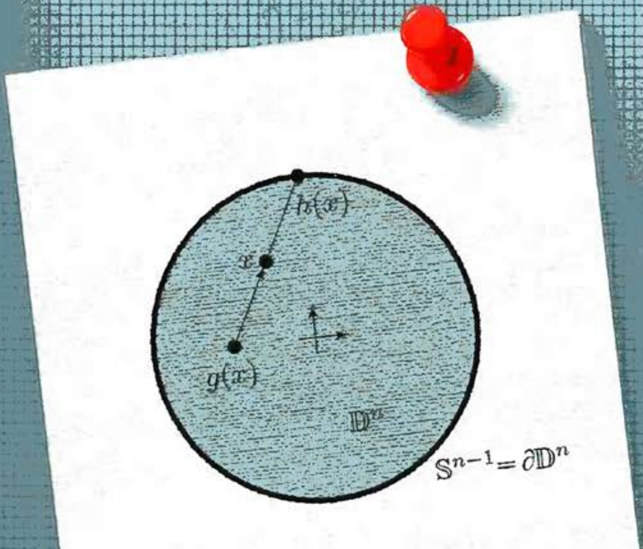
manuales matemáticas π

Enrique Outerelo
Juan Ángel Rojo
Jesús M. Ruiz

Topología Diferencial

un curso de iniciación

2ª Edición



sanz y torres

Primera edición: octubre 2014
Segunda edición: febrero 2020

TOPOLOGÍA DIFERENCIAL. UN CURSO DE INICIACIÓN

c/ Vereda de los Barros, 17
Pol. Ind. Ventorro del Cano – 28925 Alcorcón (Madrid)
☏ 902 400 416 – 91 323 71 10
www.sanzytorres.com
libreria@sanzytorres.com
www.editorialsanzytorres.com
editorial@sanzytorres.com

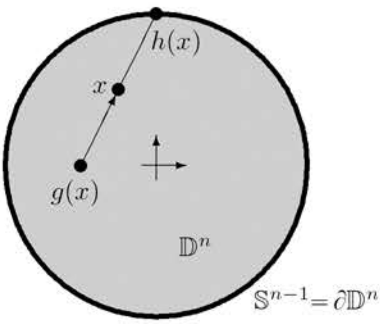
ISBN: 978-84-17765-84-2
Depósito legal: M-5265-2020

Composición:
Autores

Impresión:
Safekat, S. L.

TOPOLOGÍA DIFERENCIAL
un curso de iniciación

Enrique Outerelo, Juan Ángel Rojo,
Jesús M. Ruiz
Universidad Complutense de Madrid



sanz y torres

Prefacio

Hace ya más de veinte años, dos de los autores de este texto publicamos uno basado en la experiencia de impartir diversos cursos de Topología Diferencial en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Se recogían en él las ideas centrales de *transversalidad* y *aproximación* en variedades con borde: los métodos que introdujo Thom en los años 50 del siglo XX, y que permiten hacer, en frase acuñada por Milnor «*topología desde el punto de vista diferenciable*». Efectivamente, producen de manera extremadamente elegante resultados muy importantes. Muchos colegas usaron aquel texto en sus cursos e hicieron comentarios y sugerencias, y luego, ya descatalogado, aún preguntaban por él. Este halago nos empujó a escribir otro nuevo hace seis años. Inevitablemente, nuestro punto de vista sobre cómo se desarrolla *un curso de iniciación* de Topología Diferencial había variado con los años y resultó un texto distinto. Aquí fue esencial la contribución del autor que no estuvo en aquella aventura inicial. Ahora el lector tiene en sus manos una reedición con mejoras sustanciales, fruto de utilizar la edición anterior en el Master de Matemáticas Avanzadas de la UCM. Los cambios introducidos han derivado en buena parte del entusiasmo de nuestros alumnos por aprender y les agradecemos haber elegido nuestras clases. Y agradecemos también a Sanz y Torres que haya apoyado nuestro deseo de revisar el libro.

