema lineal homogéneo es compatible, está asociado a infinitos sistemas lineales no homogéneos también compatibles.

Número 7. Sean $Ax^t = b^t$ un sistema lineal incompatible, y C una matriz invertible. Entonces el sistema $CAx^t = b^t$ es incompatible.

Número 8. Sean $Ax^t = b^t$ un sistema lineal compatible, y C una matriz invertible. Entonces el sistema $CAx^t = b^t$ es compatible.

Número 44. Si una matriz A tiene la propiedad de que para cierto exponente p se cumple $\sum_{i=0}^{p} A^i = 0$, entonces A es invertible.

Número 45. Sea A una matriz cuadrada cuyo rango no es máximo. Si los sistemas $Ax^t = 0$ y $xA = 0$ tienen las mismas soluciones, entonces $A = A^t$.

Número 46. Si el determinante de una matriz cuadrada es nulo, su traza debe ser asímismo nula.

Número 47. Si dos sistemas son equivalentes y uno de ellos es homogéneo, el otro también lo es.

Número 48. Si el producto de dos matrices es una matriz cuadrada invertible de orden n, entonces el rango de las dos matrices es precisamente n.

Número 49. Sea A una matriz regular y B el resultado de aplicar a A ciertas operaciones elementales por filas. Entonces B es también regular, y haciendo esas mismas operaciones por filas a A^{-1} se obtiene B^{-1}.

Número 50. Hay infinitas matrices cuadradas A y B de orden 2 tales que $AB = A + B = I$.

Apéndice: Solucionario del capítulo I

Soluciones §1

Número 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 6\,, \\ 9x & + & 4y & = & 108\,, \end{array} \right. \qquad (2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 9\,, \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 4\,, \\ 2x & - & y & + & 6z & = & -1\,. \end{array} \right.$$

Solución. (1) El sistema es equivalente al que resulta al multiplicar por 3 la primera ecuación, esto es,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 9x & - & 6y & = & 18\,, \\ 9x & + & 4y & = & 108\,, \end{array} \right.$$

que equivale al obtenido tras restar a la segunda de estas ecuaciones la primera:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 9x & - & 6y & = & 18\,, \\ & & 10y & = & 90\,, \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 9x & - & 6y & = & 18\,, \\ & & y & = & 9\,. \end{array} \right.$$

Sumando a la primera ecuación 6 veces la segunda obtenemos la única solución del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{r} 9x = 72\,, \\ y = 9\,, \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{r} x = 8\,, \\ y = 9\,. \end{array} \right.$$

CAPÍTULO II

Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

Resumen. Este segundo capítulo cubre una materia básica: la definición y propiedades de los *espacios vectoriales* y de las *aplicaciones lineales.* El punto de apoyo para presentar estas nociones y demostrar los resultados principales es la teoría de sistemas de ecuaciones lineales desarrollada previamente, en especial las ideas básicas de combinación e independencia de ecuaciones. Además, así se da contenido geométrico a la teoría de matrices que ya conocemos. En la lección sexta se definen *espacios* y *subespacios vectoriales,* y la noción de *independencia lineal.* En la séptima se tratan los espacios de *tipo finito,* y se define la *dimensión;* esto incluye la introducción de *coordenadas* y de ecuaciones lineales. A partir de este momento cada noción y construcción nueva tendrá su tratamiento mediante ecuaciones. La octava lección se dedica a las operaciones con subespacios: *intersección, sumas* y *sumas directas,* y *cocientes.* Asímismo se demuestran las *fórmulas de Grassmann.* En la novena lección se definen las *aplicaciones lineales* y los conceptos asociados: *núcleo, imagen* y *factorización.* La décima y última lección del capítulo trata del *espacio dual:* el concepto y algunos de sus usos. Puede parecer algo más dificultosa que el resto, particularmente la *dualidad canónica,* pero como se advirtió en el prefacio, es siempre posible aligerarla limitándose a la *dualidad entre rectas e hiperplanos.*

6. Espacios vectoriales

Aquí definimos *espacio vectorial.* No hacemos casi nada más que eso, y revisar todos los ejemplos que de hecho hemos manejado en el capítulo anterior. Consideramos el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Aunque todo lo que digamos sea válido para otros cuerpos, como por ejemplo para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, relegaremos esta posible generalidad a algún ejercicio significativo.

