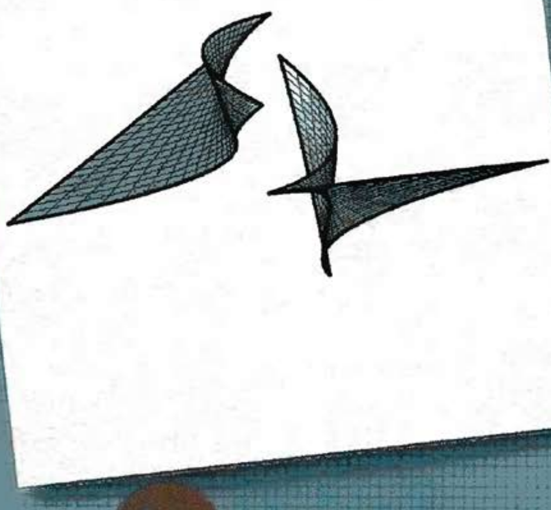
manuales matemáticas

J. Manuel Gamboa
Jesús M. Ruiz

Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables

4ª Edición



sanz y torres

Primera edición: julio 1999
Segunda edición: septiembre 2006
Tercera edición: enero 2016
Cuarta edición: febrero 2020

INICIACIÓN AL ESTUDIO DE LAS VARIEDADES DIFERENCIABLES

c/ Vereda de los Barros, 17
Pol. Ind. Ventorro del Cano – 28925 Alcorcón (Madrid)
☏ 902 400 416 – 91 323 71 10
www.sanzytorres.com
libreria@sanzytorres.com
www.editorialsanzytorres.com
editorial@sanzytorres.com

ISBN: 978-84-17765-86-6
Depósito legal: M-5267-2020

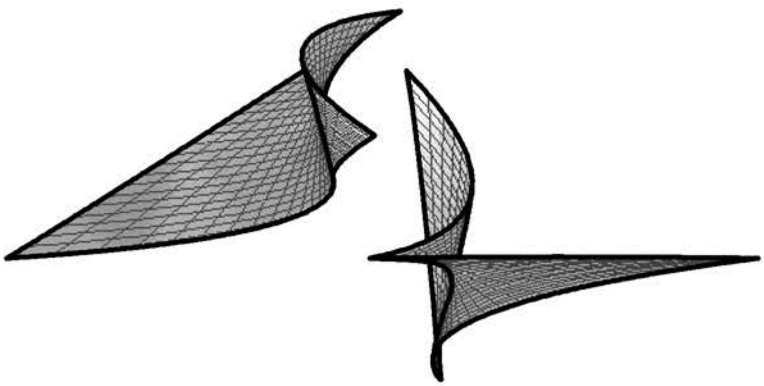
Composición:
Autores

Impresión:
Safekat, S. L.

Una introducción a las VARIEDADES DIFERENCIABLES

Edición 2020

J. Manuel Gamboa
Jesús M. Ruiz
Universidad Complutense de Madrid



sanz y torres

Prefacio

Este libro pretende ser una iniciación accesible al estudio de las variedades diferenciables. Está basado en cursos que llevamos impartiendo durante muchos años en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Una primera versión se publicó en 1999, y ha sido utilizada desde entonces de manera regular en la docencia de las materias que cubre. Aprovechando esa experiencia aquel primer texto ha sido objeto de ediciones sucesivas hasta llegar a esta cuarta veinte años después. A este respecto, hay que destacar y agradecer la disponibilidad de Sanz y Torres para que podamos mejorar nuestro texto con las reediciones que consideramos necesarias. Tales mejoras tienen finalidades muy concretas: (i) unificación de notaciones y terminología; (ii) simplificación y clarificación de enunciados y demostraciones, (iii) inclusión de ejemplos adicionales con cálculos explícitos ilustrativos, (iv) mayor adecuación de las series de problemas de cada sección, (v) confección de una colección de cuestiones para evaluación rápida de las nociones básicas, y (vi) organización de un índice suficientemente detallado. De naturaleza menos sistemática son las ampliaciones de contenido teórico, como añadir el teorema de la fibración de Ehresmann, o el recíproco del teorema de Stokes en cohomología de de Rham para definir el grado de Brouwer-Kronecker y formular el teorema de Gauss-Bonnet.

Estas modificaciones afectan a prácticamente cada página del texto, pero no alteran el objetivo primordial de servir a los lectores el contenido básico clásico:

(1) Variedades y aplicaciones diferenciables.
(2) Campos tangentes y flujos.
(3) Formas diferenciales.
(4) Integración y volumen.

