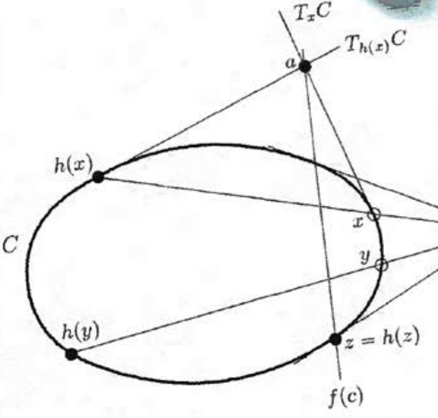
manuales matemáticas

José M. Rodríguez-Sanjurjo
Jesús M. Ruiz

Lecciones de Geometría Proyectiva

2ª Edición



sanz y torres

Primera edición: enero 2009
Segunda edición: febrero 2020

LECCIONES DE GEOMETRÍA PROYECTIVA

El editor no se hace responsable de las opiniones recogidas, comentarios y manifestaciones vertidas por las autores. La presente obra recoge exclusivamente la opinión de su autor como manifestación de su derecho de libertad de expresión.

La Editorial se opone expresamente a que cualquiera de las páginas de esta obra o partes de ella sean utilizadas para la realización de resúmenes de prensa.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Por tanto, este libro no podrá ser reproducido total o parcialmente, ni transmitirse por procedimientos electrónicos, mecánicos, magnéticos o por sistemas de almacenamiento y recuperación informáticos o cualquier otro medio, quedando prohibidos su préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso del ejemplar, sin el permiso previo, por escrito, del titular o titulares del copyright.

© José M. Rodríguez-Sanjurjo y Jesús M. Ruiz

© EDITORIAL SANZ Y TORRES, S. L.
c/ Vereda de los Barros, 17
Pol. Ind. Ventorro del Cano – 28925 Alcorcón (Madrid)
☏ 902 400 416 – 91 323 71 10
www.sanzytorres.com
libreria@sanzytorres.com
www.editorialsanzytorres.com
editorial@sanzytorres.com

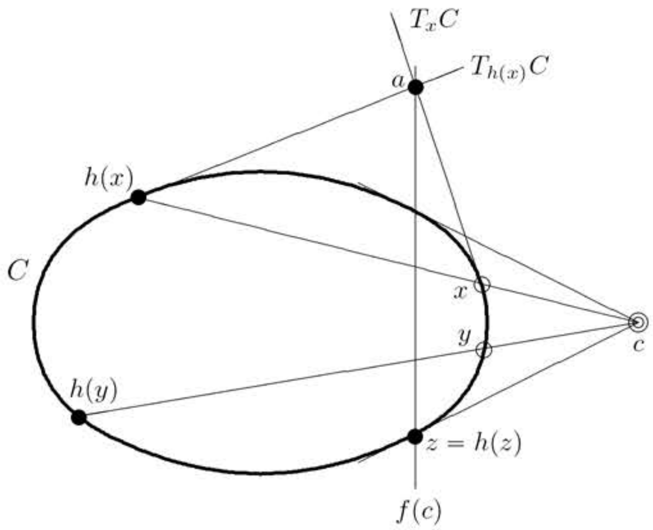
ISBN: 978-84-17765-85-9
Depósito legal: M-5266-2020

Composición:
Autores

Impresión:
Safekat, S. L.

Lecciones de
GEOMETRÍA PROYECTIVA

José M. Rodríguez-Sanjurjo
Jesús M. Ruiz
Universidad Complutense de Madrid



sanz y torres

Prefacio

El origen de la Geometría Proyectiva está asociado a los problemas de perspectiva que aparecen en el Renacimiento al tratar de representar en un plano objetos del espacio. Este tipo de necesidades, surgidas en la pintura, la arquitectura y la técnica, llevaron a la creación de una teoría matemática que recogiera las bases geométricas subyacentes a los métodos concretos que poco a poco se fueron elaborando en esos campos.

La Geometría Proyectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección. Los matemáticos franceses Girard Desargues y Blaise Pascal descubrieron en el siglo XVII nuevos teoremas en los que nociones geométricas clásicas como longitud y ángulo eran sustituidas por otras de incidencia de las figuras que, a diferencia de las primeras, sí se conservan por proyección. Progresivamente se fue haciendo claro que los métodos basados en estas ideas eran mucho más generales que los tradicionales, y, a partir de una cuidadosa distinción entre las propiedades proyectivas y las métricas, se acabó configurando a finales del siglo XIX una geometría mucho más amplia, que englobaba a todos los sistemas geométricos conocidos anteriormente. En este sentido la Geometría Afín, la Euclídea, la no Euclídea, incluso la Métrica, se pueden considerar todas subgeometrías de la Geometría Proyectiva. En particular, la Geometría Proyectiva proporciona un modelo de Geometría no Euclidea Hiperbólica especialmente adecuado para adquirir una visión intuitiva y global de la misma.

La Geometría Proyectiva ha jugado un papel de primer orden en el proceso general de creación de nuevas ideas y conceptos en matemáticas. Es, por ejemplo, uno de los primeros casos de matemática axiomatizada. También se ha originado aquí la noción de transformación que, a partir de las ideas presentadas por Felix Klein en su *programa de Erlangen*, ocupa un lugar central en la construcción de cualquier teoría geométrica. Otros conceptos, como el de invarianza, que tan destacado papel ha desempeñado en la física contemporánea, han sido largamente anticipados en Geometría Proyectiva al estudiar las propiedades geométricas que permanecen invariantes después de cambios de coordenadas.

Por otra parte, la noción de dualidad que, de una u otra forma, se ha impuesto en todas las ramas de las matemáticas tiene su origen en el simple principio de la Geometría Proyectiva plana según el cual existe una simetría en los roles que en ella juegan el punto y la recta. Además de la belleza de esta observación está su utilidad, que permite duplicar los frutos de cualquier descubrimiento geométrico.

Dentro del cuerpo de las matemáticas, la Geometría Proyectiva es a menudo contemplada como un modelo de teoría que, teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones.

Este libro pretende presentar de un modo accesible los aspectos fundamentales de la Geometría Proyectiva. Está basado en la experiencia que los autores hemos acumulado al impartir durante muchos años cursos de esta materia en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. En 1998 publicamos un texto que durante los diez años siguientes utilizamos, nosotros mismos y numerosos colegas, en la impartición de esta materia. Esa experiencia ponía a prueba los criterios según los cuales se estructuró aquel libro, y mostraba qué modificar y qué añadir. Como consecuencia escribimos en 2009 un libro nuevo, que ahora, 10 años después, actualizamos sin alterar su propósito inicial de ser un libro de texto para un curso realista de Geometría Proyectiva.

