

José M. Rodríguez-Sanjurjo  
Jesús M. Ruiz

# Introducción a la Geometría Diferencial I: Curvas



sanz y torres

---

# Introducción a la Geometría Diferencial, I

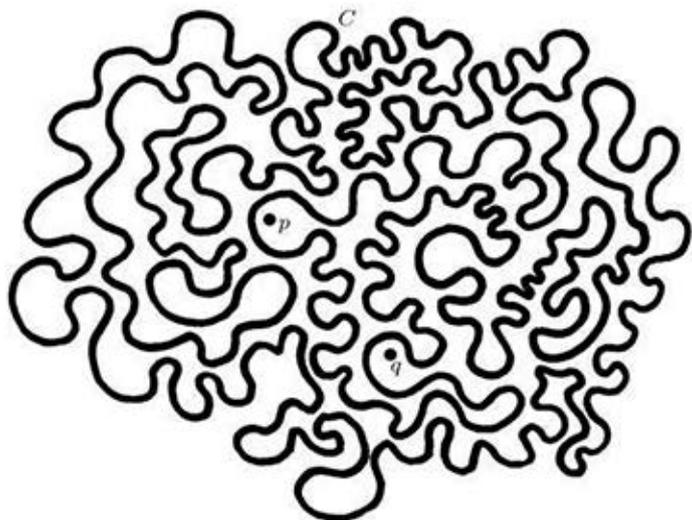
## CURVAS

---

José M. Rodríguez-Sanjurjo

Jesús M. Ruiz

Universidad Complutense de Madrid



sanz y torres

## INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL I. CURVAS

El editor no se hace responsable de las opiniones recogidas, comentarios y manifestaciones vertidas por los autores. La presente obra recoge exclusivamente la opinión de su autor como manifestación de su derecho de libertad de expresión.

La Editorial se opone expresamente a que cualquiera de las páginas de esta obra o partes de ella sean utilizadas para la realización de resúmenes de prensa.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Por tanto, este libro no podrá ser reproducido total o parcialmente, ni transmitirse por procedimientos electrónicos, mecánicos, magnéticos o por sistemas de almacenamiento y recuperación informáticos o cualquier otro medio, quedando prohibidos su préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso del ejemplar, sin el permiso previo, por escrito, del titular o titulares del copyright.

© José M. Rodríguez Sanjurjo y Jesús M. Ruíz

© EDITORIAL SANZ Y TORRES, S. L.

Vereda de los Barros, 17

Pol. Ind. Ventorro del Cano – 28925 Alcorcón (Madrid)

☎ 902 400 416 - 91 323 71 10

[www.sanzyltorres.es](http://www.sanzyltorres.es)

[libreria@sanzyltorres.com](mailto:libreria@sanzyltorres.com)

[www.editorialsanzyltorres.com](http://www.editorialsanzyltorres.com)

[editorial@sanzyltorres.com](mailto:editorial@sanzyltorres.com)

ISBN: 978-84-15550-23-5

Depósito legal: M-33006-2012

Portada:

Javier Rojo Abuín

Composición:

Autores

Impresión y encuadernación:

Safekat, S. L.

*Não é o ângulo recto que me atrai  
Nem a linha recta, dura, inflexível,  
Criada pelo homem.  
O que me atrai é a curva livre e sensual,  
A curva que encontro nas montanhas  
Do meu país,  
No curso sinuoso dos seus rios,  
Nas ondas do mar,  
No corpo da mulher preferida.  
De curvas é feito todo o universo.  
O universo curvo de Einstein.*

*O Poema da Curva  
Oscar Niemeyer*

---

## Prefacio

---

Si, por una parte, las raíces geométricas del Cálculo Infinitesimal son evidentes, por otra, la influencia del Cálculo en la Geometría ha sido muy importante. El descubrimiento del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII abrió la vía para que los matemáticos comenzaran a aplicar las nuevas ideas al estudio de las curvas. Por ejemplo, Clairaut estudió hacia 1730 diversas propiedades geométricas utilizando derivadas, en particular las derivadas de funciones que definen parametrizaciones de curvas. Con los nuevos métodos, nociones fundamentales, como la de curvatura, encuentran su tratamiento apropiado. Asimismo, el uso del Cálculo Integral hizo posible dar solución a problemas propuestos desde la antigüedad, como el cálculo de las longitudes de las curvas. El presente volumen, dedicado íntegramente a la teoría de curvas diferenciables, es el primero de un curso de Geometría Diferencial en dos volúmenes, estando el segundo dedicado a las superficies. Hemos considerado que el estudio de las curvas por su propio interés (y no solamente como paso previo al estudio de las superficies) justifica la existencia de este volumen separado. Como es lógico, el libro gravita en gran medida en torno a las ideas básicas de curvatura y torsión y parte de su contenido corresponde a la teoría local de curvas, que estudia la vecindad de uno de sus puntos. Pero una curva es también un objeto global, cuyo comportamiento como tal no puede describirse sólo con el estudio local hasta aquí mencionado. Algunas de las propiedades globales de las curvas tienen un gran contenido intuitivo y se refieren a aspectos fácilmente visualizables, y sin embargo la demostración rigurosa de las mismas puede ser de una notable dificultad. Un ejemplo es el teorema de las tangentes de Hopf, al que dedicamos una lección. También hemos incluido una clasificación de las curvas diferenciables, que nos proporciona un modelo salvo difeomorfismos de las curvas sumergidas. Este libro tiene dos partes bien definidas, según lo que acabamos de explicar. Una dedicada a la teoría local, que abarca las lecciones de la primera a la décima, y otra que presenta algunos aspectos globales, en las restantes cinco lecciones. El detalle de contenidos que sigue a este prefacio describe bien el alcance y la naturaleza de nuestra presentación. Los prerrequisitos necesarios se cubren con los cursos habituales de Cálculo, Álgebra Lineal y Geometría de cualquier grado de Físicas, Matemáticas o de una Ingeniería de los nuevos planes de estudios. Por otra parte, intentamos siempre completar la mayor cantidad razonable de detalles en la exposición. Las lecciones son breves, y están centradas

en un solo asunto concreto. Además, se intercalan ejemplos y dibujos para facilitar la lectura. Cada lección incluye una lista de 10 ejercicios propuestos para practicar la teoría presentada en ella, mejorar su comprensión y, a veces, completarla con alguna aplicación adicional. La lección termina con unas notas de muy variada naturaleza, principalmente histórica; estos comentarios aspiran a despertar la curiosidad del lector por buscar más información sobre los muchos temas interesantes a los que esta materia da pie. El libro tiene una pequeña bibliografía; sobre teoría de curvas es imposible aspirar siquiera a escribir una lista completa de referencias. También hay varios índices: de los matemáticos mencionados en algún momento, de figuras, de símbolos y uno general terminológico. Por supuesto, cualquier autor se esfuerza por escribir un libro claro y útil para aprender la materia de que se trate. Nosotros, además de eso, querríamos ser capaces de transmitir la riqueza de una teoría que puede parecer hoy muy trillada, pero que pensamos es expresión fiel y asequible de la belleza de la geometría. No podemos dejar de mencionar aquí a las personas que nos han ayudado en la elaboración de este trabajo. En particular a Ángel Miguel Amores, Jesús Ildefonso Díaz y José María Montesinos por sus comentarios, sugerencias y estímulo. A nuestros alumnos Hugo Bello y Leire Gorrochategui, por haber leído algunos capítulos y hacernos útiles indicaciones. Y, muy especialmente, a Víctor Fernández Laguna y José Manuel Gamboa por la atenta lectura y numerosas observaciones que han contribuido a mejorar notablemente el resultado final. A todos ellos agradecemos su colaboración.

