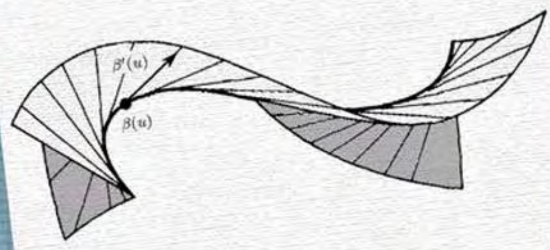
manuales matemáticas

José M. Rodríguez-Sanjurjo
Jesús M. Ruiz

Introducción a la Geometría Diferencial II: Superficies



sanz y torres

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL II. SUPERFICIES

Vereda de los Barros, 17
Pol. Ind. Ventorro del Cano — 28925 Alcorcón (Madrid)
☎ 902 400 416 – 91 323 71 10
www.sanzytorres.es
libreria@sanzytorres.com
www.editorialsanzytorres.com
editorial@sanzytorres.com

ISBN: 978-84-17765-08-8
Depósito legal: M-5538-2019

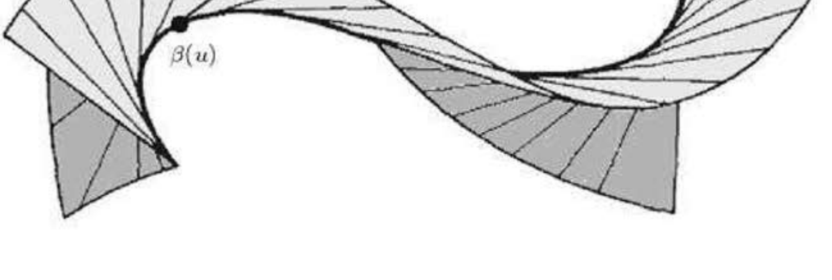
Portada:
Javier Rojo Abuín

Composición:
Autores

Impresión y encuadernación:
Safekat, S. L.

Introducción a la Geometría Diferencial, II
SUPERFICIES

José M. Rodríguez-Sanjurjo
Jesús M. Ruiz
Universidad Complutense de Madrid



sanz y torres

O binómio de Newton é tâo belo como a Vénus de Milo.
O que há é pouca gente para dar por isso.

Álvaro de Campos

Prefacio

El presente volumen completa la introducción a la Geometría Diferencial comenzada en el anterior, dedicado a la teoría de curvas. Uno de los atractivos de esta materia es que, a un nivel relativamente elemental, se estudian algunos de los grandes teoremas de las matemáticas, debidos a autores eminentes. Otro aspecto interesante es que aquí confluyen gran parte de las ramas de las matemáticas: Geometría, Análisis, Álgebra Lineal, Topología, Ecuaciones Diferenciales... Además, en la teoría de superficies conviven en igual medida la profundidad matemática y la abundancia de imágenes visuales, algunas dotadas de gran belleza plástica. Este equilibrio entre rigor e intuición confiere a la Geometría Diferencial un valor eminentemente formativo.

Los temas tratados son los habituales en un curso de estas características: superficies y tangencias, cálculo diferencial e integral en superficies, primera y segunda forma fundamental, aplicación de Gauss y curvatura de Gauss, teorema egregio, geodésicas... Pero hemos querido tratar algunos temas más con especial detalle. Por ejemplo, damos una demostración completa del teorema fundamental de superficies, incluyendo la solución de las ecuaciones en derivadas parciales involucradas. También nos hemos detenido en el Umlaufsatz para superficies y en los resultados sobre triangulación de superficies diferenciables, requisitos necesarios para el teorema de Gauss-Bonnet. Quisiéramos haber conseguido escribir una demostración sin lagunas de este teorema clásico. Lo mismo decimos del teorema de Poincaré-Hopf, al que dedicamos la lección última del libro, después de haber introducido algunos fundamentos sobre singularidades de campos tangentes.

Como en el precedente sobre curvas, una característica de este volumen es la relevancia dada a los aspectos históricos, que ocupan gran parte de las notas finales de cada lección. Pueden servir a los lectores para descansar del estudio estricto de la materia presentada y descubrir otras vertientes de esa misma materia y de su evolución histórica. Digamos a este respecto que coincidimos plenamente con Isaac Isidor Rabi, Premio Nobel de Física de 1944, quien dice que *la ciencia debe ser enseñada de manera humanista, en el sentido de la biografía, la naturaleza de las personas que hicieron posible su construcción, sus triunfos, sus pruebas, sus tribulaciones.*

El libro está concebido para ser utilizado en los grados de Matemáticas y Físicas y en las Ingenierías, y los conocimientos previos requeridos se limitan a las asignaturas de Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral y algunas nociones de Topología. Cada lección viene acompañada de una colección de diez problemas sobre los temas tratados en ella, que a veces recogen aspectos adicionales o refinamientos de esos temas.