Es pertinente insistir en que no es éste un tratado, sino un texto diseñado a partir de una actividad docente, y la exposición está simplificada para alcanzar los resultados importantes de la forma más directa y autocontenida posible. Asimismo, se elige una presentación que pueda estudiarse linealmente, dejando poco espacio a aspectos marginales que en otras obras parecen imprescindibles. Con ese mismo espíritu, los comentarios históricos se resumen en algunas notas al terminar cada capítulo, y al final del libro hay una bibliografía extensa que sirve como referencia para lecturas ulteriores. Además, incluimos problemas suficientes para que el lector contraste los conocimientos adquiridos: unos se reparten por capítulos, acompañando a las nociones nuevas, y otros más globales se reúnen juntos una vez completada la exposición teórica; hay asimismo una lista de 50 cuestiones teóricas para contrastar en test rápido cómo se han asimilado las ideas fundamentales. También hay varios índices: de nombres propios, de figuras, de nomenclatura y terminológico.

Los prerrequisitos que se suponen al lector son los de un primer curso de licenciatura: sistemas de ecuaciones lineales; matrices y determinantes; formas canónicas de Jordan; diagonalización de formas bilineales simétricas; dualidad en espacios vectoriales; nociones básicas de Geometría Afín.

Hay, por otra parte, que precisar el enfoque general que hemos elegido, condicionado fuertemente por nuestra experiencia docente anteriormente mencionada. Los objetivos fundamentales son cuatro:

- Introducir por primera vez las nociones de espacio proyectivo, variedad proyectiva y aplicación proyectiva, y describir su relación con las nociones afines correspondientes ya conocidas.
- Plantear el problema de clasificación de homografías en general, y resolverlo combinadamente con su homónimo afín, al menos en dimensión no superior a 3.
- Introducir las correlaciones mínimamente, para estudiar después la polaridad de una cuádrica proyectiva y su significado geométrico en términos de tangencia.
- Clasificar las cuádricas proyectivas en general, y combinadamente con las afines, en dimensión no superior a 3.

Como complemento en lo tocante a cuádricas, se reúnen en un capítulo separado varias lecciones de corte muy clásico sobre cónicas, pues las cónicas constituyen por sí mismas una parte especialmente distinguida dentro de la Geometría Proyectiva. Estas lecciones incluyen algunos de los resultados más emblemáticos del tema. Entre ellos destacamos por poco frecuente en la literatura la clasificación rigurosa de haces de cónicas *reales*.

Deliberadamente hemos eludido los planteamientos, tal vez más atractivos inicialmente, de tipo sintético o axiomático. Esto es así por nuestro convencimiento de que la única posibilidad de alcanzar en breve tiempo los objetivos citados antes es ceñirse espartanamente al enfoque formal y constructivo. Por otra parte, después de todos estos años, creemos que para los estudiantes a los que nos dirigimos, ese enfoque formal es incluso más efectivo.

* * *

Finalmente, queremos agradecer a nuestros amigos y colegas su colaboración, en particular a Enrique Arrondo, Michel Coste, Fernando Etayo, Raquel Mallavibarrena, Francisco Romero, José F. Ruiz, José María Sánchez-Abril y Juan Tarrés. Una mención especial debemos a José María Sánchez-Abril, con quien tanto hemos conversado acerca de esta materia, de cómo entenderla y hacerla entender, y con qué problemas ilustrarla mejor.

Madrid, Majadahonda — *J.M. Rodríguez-Sanjurjo, J.M. Ruiz*
Diciembre de 2019

Contenido

Capítulo I

Variedades proyectivas

Se introduce en este capítulo la noción básica de *espacio proyectivo* y la definición de los correspondientes subespacios o *variedades proyectivas*. Se estudian las operaciones elementales con variedades y varias proposiciones relativas a las incidencias entre las mismas. Se establece una serie de propiedades del *espacio proyectivo dual*, haciendo énfasis en el hecho de que los puntos de ese dual se identifican canónicamente con los hiperplanos del espacio proyectivo original. Utilizando lo anterior, se discute el importante *principio de dualidad* de la Geometría Proyectiva.

1. El espacio proyectivo

Ahora y en lo sucesivo, $\mathbb{K}$ denotará un cuerpo de característica 0, como por ejemplo el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición 1.1. Se llama *espacio proyectivo* asociado a un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ y se denota $P = P(E)$, al conjunto de todas las rectas vectoriales de E.

Por ejemplo, si $E = \{0\}$, entonces P es vacío, y si $E = L[u]$, $u \neq 0$, entonces P consiste en un único elemento.

Si $u \in E\backslash\{0\}$, denotamos por $[u]$ la recta vectorial generada por u. Los elementos de P se denominan *puntos*, aunque sean rectas; de este modo, $x = [u]$ es como subconjunto de E una recta vectorial, y como elemento de P un punto proyectivo.

La presentación alternativa habitual de P es como cociente de $E\backslash\{0\}$ para la relación de proporcionalidad: uRv si $u = \lambda v$ con $\lambda \neq 0$. Evidentemente se tiene una biyección

$$E\backslash\{0\}/R \to P : uR \mapsto [u].$$

La aplicación suprayectiva canónica $E\backslash\{0\} \to P : u \mapsto [u]$ se denotará simplemente $\pi : E \to P$, omitiendo el $\backslash\{0\}$.

Capítulo II

Aplicaciones proyectivas

Se introducen en este capítulo las *aplicaciones proyectivas* asociadas a aplicaciones lineales no nulas. Se estudia cómo algunas propiedades básicas de las aplicaciones proyectivas quedan determinadas por las correspondientes de las aplicaciones lineales, en particular las *homografías* (aplicaciones proyectivas inyectivas) están asociadas a los monomorfismos. El ejemplo más importante de aplicación proyectiva no inyectiva es la *proyección cónica*, que viene determinada por una descomposición en suma directa del espacio vectorial y la proyección lineal sobre uno de los sumandos. Diferentes aplicaciones lineales pueden inducir la misma aplicación proyectiva; aquí se presenta el criterio para que dos aplicaciones lineales definan la misma proyectiva. Como consecuencia se encuentra una representación del *grupo proyectivo* (formado por las homografías suprayectivas de un espacio proyectivo en sí mismo) como cociente del grupo lineal del espacio vectorial de partida por el subgrupo de las homotecias. Finalmente, como aplicación de los resultados del capítulo, se estudian las *perspectividades* entre rectas del plano proyectivo y se demuestra el *teorema clásico de Desargues.*

1. Definición y propiedades

Sean X, Y dos espacios proyectivos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, asociados a espacios vectoriales $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ respectivamente. Si $\widehat{h} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ es una aplicación lineal, pretendemos definir una aplicación $h : X \to Y$ mediante la fórmula

$$h(x) = [\widehat{h}(u)] \quad \text{si} \quad x = [u],\ u \in \widehat{X}\backslash\{0\}.$$

