manuales matemáticas

José F. Fernando
J. Manuel Gamboa
Jesús M. Ruiz

Álgebra Lineal
Volumen 2

$$g = f - \lambda \mathrm{Id}_E\,, \quad N = \textstyle\bigcup_k \ker(g^k)$$

$$N_{k+1}/N_k \hookrightarrow N_k/N_{k-1} : [u] \mapsto [g(u)]$$

$$\mathcal{B}_J = \{\dots, u_{k\ell}, g(u_{k\ell}), \dots, g^{\nu-k}(u_{k\ell}), \dots\} \subset N$$

$$M_{f|_N}(\mathcal{B}_J) = \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \lambda & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \lambda & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

sanz y torres

ÁLGEBRA LINEAL

Volumen 2

Capítulos III & IV

José F. Fernando

J. Manuel Gamboa

Jesús M. Ruiz

Universidad Complutense de Madrid

$$g = f - \lambda\,\mathrm{Id}_E\,, \quad N = \textstyle\bigcup_k \ker(g^k)$$

$$N_{k+1}/N_k \hookrightarrow N_k/N_{k-1} : [u] \mapsto [g(u)]$$

$$\mathcal{B}_J = \{\,\dots, u_{k\ell}, g(u_{k\ell}), \dots, g^{\nu-k}(u_{k\ell}), \dots\,\} \subset N$$

$$M_{f|_N}(\mathcal{B}_J) = \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \lambda & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \lambda & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

sanz y torres

ALGEBRA LINEAL. VOLUMEN 2

Vereda de los Barros, 17
Pol. Ind. Ventorro del Cano – 28925 Alcorcón (Madrid)
☏ 902 400 416 – 91 323 71 10
www.sanzytorres.com
libreria@sanzytorres.com
www.editorialsanzytorres.com
editorial@sanzytorres.com

ISBN (obra completa): 978-84-92948-10-9
ISBN: 978-84-96808-55-6
Depósito legal: M-28073-2010

Portada:
Javier Rojo Abuín

Impresión y encuadernación:
Safekat, S.L.

Prefacio

Este libro es el segundo volumen del curso de Álgebra Lineal cuyo primer volumen dedicamos a los conceptos fundamentales. En éste desarrollamos los primeros resultados importantes que resuelven mediante invariantes problemas básicos de clasificación. El volumen consta de los dos capítulos siguientes:

Capítulo III. *Clasificación de endomorfismos.*

Capítulo IV. *Formas bilineales y formas cuadráticas.*

En el capítulo III se resuelve el problema más importante, por su dificultad y por su utilidad: el de clasificación de endomorfismos, o si se quiere, el de clasificación de matrices por semejanza, mediante formas de Jordan. El capítulo IV está dedicado a las formas bilineales, y los problemas de clasificación correspondientes son: (i) el de formas bilineales simétricas (o formas cuadráticas, o matrices simétricas por congruencia), y (ii) el de formas bilineales antisimétricas (o matrices antisimétricas por congruencia). Un caso particular de las primeras lo constituyen los productos escalares, que conducen a la noción de norma y espacio real euclídeo, y a nuevos problemas de clasificación: (i) de endomorfismos ortogonales, que es una forma especial de semejanza de matrices, y (ii) de endomorfismos autoadjuntos, en el que se mezclan semejanza y congruencia de matrices. Finalmente, dedicamos una lección a las formas sesquilineales y a los espacios hermíticos complejos.

Este volumen tiene la misma estructura y organización que el anterior: 5 secciones por capítulo, 15 problemas al final de cada sección (algunos más difíciles señalados con un), 50 cuestiones al final de cada capítulo, y todas las soluciones en un apéndice. Asímismo hay una breve bibliografía, una tabla de símbolos, y un índice terminológico. Sin embargo, aunque no por su estructura, debemos distinguir este volumen del anterior por su dificultad y por los posibles modos de utilización en la impartición de cada curso particular. Así como el primer volumen pretende ser un libro de texto susceptible de ser seguido con casi entera fidelidad, este segundo debe ser empleado con otro discernimiento. En su totalidad es un curso avanzado sobre los problemas de clasificación antes enumerados, que hemos intentado presentar y resolver de modo elemental, pero completo. Por ello, en un curso básico sugerimos utilizar sólo: del capítulo III, las lecciones 11, 12 y 13, y la 14 sin la demostración del teorema de descomposición, y del capítulo IV, la lección 16, la 17 sin la clasificación de formas antisimétricas, la 18, y la 19 sólo en dimensión ≤ 3. Insistiremos en esto en el resumen de cada uno de los dos capítulos.