Finalmente, queremos expresar nuestro agradecimiento a los compañeros con quienes hemos discutido en extenso cuestiones relativas a esta materia a lo largo de los años, y especialmente a Victor Fernández Laguna. También agradecemos a David Gómez, Manuel Navarro y Diego Chicharro que hayan leído con detenimiento parte del texto, señalado errores y formulado observaciones que nos han ayudado a mejorarlo.

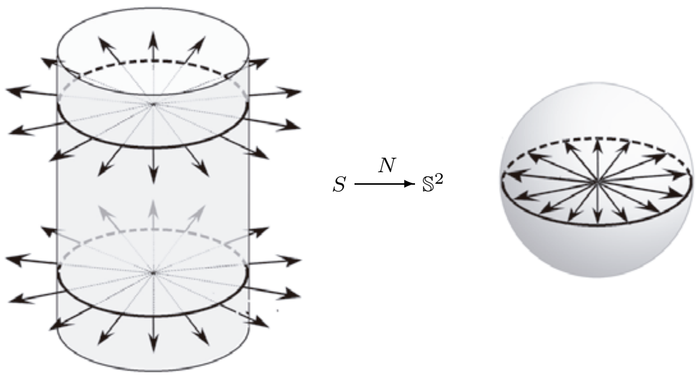
Pozuelo de Alarcón, Majadahonda *J.M. Rodríguez-Sanjurjo, J.M. Ruiz*
4 de noviembre de 2018

Contenido

Gauss vía el gradiente. En este caso el gradiente es $(2x, 2y, 0)$, que tiene norma $\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2$ (pues estamos en puntos del cilindro). Concluimos que

$$N : S \to \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = (x, y, 0).$$

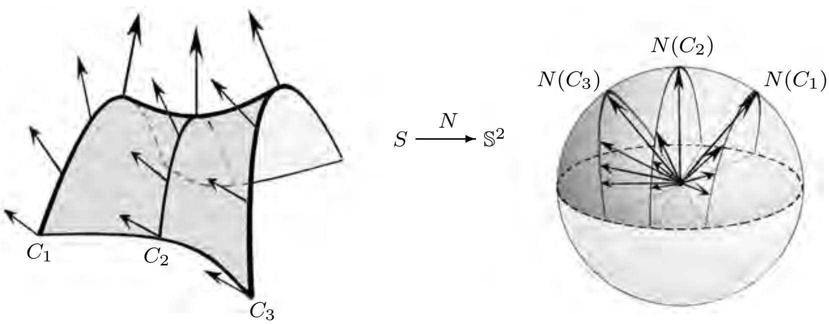
es una aplicación de Gauss.



Esta aplicación transforma todo el cilindro S en el ecuador $z = 0$ de $\mathbb{S}^2$, lo que dista mucho de ser un difeomorfismo. Podemos decir que el vector normal varía muy poco.

(3) Estudiemos el paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$. La parametrización de Monge de esta ecuación *explícita* tiene vector normal $\vartheta = (2x, -2y, 1)$ (3.6, p. 36), y dividiendo por la norma se obtiene una aplicación de Gauss. También podemos utilizar el gradiente de la ecuación *implícita* $x^2 - y^2 + z = 0$, que es el mismo $(2x, -2y, 1)$. En cualquier caso, una aplicación de Gauss es

$$N : S \to \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$



Lección 13

Campos tangentes

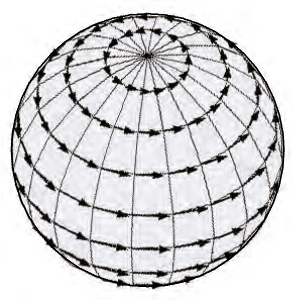
En esta lección introducimos los campos (vectoriales) tangentes a una superficie o, más generalmente, a un abierto de una superficie, y los utilizamos para demostrar la existencia de parametrizaciones con propiedades especiales, con las cuales es sencillo trabajar en algunos casos importantes.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable.