En otras palabras, consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{h}} & \widehat{Y} & \qquad & u & \longmapsto & \widehat{h}(u) \\ \downarrow\pi & & \downarrow\pi' & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \xrightarrow{h} & Y & & x & \longmapsto & h(x) \end{array}$$

Esta construcción presenta dos dificultades:

Capítulo III

Coordenadas y ecuaciones

En este capítulo se desarrolla el aspecto analítico de la teoría presentada anteriormente. Para introducir *coordenadas en el espacio proyectivo* es preciso definir las *referencias proyectivas*. Es ésta una noción más sutil que la correspondiente en el espacio afín, pues en el caso proyectivo aparece un punto, el llamado *punto unidad*, que juega un papel distinguido en la referencia. Se muestra cómo es posible asociar a una referencia proyectiva toda una familia de bases proporcionales y, a través de cualquiera de ellas, asignar coordenadas a los puntos. Estas coordenadas, llamadas *homogéneas*, están determinadas salvo un factor de proporcionalidad. Las homografías quedan determinadas cuando se conoce su actuación sobre una referencia proyectiva. Una vez que somos capaces de asignar coordenadas a los puntos podemos introducir las *ecuaciones* de las variedades y de las aplicaciones proyectivas y, en definitiva, desarrollar la geometría analítica del espacio proyectivo.

1. Coordenadas homogéneas

Sea $P = P(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n. Entonces E es isomorfo a $\mathbb{K}^{n+1}$, y cada isomorfismo lineal $\widehat{\theta} : E \to \mathbb{K}^{n+1}$ define una homografía biyectiva $\theta : P \to \mathbb{P}^n = P(\mathbb{K}^{n+1})$. Recordemos que el punto $[u]$ de $\mathbb{P}^n$ correspondiente a un vector $u = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \backslash \{0\}$ se denota $(x_0 : \dots : x_n)$. En fin, si $x \in P$ diremos que $\theta(x) = (x_0 : \dots : x_n)$ son *coordenadas homogéneas de x*. Por otra parte, el isomorfismo lineal $\widehat{\theta}$ está completamente determinado por la base $B = \{u_0, \dots, u_n\}$ de E tal que $\widehat{\theta}(u_i) = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, y diremos que $\theta(x) = (x_0 : \dots : x_n)$ son coordenadas homogéneas *respecto de B*. Ahora bien, isomorfismos $\widehat{\theta}$ proporcionales dan lugar a la misma homografía θ, y es fácil ver que $\widehat{\theta} = \rho\widehat{\theta}'$ si y sólo si $\rho \cdot B = B'$, con lo que se concluye que *dos bases definen las mismas coordenadas homogéneas si y sólo si son proporcionales.*

En resumen, para calcular las coordenadas homogéneas de $x = [u] \in P$ respecto de $B = \{u_0, \dots, u_n\}$ basta con expresar u en función de B. A partir de la expresión $u = x_0u_0 + \cdots + x_nu_n$ obtenemos unas coordenadas homogéneas $(x_0 : \dots : x_n)$ de x respecto de B. Además $(x'_0 : \dots : x'_n)$ son también unas

Probar que para todo punto $x \in P$ los tres puntos $x, h(x)$ y $h^3(x)$ están alineados. (Calcular con unas coordenadas en las que los puntos a, b, c sean $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$.)

Número 7. Formular una condición análoga a la del problema número 1 para que, en un plano proyectivo, tres rectas de ecuaciones

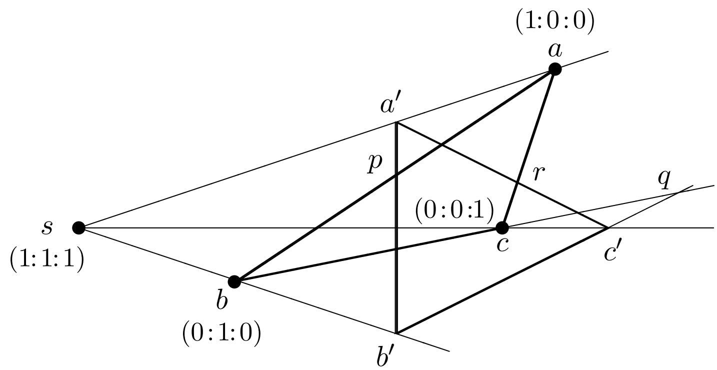
$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0,\ b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2=0,\ c_0x_0+c_1x_1+c_2x_2=0,$$

sean concurrentes en un punto.

Número 8. En un plano proyectivo P tenemos dos cuaternas de rectas (l_i), (l'_i), $i = 1, 2, 3, 4$, y ninguna cuaterna contiene tres rectas concurrentes. Probar que existe exactamente una homografía $h : P \to P$ que cumple $h(l_i) = l'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Número 9. Sean a, b y c tres puntos distintos alineados de un plano proyectivo P, y d un cuarto punto no alineado con los anteriores. Encontrar las aplicaciones proyectivas $f : P \to P$ tales que $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c$ y $f(d) = d$. ¿Existe alguna no inyectiva? (Utilizar una referencia del tipo $a_0 = a, a_1 = b, a_2 = d$ y $a_3 \in V(c, d)$.)

Número 10. Sea $\{a_0, a_1, a_2; a_3\}$ una referencia de un plano proyectivo P. ¿Qué condición deben cumplir tres puntos distintos a, b y c de P para que exista una aplicación proyectiva $f : P \to P$ cuyo centro sea el punto unidad a_3 y las imágenes de a_0, a_1, a_2 sean a, b, c? ¿Cuántas aplicaciones proyectivas hay en ese caso? ¿Cuándo se trata de una proyección cónica?



Número 11. Poner coordenadas a todos los puntos de la figura anterior, que ilustra el teorema de Desargues, utilizando la referencia $\{a, b, c; s\}$. Comprobar con las coordenadas obtenidas que los puntos p, q, r están alineados, lo que proporciona una demostración analítica del citado teorema.

Capítulo IV

Relación entre el espacio afín y el proyectivo

En este capítulo se formalizan algunas de las ideas y motivaciones que llevaron al descubrimiento de la Geometría Proyectiva. Todo espacio afín se puede sumergir en un espacio proyectivo, o lo que es lo mismo, todo espacio proyectivo se puede concebir añadiendo a un espacio afín un *hiperplano de puntos de infinito*. Nociones afines, como el paralelismo de variedades, se pueden expresar en términos de esos puntos de infinito. Las aplicaciones afines se pueden completar proyectivamente, de modo que llevan puntos de infinito a puntos de infinito. Algunas transformaciones afines, como las homotecias y las traslaciones, dan lugar a tipos especiales de homografías, las *homologías* y las *elaciones* en los casos citados, ricas en propiedades geométricas. Las referencias cartesianas del espacio afín se pueden completar proyectivamente, de modo que es posible una transposición automática de la geometría analítica afín a la proyectiva. Este hecho se ilustra bien con las ecuaciones de las variedades y de las aplicaciones. Finalmente, se muestra esta fructífera interrelación entre el espacio afín y el proyectivo presentando una demostración del *teorema clásico de Pappus*.