Pozuelo de Alarcón, Majadahonda  
Enero de 2012

*J.M. Rodríguez-Sanjurjo, J.M. Ruiz*

---

# Contenido

---

<b>1. Curvas parametrizadas</b>	<b>1</b>
<i>Curva diferenciable, parametrización, traza, curva plana, curva alabeada, curva esférica. Vector tangente, velocidad, vector tangente unitario, singularidad. Curva regular, curva cerrada, lazo. Hélice, tractriz, pseudoesfera, cicloide, bruja de Agnesi, espiral, espiral de Arquímedes, espiral logarítmica. Grafos, curvas de nivel. Longitud, latitud y colatitud. Imagen de una curva, reparametrización, cambio de parámetro. Arco de Jordan, curva de Jordan. Límite de secantes.</i>	
Problemas de la lección 1 . . . . .	13
Notas de la lección 1 . . . . .	14
<b>2. Asíntotas</b>	<b>17</b>
<i>Rama no acotada. Asíntota. Hipérbola, seno deformado. Dirección asíntótica. Parábola. Límite de vectores tangentes. Ramas no acotadas, asíntotas y ramas parabólicas de curvas planas. Límite de una familia uniparamétrica de rectas. Límite de rectas tangentes; recta tangente en infinito a una rama no acotada.</i>	
Problemas de la lección 2 . . . . .	25
Notas de la lección 2 . . . . .	26
<b>3. Longitud de un arco de curva</b>	<b>29</b>
<i>Longitud de un arco, longitud con signo, longitud de una curva, longitud infinita. Poligonal, diámetro de una poligonal, aproximación de la longitud mediante poligonales. Curva rectificable. Longitud y cambio de parámetro, cambio de parámetro creciente, curvas equivalentes. Parametrización por la longitud del arco, existencia y unicidad. Reparametrización por traslación de curvas equivalentes. Vector tangente unitario y parametrización por la longitud del arco. Parametrización por el arco de curva y longitudes de secantes.</i>	
Problemas de la lección 3 . . . . .	38
Notas de la lección 3 . . . . .	39
<b>4. Curvatura y torsión. Fórmulas de Frenet-Serret</b>	<b>41</b>
<i>Curvatura, radio de curvatura. Vector normal, recta normal. Curva birregular. Plano osculador, centro de curvatura, circunferencia osculatriz. Vector binormal, recta binormal. Plano normal, plano rectificante. Triedro de Frenet. Formulas de</i>	

*Frenet-Serret. Representación canónica de una curva. Posiciones relativas de la curva y el plano osculador, de la curva y el plano rectificante. Cinemática de una curva, triedro móvil, velocidad angular, vector de Darboux.*

Problemas de la lección 4 . . . . .	51
Notas de la lección 4 . . . . .	52

## **5. Algunas aplicaciones de las fórmulas de Frenet-Serret** **55**

*Curvas de torsión nula. Semiespacios asociados al plano osculador, signo de la torsión. El plano osculador como el plano atravesado por la curva. El plano osculador como límite de planos del haz que contiene a la tangente. El plano osculador como límite de los planos generados por tres puntos consecutivos.*

Problemas de la lección 5 . . . . .	60
Notas de la lección 5 . . . . .	61

## **6. Curvatura con signo de curvas planas** **63**

*Vector normal de una curva plana, curvatura con signo de una curva plana. Ángulo de tangencia, curvatura con signo como variación infinitesimal del ángulo de tangencia. Determinación diferenciable del ángulo de tangencia. Signo de la curvatura según el lado de la tangente que la curva ocupa. Centro de curvatura y circunferencia osculatriz de una curva plana.*

Problemas de la lección 6 . . . . .	69
Notas de la lección 6 . . . . .	70

## **7. Involutas y evolutas de curvas planas y de curvas alabeadas** **73**

*Involutas de una curva alabeada. Evoluta de una curva alabeada. Involutas de una curva alabeada parametrizada por el arco. Curvas paralelas. Curva de centros de curvatura de una curva plana parametrizada por el arco, existencia y unicidad de la evoluta plana de una curva plana. Descripción de todas las evolutas de una curva alabeada. Evolutas alabeadas de una curva plana.*

Problemas de la lección 7 . . . . .	79
Notas de la lección 7 . . . . .	80

## **8. Algunos resultados sobre curvatura y torsión de curvas alabeadas** **83**

*Curvatura como límite de ángulos de tangencia. Lado del plano rectificante que contiene a una curva. Hélice generalizada. Generación de las hélices generalizadas mediante curvas planas. Curvatura y torsión de una hélice generalizada, Teorema de Lancret. Caracterización de las curvas esféricas mediante la curvatura y la torsión. Relación entre la curvatura y la torsión de las curvas esféricas,*

*acotación de los radios de curvatura de aquéllas por el radio de ésta. Teorema de Wong. Loxodromas.*

Problemas de la lección 8 . . . . . 92  
 Notas de la lección 8 . . . . . 93

**9. El teorema fundamental 97**

*Movimientos rígidos directos. Curvas iguales salvo movimientos rígidos directos. Teorema fundamental de las curvas planas. Espiral de Cornu o clotoide. Teorema fundamental de las curvas alabeadas. Curvas con curvatura y torsión constantes. Ecuaciones intrínsecas de una curva, coordenadas intrínsecas de una curva. Sistema de Frenet-Serret. Ecuación de Ricatti. Reducción del sistema de Frenet-Serret a tres ecuaciones de Ricatti.*

Problemas de la lección 9 . . . . . 105  
 Notas de la lección 9 . . . . . 106

**10. Curvas no parametrizadas por la longitud del arco 109**

*Curvatura, torsión y triedro de Frenet cuando el parámetro no es el arco. Curvatura de una curva plana cuando el parámetro no es el arco. Curvatura de una cónica. Curvatura de una tractriz. Curvas planas definidas mediante ecuaciones implícitas, curvatura en implícitas.*