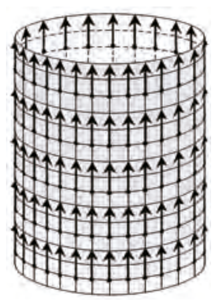
Definición 13.1. Un *campo tangente* a un abierto W de S es una aplicación diferenciable $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(p) \in T_pS$ para todo $p \in S$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 13.2. (1) Las dos figuras siguientes representan un campo tangente a una esfera y uno tangente a un cilindro:



$\Phi(x, y, z) = (-y, x, 0)$



$\Phi(x, y, z) = (0, 0, 1)$

Obsérvese que en los dos casos hay muchos vectores en la imagen, y sin embargo el segundo campo es constante. Esto se debe a que la imagen que se prefiere para representar es la de cada vector dibujado con origen en el punto de tangencia. Se advierte también que campos muy sencillos pueden incluir información relevante sobre la superficie.

(2) En la esfera $\mathbb{S}^2$ podemos definir otros campos, por ejemplo $\Psi(x, y, z) = (-z, 0, x)$ o $(0, -z, y)$, pero siempre se anularán en algún punto. De hecho, eso

plana con la misma curvatura que α. Aplicar esto a la hélice $\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s, s)$ para probar que la proyección $(x, y, z) \mapsto (2x, 2y)$ induce una isometría local de S sobre $\mathbb{R}^2$ (lo que justifica la última ilustración *aproximada* de la lección).

Notas

1. Según hemos visto, en una superficie de curvatura nula cada punto parabólico está en un segmento de recta. Se puede ver además que si un punto planar es límite de puntos parabólicos, los segmentos de recta que pasan por éstos tienen por límite un segmento de recta que pasa por aquél, y que todos los puntos de ese segmento límite son planares. Pero todo esto requiere un análisis más extenso en el que no hemos querido demorarnos aquí.

2. En la lección hemos demostrado que una superficie de curvatura nula es desarrollable en un entorno del punto genérico, pero hemos señalado que el resultado vale aún sin esa restricción. En realidad, ocurre que dos superficies con la misma curvatura de Gauss K *constante* son localmente isométricas. Este resultado es el *teorema de Minding*. En consecuencia, una superficie con curvatura de Gauss constante K es localmente isométrica: (i) a un plano si $K = 0$ (las localmente desarrollables), (ii) a una esfera si $K > 0$, y (iii) a una pseudoesfera si $K < 0$.

3. A continuación ofrecemos algunos rasgos biográficos de Picard, otro matemático que ha elaborado parte de los fundamentos de la teoría de ecuaciones diferenciales y que, también, ha contribuido a la teoría de las superficies regladas.

Picard nació en París el 24 de Julio de 1856. Realizó sus estudios secundarios en el Lycée Napoleón de esa ciudad, donde fue un alumno brillante en las disciplinas de griego, latín e historia. Pero la geometría le provocó inicialmente un fuerte rechazo y se limitó a aprenderla de memoria para evitar los castigos. Por el contrario, el álgebra le sedujo inmediatamente desde que tomó contacto con ella a los quince años. Dos años después comenzaría a ver la geometría desde otro ángulo y a sentirse atraído por esta rama de las matemáticas. Cuando, más tarde, tuvo que elegir entre la Escuela Politécnica y la Escuela Normal para realizar sus estudios universitarios, se inclinó por esta última. Parece que en su decisión pesó de manera determinante una visita que realizó a Pasteur en la que éste le habló sobre la ciencia pura y desinteresada, cuyo hogar natural era la Escuela Normal más bien que la Escuela Politécnica, dedicada a las aplicaciones y a la ingeniería.

La tesis doctoral de Picard, presentada en la Escuela Normal, estaba dedicada precisamente a la geometría y llevaba por título *Applications des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches*. Contiene varios resultados hoy clásicos, como una

Lección 16

Geodésicas (II)

En esta lección describimos las geodésicas como las soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales que dependen de los símbolos de Christoffel (luego solamente de la primera forma fundamental). Es esta descripción la que permite establecer localmente la existencia y unicidad de las geodésicas. Después presentamos el concepto de campo paralelo, que proporciona una caracterización alternativa de las geodésicas y está regulado mediante ecuaciones diferenciales similares. Terminamos la lección con otro aspecto de la analogía entre rectas y geodésicas: la minimización de la distancia sobre la superficie.

Sea S una superficie diferenciable.