1. Inmersión del espacio afín en el proyectivo

En esta sección vamos a mostrar cómo *todo espacio afín es un subconjunto de un espacio proyectivo*. Además, veremos qué clase de subconjunto.

Sea X un espacio afín de dimensión n. Entonces X *se puede sumergir como hiperplano afín no vectorial de un espacio vectorial* $\widehat{X}$ *de dimensión* $n+1$, de modo que su traslación al origen es el espacio vectorial de direcciones de X, que se denota $\overrightarrow{X}$. Así, para cualquier $a \in X$ fijo, tenemos $X = a + \overrightarrow{X}$ y $\widehat{X} = [a] \oplus \overrightarrow{X}$.

Capítulo V

Razón doble

A diferencia de la situación afín, no existe ningún invariante proyectivo no trivial asociado a tres puntos diferentes de una recta proyectiva. La explicación de este hecho es que dadas dos ternas diferentes siempre existe una homografía que transforma la una en la otra. En este capítulo introducimos un invariante, la *razón doble*, asociado a cuaternas de puntos alineados de un espacio proyectivo. Las homografías de rectas proyectivas son, precisamente, las biyecciones que conservan la razón doble. Este invariante numérico se calcula fácilmente si se conocen las coordenadas homogéneas de los puntos en cuestión, y depende del orden en que éstos vienen dados. Utilizando la dualidad canónica, es posible encontrar aplicaciones de la teoría de la razón doble al estudio de los *haces de hiperplanos proyectivos* y, como interesante ilustración geométrica, obtener el *teorema clásico de Thales* en el espacio afín.

1. Definición y propiedades

Primero, fijemos en $\mathbb{P}^1 = P(\mathbb{K}^2)$ la referencia $\{(1:0),(0:1);(1:1)\}$. Tomando $\infty = (0:1)$ tenemos la identificación canónica

$$\mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\} \equiv \mathbb{K}: \ (x_0 : x_1) \mapsto t = x_1/x_0.$$

En particular, $(1:0) \equiv 0$ y $(1:1) \equiv 1$.

Definición 1.1. Sea Δ una recta proyectiva y $a,b,c,d \in \Delta$ cuatro puntos distintos. Existe una única homografía $f : \Delta \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$f(a) = \infty, \ f(b) = 0, \ f(c) = 1,$$

y llamamos *razón doble* de los cuatro puntos dados a

$$f(d) \in \mathbb{K}\backslash\{0,1\}.$$

Este escalar depende del orden en que se dan los puntos, y se denota

$$f(d) = [a,b,c,d].$$

Capítulo VI

Clasificación de homografías

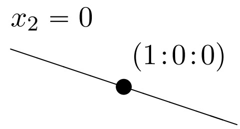
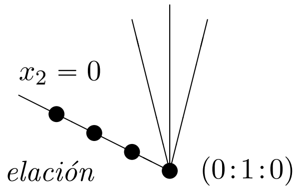
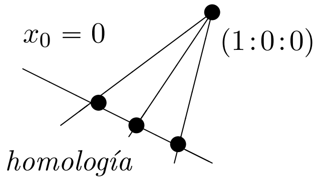
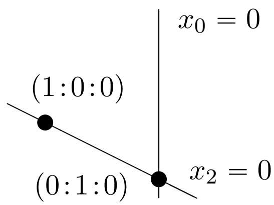
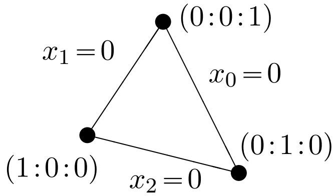
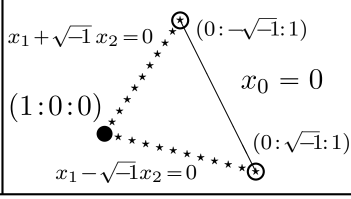
En este capítulo se aborda el problema del cálculo de las *variedades invariantes* de una homografía. Aunque nos restringimos principalmente al caso de los *puntos fijos* y los *hiperplanos invariantes*, también se discuten las *rectas invariantes* de una homografía de $\mathbb{P}^3$. Después de un breve resumen de las *formas canónicas de Jordan*, hacemos un estudio detallado de las homografías de la recta y del plano proyectivos, encontrando la configuración de variedades invariantes en cada caso y las afinidades inducidas cuando se lleva al infinito un punto fijo o una recta invariante respectivamente. Nos detenemos a estudiar algunas homografías de especial interés geométrico, como son las homografías *involutivas* de la recta proyectiva, generadoras del grupo proyectivo correspondiente. Utilizándolas probamos un teorema clásico sobre propiedades geométricas de los *cuadrivértices*. También dedicamos especial atención al estudio de las homologías y de las elaciones, y mostramos cómo generan el grupo proyectivo del plano. Por último se hace un estudio general de las homografías involutivas en cualquier dimensión, de las que se encuentra una caracterización algebraica completa.

1. Variedades invariantes

Sea $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ una homografía de ecuaciones $\lambda y = xM$ (respecto de una referencia dada).

Por *clasificar* f entendemos determinar sus *variedades invariantes*, es decir, las variedades proyectivas $X \subset \mathbb{P}^n$ tales que $f(X) = X$, y sus *relaciones de incidencia*, es decir, las posiciones relativas de esas variedades. Veamos cómo se puede hacer esto.

Puntos fijos. Serán las soluciones $x \neq 0$ de los sistemas homogéneos $\lambda x = xM$ para $\lambda \neq 0$. Ahora bien, ese sistema es $x(M - \lambda I) = 0$, y tendrá solución no idénticamente nula si y sólo si $\det(M - \lambda I) = 0$. Por tanto, los λ son las raíces del polinomio característico $P(t) = \det(M - tI)$, y para cada una de esas raíces λ obtenemos una variedad proyectiva $X_\lambda \subset \mathbb{P}^n$ formada por puntos fijos.

Forma canónica	**Variedades invariantes**	**Afinidades inducidas**
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$		una afinidad sin puntos fijos y con una dirección invariante.
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$		(•) una *traslación* en el complemento de la recta de puntos fijos, (•) infinitas *trasvecciones.*
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & k \end{pmatrix}$		(•) una *homotecia* en el complemento de la recta de puntos fijos, (•) infinitas *dilataciones.*
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & 1 & k \end{pmatrix}$		(•) una afinidad sin puntos fijos con dos direcciones invariantes, (•) una afinidad con un punto fijo y una dirección invariante.
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & \ell \end{pmatrix}$		tres afinidades del mismo tipo, las tres con un punto fijo y dos rectas invariantes.
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \beta \\ & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$		una afinidad con un punto fijo (un giro seguido de una homotecia).