Problemas de la lección 10 . . . . . 117  
 Notas de la lección 10 . . . . . 118

**11. Grado de una parametrización de la circunferencia 121**

*Proyección recubridora de la circunferencia. Exponencial compleja y logaritmo. Elevaciones de una aplicación continua con valores en la circunferencia. Existencia y unicidad de elevaciones para compactos convexos. Grado de una parametrización continua cerrada de la circunferencia. Homotopía de parametrizaciones cerradas de la circunferencia. Grado y homotopía. Aplicaciones de grado nulo.*

Problemas de la lección 11 . . . . . 126  
 Notas de la lección 11 . . . . . 127

**12. Umlaufsatz para curvas planas 129**

*Índice de rotación de una curva cerrada simple. Determinaciones del ángulo de tangencia. Teorema de las tangentes de Hopf o Umlaufsatz. Curvas diferenciables a trozos. Vértices y cúspides; ángulo externo en un punto no cuspidal. Polígono curvilíneo. Determinación de los ángulos de tangencia e índice de rotación de*

*un polígono curvilíneo. Allanamiento de vértices. Umlaufsatz para polígonos curvilíneos.*

Problemas de la lección 12 . . . . . 142

Notas de la lección 12 . . . . . 143

### **13. Orientación de una curva de Jordan 147**

*Teorema de Jordan, o teorema de separación, o teorema de la curva de Jordan. Interior y exterior de una curva de Jordan. Teorema de Schönflies. Entornos tubulares de una curva de Jordan. Orientación de una curva de Jordan. Significado del signo del índice de rotación.*

Problemas de la lección 13 . . . . . 152

Notas de la lección 13 . . . . . 153

### **14. Geometría global de las curvas de Jordan 155**

*Curva convexa. Convexidad y curvatura. Tangencias a una curva convexa. Puntos críticos de la curvatura; vértices de una curva regular. Teorema de los cuatro vértices. Desigualdad isoperimétrica. Área encerrada por una curva de Jordan. Teorema de Green.*

Problemas de la lección 14 . . . . . 165

Notas de la lección 14 . . . . . 165

### **15. Clasificación de curvas diferenciables 167**

*Difeomorfismos entre subconjuntos arbitrarios del espacio afín. Variedades diferenciables de dimensión 1; curvas sumergidas. Parametrizaciones regulares que son homeomorfismos sobre sus trazas. Parametrizaciones globales de curvas sumergidas. Modelos salvo difeomorfismo de curvas sumergidas. Teorema de clasificación de curvas sumergidas. Clasificaciones diferenciable y topológica.*

Problemas de la lección 15 . . . . . 173

Notas de la lección 15 . . . . . 174

**Bibliografía 177**

**Nombres propios 181**

**Figuras 185**

**Símbolos 187**

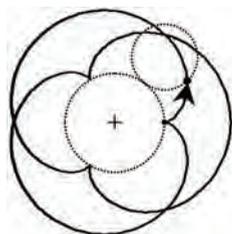
**Índice 193**

La diferencia en este cálculo cuando  $t \rightarrow t_0^-$  es la siguiente:

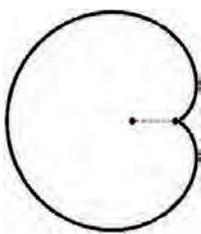
$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|}{t - t_0} = - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \right\| = -\|\alpha'(t_0)\|. \quad \blacksquare$$

## Problemas

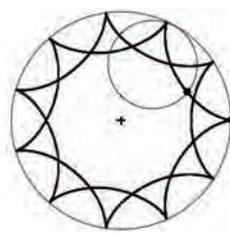
**Número 1.** (1) Hallar una parametrización de la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin deslizarse alrededor de la parte externa de otra circunferencia. Esta curva se denomina *epicicloide*, y *cardioide* cuando las dos circunferencias tienen el mismo radio.



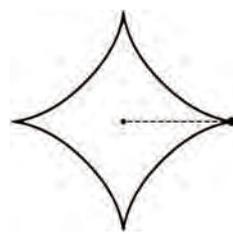
Epicicloide



Cardioide



Hipocicloide



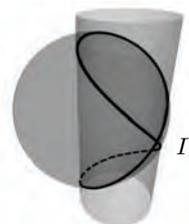
Astroide

(2) Resolver el problema análogo cuando la circunferencia que rueda lo hace alrededor de la parte interna de la otra. En este caso, la curva se llama *hipocicloide*, y *astroide* cuando el radio de la circunferencia que rueda es la cuarta parte del de la otra.

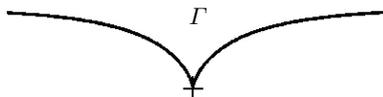
**Número 2.** Denotemos por  $\Gamma$  la intersección del cilindro de eje  $z$  y radio  $1/2$  con la esfera de centro  $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$  y radio  $1$ . Demostrar que  $\Gamma$  es la traza de la curva

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t) \\ &= (\frac{1}{2} \cos 2t, \frac{1}{2} \sin 2t, \sin t). \end{aligned}$$

Esta curva recibe el nombre de *curva de Viviani*.



**Número 3.** Sea  $\Gamma$  el conjunto de puntos del plano que satisfacen la ecuación  $\rho = \cos \theta / \tan \theta$  (en coordenadas polares,  $0 < \theta < \pi$ ). Pasando a coordenadas cartesianas y utilizando la ecuación anterior se obtiene una parametrización de  $\Gamma$  respecto de  $\theta$  que se llama *cisoide de Diocles*. Probar que  $\beta(t) = (\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}, t^2)$ ,  $-1 < t < 1$ , define una reparametrización de la cisoide.



**Número 4.** Probar que una curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene su traza contenida en una recta si y sólo si el vector tangente unitario  $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es constante.

fuerte contenido intuitivo, por lo que hemos creído conveniente incluirlo. Para simplificar al máximo los cálculos suponemos que  $s_0 = 0$  y que  $\alpha(s_0) = 0$ ; además, denotamos  $\kappa_0 = \kappa(s_0)$ ,  $\kappa'_0 = \kappa'(s_0)$ ,  $\tau_0 = \tau(s_0)$ . Teniendo en cuenta que  $\lim_{s \rightarrow s_0} O(s)/(s - s_0)^3 = 0$  podemos despreciar el término  $O(s)$ , y entonces, llamando  $x(s), y(s), z(s)$  a las coordenadas de  $\alpha(s)$  respecto del triedro de Frenet en  $s_0$ , resulta que

$$\begin{cases} x = s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3, \\ y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + \frac{1}{6}\kappa'_0 s^3, \\ z = -\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3. \end{cases}$$