Este texto está pensado para un cuatrimestre a razón de tres horas semanales, contando con el trabajo individual de cada estudiante. Se trata de explicar qué es la transversalidad y cómo se utiliza junto con la aproximación para abordar problemas topológicos. Las treinta y cuatro secciones de sus cuatro capítulos se enumeran en la página IX. Los títulos de las secciones dan una idea precisa del recorrido desde que se definen las variedades con borde hasta que se consiguen seis teoremas fundamentales: el del *punto fijo de Brouwer,* el de *invarianza del dominio,* el de *separación de Jordan-Brouwer,* el de *homotopía de Brouwer-Hopf,* el de la *esfera de Brouwer* y el de *Borsuk-Ulam.*

Señalemos que:

(1) Consideramos siempre variedades sumergidas en un espacio afín, pero incluimos una prueba *elemental a partir de las definiciones* de que las variedades diferenciables *abstractas* son todas sumergidas.

(2) Construimos de manera explícita directa los entornos tubulares de una variedad diferenciable *en un espacio afín* y las retracciones propias *diferenciables* asociadas.

(3) Detallamos la construcción de collares de una variedad con borde, *sin utilizar flujos,* y de las correspondientes retracciones propias *continuas* (diferenciables no pueden ser).

(4) Demostramos los resultados completos de aproximación y homotopía diferenciables para aplicaciones con valores en variedades *con borde.*

En las fuentes que conocemos estos resultados de aproximación y homotopía se formulan sólo para aplicaciones con valores en variedades *sin borde.* El argumento habitual apela a las retracciones diferenciables, y por ello no vale para variedades con borde. Aquí utilizamos collares para complementar ese argumento y poder establecer los resultados sin restricciones de borde. Todo esto es ciertamente parte del *folklore* de los especialistas, pero es bueno escribir ese *folklore* alguna vez.

En otro orden de cosas, hacemos una simplificación grande de la presentación limitándonos a variedades de clase infinito, que denominamos simplemente *variedades diferenciables.* El tratamiento de la clase finita supone, o bien el registro cuidadoso de las pérdidas de diferenciabilidad que sobrevengan, o bien algún método adicional de recuperación de esas pérdidas. Pensamos que lo primero no aportaría nada significativo, mientras que lo segundo aumentaría demasiado la dificultad de un curso de iniciación.

Insistimos en calificar este libro de *texto* porque la exposición está depurada al máximo para que se pueda impartir linealmente y sea verdaderamente abarcable. Y como libro de texto que es, incluye una colección de problemas (200), refuerzo y complemento de la materia presentada.

Enrique Outerelo, Juan Ángel Rojo, Jesús M. Ruiz — Madrid, Majadahonda
Abril 2019

Contenido

Capítulo I

Variedades con borde

Las variedades son el medio en el que se desenvuelve hoy el Cálculo Diferencial y la Geometría. Esto es así, en gran medida, por la influencia de la Física y en particular de la Mecánica. En efecto, estas disciplinas proponen los problemas clásicos del Análisis y de la Geometría (resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, cálculo de longitudes y volúmenes, rigidez e isometrías) para espacios de parámetros sujetos a ligaduras. Es claro que esta presentación conduce de modo natural a las variedades, y hace necesario, primero, definirlas rigurosamente y, segundo, extender a ellas el cálculo diferencial clásico. Empezamos este capítulo definiendo en la sección 1 las *aplicaciones diferenciables en subconjuntos arbitrarios del espacio afín* $\mathbb{R}^m$, así como la noción de *difeomorfismo*. Sin embargo, para el estudio de estas aplicaciones es preciso restringirse a una clase especial de subconjuntos: *las variedades*. Éstas se definen en la sección 2, en donde se describe con cuidado la noción de *interior* y *borde* de una variedad y su invarianza por difeomorfismos; también se definen la *dimensión* y la *codimensión* y se ven algunos ejemplos bien conocidos de variedades. La sección 3 está dedicada a uno de los útiles básicos de la materia: las *particiones diferenciables de la unidad*. Para construirlas empezamos mostrando que cualquier conjunto cerrado es el conjunto de *ceros de una función diferenciable* y obteniendo las denominadas *funciones separantes de Urysohn*. El *fibrado tangente* de una variedad se define en la sección 4, para desarrollar en variedades el cálculo diferencial conocido en abiertos del espacio afín. El resultado final de esta sección es el *teorema de inversión local para variedades con borde*. En la sección 5 se demuestra que cualquier punto de una variedad sin borde puede desplazarse a voluntad (mediante un difeomorfismo) hasta coincidir con otro dado: es el *teorema de existencia de difeotopías*. La sección 6 está dedicada a la *orientación de variedades*, mediante familias consistentes de orientaciones locales. Además se describe la *orientación inducida en el borde* de la variedad dada. Las dos últimas secciones analizan las nociones duales de *inmersión* y *sumersión*. La primera se estudia en la sección 7, que incluye su definición y su *forma local canónica de inclusión lineal*. La de inmersión es pues una noción local, cuya contrapartida global es la de *inmersión difeomórfica*, que aparece al final de la sección. Finalmente, las sumersiones se definen en la sección 8, en la que se obtiene su *forma local canónica de proyección lineal*.