(16.1) Ecuaciones diferenciales de las geodésicas. Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización de un abierto W de S. Sea $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva de W. Es posible sacar aún más partido de los cálculos realizados en la lección anterior, y, en concreto, de la siguiente expresión encontrada en 15.9, p. 213,

$$\begin{aligned}\gamma''(t) = {} & \big(u'' + u'^2\Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + v'^2\Gamma^1_{22}\big)\varphi_u \\ & + \big(v'' + u'^2\Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + v'^2\Gamma^2_{22}\big)\varphi_v + \big(u'^2 e + 2u'v' f + v'^2 g\big)N.\end{aligned}$$

La curva $\gamma(t)$ será una geodésica si y sólo si la proyección de $\gamma''(t)$ sobre el plano tangente es nula, les decir, si en la anterior fórmula los coeficientes de φ_u y φ_v se anulan:

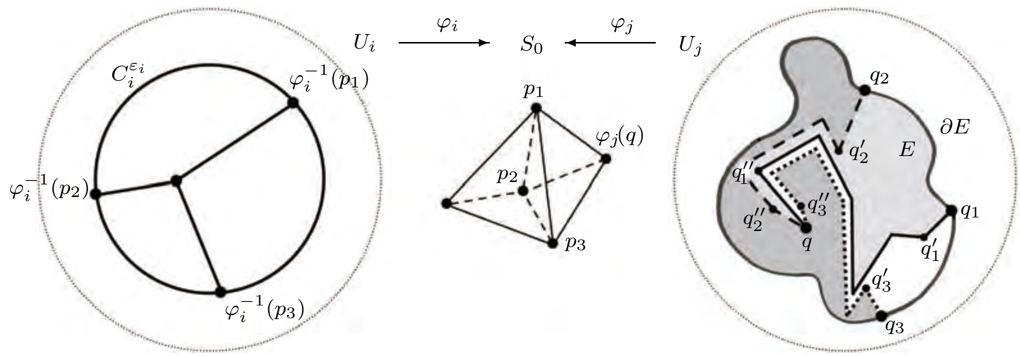
$$\text{(EDG)}\ \begin{cases} u'' + u'^2\Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + v'^2\Gamma^1_{22} = 0, \\ v'' + u'^2\Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + v'^2\Gamma^2_{22} = 0. \end{cases}$$

Éstas son las denominadas *ecuaciones diferenciales de las geodésicas.* ▮

Como aplicación de estas ecuaciones vamos a estudiar el comportamiento de las geodésicas de las superficies de revolución.

Ejemplo 16.2. Consideremos una superficie de revolución S parametrizada mediante

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)) \quad (\zeta(u) > 0),$$



(3) Elegimos un punto q en el interior de la región $E = \varphi_j^{-1}(\Sigma)$. En la frontera $\partial E = \varphi_j^{-1}(\Gamma_i)$ tenemos los tres puntos $q_k = \varphi_j^{-1}(p_k)$. Empezamos por q_1. Tomamos un segmento $[q_1, q_1']$ transversal a la frontera en q_1, que penetre en el interior de E hasta cierto punto q_1'. Ahora q_1' y q se pueden unir por una poligonal (pues el interior de E es un abierto conexo del plano), que junto con el segmento $[q_1, q_1']$, proporciona una primera arista que denotamos σ_1. Denotamos $[q_1'', q]$ el segmento de σ_1 que termina en q. Ahora pasemos a q_2. De nuevo elegimos un segmento $[q_2, q_2']$ transversal a la frontera en q_2, con $q_2' \in B$. Tomándolo suficientemente pequeño estamos seguros de que no corta a σ_1. Unimos q_2' y q mediante una poligonal σ_2. Si σ_2 no toca σ_1 hemos terminado. Si la toca, avanzamos por σ_2 hasta alcanzar σ_1, retrocedemos un poco, y avanzamos paralelamente a σ_1 hacia q hasta un punto próximo q_2'' y terminamos con un segmento $[q_2'', q]$ transversal a $[q_1'', q]$ (véase el dibujo). De esta manera reemplazamos σ_2 por una poligonal que denotamos igual y ya no toca a σ_1. Ya se ve como repetir el proceso para trazar una tercera poligonal σ_3 que una q_3 con q con un segmento inicial transversal a la frontera en q_3, y un segmento final transversal a los de σ_1 y σ_2. Es claro que al construir estas poligonales podemos siempre evitar un punto de $\mathcal{P}$ que nos encontremos en el dominio de la parametrización.