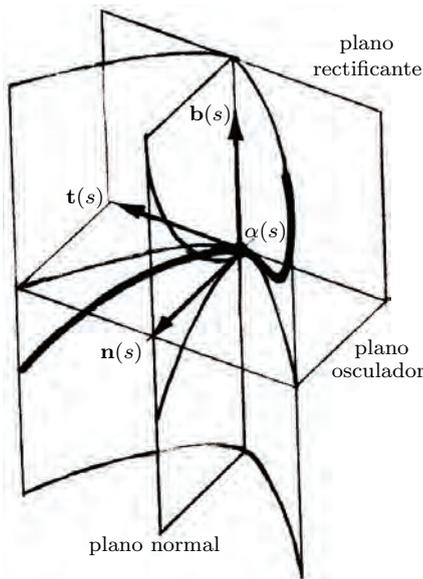
Es inmediato comprobar que

$$\lim_{s \rightarrow 0} (y/x^2) = \frac{1}{2}\kappa_0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} (z/x^3) = -\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0, \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0} (z^2/y^3) = \frac{2}{9}\tau_0^2/\kappa_0,$$

de modo que para valores cercanos a  $s = 0$  se verifican de modo aproximado las igualdades

$$y = \frac{1}{2}\kappa_0 x^2, \quad z = -\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 x^3, \quad \text{y} \quad z = \pm \frac{1}{3}\tau_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa_0}} y^{3/2}.$$

También de forma aproximada, estas ecuaciones representan respectivamente las proyecciones de la curva sobre los planos osculador (en estas coordenadas el plano  $(x, y)$ ), rectificante (el plano  $(x, z)$ ) y normal (el plano  $(y, z)$ ). Esas proyecciones son una parábola, una parábola cúbica y una cúspide en el origen cuyas dos ramas son tangentes al eje  $y$  (obsérvese que  $y \geq 0$  para puntos cercanos al origen). De este modo vemos que  $\alpha$  es semejante en un entorno del origen a una curva cuya traza está en un cilindro de base una parábola situada en el plano osculador y de generatriz el eje  $z$ . Si  $\tau_0 > 0$ , la rama de esta curva correspondiente a  $x > 0$  yace bajo el plano osculador y la rama correspondiente a  $x < 0$  está por encima, situación que se invierte para  $\tau < 0$ . En la lección siguiente estableceremos de modo riguroso esta propiedad geométrica del signo de la torsión (Proposición 5.3).



## Notas

**1.** La noción de torsión fue implícitamente introducida por GASPARD MONGE (1746–1818) en su memoria titulada *Sur les développées, les rayons de courbure, et les différentes genres d'inflexions dans les courbes à double courbure*, aunque sólo su discípulo MICHEL-ANGE LANCRET (1774–1807) establecería explícitamente este concepto, pero no el nombre, que aparecería posteriormente en el *Traité de géométrie descriptive* publicado en 1819 por LOUIS-LÉGER VALLÉE (1784–1864). Monge es también autor del muy influyente libro *Application de l'Analyse à la Géométrie*, cuyo título revela por sí solo el nuevo espíritu que propició el desarrollo de la Geometría Diferencial. El libro puede ser considerado el primer tratado sobre esta disciplina y en él Monge adopta el doble punto de vista de dar interpretaciones geométricas de las ecuaciones en derivadas parciales e interpretaciones analíticas (en el lenguaje de las derivadas parciales) de propiedades geométricas.

**2.** Monge desempeñó un papel fundamental en el establecimiento de la Escuela Politécnica de París, un centro científico de gran importancia en la historia de las matemáticas y de otras ciencias e ingenierías, en cuyo modelo se han basado otros institutos técnicos de diferentes países. Además de un gran científico, Monge era un gran maestro, que supo inspirar a algunos de los jóvenes talentos más destacados de su época, juntamente con los cuales constituyó una escuela de geometría que marca la fase inicial del desarrollo de la Geometría Diferencial (y también de la Geometría Proyectiva y de la Geometría Descriptiva). A esta escuela pertenecen, además de Lancret, mencionado anteriormente, JEAN BAPTISTE MEUSNIER DE LA PLACE (1754–1793), ÉTIENNE LOUIS MALUS (1775–1812), ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775–1836), SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840), PIERRE CHARLES FRANÇOIS DUPIN (1784–1873), JEAN VICTOR PONCELET (1788–1867) y BENJAMIN OLINDE RODRIGUES (1795–1851). Otras generaciones de geómetras continuarían la labor de éstos en la misma Escuela Politécnica, institución en la que en todo momento han convivido en armonía las matemáticas puras y las aplicadas. El propio Monge es un ilustre representante de ambas orientaciones: algunas de las nociones más importantes de la Geometría Diferencial, por ejemplo la noción de *línea de curvatura*, fueron introducidas por él en una memoria en la que estudiaba problemas prácticos relacionados con la ingeniería de las excavaciones y con la construcción de fortificaciones militares (*Sur la théorie des déblais et des remblais*).

**3.** Monge vivió sus años de madurez en el marco convulso de la Francia revolucionaria y compatibilizó su labor científica con una intervención activa en política. Fue ministro de Marina y ocupó temporalmente el puesto de primer ministro, posición en la que se encontraba el día que fue ejecutado Luis XVI. A partir de este momento fue considerado un regicida por parte de los monárquicos. Acompañó a Napoleón en su campaña de Egipto y allí se encontraba cuando la flota francesa fue aniquilada por Nelson, de modo que quedó bloqueado con Napoleón y otros científicos (entre ellos el matemático JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830)) que le acompañaban en Egipto. En esas cir-

(2) Supongamos ahora  $\kappa(s) = 1/s$ ,  $s \in I = (0, \infty)$ . De nuevo seguimos los pasos de la demostración del teorema anterior. Así  $\theta(s) = \int_1^s \frac{1}{u} du = \log s$ , y

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left( \int_1^s \cos \log u \, du, \int_1^s \sen \log u \, du \right) \\ &= \frac{1}{2}s(\cos \log s + \sen \log s, \sen \log s - \cos \log s) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

El término  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  puede ser eliminado de la expresión anterior, ya que estamos interesados en curvas definidas salvo movimientos rígidos directos. Si ahora hacemos el cambio de parámetro  $s = e^\theta$  obtenemos la expresión

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2}e^\theta(\cos \theta + \sen \theta, \sen \theta - \cos \theta) = \frac{1}{2}e^\theta(\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}), \sqrt{2} \sen(\theta - \frac{\pi}{4})),$$

donde seguimos denotando  $\alpha$  la curva reparametrizada. Finalmente haciendo el cambio de parámetro  $\omega = \theta - \frac{\pi}{4}$  obtenemos

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2}e^{\omega + \frac{\pi}{4}}(\sqrt{2} \cos \omega, \sqrt{2} \sen \omega) = ce^\omega(\cos \omega, \sen \omega),$$

con  $c = e^{\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}$ , que es una espiral logarítmica (Ejemplo 1.5(5), p. 7). ■

El resultado que acabamos de establecer para curvas de  $\mathbb{R}^2$ , tiene una versión para curvas de  $\mathbb{R}^3$ , el *teorema fundamental para curvas alabeadas*, que presentamos a continuación. En este caso es necesario hacer uso no sólo de la curvatura sino también de la torsión.