Número 7. Demostrar que la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es una superficie diferenciable difeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^2$.

Número 8. Deducir que el borde es invariante por parametrizaciones (I.2.4, p. 5) directamente del teorema de inversión local para abiertos del espacio afín (I.1.6, p. 4).

Número 9. Mostrar que ninguno de los siguientes conjuntos es una variedad topológica:

$$X_1 = \mathbb{R}^3 \backslash \{(1/n, 1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}.$$

Número 10. Demostrar que el *tronco de cono* $X : x^2 + y^2 = z^2$, $0 < a \leqslant z \leqslant b$, y el *tronco de cilindro* $Y : x^2 + y^2 = b^2$, $a \leqslant z \leqslant b$, son dos variedades con borde, ambas difeomorfas a una corona plana cerrada $Z : a \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b$.

Número 11. Sean C y D dos conjuntos cerrados disjuntos de un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Construir explícitamente usando las distancias a C y D una función continua $f : U \to [0, 1]$ tal que $C = f^{-1}(0)$ y $D = f^{-1}(1)$.

Número 12. Exhibir dos cerrados disjuntos conexos C y D del plano afín tales que ninguna función *polinomial* sea > 0 sobre C y < 0 sobre D.

Número 13. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión p. Dado $a \in X$ denotamos por Γ la colección de todas las aplicaciones diferenciables $\alpha : [0, \varepsilon) \to X$ tales que $\alpha(0) = a$. Sea además $\varphi : A \to X$ una parametrización de X con $\varphi(0) = a$. Probar:

(1) Si $a \in \operatorname{Int}(X)$ entonces $D\varphi(0)(\mathbb{R}^p) = \{\alpha'(0) : \alpha \in \Gamma\}$.
(2) Si $a \in \partial X$ entonces $D\varphi(0)(\mathbb{H}^p) = \{\alpha'(0) : \alpha \in \Gamma\}$.

Número 14. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable y a un punto de su interior. Consideremos el espacio tangente *afín* $E = a + T_a X \subset \mathbb{R}^m$ y una proyección afín $\lambda : \mathbb{R}^m \to E$ paralela a un suplementario vectorial L de $T_a X \subset \mathbb{R}^m$. Mostrar que $\lambda|X : X \to E$ es un difeomorfismo local en a. ¿Qué se puede decir si a está en el borde de X?

Número 15. Mostrar que la unión de dos planos transversales de $\mathbb{R}^3$ no es una variedad diferenciable.

Número 16. Se llama *paraguas de Whitney* al conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ dado por $x^2 - zy^2 = 0$. Demostrar que X no es una variedad diferenciable.

Número 17. Probar que la *cúspide* $X \subset \mathbb{R}^2$ de ecuación $x^2 = y^3$ es una variedad topológica sin borde, pero no una diferenciable.

Número 18. Demostrar que el conjunto $X \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ de las matrices reales $m \times n$ de rango k es una variedad diferenciable y que su dimensión es $(m + n - k)k$.