La impartición de cursos sobre la materia apoyados en la edición anterior de este texto nos ha inclinado a efectuar una reedición. Nuestros alumnos nos han enseñado qué les resultaba complicado y por qué. En particular nos han reclamado más presencia de la estructura clásica: definiciones + enunciados + demostraciones. Hemos por ello abandonado en algunos pasajes el caracter discursivo que conducía inequívocamente al resultado que los autores conocíamos, pero no así el lector. A título de ejemplo hemos reformulado el Teorema 11.6 que caracteriza los endomorfismos diagonalizables, y hemos presentado con detalle los prerrequisitos que hacen más transparente la prueba del Criterio de Sylvester 18.4. Otras modificaciones son más significativas. Para clasificar formas cuadráticas reales basta contar el número de raíces positivas de su polinomio característico, y esto se puede hacer, sin necesidad de calcular dichas raíces, mediante la Regla de Descartes. Hemos encontrado una breve demostración de este resultado y la hemos incorporado, Proposición 19.16.

Finalmente, queremos expresar nuestro agradecimiento a Elías Baro, Concepción Fuertes, Celia Martínez, y José F. Ruiz, compañeros y amigos, por su disponibilidad para coincidir y discrepar con nuestras ideas sobre esta materia. Este curso de Álgebra Lineal es mejor gracias a ellos.

Jose F. Fernando, J. Manuel Gamboa, Jesús M. Ruiz
Pozuelo, Madrid, Majadahonda

14 de diciembre, 2018

Contenido

CAPÍTULO III

Clasificación de endomorfismos

Resumen. Este capítulo tercero está dedicado a un problema fundamental: la *clasificación de endomorfismos,* es decir, de las aplicaciones lineales de un espacio vectorial de tipo finito en sí mismo. Con ello se empieza a *hacer geometría* (vectorial) pues se toca ya de manera no trivial la comprensión cualitativa de los objetos que se estudian. Aunque el contenido es de sobra conocido, y pocas originalidades caben a la hora de presentarlo, hemos querido adoptar un punto de vista algo infrecuente, que intentamos explicar a continuación.

En la lección 11 se introducen los subespacios invariantes. Son especialmente importantes las *rectas invariantes*, pues están ligadas a los *autovalores,* que son las raíces del *polinomio característico.* La lección siguiente, la 12, presenta de manera discursiva el problema de clasificación de endomorfismos, y el papel que el espacio dual juega en la cuestión. En la lección 13 y central de este capítulo se describen los *subespacios invariantes asociados a un autovalor dado.* En la lección 14 completamos la discusión del caso complejo con el denominado *teorema de descomposición,* y en la 15 la del caso real, por *complexificación.* Ambas lecciones concluyen con la demostración de un bello resultado: la *dualidad formal* a la que están sujetos los subespacios invariantes.

Nuestro objetivo real es facilitar un entendimiento fino y un manejo fluido de los endomorfismos en dimensiones bajas, digamos hasta dimensión cuatro incluida. Un enfoque drástico para conseguir esto sería enseñar la clasificación de endomorfismos hasta esa dimensión sin presentar la teoria de subespacios invariantes en general. Pero aún con esta idea, nos ha sido imposible renunciar a una presentación completa, si bien adaptable a un curso de nivel básico. Así que para compaginar las dos querencias, proponemos el siguiente manual de uso reducido: las lecciones 11 y 12 debieran seguirse fielmente; la 13 casi, con tal vez alguna ligereza circunstancial; la 14 puede limitarse a enunciar el teorema que le da nombre, y algunas consecuencias bien seleccionadas, sin desarrollar la demostración ni los instrumentos en que se basa; la 15 puede eludirse casi en su totalidad, recurriendo al último epígrafe de la lección previa. Pensamos que aún con estas simplificaciones, se puede entender muy bien cómo los subespacios invariantes explican el comportamiento de un endomorfismo.