**Teorema 9.4.** Sean  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones diferenciables, con  $\kappa(s) > 0$  para todo  $s \in I$ .

(1) Existe una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , parametrizada por la longitud del arco, tal que  $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$  y  $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$  para todo  $s \in I$ .

(2) Esta curva es única salvo movimientos rígidos directos: si  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es otra curva parametrizada por la longitud del arco con esa propiedad, entonces  $\beta = \sigma \circ \alpha$  para cierto movimiento rígido directo  $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

*Demostración.* Comencemos probando (2), es decir, que la curvatura y la torsión determinan la curva salvo movimientos rígidos directos. Fijemos  $s_0 \in I$  y sea  $\sigma$  el movimiento directo que lleva la referencia

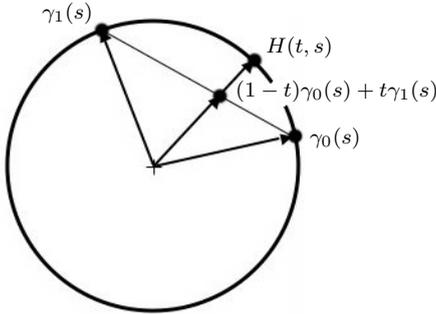
$$\mathcal{R}_\alpha = \{\alpha(s_0); \mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0), \mathbf{b}_\alpha(s_0)\}$$

Aquí no vamos a desarrollar sistemáticamente este concepto. Pero sí señalamos que si  $H$  es una homotopía de  $\gamma_0$  a  $\gamma_1$  y  $G$  una de  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ , entonces

$$F(s, t) = \begin{cases} H(s, 2t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(s, 2t - 1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía de  $\gamma_0$  a  $\gamma_2$ . En realidad esto es decir que la relación de homotopía es transitiva. De hecho, es una relación de equivalencia, y las clases *salvo homotopía* de parametrizaciones cerradas de la circunferencia constituyen el denominado *grupo fundamental de la circunferencia*, que se denota  $\pi(\mathbb{S}^1)$ . El término grupo se utiliza porque se puede definir una operación como tal, pero sobre esto no diremos nada.

**Ejemplos 11.5.** (1) Una forma fácil de construir homotopías es por *interpolación lineal*. Sean  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  parametrizaciones cerradas sin *imágenes antipodales*, es decir, tales que se cumple  $\gamma_0(s) \neq -\gamma_1(s)$  para  $a \leq s \leq b$ . Entonces  $(1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s) \neq 0$  para  $0 \leq t \leq 1$ , y



$$H(t, s) = \frac{(1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)}{\|(1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)\|}$$

es una homotopía de  $\gamma_0$  a  $\gamma_1$ . La figura ilustra esta definición.

(2) La anterior construcción se aplica en la siguiente situación. Sea  $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  una parametrización cerrada y  $\zeta \in \mathbb{S}^1$ . Entonces  $\gamma_1 = \zeta \cdot \gamma_0$  es también una parametrización cerrada, y es homótopa a  $\gamma_0$ . En efecto,  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  sólo tienen imágenes antipodales si  $\zeta = -1$ , pero ese caso se puede resolver en dos pasos, multiplicando dos veces por  $\sqrt{-1}$ . ■

La siguiente proposición formula nuestra afirmación previa de que el grado es el invariante que determina el tipo de homotopía.

**Teorema 11.6.** *Dos parametrizaciones continuas cerradas  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  son homótopas si y sólo si tienen el mismo grado.*

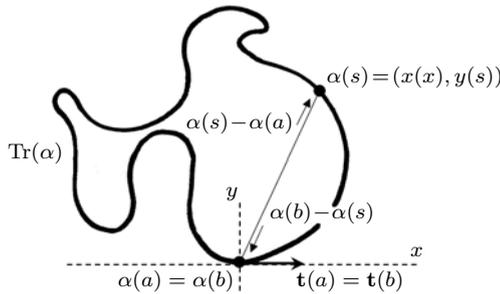
*Demostración.* Supongamos que  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son homótopas y sea  $H : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$  una homotopía de  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . Tomemos una elevación  $\bar{H} : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $H$  (que

traslación del parámetro de amplitud  $\Delta$ , luego por (1) de nuevo, tenemos efectivamente  $h(b) - h(a) = h(d) - h(c)$ . Así pues,  $i(\alpha) = i(\beta)$ . ■

El Umlaufsatz dice lo siguiente:

**Teorema 12.3.** *El índice de rotación de una curva de Jordan plana regular es +1 o -1.*

*Demostración.* Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan, que según acabamos de ver (12.2(2)), podemos suponer parametrizada por la longitud del arco  $s$ . Ya hemos dicho también que  $\alpha$  tiene una extensión periódica  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de periodo  $\Delta = b - a$ , que aquí seguiremos denotando  $\alpha$ ; ponemos  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Puesto que  $[a, b]$  es compacto,  $y(s)$  tendrá un mínimo, digamos para  $s = c$ , y entonces, por la observación 12.2(3) anterior, podemos suponer  $c = a$ . De este modo,  $y'(a) = 0$ , y  $\mathbf{t}(a) = (\pm 1, 0)$ . Ahora, reparametrizando de nuevo si es necesario, podemos suponer que es  $\mathbf{t}(a) = (1, 0) = e_1$ . Por último, también podemos suponer que  $\alpha(a) = (0, 0)$ , reemplazando  $\alpha$  por  $\alpha - \alpha(a)$ . En definitiva, la traza de  $\alpha$  está en el semiplano superior  $y \geq 0$  y es tangente al eje de abscisas en el origen para el valor del parámetro  $s = a$ .



Después de esta preparación, consideramos el triángulo

$$X = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s_1 \leq s_2 \leq b\}$$

y la aplicación  $H : X \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por

$$H(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{\|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)\|} & \text{si } s_1 < s_2 \text{ y } (s_1, s_2) \neq (a, b), \\ \alpha'(s_1) & \text{si } s_1 = s_2, \text{ y} \\ -\alpha'(a) = -\alpha'(b) & \text{si } (s_1, s_2) = (a, b). \end{cases}$$