Número 19. (1) Mostrar que el *toro sólido* $X \subset \mathbb{R}^3$ generado por el disco $y = 0$, $(x - 2)^2 + z^2 \leqslant 1$ al rotar alrededor del eje de las z's es una variedad diferenciable con

Capítulo II

Transversalidad

En la resolución de muchos problemas importantes de la Matemática se descubre una idea universal, casi obvia, que consiste en perturbar razonablemente las hipótesis dadas para simplificar el problema hasta hacerlo asequible. Es el recurso a la *posición general* en Geometría o al *caso no degenerado* en Análisis. Pues bien, esta idea argumental encuentra su expresión más estricta y fructífera en la noción de *transversalidad*. Dedicamos este capítulo a esta noción clave, con cuyo hallazgo en los años cincuenta Thom dió nacimiento a la Topología Diferencial como rama autónoma de la Matemática. Aquí hemos elegido como motivación la descripción de variedades mediante imágenes inversas, o dicho más intuitivamente, mediante *ecuaciones implícitas globales*. En la sección 1 se dan varios resultados al respecto utilizando sumersiones. En la sección 2 se adopta directamente el enfoque por ecuaciones globales, que sirve para definir las denominadas *intersecciones completas*. Además de las definiciones y diversos ejemplos se demuestra un resultado importante para hipersuperficies, caracterizando las que tienen una ecuación global por la manera en que desconectan el ambiente que las contiene. Además se muestra la relación de esto con la orientabilidad. Ya en la sección 3 se define formalmente la transversalidad *de una aplicación y una variedad*, *de dos variedades*, *de dos aplicaciones*, y se ilustra con ejemplos la propiedad fundamental según la cual la transversalidad es la situación *genérica*. Esta genericidad se explica rigurosamente en las secciones 4 y 5 siguientes, dedicadas al *teorema de Sard-Brown* y al *teorema parametrizado de densidad de la transversalidad*. Como aplicación del teorema de Sard-Brown demostramos en la sección 6 el *teorema de inmersión de Whitney*, cuya información significativa es la menor codimensión posible de una *inmersión difeomórfica cerrada*. Este resultado de Whitney se pone en contexto en la sección 7, donde probamos un resultado de *inmersión de variedades abstractas* que sirve para remarcar que las variedades sumergidas son todas las que hay.

1. Construcción de variedades mediante sumersiones

Empezamos con el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y $Z \subset Y$ una tercera variedad, de manera que f conserva el borde en $f^{-1}(Z)$ y es sumersión en $f^{-1}(Z)$. Entonces:*

Problemas

Número 1. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una cuádrica afín no vacía de ecuación $\sum_{i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j = 1$. Mostrar que X es una hipersuperficie diferenciable de $\mathbb{R}^m$, y que es difeomorfa a un producto $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^\ell$, para k y ℓ adecuados.

Número 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable homogénea de grado d, es decir, tal que $f(tx) = t^d f(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Probar la *igualdad de Euler:*

$$\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = d \cdot f$$

¿Cuándo define la ecuación $f = \varepsilon$ una hipersuperficie diferenciable de $\mathbb{R}^n$? ¿Qué hipersuperficies X_ε son difeomorfas entre sí?

Número 3. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable y sea $c \in \mathbb{R}^m$ un punto que no está en X. Probar que un punto $a \in X$ es un punto crítico de la función $x \mapsto \operatorname{dist}(x, c)$ si y sólo si $a - c$ es perpendicular al espacio tangente $T_a X$.

Número 4. (*Trivialidad de una sumersión propia*) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación propia diferenciable de la que todo $t \in [0,1]$ es valor regular.

(1) Probar que la imagen inversa $X = f^{-1}[0,1]$ es una variedad diferenciable compacta con borde $\partial X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$.

(2) Hacer cero fuera de un entorno acotado de X el campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $F(x) = \nabla_x f / \|\nabla_x f\|^2$ y resolver la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = F(x)$ para obtener un flujo completo $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) Demostrar que Φ induce por restricción un difeomorfismo $\phi : [0,1] \times f^{-1}(0) \to X$ tal que $f(\phi(t,x)) = t$.

Número 5. Se identifica del modo natural $\mathbb{R}^{n \times m}$ con el espacio vectorial de las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, y se considera el subconjunto $X \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ formado por las aplicaciones cuya imagen es una recta.

(1) Demostrar que X es una variedad diferenciable, y calcular su dimensión.

(2) Mostrar que es diferenciable la aplicación $f : X \to \mathbb{P}^{n-1} : u \mapsto a$, donde a es el punto proyectivo definido por la recta vectorial $u(\mathbb{R}^m)$.