Para terminar debemos allanar sus vértices como se explica en [CD, 12.9, p. 137], lo que no altera las condiciones de transversalidad en los extremos. Además el allanamiento se puede hacer en entornos suficientemente pequeños de los vértices para estar seguros de que la curva obtenida sigue sin tocar el posible punto de $\mathcal{P}$ que la poligonal evitaba. ∎

Añadimos a lo anterior dos notas que servirán en el momento final de esta larga demostración. Uno, aquí la frontera es una curva diferenciable, pero lo mismo se puede hacer si es diferenciable a trozos: la transversalidad en los vértices sería a

Lección 19

El teorema de Gauss-Bonnet

En esta lección obtenemos uno de los teoremas más bellos de la geometría, como se acepta de manera unánime. Veremos primero la versión local, que requiere el Umlaufstaz para superficies de la lección 17, y después la versión global, que involucra el concepto puramente topológico de característica de Euler. También hay que utilizar los conceptos introducidos en la lección anterior. Sólo con eso, es decir, sólo con ser capaces de hacer entender bien el alcance del resultado, consideraríamos alcanzado un objetivo principal de este texto. La lección termina con algunas consecuencias del teorema, relacionando curvatura, convexidad y topología.

Sea S una superficie diferenciable. Empezamos con el *teorema de Gauss-Bonnet local:*

Teorema 19.1. *Sea K la curvatura de Gauss de la superficie S. Sea $\Sigma \subset S$ una región regular simple contenida en el entorno coordenado W de una parametrización ortogonal $\varphi : U \to W \subset S$. Sea $\alpha : [a,b] \to S$ una parametrización positiva por la longitud del arco de la frontera $\partial\Sigma$ de Σ; denotamos por $\triangle\theta_1, \dots, \triangle\theta_n$ sus ángulos externos y por $k_g(s)$ su curvatura geodésica (definida a trozos). Entonces*

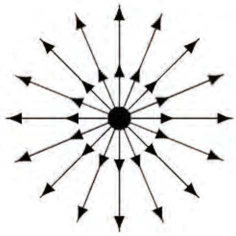
$$\int_\Sigma K + \int_a^b k_g(s)ds = 2\pi - \sum\nolimits_k \triangle\theta_k.$$

Demostración. Calculemos la integral curvilínea de la curvatura geodésica. Si $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ son los vértices de α, esa integral curvilínea es

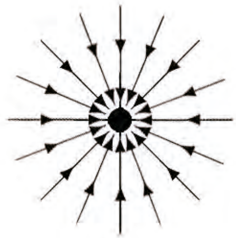
$$\int_\alpha k_g = \sum\nolimits_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} k_g(s)ds.$$

Por la fórmula de 17.3, p. 237, tenemos

$$\sum\nolimits_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} k_g(s) = \sum\nolimits_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \big(\theta_k' + \tfrac{1}{2\sqrt{EG}}(G_u v' - E_v u')\big)ds,$$



Fuente



Sumidero

En ambos casos el origen es un punto singular aislado, y podemos calcular el índice utilizando como región regular simple un disco centrado en el origen, cuya frontera se parametriza $\alpha(t) = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Para la fuente es

$$\gamma(t) = \tfrac{1}{\varepsilon}\big(X(\alpha(t)), Y(\alpha(t))\big) = (\cos t, \operatorname{sen} t),$$

la elevación correspondiente $\theta(t) = t$, y el índice

$$\operatorname{ind}_{(0,0)}\mathcal{F} = \operatorname{gr}(\gamma) = \tfrac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0)) = +1.$$

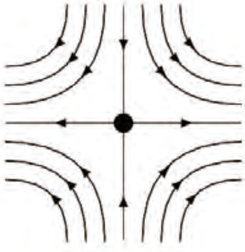
El sumidero tiene, contra lo que un juicio precipitado podría suponer, el mismo índice. En efecto, para el sumidero

$$\gamma(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t) = (\cos(\pi + t), \operatorname{sen}(\pi + t)) \quad \text{y} \quad \theta(t) = \pi + t$$

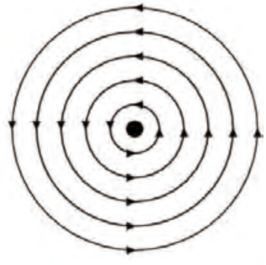
(no $\theta(t) = -t$), pues $\gamma(0) = (-1, 0)$), con lo que

$$\operatorname{ind}_{(0,0)}\mathcal{F} = \tfrac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0)) = +1.$$

(2) Otros dos campos interesantes son la *silla,* $x\Phi - y\Psi$, y la *circulación,* $-y\Phi + x\Psi$. La figura representa sus curvas integrales, que explican los nombres elegidos.