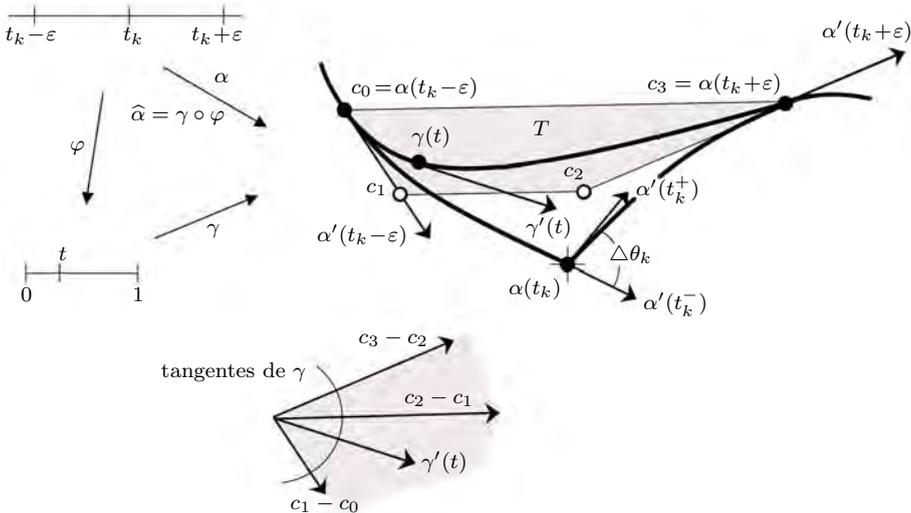
**Teorema 12.8.** *El índice de rotación de un polígono curvilíneo es +1 o -1.*

La demostración de este resultado consiste en modificar los vértices del polígono para obtener una curva diferenciable, y entonces aplicar el Umlaufsatz ya establecido. Por ello conviene explicar previamente cómo se hace esa modificación.

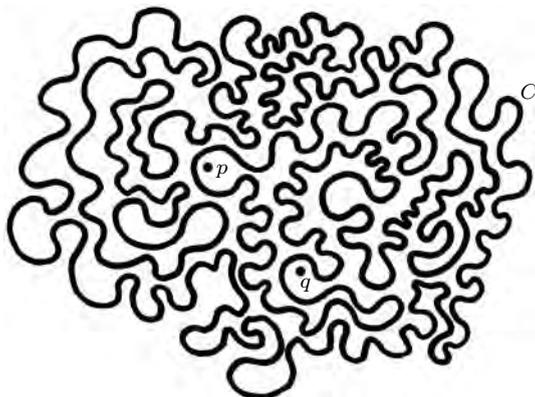
**(12.9) Allanamiento de vértices.** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  un polígono curvilíneo, con sus vértices  $t_k$  y sus ángulos externos  $\Delta\theta_k$ . Nos concentramos en un vértice  $t_k$ , que suponemos distinto de los extremos (lo que siempre se puede conseguir por traslación del parámetro), y elegimos  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño para que  $\alpha'(t_k - \varepsilon)$  y  $\alpha'(t_k + \varepsilon)$  estén próximos a  $\alpha'(t_k^-)$  y  $\alpha'(t_k^+)$ . En particular el ángulo  $\Delta\theta_k^\varepsilon$  que forman  $\alpha'(t_k - \varepsilon)$  y  $\alpha'(t_k + \varepsilon)$  estará próximo a  $\Delta\theta_k$ , tendrá su mismo signo y será  $< \pi$  en valor absoluto. Vamos a construir un arco de Jordan diferenciable  $\hat{\alpha} : [t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con la traza arbitrariamente próxima al segmento que une los puntos  $\alpha(t_k - \varepsilon)$  y  $\alpha(t_k + \varepsilon)$ , de modo que

$$(*) \begin{cases} \hat{\alpha}(t_k - \varepsilon) = \alpha(t_k - \varepsilon), & \hat{\alpha}'(t_k - \varepsilon) = \alpha'(t_k - \varepsilon), \\ \hat{\alpha}(t_k + \varepsilon) = \alpha(t_k + \varepsilon), & \hat{\alpha}'(t_k + \varepsilon) = \alpha'(t_k + \varepsilon), \\ \text{la variación del ángulo de tangencia de } \hat{\alpha} \text{ entre } t_k - \varepsilon \text{ y } t_k + \varepsilon \text{ es } \Delta\theta_k^\varepsilon. \end{cases}$$

Para ello dibujamos un trapecio  $T$  de base ese segmento según la figura.



Es claro que una curva de Jordan es homeomorfa a una circunferencia, así que la situación que describe el teorema de Jordan es natural para la intuición. Sin embargo, sugerimos al lector que examine la figura siguiente para decidir si los puntos  $p$  y  $q$  son interiores o exteriores de la curva de Jordan cuya traza  $C$  hemos dibujado.



Ejemplos como éste muestran que la demostración rigurosa es delicada.

Tampoco se aparta de la intuición el teorema de Schönflies, que dice lo siguiente:

**Teorema 13.2.** *La adherencia del interior de una curva de Jordan es un subconjunto del plano homeomorfo a un disco cerrado.*

Estos dos teoremas tienen implicaciones muy profundas. En algunos de los ejercicios de esta lección se desgranar algunas consecuencias significativas suyas.

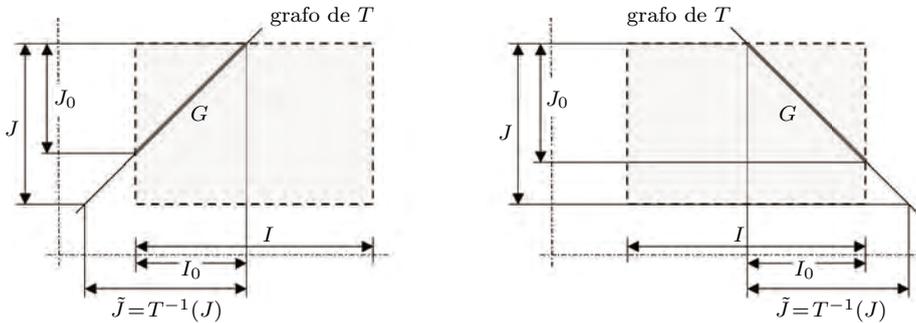
A continuación retornamos a nuestro contexto y suponemos la diferenciabilidad de las curvas. El teorema de Jordan, juntamente con un resultado que estableceremos sobre existencia de *entornos tubulares*, nos permite definir la orientación canónica de una curva de Jordan. En lo que sigue utilizamos el concepto de vector normal unitario propio de la teoría de curvas planas.

**Definición 13.3.** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular de Jordan y sea  $C$  su traza. Sea  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $x = \alpha(t) \in C$  denotamos por  $I(x, \varepsilon)$  el segmento abierto  $(x - \varepsilon \mathbf{n}(t), x + \varepsilon \mathbf{n}(t))$ , y escribimos  $N(\varepsilon) = \bigcup_{x \in C} I(x, \varepsilon)$ . Se dice que  $N(\varepsilon)$  es un *entorno tubular* de  $C$  si  $I(x, \varepsilon) \cap I(y, \varepsilon) = \emptyset$  para  $x \neq y$ .