(3) Probar que f es una sumersión.

Número 6. Se identifica $\mathbb{R}^{n \times n}$ con el espacio vectorial de las matrices cuadradas A de orden n y se considera la aplicación determinante $A \mapsto \det(A)$.

(1) Demostrar que el determinante es una función diferenciable y su derivada en A está dada por $B \mapsto \operatorname{tr}(A^{at} B)$, donde A^{at} denota la matriz adjunta transpuesta de A.

(2) Deducir que el conjunto D_a formado por las matrices invertibles con determinante $a \neq 0$ fijado es una hipersuperficie diferenciable de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

(3) Orientar D_a como imagen inversa de la aplicación determinante.

Capítulo III

Aproximación

Una razón por la cual la Topología Diferencial ocupa un lugar predominante en la Matemática actual es que permite tratar con éxito cuestiones inicialmente fuera de su alcance. Podemos describir empíricamente el procedimiento: los datos de partida se reemplazan por datos diferenciables y se resuelve el problema así modificado. Ese reemplazo se formaliza por *aproximación.* El teorema más clásico que se puede citar aquí es el de Stone-Weierstrass para aproximar funciones continuas por polinomios sobre compactos. El objetivo final de este capítulo es demostrar que *las aplicaciones continuas con valores en una variedad diferenciable sin borde pueden aproximarse por aplicaciones diferenciables transversales a una variedad prefijada* (sección 9). Si nos atenemos a homotopía, la restricción sobre el borde del rango es innecesaria, pues aún sin ella (sección 8): (i) *las aplicaciones continuas son homótopas a aplicaciones diferenciables*, y (ii) *la homotopía continua entre aplicaciones diferenciables garantiza la homotopía diferenciable.* Además se obtienen los enunciados correspondientes para aplicaciones y homotopías *propias.* Para todo esto, es necesario dar significado topológico riguroso a la proximidad de aplicaciones, lo que se hace introduciendo en la sección 1 la *topología fuerte de un espacio de aplicaciones continuas.* Una propiedad que explica la elección de esta topología es que *toda aplicación entre variedades suficientemente próxima a una dada es homótopa a ella* (de nuevo sin restricción sobre el rango, sección 6). La aproximación de *funciones* continuas es posible con toda generalidad (sección 2), pero para aplicaciones con valores en una variedad es necesario cierto trabajo preparatorio. A este fin, se introduce en la sección 3 el *fibrado normal* de una variedad *sin borde* en el espacio afín que la contiene, y con él se construyen en la sección 4 los *entornos tubulares* de la variedad. Una propiedad relevante es hay una retracción *diferenciable* de esos entornos sobre la variedad, diferenciabilidad que no se tiene para variedades *con borde.* La naturaleza diferente de los entornos del borde, denominados *collares,* se estudia en la sección 5, y la carencia de retracciones diferenciables y cómo remediarla en la sección 7.

1. Espacios de aplicaciones

Para expresar formalmente los resultados de este capítulo es necesario definir con precisión qué entendemos por aproximar aplicaciones continuas, lo que, como siempre, haremos en el marco afín.

Número 2. Sean X, Y subconjuntos de espacios afines, Y localmente cerrado. Demostrar que las aplicaciones propias forman un conjunto cerrado de $\mathcal{C}(X, Y)$ para la topología fuerte. En consecuencia, si es no vacío, es una unión de componentes conexas.

Número 3. Construir aplicaciones diferenciables $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arbitrariamente próximas a la identidad que se anulen en un entorno del origen. Explicar con esto que la transversalidad no es necesariamente una condición abierta (para aplicaciones diferenciables con la topología fuerte, pero sí para otras topologías más finas que no tratamos aquí).

Número 4. Sean X, Y subconjuntos de espacios afines y equipemos $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología fuerte. Probar que la *evaluación* $\mathcal{C}(X, Y) \times X \to Y : (f, x) \mapsto f(x)$ es continua.