Definiciones 6.1 Un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*,* es un conjunto E (no vacío),

(10.3) Dualidad canónica. Utilizando lo anterior, podemos extender la relación entre hiperplanos de E y rectas de E^* a subespacios arbitrarios. Procederemos a partir del hecho de que todo subespacio $V \subset E$ es intersección de hiperplanos, II.8.6, p. 179. Esto significa que

$$V = \bigcap_{H \supset V} H,$$

y definimos

$$V^\vee = \{h \in E^* : H = \ker(h) \supset V\}.$$

Hay que ver que $V^\vee$ es ciertamente un subespacio de E^*. Sean $h_1, h_2 \in V^\vee$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Entonces $V \subset \ker(h_1)$ y $V \subset \ker(h_2)$, luego para cada vector $v \in V$ se tiene

$$(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)(v) = \lambda_1 h_1(v) + \lambda_2 h_2(v) = 0,$$

luego $V \subset \ker(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)$, esto es, $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \in V^\vee$. $\square$

Ahora podemos describir la biyección $V \leftrightarrow V^\vee$ entre los subespacios de E y los subespacios de E^* con las fórmulas:

$$\begin{cases} V^\vee = \{h \in E^* :\ h(v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}, \\ V = \{v \in E :\ h(v) = 0 \text{ para todo } h \in V^\vee\}. \end{cases}$$

Comprobemos que efectivamente es una biyección. Dados subespacios V y W de E tales que $V \neq W$ podemos suponer, intercambiando los papeles de V y W si es preciso, que existe un vector $w \in W \setminus V$. En virtud de II.8.6, p. 179, el subespacio V es intersección de hiperplanos, es decir, existen formas lineales $h_1, \dots, h_p \in E^*$ tales que $V = \{u \in E :\ h_1(u) = 0, \dots, h_p(u) = 0\}$. Como $w \in E \setminus V$ existe un índice i tal que $h_i(w) \neq 0$, por lo que $h_i \in V^\vee \setminus W^\vee$, luego $V^\vee \neq W^\vee$. Eso prueba que la aplicación $V \to V^\vee$ es inyectiva.

En cuanto a la sobreyectividad, dado un subespacio L de E^* elegimos una base suya $\{h_1, \dots, h_p\}$ y se deduce de II.10.1(3)(i), p. 210 que el subespacio $V = \{u \in E : h_1(u) = 0, \dots, h_p(u) = 0\}$ cumple que $V^\vee = L$.

Escrito de otro modo, se tiene la siguiente igualdad fundamental:

$$(H_1 \cap \cdots \cap H_q)^\vee = L[h_1, \dots, h_q], \quad \text{donde} \quad H_i = \ker(h_i).$$

Esto significa que $h_1, \dots, h_q$ *generan* $V^\vee$ *si y sólo si* $h_1 = 0, \dots, h_q = 0$ *son unas ecuaciones de* V. Con esto y II.10.1(3)(ii), p. 210, deducimos que

$$\dim(V^\vee) = \dim(E) - \dim(V) = \operatorname{codim}(V).$$

es lineal. ¿Es cierto que para cada aplicación lineal $f : E \to F$ existen formas lineales $f_1, \dots, f_m$ tales que $f = \sum f_i \cdot v_i$?

Número 11. Recordemos que una matriz cuadrada de orden $n \geq 3$ se dice *mágica* si todas sus filas suman lo mismo, y lo mismo que las columnas, y lo mismo que las dos diagonales mayores. Dada esta definición, consideramos los conjuntos

$$\begin{array}{ll} \varSigma & \text{de las matrices mágicas,} \\ \varSigma_s & \text{de las matrices mágicas simétricas, y} \\ \varSigma_a & \text{de las matrices mágicas antisimétricas.} \end{array}$$

Demostrar que $\varSigma, \varSigma_s$ y $\varSigma_a$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y que $\varSigma = \varSigma_s \oplus \varSigma_a$, y calcular las dimensiones de los tres.

Número 12. Sea f una forma lineal del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demostrar que existe una única matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$ para cada matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Número 13. Sea $E = \mathbb{K}_n[T]$ (polinomios de grado $\leq n$), y fijemos escalares $a_0, \dots, a_n$, distintos dos a dos.

(1) Demostrar que las aplicaciones

$$\varphi_i : E \to \mathbb{K},\ P(T) \mapsto P(a_i)$$

constituyen una base de E^*, y encontrar su base dual.

(2) Dados escalares $b_0, \dots, b_n$, encontrar un polinomio $P \in E$ tal que $P(a_i) = b_i$ para cada $i = 0, \dots, n$ (*interpolación polinomial*).

Número 14. Sean E un espacio vectorial de tipo finito y E^* su dual. Dado un subespacio vectorial L de E, encontrar un isomorfismo canónico entre E/L y el dual de $L^\vee$.

Número 15. (1) Utilizar el principio de dualidad en la resolución del ejercicio 5 de la lección II.8, p. 186.

(2) Encontrar un enunciado vectorial que coincida con su enunciado dual.