La siguiente proposición demuestra la existencia de entornos tubulares y prueba que son, efectivamente, entornos abiertos de  $C$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Por la inyectividad de  $\psi$  y de  $\varphi$ , hay a lo más cuatro extremos, uno en cada lado del rectángulo cerrado  $\overline{I \times J}$ . Esto limita a dos el máximo número posible de segmentos. Distinguiamos ahora los dos casos posibles.

(i) Si  $G$  consta de un único segmento, entonces  $U \cap V$  es conexo. Veamos que  $\alpha$  se extiende a un difeomorfismo  $\alpha^*$  que es una parametrización por el arco de  $U \cup V$ . Observamos en primer lugar que  $\psi$  se extiende a una transformación afín  $T$  de  $\mathbb{R}$  del tipo  $T(s) = \pm s + \ell$ ; sea  $\tilde{J} = T^{-1}(J)$ . La figura siguiente recoge dos variantes que ilustran la situación.



Ahora extendemos  $\alpha$  de  $I$  a  $I^* = I \cup \tilde{J}$  como sigue

$$\alpha^*(s) = \beta(T(s)) \quad \text{si } s \in \tilde{J}.$$

Un poco de reflexión muestra que  $I \cap \tilde{J} = I_0$  (véanse las figuras), y como en este intervalo  $\alpha$  coincide con  $\beta \circ \psi$ , resulta inmediato comprobar que la extensión está bien definida, que es un difeomorfismo, y que define una parametrización de  $U \cup V$  por la longitud del arco. Por ejemplo, veamos que  $\alpha^*$  es inyectiva. La única obstrucción para esto sería que existieran  $s_1 \in I, s_2 \in \tilde{J}$  con  $\alpha(s_1) = \beta(T(s_2))$ . Pero entonces  $s_1 \in I_0$  y  $T(s_2) \in J_0$ . Esto último implica que  $s_2 \in I_0$ , y entonces  $\beta(\psi(s_2)) = \alpha(s_2)$ . Así, por la inyectividad de  $\alpha$  concluimos que  $s_1 = s_2$ .

(ii) Supongamos ahora que  $G$  consta de dos segmentos. Se advierte que las dos únicas posibilidades para esto son las dos siguientes:



La zona sombreada es la región en la que el primer segmento confina al segundo

---

# Bibliografía

---

Enumeramos en esta sección algunas obras clásicas que permanecen como referencia obligada sobre la materia de este texto, y después libros y artículos de muy diversa naturaleza y de diferente extensión, que tratan temas de los estudiados aquí.

## Obras clásicas

- [1] L. Bianchi: *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa: Enrico Spoerri, 1894.
- [2] A.-L. Cauchy: *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*. París: L'Imprimerie Royale, 1826
- [3] G. Monge: *Application de l'analyse a la géométrie*. París: Bachelier, 1850.

## Libros y artículos

- [1] M. Abate, E. Tovena: *Curve e superfici*. Milán: Springer Verlag, 2006.
- [2] E. Aguirre: *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Madrid: Depto. Geometría y Topología, Universidad Complutense, 2010.
- [3] Y. Aminov: *Differential geometry and topology of curves*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2000.
- [4] A.M. Amores: *Curso básico de curvas y superficies*. Madrid: Sanz y Torres, 2001.
- [5] V.I. Arnol'd: *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory, from evolvents to quasicrystals*. Boston: Birkhauser, 1990.
- [6] M. Berger: *Geometry revealed. A Jacob's ladder to modern higher geometry*. Berlín: Springer Verlag, 2010.
- [7] M. Berger, B. Gostiaux: *Differential geometry: Manifolds, curves and surfaces*. Nueva York: Springer Verlag, 1988.
- [8] W. Blaschke: *Vorlesungen uber Differentialgeometrie*. Berlín: Julius Springer, 1930.
- [9] M.P. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1976.

---

# *Nombres propios*

---

- Abate, Marco (1962–), 166  
Abel, Niels Henryk (1802–1829), 40  
Agnesi, Maria Gaetana (1718–1799), 15  
Aleksandrov, Pavel Sergeevich (1896–1982), 143  
Alembert, Jean Le Rond d' (1717–1783), 119  
Alexander, James Waddell (1888–1971), 143  
Ampère, André Marie (1775–1836), 61  
Apolonio (262–190 a.C.), 16  
Arquímedes de Siracusa (287–212 a.C.), 15  
Átropa, 107  
  
Bacon, sir Francis (1561–1626), 39  
Bartels, Johann Christian Martin (1769–1836), 54  
Bell, Robert John Tainsh (1880–1963), 27  
Beltrami, Eugenio (1835–1900), 15  
Bernoulli, Daniel (1700–1782), 53  
Bernoulli, Jakob (1654–1705), 15  
Bernoulli, Johann (1667–1748), 16  
Bernstein, Sergei Natanovich (1880–1968), 144  
Bertrand, Joseph Louis François (1822–1900), 106  
Bianchi, Luigi (1856–1928), 53  
Bobillier, Étienne (1798–1840), 174  
Bohl, Piers (1865–1921), 127  
Bonnet, Pierre Ossian (1819–1892), 106  
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1881–1996), 127  
Brown, Morton (1931–), 154  
  
Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845–1918), 145  
Carathéodory, Constantin (1873–1950), 128  
Carcavi, Pierre de (c.1600–1684), 81  
Cartan, Élie Joseph (1869–1951), 108  
Cauchy, Augustin-Louis (1789–1846), 62  
Cesàro, Ernesto (1859–1906), 106  
Chasles, Michel (1793–1880), 108  
Chebyshev, Pafnuty Lvovich (1821–1894), 144  
Clairaut, Alexis-Claude (1713–1765), 52  
Clifford, William Kingdon (1845–1879), 27  
Cloto, 107  
Colson, John (1680–1760), 15  
Conon de Samos (280–220 a.C.), 15  
Coolidge, Julian Lowell (1873–1954), 119  
Corey, Robert Brainard (1897–1971), 94  
Cornu, Marie-Alfred (1841–1902), 107  
Cotes, Roger (1682–1716), 28  
Cousin, Jacques Antoine Joseph (1739–1800), 119  
Crelle, Gustav Leopold (1780–1855), 40  
Crick, Francis Harry Compton (1916–2004), 94  
  
Darboux, Jean Gaston (1842–1917), 107  
Dehn, Max Wilhelm (1878–1952), 174  
Desargues, Gerard (1591–1661), 16  
Descartes, René (1596–1650), 15  
Diderot, Denis (1713–1784), 70  
Diocles (240–180 a.C.), 16  
Donaldson, Simon Kirwan (1957–), 175  
Douglas, Jesse (1897–1965), 174  
Dupin, Pierre Charles François (1784–1873), 61  
Dyk, Walther Franz Anton von (1856–1934), 174