Número 5. Sean T, X, Y subconjuntos de espacios afines y $F : T \to \mathcal{C}(X, Y) : F \mapsto F_t$ una aplicación continua para la topología fuerte. Mostrar que la aplicación asociada $T \times X \to Y : (t, x) \mapsto F_t(x)$ es continua, y que esta propiedad es formalmente equivalente a la continuidad de la evaluación del problema anterior.

Número 6. Sean T, X, Y subconjuntos de espacios afines y $F : T \times X \to \mathcal{C}(X, Y) : (t, x) \mapsto F_t(x)$ una aplicación continua. Mostrar que si X es compacto, la aplicación $T \to \mathcal{C}(X, Y) : t \mapsto F_t$ es continua. ¿Y si X no es compacto?

Número 7. Sea $f : X \to Y$ una aplicación propia y $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ una función continua positiva. En la demostración de III.1.5, p. 90, se construye una función continua positiva $\delta : Y \to \mathbb{R}$ que cumple $\delta(y) \leqslant \min\{\varepsilon(x) : x \in f^{-1}(y)\}$ si $f^{-1}(y) \neq \varnothing$. Muéstrese que ese mínimo sólo es en general *semicontinuo inferiormente*, pero esa semicontinuidad basta para acotarlo inferiormente por una función continua positiva.

Número 8. Sean X, Y, Z subconjuntos localmente cerrados de espacios afines. Demostrar que la composición

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

es una aplicación continua (para las topologías fuertes) en cualquier punto (f, g) con f propia. Esto generaliza la proposición III.1.5, p. 90.

Número 9. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto locamente cerrado y $C \subset X$ un subconjunto cerrado suyo.

(1) Demostrar que toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ cuya restricción $f|C$ es diferenciable se puede aproximar en la topología fuerte por funciones diferenciables g tales que $g|C = f|C$. (Modificar la demostración de III.2.1, p. 91, utilizando una extensión diferenciable $\overline{f}$ de f y un entorno V de C en el que $|f - \overline{f}|$ sea suficientemente pequeño.)

(2) Deducir el teorema III.2.1 de la afirmación de (1).

Número 10. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ y $C \subset X$ como en el problema precedente. Sea $\gamma : X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $C = \gamma^{-1}(0)$

Capítulo IV

Aplicaciones

Este capítulo incluye varios teoremas importantes, demostrados aquí con las técnicas diferenciables desarrolladas previamente. Se trata de teoremas celebrados tanto por su gran belleza intrínseca como por sus consecuencias topológicas y geométricas. En esta presentación destaca el hilo conductor común proporcionado por la Topología Diferencial que hace aparecer a todos ellos como manifestaciones diversas de una misma teoría subyacente, y no sólo como los hallazgos geniales que fueron. La sección 1 contiene la *clasificación topológica y diferenciable de curvas*, que, además de su interés por sí misma, es un ingrediente esencial para los argumentos que seguirán. En la sección 2 se demuestra, de manera muy elemental, el *teorema del punto fijo de Brouwer* y el hecho importante de que el borde de una variedad compacta no es nunca un *retracto* de toda ella. Utilizamos el teorema del punto fijo para demostrar en la sección siguiente el *teorema de invarianza del dominio,* resultado fundamental que implica la *invarianza topológica de la dimensión y la del borde.* La sección 4 está dedicada el célebre *teorema de separación de Jordan-Brouwer.* Todo lo anterior ilustra bien la estrategia general, que, después de apelar a una aproximación transversal, siempre recurre al recuento adecuado de las imágenes inversas de un valor regular. Este recuento es descrito con precisión en la sección 5. En la sección 6 se construyen los colapsamientos diferenciables, que en las secciones 7 y 8 se usan, junto con el recuento, para clasificar por homotopía las aplicaciones en esferas (*teorema de Brouwer-Hopf*). Como consecuencia, en la sección 9 se deduce en qué esferas se pueden definir campos tangentes sin ceros: el *teorema de la esfera de Brouwer.* Finalmente en la sección 10 se prueba el teorema de Borsuk-Ulam.