Clasificación de homografías del plano

Capítulo VII

Colineaciones y correlaciones

Las *colineaciones* y las *correlaciones* son biyecciones del conjunto de variedades de un espacio proyectivo en sí mismo. Las primeras conservan la relación de inclusión y la dimensión de las variedades, mientras que las segundas invierten las inclusiones y transforman cada variedad en otra de dimensión proyectiva dual. Definimos las colineaciones y las correlaciones como inducidas por ciertas homografías que explican su actuación sobre los puntos, y estudiamos las homografías duales que explican su actuación sobre los hiperplanos. Todas las posibles composiciones de colineaciones y correlaciones entre sí dan nuevamente lugar a aplicaciones de uno de los dos tipos. Una correlación se determina algebraicamente a partir de una forma bilineal, más explícitamente a partir de la *relación de ortogonalidad* definida por la forma. Las correlaciones *involutivas* son las determinadas por formas bilineales *simétricas* o *antisimétricas*.

1. Colineaciones

Sea $P = P(E)$ un espacio proyectivo, $P^* = P(E^*)$ su espacio dual, $\mathcal{P}$ la colección de las variedades proyectivas de P y $\mathcal{P}^*$ la de las variedades proyectivas de P^*. Suponemos $n = \dim P$. Usaremos estas notaciones en todo el capítulo.

Definición 1.1. Sea $f : P \to P$ una homografía. La aplicación

$$F : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : X \mapsto f(X)$$

se llama *colineación asociada a f*.

Por las propiedades de las homografías, es claro que F es una biyección que conserva las dimensiones. Además, las siguientes propiedades determinan completamente F a partir de $f = F|P$:

(1) $X \subset Y$ si y sólo si $F(X) \subset F(Y)$.
(2) $F(X \cap Y) = F(X) \cap F(Y)$.
(3) $F(V(X, Y)) = V(F(X), F(Y))$.

Capítulo VIII

Cuádricas proyectivas

Abordamos aquí el estudio de las cuádricas, uno de los temas centrales de la Geometría Proyectiva. Definimos una *cuádrica proyectiva* como una clase de equivalencia por proporcionalidad de formas bilineales simétricas. Introducimos a continuación la noción de *polaridad* asociada a una cuádrica, por medio de la cual se pueden definir una gran cantidad de propiedades geométricas, en particular la *tangencia*. Es interesante estudiar la polaridad en los casos más simples de las cónicas y las superficies cuádricas no singulares, y la ilustración gráfica que se presenta puede ayudar a su comprensión. Obtenemos a continuación las *ecuaciones* de las cuádricas y de los objetos geométricos introducidos, en particular las del hiperplano tangente a la cuádrica en un punto regular. La *clasificación de las cuádricas* se obtiene sin dificultad utilizando la teoría de formas bilineales simétricas.

1. Definiciones

Sea $P = P(E)$ un espacio proyectivo.

Definición 1.1. Una *cuádrica proyectiva de* P es una clase de equivalencia por proporcionalidad de formas bilineales simétricas $\widehat{\varphi} : E \times E \to \mathbb{K}$, $\widehat{\varphi} \neq 0$. Denotaremos por φ la clase de $\widehat{\varphi}$. Se llama *rango de* φ el de cualquier $\widehat{\varphi}$ de la clase de equivalencia.

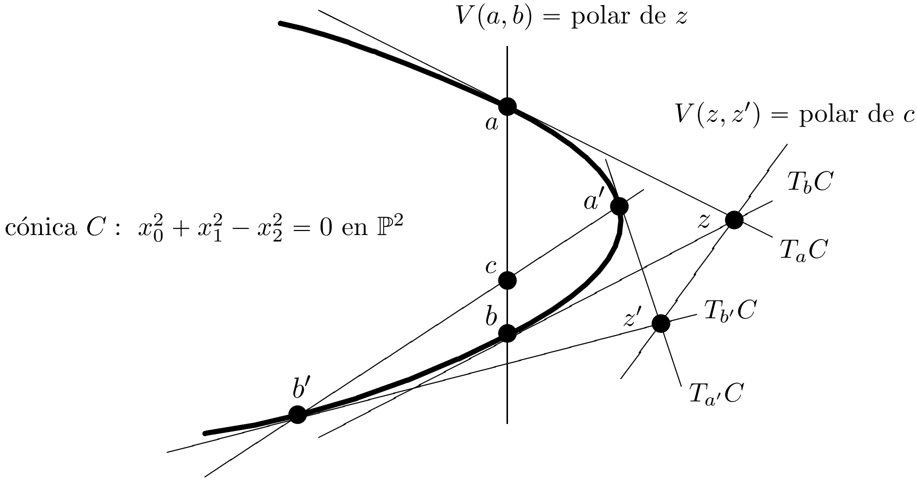
El conjunto $\mathsf{B}(E)$ de las formas bilineales simétricas sobre E tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Por tanto, las cuádricas proyectivas de P se pueden identificar con los elementos del espacio proyectivo $P(\mathsf{B}(E))$.

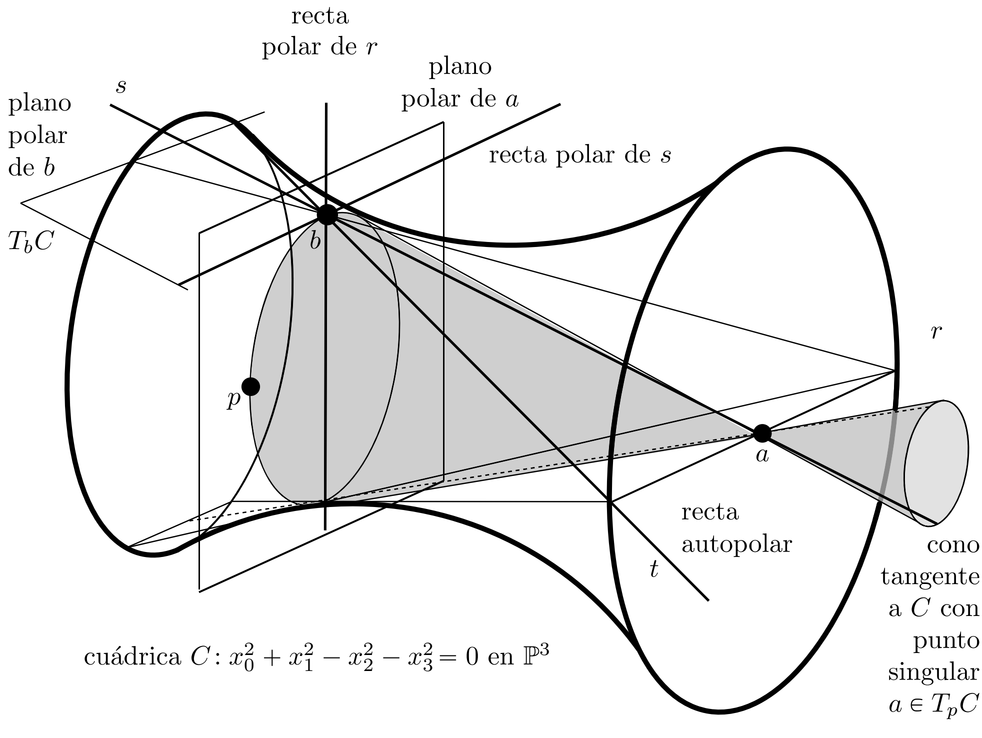
Una cuádrica de un plano proyectivo se denomina *cónica*, y una cuádrica de un espacio proyectivo de dimensión 3 se denomina *superficie cuádrica*.