13. Subespacios invariantes asociados a un autovalor

Empezamos aquí la búsqueda sistemática de subespacios invariantes. Como es habitual, sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un espacio vectorial E de tipo finito, $n = \dim(E)$. Consideramos un autovalor λ de f, fijado para toda la lección. Ya hemos identificado el subespacio invariante $W(\lambda) = \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ formado por todos los autovectores asociados a λ. Ahora queremos explorar otros menos visibles, utilizando las potencias sucesivas de la aplicación lineal $g = f - \lambda \operatorname{Id}_E$.

(13.1) Subespacios invariantes asociados a un autovalor. Extendemos la definición de $W(\lambda)$ utilizando las potencias

$$(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k = (f - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ \overset{k)}{\cdots} \circ (f - \lambda \operatorname{Id}_E),$$

para definir

$$N_k = N_k(\lambda) = \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k.$$

(1) Los N_k son subespacios invariantes de f.

Esto se debe a que f conmuta con todas las potencias $(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k$. Para $k = 1$ es evidente:

$$(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ f = f \circ f - \lambda \operatorname{Id}_E \circ f = f \circ f - \lambda f \circ \operatorname{Id}_E = f \circ (f - \lambda \operatorname{Id}_E),$$

y para $k \geq 2$ se escribe

$$(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k \circ f = (f - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ \overset{k)}{\cdots} \circ (f - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ f,$$

y se aplica repetidamente el caso $k = 1$ hasta colocar f al otro extremo de la composición. Como decíamos, de esto se deduce $f(N_k) \subset N_k$: si $u \in N_k$ se cumple $(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k(u) = 0$ y tenemos

$$(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k(f(u)) = (f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k \circ f(u) = f \circ (f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k(u) = f(0) = 0.$$

(2) Este juego de construcción con las potencias $(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k$ da inmediatamente otras relaciones. En primer lugar, abreviemos $g = f - \lambda \operatorname{Id}_E$, de modo que $N_k = \ker(g^k)$. Como $g^{k+1}(u) = g\big(g^k(u)\big)$, se deduce:

$$N_k = \ker(g^k) \subset \ker(g^{k+1}) = N_{k+1},$$

(2) Comprobar las identidades $A^{**} = A$ y $(AB)^* = B^*A^*$.

(3) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que cumple $AA^* = A^*A$. Denotemos f y g a los endomorfismos de $\mathbb{C}^n$ cuyas matrices respecto de la base estándar son A y A^*, respectivamente. Demostrar que los núcleos de f y g coinciden.

(4) Con las notaciones del apartado anterior, probar que el endomorfismo f es diagonalizable.

Cuestiones sobre clasificación de endomorfismos

Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

Número 1. Un endomorfismo diagonalizable tiene infinitas rectas invariantes.

Número 2. Todo endomorfismo de un espacio vectorial complejo (no trivial, de tipo finito) tiene algún autovector.

Número 3. Si un endomorfismo de un espacio vectorial real no tiene autovalores (reales), entonces no tiene subespacios invariantes distintos del nulo y el total.

Número 4. Toda matriz es semejante a su traspuesta.

Número 5. Todo endomorfismo de $\mathbb{R}^7$ tiene infinitos autovectores.

Número 6. Dos vectores propios cualesquiera de un endomorfismo son linealmente independientes.

Número 7. Todo endomorfismo de un espacio vectorial complejo de tipo finito con dimensión ≥ 2 tiene algún subespacio invariante distinto del nulo y del total.

Número 8. Si el polinomio mínimo de una matriz es T^3, entonces la matriz es diagonalizable.

Número 9. Dos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que tienen el mismo polinomio mínimo tienen, respecto de bases adecuadas, las mismas ecuaciones.

Número 10. Si el polinomio mínimo de un endomorfismo coincide con el característico, entonces el endomorfismo es diagonalizable.

Número 11. Si un endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ tiene dos autovalores distintos, entonces hay un subespacio invariante de codimensión 2.