1. Clasificación de curvas

En la categoría topológica, esto es, para clasificar por homeomorfismo, tenemos:

Teorema 1.1 (de clasificación de curvas topológicas). *Una curva conexa es homeomorfa a uno de los siguientes cuatro modelos:* $\mathbb{R}$, $[0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Sea X una curva conexa. Empezamos probando el siguiente hecho:

(∗) *Si X es unión de dos abiertos U, V homeomorfos a $\mathbb{R}$, entonces X es homeomorfa a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{S}^1$.*

calcular su grado:

$$f:\mathbb{P}^m(\mathbb{R})\to\mathbb{S}^m : x=(x_0:\ldots:x_m)\mapsto \tfrac{1}{\|x\|^2}(2x_0^2-\|x\|^2,2x_0x_1,\ldots,2x_0x_m).$$

Número 16. Sea $h:U\to\mathbb{R}^{n+1}$ una aplicación diferenciable definida en un abierto $U\subset\mathbb{R}^{n+1}$ cuyo único cero es el origen $0\in U$ y tal que $\det(d_0h)>0$ (resp. <0). Sean $D\subset U$ una bola cerrada de centro el origen, $S=\partial D$ y $B=D\backslash S$. Demostrar que el grado de la aplicación $h/\|h\|:S\to\mathbb{S}^n$ es $+1$ (resp. -1) como se indica a continuación.

(1) Ese grado no depende del radio de la bola D, por lo que podemos suponer que h es un difeomorfismo de U y, multiplicando por un escalar positivo, que $\mathbb{D}^{n+1}\subset h(U)$.

(2) En la imagen inversa $X=h^{-1}(\mathbb{S}^n)$, $h/\|h\|$ coincide con h, y $h|X:X\to\mathbb{S}^n$ tiene grado $+1$ (resp. -1).

(3) Si el radio de D es suficientemente pequeño, $Y=h^{-1}(\mathbb{D}^{n+1})\backslash B$ es una variedad diferenciable compacta con borde $\partial Y=X\cup S$.

(4) Por el lema del recuento por pares (IV.5.1, p. 134) los grados de las restricciones de $h/\|h\|$ a X y a S coinciden, luego éste último es $+1$ (resp. -1).

Número 17. Sea $f:U\to\mathbb{R}^{n+1}$ una aplicación diferenciable definida en un abierto $U\subset\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $a\in U$ un punto fijo de Lefschetz de f (prob. 23 del capítulo II, p. 83). Se denomina *índice de Lefschetz* de a al grado de la aplicación $g:S\to\mathbb{S}^n : x\mapsto\frac{f(x)-x}{\|f(x)-x\|}$, donde S es una esfera de radio suficientemente pequeño centrada en a. Probar que esta definición es consistente y que el índice de Lefschetz es ±1 según la aplicación lineal $d_af-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ conserve o invierta la orientación.

Número 18. Sean $f,g:\mathbb{S}^p\to\mathbb{S}^p$ dos aplicaciones continuas. Probar que el grado de $g\circ f$ (y el de $f\circ g$) es el producto de los grados de f y g. Deducir que el grado de un homeomorfismo de una esfera en sí misma es ±1.

Número 19. Demostrar que si una aplicación continua $f:\mathbb{S}^p\to\mathbb{S}^p$ no tiene puntos fijos, entonces tiene grado ±1 según p sea impar o par (es decir, homótopa a la aplicación antipodal). Deducir que si f no es suprayectiva, entonces los tiene.

Número 20. Sea $f:\mathbb{S}^{2n}\to\mathbb{S}^{2n}$ una aplicación continua. Demostrar que:

(1) La composición $f\circ f$ siempre tiene puntos fijos.

(2) Si f no tiene puntos fijos, entonces los tiene $-f$.

Número 21. Sea $\alpha:\mathbb{S}^p\to\mathbb{S}^p$ una isometría lineal. Probar que su grado ±1 tiene el signo de su determinante y deducir que si α no tiene puntos fijos, ese signo es positivo para p impar y negativo para p par. Encontrar isometrías lineales con puntos fijos y determinante de cualquier signo.

Número 22. Consideramos en la esfera $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ los dos hemisferios $S^+:x_{n+1}\geqslant0$ y $S^-:x_{n+1}\leqslant0$, ambos homeomorfos al disco cerrado $\mathbb{D}^n\subset\mathbb{R}^n\times\{0\}$, e identificamos

Referencias y otras lecturas

Ante todo, cuatro obras deben ser citadas como inspiración de este texto:

[1] J.W. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint*. Charlottesville: University Press of Virginia, 1965.