Fijemos una cuádrica proyectiva φ.

Ceros de una cuádrica. Si $x = [u] \in P$, la condición $\widehat{\varphi}(u, u) = 0$ no depende de u ni de $\widehat{\varphi}$, y cuando se verifica decimos que x es un *cero de* φ. Denotamos por $C = C_\varphi \subset P$ el conjunto de todos los ceros de φ.

A continuación ilustramos gráficamente la polaridad de las cónicas y las superficies cuádricas no singulares.





Capítulo IX

Cónicas proyectivas

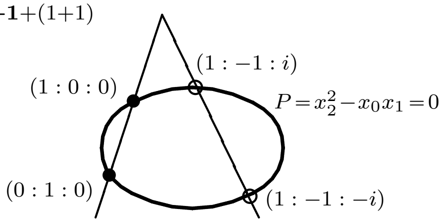
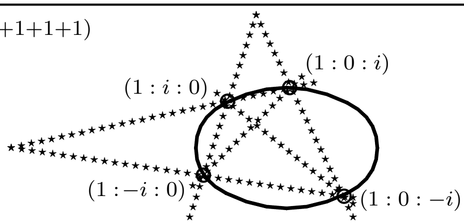
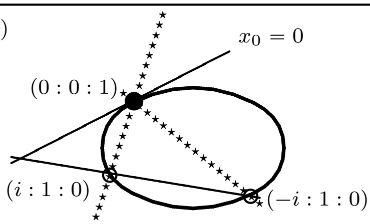
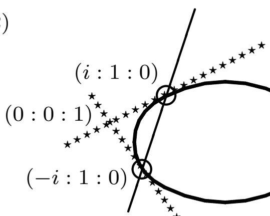
Este capítulo está dedicado al estudio de las *cónicas* del plano proyectivo. Las cónicas han sido objeto de atención privilegiada de la práctica totalidad de los geómetras que han trabajado en este área. Seleccionamos aquí el *teorema de Chasles-Steiner* sobre la determinación de las cónicas mediante homografías entre haces de rectas, el célebre *teorema de Pascal* sobre hexágonos inscritos en cónicas y su dual el *teorema de Brianchon*, algunas propiedades de las homografías de una cónica como el *teorema de Frégier*, y el *teorema de Desargues-Sturm* sobre la homografía involutiva inducida en una recta por un *haz de cónicas*. En la sección 5 estudiamos el problema de *clasificación de haces de cónicas*. En la última sección utilizamos la cónica no singular para describir el *modelo de Beltrami-Klein* del plano hiperbólico.

1. Cónicas y haces de rectas

Sea $P = P(E)$ un plano proyectivo. Entonces el espacio vectorial $\mathsf{B}(E)$ de las formas bilineales simétricas $\widehat{\varphi} : E \times E \to \mathbb{K}$ tiene dimensión 6 (como fácilmente se comprueba utilizando la representación matricial de dichas formas). En consecuencia, el espacio $P(\mathsf{B}(E))$ de las cónicas proyectivas tiene dimensión 5. Si $x = [u]$ es un punto de $P(E)$, entonces el conjunto de las cónicas φ tales que $x \in C_\varphi$ es el hiperplano de $P(\mathsf{B}(E))$ asociado al núcleo de la forma lineal $\mathsf{B}(E) \to \mathbb{K}$ definida por $\widehat{\varphi} \mapsto \widehat{\varphi}(u, u)$. Esta observación será de utilidad en la prueba del siguiente resultado.

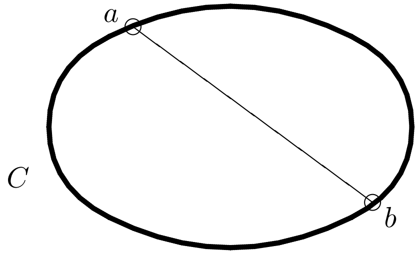
Proposición 1.1. *Dados cinco puntos de $P(E)$ tales que no hay tres de ellos alineados, existe exactamente una cónica que contiene a los cinco. Además, esa cónica es no singular.*

Demostración. Sean c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 cinco puntos de $P(E)$. Buscaremos de modo explícito la cónica que pasa por ellos, lo que justificará también su unicidad. Sea pues φ una cónica, y $\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0$ su ecuación respecto de la referencia

<table>
<tr><th>Multiplicidades y base</th><th>Cónicas singulares</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>1+1+(1+1)

</td><td>$Q = x_2(x_0 + x_1) = 0$</td><td>$\lambda Q + \mu P = 0$
las cónicas que pasan por dos puntos reales y por dos puntos imaginarios conjugados</td></tr>
<tr><td>(1+1+1+1)

</td><td>$Q = x_1x_2 = 0$
$Q' = x_0^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0$
$Q'' = x_0^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0$</td><td>$\lambda Q + \mu Q' = 0$
las cónicas que pasan por cuatro puntos imaginarios, conjugados dos a dos</td></tr>
<tr><td>2+(1+1)

</td><td>$Q = x_0x_2 = 0$
$Q' = x_0^2 + x_1^2 = 0$</td><td>$\lambda Q + \mu Q' = 0$
las cónicas que pasan por un punto real y por dos imaginarios conjugados, y son tangentes en el primero</td></tr>
<tr><td>(2+2)

</td><td>$Q = x_2^2 = 0$
$Q' = x_0^2 + x_1^2 = 0$</td><td>$\lambda Q + \mu Q' = 0$
las cónicas que pasan por los dos puntos imaginarios conjugados y son tangentes en ambos</td></tr>
</table>

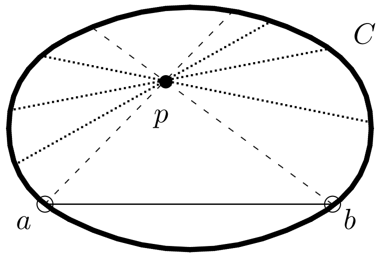
Clasificación de haces no completos de cónicas reales

a y b no son puntos de la recta del plano hiperbólico, que es por tanto ilimitada



Observamos que en el plano hiperbólico no se cumple el *Quinto Postulado de Euclides*, pues por un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas rectas que no la cortan.