Cuestiones sobre espacios vectoriales y aplicaciones lineales

Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

Número 1. Toda aplicación lineal no nula $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

Número 2. Si dos hiperplanos H_1 y H_2 de $\mathbb{R}^n$ son distintos, la dimensión de la intersección $H_1 \cap H_2$ es $n - 2$.

Número 3. Dos planos de $\mathbb{R}^4$ que generan $\mathbb{R}^4$ tienen siempre intersección nula.

Apéndice: Solucionario del capítulo II

Soluciones §6

Número 1. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2$ con la operación interna:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'),$$

y una de las siguientes operaciones externas:

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,0),\quad (\lambda x,\lambda y),\quad (\lambda+\lambda x-1,\lambda+\lambda y-1),\quad \text{o}\quad (\lambda y,\lambda x).$$

Determinar en cada caso si las operaciones definen una estructura de espacio vectorial en $\mathbb{R}^2$.

Solución. La segunda de estas multiplicaciones confiere a $\mathbb{R}^2$ su estructura vectorial usual. Comprobaremos a continuación que las demás no cumplen alguna de las propiedades del producto de escalares por vectores. Elegimos $u=(1,2)$, $v=(1,0)$ y $w=(2,1)$.

Para la primera operación externa se tiene $1u=v\neq u$ y para la cuarta $1u=w\neq u$. Por su parte la tercera de las multiplicaciones propuestas cumple $2(0,0)=(1,1)\neq(0,0)$, luego tampoco define en $\mathbb{R}^2$ una estructura de espacio vectorial. □

Número 2. En $\mathbb{K}^3$ definimos las operaciones *suma* $\boxplus$ y *producto por escalares* $*$ como sigue:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)\boxplus(y_1,y_2,y_3)&=(x_1+y_1+1,x_2+y_2-1,x_3+y_3+3),\\ \lambda*(x_1,x_2,x_3)&=(\lambda x_1+\lambda-1,\lambda x_2-\lambda+1,\lambda x_3+3\lambda-3).\end{aligned}$$

Demostrar que las operaciones $\boxplus$ y $*$ confieren a $\mathbb{K}^3$ estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Solución. Se trata de comprobar que estas operaciones satisfacen las ocho propiedades que axiomatizan la noción de espacio vectorial. Esto, que se puede hacer *a las bravas,* resulta más sencillo si relacionamos adecuadamente las operaciones que acabamos de introducir con la suma y producto por escalares clásico. Para ello basta darse cuenta de que si denotamos $u=(x_1,x_2,x_3), v=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{K}^3$, $\lambda\in\mathbb{K}$ y $\omega=(1,-1,3)$, podemos escribir

$$u\boxplus v=u+v+\omega\,;\quad \lambda*u=\lambda u+(\lambda-1)\omega.$$

Ahora comprobamos que se satisfacen las propiedades que axiomatizan la noción de espacio vectorial.

3. En este texto nos hemos limitado a espacios vectoriales de tipo finito desde muy pronto. Sin embargo la teoría no depende de esa restricción, como se ve en numerosos libros. Aquí mencionamos estos dos:

S. Lang: *Álgebra lineal.* Buenos Aires: Addison-Wesley 1986.

W.H. Greub: *Linear Algebra.* Berlín: Springer 1967.

4. Al espacio dual hemos dedicado estrictamente hablando una sola lección, con un último párrafo sobre dualidad, y en la continuación de este curso la dualidad reaparecerá de manera crucial en el tratamiento de los subespacios invariantes, y habrá un poco de margen para invocarla a cuenta de la polaridad, pero ninguno a cuenta de la ortogonalidad. En realidad, hoy la dualidad está verdaderamente omnipresente en las matemáticas, algo significativo, siendo como es una noción de origen profundamente geométrico. Una buena referencia para descubrir esto es el segundo de los siguientes libros; el primero es recomendable como lectura formal:

G. Fischer: *Lineare Algebra.* Wiesbaden: Vieweg 2000.

J. Gray: *Worlds out of nothing.* Nueva York: Springer 2000.

5. También queremos citar dos libros de problemas y ejercicios:

F. Ayres: *Teoría y problemas de matrices.* México D.F.: McGraw-Hill 1985.

F. Broglia, E. Fortuna, D. Luminati: *Problemi risolti di algebra lineare.* Bolonia: Zanichelli-Decibel 1995.

6. Hay muchas otras lecturas recomendables, no relacionadas directamente con este texto. Nosotros consideramos muy especialmente adecuado señalar las siguientes obras singulares:

T. Gowers, J. Barrow-Green, I. Leader: *The Princeton Companion to Mathematics.* Princeton: Princeton University Press 2008.

R. Loisel, J.-L. Tripp: *Magasin Général,* 1–9. Barcelona: Norma 2006–2015.

Símbolos

Índice