[2] E. Lima: *Introdução a topologia diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 1961.

[3] R. Abraham, J. Robbin: *Transversal mappings and flows*. New York: Benjamin, 1967.

[4] V. Guillemin, A. Pollack: *Differential Topology*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc.,1974.

Por supuesto, hay más libros que podrían ser mencionados sobre la materia. Nosotros elegimos estos:

[5] M. Adachi: *Embeddings and immersions*. Translations of Mathematical Monographs **124**. Providence, R.I.: AMS, 1993.

[6] D. Barden, C. Thomas: *An introduction to differentiable manifolds*. Londres: Imperial College Press, 1993.

[7] Th. Bröcker, K. Jänich: *Introduction to differential topology*. Cambridge: CUP, 2010.

[8] D.P.L. Castrigiano, S.A. Hayes: *Catastrophe theory*. Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1993.

[9] D.R.J. Chillingworth: *Three introductory lectures on differential topology and its applications*. IMA preprint series **120**. Minneapolis: Institute for Mathematics and its Applications, 1984.

[10] A. Dold: *Teoría de punto fijo* (I, II, III). México: Monografías del Instituto de Matemática, 1986.

[11] B.I. Dundas: *A short course in Differential Topology*. Cambridge: CUP, 2018.

[12] D.B. Gauld: *Differential topology: an introduction*. Dover: Dover Publications, Inc., 2009.

[13] M. Golubitsky, V. Guillemin: *Stable mappings and their singularities*. Graduate Texts in Mathematics **14**. Nueva York: Springer Verlag, 1980.

[14] M.W. Hirsch: *Differential topology.* Graduate Texts in Mathematics **33.** New York: Springer-Verlag, 1976.

[15] F. Laudenbach: *Transversalité, courants et théorie de Morse: un cours de topologie différentelle.* Paris: École Polytéchnique, 2011.

[16] I. Madsen, J. Tornehave: *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* New York: CUP, 1999.

[17] J. Margalef, E. Outerelo: *Singularidades de aplicaciones diferenciables.* Madrid: Instituto Jorge Juan de Matemáticas, CSIC, 1978.

[18] J. Margalef, E. Outerelo: *Differential topology.* Amsterdam: North Holland, 1992.

[19] J. Martinet: *Singularities of smooth functions and maps.* London Mathematical Society Lecture Note Series **58.** Cambridge: CUP, 1982.

[20] Y. Matsumoto: *An introduction to Morse theory.* Translations of Mathematical Monographs **208**. Providence, R.I.: AMS, 2002.

[21] J.W. Milnor: *Differential topology: the Earle Raymond Hedrick Lectures.* MAA, 1965.
`http://www2.math.sunysb.edu/Videos/IMS/Differential_Topology`

[22] J.W. Milnor: *Morse theory.* Princeton: PUP, 1973.

[23] J.R. Munkres: *Elementary differential topology.* Princeton: PUP, 1973.

[24] E. Outerelo, J.M. Ruiz: *Mapping degree theory.* Graduate Studies in Mathematics **108.** Providence, R.I.: AMS, 2009.

[25] V.V. Prasolov: *Elements of combinatorial and differential topology.* Graduate Studies in Mathematics **74.** Providence, R.I.: AMS, 2006.

[26] A.R. Shastri: *Elements of differential topology.* Boca Raton: CRC Press, cop., 2011.

[27] R. Thom: *Paraboles et catastrophes.* Champs Sciences **186.** París: Flammarion, 1983.

[28] A.H. Wallace: *Differential topology: First Steps.* Reading: Benjamin, 1979.

[29] Y.C. Lu: *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory.* Universitext **14**. Nueva York: Springer Verlag, 1980.

Sin duda, [1] y [21] son magistrales y de conocimiento obligatorio, y [27] contiene algunas reflexiones dignas de atención. Entre las demás referencias, [2], [8], [9], [10], [12], [23], [26] y [28] son cursos básicos como el nuestro, y [13],[15], [19] y [29] son ya avanzados. El resto es una selección variada de lecturas posibles entre esos dos extremos.

Símbolos

Índice