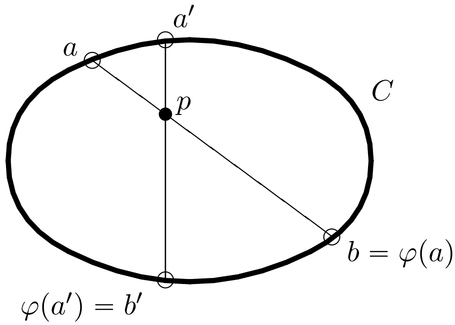
Las rectas pa y pb se llaman *paralelas* a ab, y las demás rectas que no cortan a ab, *ultraparalelas*.



Los *movimientos* de este plano hiperbólico son las homografías del plano proyectivo que dejan invariante el absoluto C (que por lo que sabemos son exactamente las homografías de C). Obsérvese que una tal homografía transforma una recta que no corte a C en otra que tampoco lo hace, por lo que transforma el *interior* de C en sí mismo. Por supuesto, lo que importa aquí es la restricción de la homografía a ese interior, que es el plano hiperbólico.

Dos figuras del plano hiperbólico se consideran *congruentes* o iguales cuando hay un movimiento que transforma una en otra.

Ejemplo de movimiento: una homología φ de centro p que induce una involución en el absoluto. Este movimiento se llama *simetría de centro p*.



De modo natural, dos rectas $r = ab$ y $r' = a'b'$ que se cortan en un punto p

Capítulo X

Relación entre cuádricas afines y proyectivas

Este último capítulo está dedicado a las relaciones entre las cuádricas afines y las proyectivas. Vemos en primer lugar que toda cuádrica afín admite una *completación proyectiva* cuyo conjunto de ceros se obtiene añadiendo ciertos puntos de infinito al conjunto de ceros de la cuádrica afín; esos puntos de infinito son los ceros de la denominada *cuádrica de infinito*. Probamos a continuación que algunos elementos geométricos de las cuádricas afines, como los *centros* y los *diámetros*, quedan determinados por la polaridad asociada a las completaciones proyectivas de dichas cuádricas. La estrecha relación existente entre una cuádrica afín y su completación proyectiva queda reflejada analíticamente en el hecho de que la misma matriz sirve para determinar las ecuaciones de ambas. Asimismo discutimos el célebre *teorema de Witt* que explica en qué medida las formas canónicas de una cuádrica afín, de su cuádrica de infinito y de su completación proyectiva se determinan mutuamente; además incluímos las *tablas de clasificación* combinada afín y proyectiva de cónicas y superficies cuádricas.

1. Completación proyectiva de cuádricas afines

Sea X un espacio afín y $\widetilde{X} = P(\widehat{X})$ su completación proyectiva.

Recordemos que una *cuádrica afín* φ es una clase de equivalencia por proporcionalidad de formas biafines simétricas. Por otra parte, cualquier forma biafín $X \times X \to \mathbb{K}$ admite una única extensión bilineal $\widehat{\varphi} : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{K}$. En efecto, la unicidad resulta inmediatamente de la bilinealidad, pues $\widehat{X} = L[X]$; para la existencia de extensión, se fija un origen $a \in X$ y se desarrolla la forma biafín del modo habitual

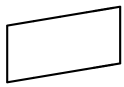
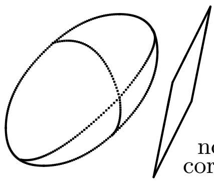
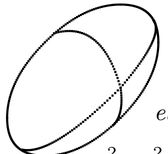
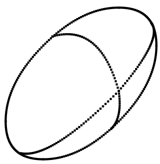
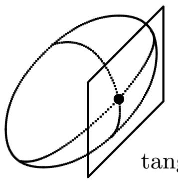
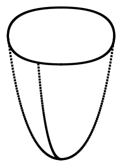
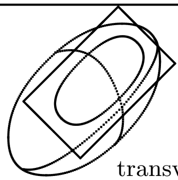
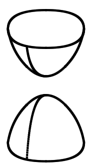
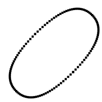
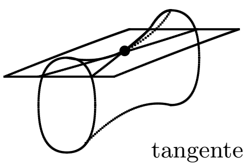
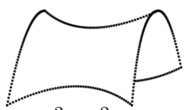
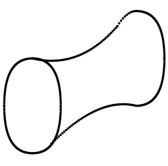
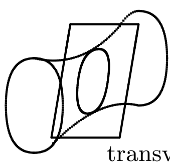
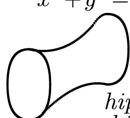
$$(x, y) = (a + u, a + v) \mapsto c + f(u) + g(v) + \overrightarrow{\varphi}(u, v),$$

donde $c \in \mathbb{K}$, $f, g : \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$ son dos formas lineales y $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{X} \times \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal no nula. Como $\widehat{X} = [a] \oplus \overrightarrow{X}$ basta definir

$$\widehat{\varphi}(\lambda a + u, \mu a + v) = \lambda\mu c + \mu f(u) + \lambda g(v) + \overrightarrow{\varphi}(u, v),$$

5. Superficies cuádricas

Para superficies cuádricas se obtienen las tablas siguientes:

Cuádrica proyectiva	**Plano de infinito**	**Cuádrica afín**	**Cónica de infinito**
$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ $(*)$ $\varnothing$		$x^2+y^2+z^2=-1$ $\varnothing$	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ $\varnothing$
$x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ $(*)$	 no corta	 *elipsoide* $x^2+y^2+z^2=1$	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ $\varnothing$
	 tangente	 $x^2+y^2=z$ *paraboloide elíptico*	*punto doble*
cuádrica no reglada	 transversal	 *hiperboloide elíptico o de dos hojas* $x^2+y^2=z^2-1$	 *cónica no singular*
$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$	 tangente	*paraboloide hiperbólico o silla de montar*  $x^2-y^2=z$	 *dos rectas*
 *cuádrica reglada*	 transversal	$x^2+y^2=z^2+1$  *hiperboloide hiperbólico o de una hoja*	 *cónica no singular*

Clasificación de superficies cuádricas no singulares

Problemas adicionales

Número 1. Se considera una homografía de $\mathbb{P}^3$ definida por

$$f : \lambda x_0' = x_0 + x_1,\ \lambda x_1' = 2x_1 + x_2,\ \lambda x_2' = 2x_2 + x_3,\ \lambda x_3' = x_3,$$

y se pide:

(a) Sus puntos fijos y sus planos invariantes.