Silla



Circulación

Lección 21

El teorema de Poincaré-Hopf

Esta lección última de nuestro texto está dedicada a otro de esos teoremas con nombre propio que explican los porqués profundos de una teoría. Es el teorema de *Poincaré-Hopf,* que expresa la característica de Euler de una superficie mediante los índices de los puntos singulares de un campo tangente dado. Como ya hemos establecido el teorema de Gauss.Bonnet, que proporciona también la característica de Euler, podremos aplicarlo para obtener la fórmula de Poincaré-Hopf. Terminaremos la lección con una fórmula similar en la que los campos se sustituyen por funciones diferenciables. Señalemos que hay otras maneras de presentar estos resultados, en las que es el teorema de Gauss-Bonnet el que se deduce del de Poincaré-Hopf.

Sea S una superficie diferenciable. Empezamos con una fórmula integral de cálculo del índice, que puede considerarse el *teorema de Poincaré-Hopf local.*

Proposición 21.1. *Sean $\mathcal{F}$ un campo tangente de la superficie S y $p \in S$ un punto de S. Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización ortogonal de un entorno abierto W de p tal que $\mathcal{F}$ no tiene ningún punto singular en $W \setminus \{p\}$. Sea $\Sigma \subset W$ una región regular simple que contenga p en su interior y sea $\alpha : [a, b] \to \partial\Sigma$ una parametrización positiva por la longitud del arco s de la frontera $\partial\Sigma$ de Σ, con vértices $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$. Consideremos un campo tangente (no nulo) $\mathcal{G}$ paralelo a lo largo de α. Entonces*

$$\mathrm{ind}_p(\mathcal{F}) = \tfrac{1}{2\pi}\int_\Sigma K + \tfrac{1}{2\pi}\sum\nolimits_k (\varrho_k(s_k) - \varrho_k(s_{k-1})),$$

donde $\varrho_k : [s_{k-1}, s_k] \to \mathbb{R}$ es una determinación del ángulo de $\mathcal{G}$ a $\mathcal{F} \circ \alpha$.

Obsérvese que el enunciado anterior se aplica tanto si p es un punto singular aislado como si es un punto regular.

Demostración. Utilizaremos todas las notaciones introducidas para definir el índice, en particular, los campos ortonormales Φ, Ψ asociados a φ_u, φ_v. Empecemos

Bibliografía

Enumeramos en esta sección algunas obras clásicas que permanecen como referencia obligada sobre la materia de este texto, y después libros y artículos de muy diversa naturaleza y diferente extensión, que tratan temas de los estudiados aquí.

Obras clásicas

[1] L. Bianchi: *Lezioni di geometria differenziale.* Pisa: Enrico Spoerri, 1894.

[2] A.-L. Cauchy: *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie.* París: L'Imprimerie Royale, 1826

[3] G. Monge: *Application de l'analyse a la géométrie.* París: Bachelier, 1850.

Libros y artículos

[1] M. Abate, E. Tovena: *Curve e superfici.* Milán: Springer Verlag, 2006.

[2] M. Abendaño: *Teorema fundamental de superficies y el criterio de Frobenius.* Sonora: Depto. Matemáticas, Universidad de Sonora, 2006.

[3] E. Aguirre: *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Madrid: Depto. Geometría y Topología, Universidad Complutense, 2010.

[4] L.V. Ahlfors, L. Sario: *Riemann surfaces.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1975.

[5] A.M. Amores: *Curso básico de curvas y superficies.* Madrid: Sanz y Torres, 2001.

[6] V.I. Arnol'd: *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory, from evolvents to quasicrystals.* Boston: Birkhauser, 1990.

[7] T. Aubin: *A course in Differential Geometry.* Graduate Studies in Mathematics. **27.** Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2001.

[8] T.S. Banchoff, S.T. Lovett: *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Natick, Ma.: A.K. Peters, 2010.

[9] M. Berger, B. Gostiaux: *Differential Geometry: Manifolds, curves and surfaces.* Nueva York: Springer Verlag, 1988.

[10] W. Blaschke: *Vorlesungen uber Differentialgeometrie.* Berlín: Julius Springer, 1930.

[11] M.P. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1976.

Nombres propios

Figuras

Símbolos

Índice