- Allanamiento de un vértice de un polígono
  - curvilíneo, 137
- Asíntotas de la hipérbola, 17
- Astroide, 13
- Bruja de Agnesi, 6
- Cardioide, 13
- Cicloide, 6
  - como involuta y evoluta, 82
- Circunferencia osculatriz, 44
  - de una curva plana, 68
  - de una parábola, 69
- Cisoide de Diocles, 13
- Clasificación de curvas diferenciables, 169
- Comparación de vectores normales de una curva plana, 64
- Convexidad y curvatura, 156
- Curva de Viviani, 13
- Curvatura
  - como velocidad de variación de la tangente, 41
  - de la elipse, 117
  - de la hipérbola, 116
- Determinación
  - de una asíntota, 18
  - del ángulo de tangencia de un polígono curvilíneo, 136
- Elipse parametrizada, 3
- Encolamiento de dos cartas con doble solapamiento, 171
- Entorno tubular, 149
- Epicicloide, 13
- Espiral
  - de Arquímedes, 7
  - de Cornu o clotoide, 99
  - logarítmica, 7
- Extensión de una carta de una curva sumergida, 170
- Grafo, 7
  - doble, 8
- Hélice circular, 4
- Hipocicloide, 13
- Homotopía por interpolación lineal, 124
- Índice de rotación de una curva de Jordan, 131
- Involutas de una curva, 74
- Lazo, 4
- Lemniscata de Bernoulli, 14
- Límite
  - de rectas tangentes, 25
  - de una familia de rectas, 23
- Longitud de un arco como límite de longitudes de poligonales, 30
- Longitud, latitud y colatitud, 9
- Loxodroma, 92
- Modificación diferenciable de un polígono curvilíneo, 140
- No se puede dibujar la tangente, 159
- Orientación de una curva de Jordan, 151
- Pendientes de dos segmentos al comparar dos cartas con doble solapamiento, 170
- Polígono curvilíneo, 135
- Proyecciones de una curva sobre los planos osculador, rectificante, y normal, 49

# Símbolos

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$	1	$\alpha'(t) = (1, f'(t))$	7
$I = (a, b)$	1	$\alpha(t) = (t, f(t), g(t))$	7
$(-\infty, b), (a, +\infty)$	1	$C = f^{-1}(a)$	8
$(-\infty, +\infty)$	1	$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$	8
$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$	1	$\begin{cases} x = a + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y = b + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z = c + r \cos \theta \end{cases}$	9
$\operatorname{Tr}(\alpha)$	1		
$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$	1	$\beta = \alpha \circ \varphi$	9
$\bar{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$	1	$t = \varphi(s)$	9
$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$	2	$\alpha(t) = (\frac{1}{2} \cos 2t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t)$	13
$\mathbf{t}(t) = \alpha'(t) / \ \alpha'(t)\ $	2	$\beta(t) = (\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}, t^2)$	13
$T_t(\alpha)$	2	$\alpha(t) = (\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4})$	14
$\ \alpha(t) - p\  = r$	3	$\lim_t \ \alpha(t)\  = +\infty$	17
$\alpha(t) = (a + ut, b + vt, c + wt)$	3	$\lim_t \operatorname{dist}(\alpha(t), R) = 0$	17
$\begin{cases} x(t) = p + au \cos t - bv \operatorname{sen} t \\ y(t) = q + av \cos t + bu \operatorname{sen} t \end{cases}$	3	$\lim_t \frac{\alpha(t)}{\ \alpha(t)\ }$	18
$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$	4	$\lim_t (\alpha(t) - (\alpha(t)u)u)$	18
$\alpha(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$	4	$\operatorname{dist}(\alpha(t), R)^2$	18
$\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t + \log \tan \frac{1}{2}t)$	5	$= \ \alpha(t) - r\ ^2 - (\alpha(t)u)^2$	
$\alpha(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$	6	$\lim_t R_t = R, R_t \rightarrow R$	23
$\alpha(t) = (2a \tan t, 2a \cos^2 t)$	6	$\lim_t \operatorname{dist}(p, R_t) = 0$	23
$\alpha(t) = \rho(t)(\cos t, \operatorname{sen} t)$	6	$R_t = r_t + [u_t], r_t u_t = 0$	23
$\alpha(t) = (a + bt)(\cos t, \operatorname{sen} t)$	7	$\operatorname{dist}(p, R_t) = \ p_t - p\ $	23
$\alpha(t) = e^t(\cos t, \operatorname{sen} t)$	7	$p_t = r_t + (p u_t)u_t,$	23
$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t)$	7	$Q(\mu) = \ p_t - p\ ^2 = c_0 + c_1 \mu + c_2 \mu^2$	23
$\alpha(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \operatorname{sen} t)$	7	$\operatorname{dist}(p, T_t), \operatorname{dist}(p, L_t)$	25
$\alpha(t) = (t, f(t))$	7	$L_c^d(\alpha) = \int_c^d \ \alpha'(t)\  dt$	29

- Álgebra
  - Geométrica, 27
  - Lineal y Multilineal, 153
- Álgebra
  - de Clifford, 27
  - de Hopf, 143
  - de Lie, 107
- Allanamiento de vértices, 137, 139, 143
- Análisis
  - de Fourier, 166
  - Matemático, 118
- Ángulo
  - de corte con una espiral logarítmica, 15
  - de giro de la cisoide, 6
  - de tangencia, 65, 129, 140, 156
    - y curvatura, 66
  - del vector binormal de una hélice, 51
  - externo en un vértice de una curva diferenciable a pedazos, 134
- Antípodas en un óvalo, 165
- Aplicación
  - diferenciable en un subconjunto arbitrario del espacio afín, 167
  - lineal
    - directa, 97
    - ortogonal, 97
- Arco de Jordan, 11
  - cerrado, 11
- Área encerrada
  - mínima para un contorno dado, 174
  - por una curva de Jordan, 162
    - máxima para una longitud dada de la curva, 162
  - por una curva y su asíntota, 16
- Argumento de una parametrización de la circunferencia, 121
- Argumento inicial de una elevación, 122
- Asíntota, 17, 18, 20
  - como límite de tangentes, 24
  - ejemplos: hipérbola, seno deformado, tractriz, lazo, cisoide, 17, 18, 20, 21, 25, 26
- Astroide, 13
- Asymptotos, 26
- Autointersección, 4
  - infinita, 14
- Aversiera, 15
- Banda de Möbius, 96, 174
- Bases positivas del plano, 63
- Binormal (vector y recta), 44
- Braquistócrona, 81
- Bruja de Agnesi, 6, 15
- Cálculo
  - de integrales elípticas, 40
  - de Probabilidades, 107
  - de Variaciones, 81
  - Diferencial, 52
  - Infinitesimal, 39, 52, 70, 82
  - Integral, 15
  - Vectorial, 71, 72
- Cambio de parámetro, 9
  - lineal, 10
  - polinomial, 11
- Característica de un sistema, 128
- Caracterización
  - de las curvas de Jordan convexas, 156
  - de las curvas esféricas por curvatura y torsión, 87, 89