Número 12. Si un endomorfismo de $\mathbb{C}^4$ tiene un plano invariante y ninguno más, entonces tiene un único autovalor.

Número 13. Existen endomorfismos de $\mathbb{R}^4$ con exactamente 4 rectas invariantes.

Número 49. Toda recta invariante de un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ es intersección de dos planos invariantes.

Número 50. Dos matrices reales que tienen la misma forma de Jordan real pueden tener distinta forma de Jordan compleja.

Apéndice: Solucionario del capítulo III

Soluciones §11

Número 1. ¿Existe algún endomorfismo de $\mathbb{K}^4$ tal que los subespacios

$$W_1 : \begin{cases} x - y + z + t = 0, \\ x \quad\;\; - z \quad\;\; = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad W_2 : \begin{cases} x - y \quad\;\; = 0, \\ x \quad\;\; - z = 0, \end{cases}$$

sean los espacios de autovectores asociados a dos autovalores?

Solución. Los subespacios de autovectores asociados a autovalores distintos sólo comparten el vector nulo. Sin embargo,

$$W_1 \cap W_2 : \{x = y = z = -t\},$$

luego $w = (1, 1, 1, -1) \in W_1 \cap W_2$. No existe por tanto un endomorfismo del que W_1 y W_2 sean subespacios de autovectores. $\square$

Número 2. ¿Existe alguna matriz regular cuyo polinomio característico sea $-T^7 + T^4 - T$?

Solución. Si una matriz tiene $P(T) = -T^7 + T^4 - T$ por polinomio característico, su determinante es nulo, ya que es el término independiente de $P(T)$, luego la matriz no es regular. $\square$

Número 3. Sea f un endomorfismo de un espacio de tipo finito E. Demostrar:

(1) f es un isomorfismo si y sólo si 0 no es autovalor de f.

(2) λ es autovalor de f si y sólo si $-\lambda$ lo es de $-f$.

(3) Si λ es autovalor de f, entonces λ^2 lo es de f^2.

(4) Si λ^2 es autovalor de f^2, entonces bien λ, bien $-\lambda$, lo es de f.

(5) Si $f^2 = f$, entonces f no posee autovalores distintos de 0 y 1.

Solución. Denotamos $n = \dim(E)$ y M la matriz de f respecto de una base fijada.

(1) f es isomorfismo si y sólo si $\det(M) \neq 0$, y puesto que ese determinante es el

CAPÍTULO IV

Formas bilineales y formas cuadráticas

Resumen. El objetivo de este cuarto y último capítulo es presentar y desarrollar los conceptos de *forma cuadrática* y de *producto escalar*. La lección 16 está dedicada a introducir el de *forma bilineal,* y con él los de *formas polares, rango* y *degeneración.* También, las nociones de forma bilineal *simétrica* y forma bilineal *antisimétrica,* y al fin *forma cuadrática.* Por supuesto, esto tiene su representación mediante ecuaciones, lo que conduce a la relación de *congruencia de matrices.* En la lección 17 se plantea el problema de clasificación correspondiente y se estudia su solución, que varía según se consideren números complejos o números reales; aquí aparece la *signatura.* Algunas formas cuadráticas reales, las *definidas positivas,* constituyen un instrumento de medida. Los espacios vectoriales dotados de tal forma de medir se denominan *euclídeos,* a los que está dedicada la lección 18. En estos espacios se tiene el concepto de *ortogonalidad,* y se explican el *Teorema de Pitágoras,* la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* y el *método de Gram-Schmidt.* La lección 19 está dedicada a dos tipos de endomorfismos específicos de los espacios vectoriales euclídeos: los *ortogonales* y los *autoadjuntos.* Se prueba en ella un resultado importantísimo: el *teorema espectral.* La naturaleza de la última lección, la 20, es algo diferente. Para medir en los espacios complejos se emplean las formas *hermíticas,* un tipo particular de forma *sesquilineal.* Esto nos lleva a rehacer para éste tipo nuevo de formas lo ya visto para las bilineales y comprobar que, con las adaptaciones naturales pero imprescindibles, todo marcha sin sorpresas.