(b) Su forma canónica de Jordan.

(c) Las rectas invariantes de los planos $x_2 + x_3 = 0$ y $x_3 = 0$.

(d) Probar que las anteriores son todas las rectas invariantes de la homografía.

(e) Las ecuaciones de la afinidad inducida en el plano afín $(x_3 = 0)\backslash(x_2 = 0)$ respecto de la referencia cartesiana $\{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$, donde $O = (0 : 0 : 1 : 0)$, $A = (1 : 1 : 2 : 0)$, $B = (1 : 0 : 2 : 0)$.

Número 2. La polaridad asociada a una cónica no singular tiene las siguientes propiedades:

(1) La recta polar del punto $(1 : 0 : -1)$ es $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$.

(2) El punto polar de la recta $x_2 = 0$ es $(1 : 1 : 0)$.

(3) La recta $x_0 = 0$ es la polar de un punto de la cónica.

Se pide:

(a) La recta polar del punto $(1 : -1 : 0)$.

(b) El punto polar de la recta $x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

(c) ¿Cuántas tangentes a la cónica pasan por el punto $(1 : 1 : 0)$?

(d) Clasificar la cónica afín inducida en $x_2 \neq 0$.

(e) La ecuación de la cónica.

Número 3. Se considera la homografía de $\mathbb{P}^3$ de ecuaciones

$$f : \lambda x_0' = -x_0 + 2x_1,\ \lambda x_1' = x_1,\ \lambda x_2' = x_1 - x_2,\ \lambda x_3' = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

y se pide:

(a) Sus puntos fijos y sus planos invariantes.

(b) Su forma canónica de Jordan.

(c) Sus rectas invariantes.

(d) Comprobar que f induce una homotecia en el plano afín $H\backslash r$, siendo $H : x_1 = 0$ y r a determinar.

(e) El centro y la razón de la homotecia anterior.

Número 4. Se considera la homografía de $\mathbb{P}^3$ de ecuaciones

$$f : \lambda x_0' = x_0 + x_1 + x_2,\ \lambda x_1' = 2x_1 + x_2,\ \lambda x_2' = 2x_2 + x_3,\ \lambda x_3' = x_3,$$

Cuestiones

Juzgar la veracidad de cada una de las afirmaciones siguientes.

Número 0. La configuración dual de dos rectas de $\mathbb{P}^3$ que se cortan en un punto son dos rectas que se cruzan.

Número 1. Toda reordenación de cuatro puntos alineados puede hacerse con una homografía.

Número 2. Toda homografía del plano proyectivo real tiene alguna recta invariante.

Número 3. Toda homografía de $\mathbb{P}^3$ transforma rectas coplanarias en rectas coplanarias.

Número 4. Toda homografía del espacio proyectivo real proviene de una afinidad.

Número 5. Una correlación de $\mathbb{P}^3$ transforma cuatro puntos alineados en cuatro planos que se cortan en un punto.

Número 6. Una cónica no singular no contiene ninguna recta.

Número 7. Todo hexágono está inscrito en una cónica no singular.

Número 8. Una aplicación proyectiva cuyo centro es vacío es una homografía.

Número 9. Toda reordenación de una cuaterna armónica es una cuaterna armónica.

Número 10. Existen homografías sin puntos fijos.

Número 11. Dos planos proyectivos de $\mathbb{P}^4$ siempre se cortan.

Número 12. Una homografía del plano proyectivo inducida por una afinidad deja fijos todos los puntos de infinito.

Número 13. Una correlación de $\mathbb{P}^3$ transforma cuatro planos distintos que contienen una recta en cuatro puntos alineados.

Bibliografía

En la bibliografía que sigue se enumeran una serie de obras de muy distinto nivel y orientación que reflejan diferentes tradiciones; también se incluyen libros sobre la historia de la disciplina. Es importante advertir aquí que los libros más antiguos pueden ser de lectura harto dificultosa, incluso para conocedores de la materia.

Un libro clásico que presenta la Geometría Proyectiva desde el punto de vista analítico es el de Baer ([7]). Por el contrario, en el de Veblen y Young ([96]) se prefiere el enfoque sintético, aunque también se incluyen desarrollos analíticos y algebraicos. Los libros [16], [18], [28], [32], [39], [43], [45] y [89] han sido escritos por grandes matemáticos italianos y son una muestra de la riqueza de ideas e intuiciones geométricas que les caracteriza. Las referencias [8], [9], [61], [62], [75], [81], [84], [91] y [95] pertenecen a la tradición inglesa y cubren desde el enfoque sintético de la obra de Baker hasta el punto de vista más algebraico del libro de Todd. Las contribuciones de matemáticos alemanes están representadas por [19], [20], [50], [65], [66] y [70], y muy especialmente por el libro [60] de Hilbert y Cohn-Vossen, que ofrece una exposición muy atractiva de los aspectos más visuales e intuitivos de la geometría. Los libros [2], [13], [14], [31], [53], [54], [85], [93] y [94] son de autores franceses y van desde la obra clásica de Chasles sobre las cónicas hasta algunas de las obras más recientemente publicadas sobre Geometría Proyectiva. Los libros de Coolidge ([33] y [34]) ofrecen una perspectiva histórica del tema, así como el de Andersen ([1]), éste con un sesgo muy atrayente. Los libros de Field y Gray ([49]) y de Dhombres y Sakarovitch ([40]) estudian la obra de Desargues. En [48], [51] y [74] se reflejan los aspectos más lúdicos y artísticos. El libro [46] es una buena muestra del uso creciente de la Geometría Proyectiva en campos tan de actualidad como el diseño por ordenador y la visión artificial.

Para recomendar algunos libros, elegiríamos, por muy diferentes motivos y sobre todo por gusto personal, los de Andersen, Audin, Berger, Coxeter, Hartshorne y Sernesi ([1], [2], [13], [38], [58] y [92], respectivamente). En fin, un libro distinguido en lengua española (en el que se utilizan los métodos sintéticos y analíticos) es [86], de Santaló.

[1] K. Andersen : *The geometry of an art: The history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge*. Nueva York: Springer Verlag 2007.

[2] M. Audin: *Géométrie* (2ª edición). Les Ulis: EDP Sciences 2006. [Traducción inglesa revisada de la edición francesa de 1998, Berlín: Springer Verlag 2002.]

[3] F. Apery: *Models of the real projective plane*. Braunschweig: Vieweg Verlag 1987.

[4] E. Artin: *Geometric algebra*. Nueva York: Interscience 1957.

[5] R. Artzy: *Linear Geometry*. Reading: Addison-Wesley 1965. [Reimpresión, Nueva York: Dover 2008.]

Nombres propios

Símbolos

Índice