Como en el capítulo anterior, proponemos para un curso básico una lectura limitada de estas cinco lecciones. Por una parte, se puede prescindir de la lección 20 y última, y por otra dedicar la 19 sólo a los casos de dimensión baja (≤ 3). Y aún se puede simplificar más, abordando en la lección 17 solamente la clasificación de formas bilineales *simétricas.*

(3) También la ortogonalidad es útil. Por ejemplo, ningún endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con matriz simétrica (en coordenadas estándar) puede tener por subespacios de autovectores la recta $x + z = y = 0$ y el plano $x - 2y = 0$: el vector $(1, 0, -1)$ de la primera no es ortogonal al vector $(2, 1, 0)$ del segundo. □

Corolario 19.15 *La signatura de una matriz simétrica es el número de sus autovalores positivos (contados con multiplicidades).*

En particular, dos matrices simétricas reales semejantes son congruentes.

Demostración. Por el resultado anterior, toda matriz simétrica M se puede diagonalizar simultáneamente $M' = C^t MC = C^{-1}MC$. Así, M y M' tienen la misma signatura y el mismo polinomio característico. Pero para una matriz diagonal la afirmación del enunciado es inmediata. □

Una vez convertido el cálculo de la signatura en el recuento de raíces positivas del polinomio característico, hay que recordar la Regla de Descartes que nos permite calcular el número de esas raíces examinando tan sólo los signos de los coeficientes del polinomio.

Para formular dicha regla necesitamos la siguiente noción. Sea $P(T) = a_0T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_{n-1}T + a_n$ un polinomio no nulo. El *número de cambios de signo* de la sucesión $(a_0, \ldots, a_n)$ de sus coeficientes se calcula contando un cambio por cada $k = 0, \ldots, n-1$ tal que $a_k a_\ell < 0$ con $\ell = k + 1$ ó $\ell > k + 1$ y $a_i = 0$ para $k < i < \ell$. Denotamos $v(P) = v(a_0, \ldots, a_n)$ este número de cambios de signo.

Proposición 19.16 *Sea $P(T) = a_0T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[T]$ un polinomio de grado n cuyas raíces son todas reales. Entonces, el número $n^+(P)$ de raíces positivas de $P(T)$, contadas con multiplicidad, coincide con el número de cambios de signo $v(P) = v(a_0, \ldots, a_n)$ de la sucesión de los coeficientes del polinomio $P(T)$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que podemos suponer $a_n \neq 0$, es decir, que 0 no es raíz de $P(T)$. Denotemos m la multiplicidad de 0 como raíz del polinomio $P(T)$. Entonces $P(T) = T^m G(T)$ y el polinomio $G(T) \in \mathbb{R}[T]$, cuyas raíces son todas reales, no tiene 0 entre ellas. Claramente $n^+(P) = n^+(G)$ y $v(P) = v(G)$. Por tanto, si el resultado es cierto para $G(T)$ también lo es para $P(T)$. Suponemos pues a partir de ahora que $a_n \neq 0$ y afirmamos que basta probar la desigualdad

Cuestiones sobre formas bilineales y formas cuadráticas

Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

Número 1. Dos matrices simétricas reales de distinto rango no son congruentes.

Número 2. Todo endomorfismo ortogonal del plano euclídeo tiene alguna recta invariante.

Número 3. Una forma bilineal simétrica no nula no tiene vectores isótropos.

Número 4. Existen productos escalares en $\mathbb{R}^3$ respecto de los cuales la base estándar no es ortonormal.

Número 5. El polinomio característico de una simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto de un plano es $(1-T^2)(1+T)$.

Número 6. En $\mathbb{R}^{2001}$ toda forma bilineal antisimétrica es degenerada.

Número 7. El endomorfismo del plano euclídeo que tranforma $(1,0)$ en $(0,1)$ y viceversa es ortogonal y directo (esto es, positivo).

Número 8. Si una matriz simétrica real tiene traza nula, entonces no es congruente a la matriz identidad.

Número 9. Todas las potencias de una matriz simétrica compleja son congruentes.

Número 10. Una forma bilineal no degenerada no tiene vectores isótropos.

Número 11. Ningún endomorfismo ortogonal de $\mathbb{R}^2$ tiene una única recta invariante.

Número 12. Dos matrices simétricas reales semejantes son también congruentes.

Número 13. Una matriz antisimétrica y su traspuesta son siempre congruentes.

Número 14. Si $T^4(T^2-1)$ es el polinomio característico de una matriz simétrica real su rango es 2 y su signatura es 1.

Número 15. Existe un único producto escalar en $\mathbb{R}^n$ para el cual la base estándar es ortonormal.

Número 16. Un endomorfismo ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que invierte la orientación es necesariamente una simetría.

Número 17. Toda forma bilineal es suma de una simétrica y otra antisimétrica.

Número 18. Existen sólo dos endomorfismos ortogonales del plano euclídeo que tranforma $(1,0)$ en $(0,1)$.

Número 19. Toda forma bilineal antisimétrica se puede diagonalizar.

Número 40. La composición de dos simetrías axiales del plano vectorial euclídeo nunca es otra simetría axial.

Número 41. Dadas dos bases ortonormales de un espacio vectorial euclídeo, existe un único endomorfismo ortogonal que transforma una en otra.

Número 42. Hay matrices antisimétricas complejas de orden impar cuyo determinante es $\sqrt{-1}$.

Número 43. Si el inverso de una semejanza es un endomorfismo ortogonal, entonces la propia semejanza es un endomorfismo ortogonal.

Número 44. Si un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo transforma bases ortogonales en bases ortogonales, entonces es una semejanza.

Número 45. Si dos matrices simétricas reales son semejantes como matrices complejas, entonces son congruentes como matrices reales.

Número 46. Si dos matrices simétricas con coeficientes reales son congruentes como matrices complejas, entonces son semejantes como matrices reales.

Número 47. Como todas las matrices antisimétricas de orden impar, todas las matrices antihermíticas de orden impar tienen determinante nulo.

Número 48. Toda matriz antihermítica es diagonalizable por semejanza.

Número 49. Existen endomorfismos ortogonales con polinomio mínimo $(1-T)^3$.

Número 50. Existe un endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^3$ que tiene a $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$ por autovectores.

Apéndice: Solucionario del capítulo IV

Soluciones §16

Número 1. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son formas bilineales de $\mathbb{R}^n$:

(1) $F((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = x_1|y_1| + \cdots + x_n|y_n|$.

(2) $F((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = |x_1y_1 + \cdots + x_ny_n|$.

(3) $F((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{x_1^2y_1^2 + \cdots + x_n^2y_n^2}$.

(4) $F((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = x_1y_1 + \cdots + x_ky_k$, para cada $k=1,\dots,n$.

De cada una que lo sea, obtener su matriz respecto de la base estándar.

Lecturas ulteriores

Como en el volumen anterior, mencionamos aquí algunas referencias que consideramos especialmente recomendables, con todo lo que de opinable pueda tener ese juicio.

1. A lo largo del curso hemos introducido varios grupos importantes: el grupo lineal, el ortogonal y el unitario, y sus subgrupos especiales. Nada o muy poco hemos dicho aquí de ellos como tales grupos: generadores, subgrupos notables, ... Para aprender algo de ello, de la teoría de *grupos clásicos,* recomendamos leer:

E. Artin: *Geometric algebra.* New York: Wiley-Interscience 1988.

K. Tapp: *Matrix groups for undergraduates.* Providence, Rhode Island: AMS 2005.

D.E. Taylor: *The Geometry of the classical groups.* Berlin: Heldermann 1992.

2. Central en este texto es la clasificación de endomorfismos, que hemos descrito con detalle basándonos en la búsqueda de *invariantes.* Para apreciar el alcance más profundo de estas ideas, así como su aplicación en otros contextos, véanse:

B. Hartley, T.O. Hawkes: *Rings, modules and linear algebra.* London: Chapman and Hall 1987.

S. Lang: *Álgebra.* Madrid: Aguilar 1973.

3. Otro asunto esencial que hemos estudiado son las formas cuadráticas. En realidad la *teoría de formas cuadráticas* tiene una importancia capital en

Símbolos

Índice