En realidad, este programa podría titularse al modo tradicional *Cálculo en Variedades.* Para cubrirlo de modo realista, la exposición está simplificada al máximo, intentando combinar el rigor con la ligereza de formalismo. Con ese mismo espíritu, se elige una presentación que pueda estudiarse linealmente, omitiéndose si se quiere algunas demostraciones o secciones para las que las circunstancias no dejen tiempo, sin perturbar la comprensión del conjunto. De hecho, muchas cosas se muestran con ejemplos significativos, en lugar de con comentarios teóricos generales. En consonancia con este enfoque, hemos confeccionado una colección de 300 problemas y 60 cuestiones que esperamos ayuden a asimilar las nociones teóricas.

El prerrequisito que el lector más necesita es el cálculo diferencial en espacios afines. Por supuesto, las nociones básicas de topología están incluidas en eso, así como la integral (de Riemann, no más). En cuanto a ecuaciones diferenciales, lo que se precisa es sólo el concepto, bien asequible, y una aplicación directa del teorema de Picard. Por supuesto, la mayoría de los lectores abordarán esta materia después de un curso elemental de curvas y superficies, lo que será una ventaja adicional para asimilarla.

* * *

Este texto sigue a muchos otros que se han escrito antes, en los que hemos aprendido lo que aquí exponemos a nuestra manera. Se los agradecemos a sus autores, desde el maravilloso *librito amarillo* de Michael Spivak en el que hace cuarenta años estudiamos por primera vez *Cálculo en variedades,* hasta el muy reciente libro de Bjørn I. Dundas, del que utilizamos alguna idea muy bella que no conocíamos antes.

También queremos expresar nuestro agradecimiento a Luis J. Alías, Miguel A. Amores, Jacek Bochnak, Antonio Costa, Leonardo Fernández, José F. Fernando, Javier Lafuente, Celia Martínez, Enrique Outerelo, José Manuel Rodriguez Sanjurjo y Antonio Valdés, compañeros que nos han ayudado de diferentes maneras. Y no menos importante, agradecemos a nuestros alumnos su participación en nuestras clases, que hace cada día más estimulante la labor docente.

Madrid, Majadahonda *J.M. Gamboa, J.M. Ruiz*
Enero de 2020

Contenido

Capítulo I

Variedades diferenciables

En este capítulo se definen los objetos geométricos que son nuestro tema de estudio: las *variedades diferenciables* con y sin *borde*. Para ello la noción de aplicación diferenciable en abiertos del espacio afín, y en particular la de *difeomorfismo*, se extiende a subconjuntos arbitrarios. Las variedades son conjuntos localmente difeomorfos a un espacio afín, o a un semiespacio afín si tienen borde. Esta descripción local permite utilizar *sistemas locales de coordenadas*, y definir la *dimensión* de un modo sencillo. Asimismo se introducen las *particiones diferenciables de la unidad*, que serán imprescindibles en muchas construcciones posteriores. Todas estas nociones se introducen primero en un ambiente afín, pero después se describen con independencia de ese ambiente.

1. Definición de variedad

Sea $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^q$ se llama *diferenciable* si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}$ existen y son continuas. Nótese por tanto que usamos aquí el término diferenciable para referirnos a aplicaciones de clase infinito. Más generalmente, una aplicación $f : X \to Y$ entre dos subconjuntos arbitrarios $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ se llama *diferenciable* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U en $\mathbb{R}^p$ al que f se extiende diferenciablemente, es decir, existe una aplicación diferenciable $F : U \to \mathbb{R}^q$ que coincide con f en $U \cap X$. Por ser diferenciable, F es continua, luego f lo es también. Remarquemos que la extensión F depende del punto x y en general no es única. El conjunto de las aplicaciones diferenciables de X en Y se denota $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$. Para $Y = \mathbb{R}$, tenemos el conjunto $\mathcal{C}^\infty(X) = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ de las funciones diferenciables de X.

Claramente, la composición de aplicaciones diferenciables es de nuevo diferenciable.

Definición 1.1 Una aplicación $f : X \to Y$ se llama *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. Se dice que f es un *difeomorfismo local en un punto* $a \in X$ si f es un difeomorfismo de un entorno abierto de a en X sobre otro de $f(a)$ en Y.

Capítulo II

Cálculo en variedades

Para hacer cálculo diferencial en una variedad es preciso definir los *espacios tangentes*. Con ellos se tiene la noción de *derivada* para aplicaciones diferenciables entre variedades, y los resultados básicos del cálculo diferencial se extienden a variedades. En particular, el *teorema de inversión local para variedades*. Asimismo, se reinterpretan los vectores tangentes como *derivaciones*, lo que les da naturaleza intrínseca algebraica, y como *tangentes a curvas*, lo que les da naturaleza intrínseca geométrica.

1. Espacio tangente

Vamos a asociar a cada punto x de una variedad $M \subset \mathbb{R}^p$ un espacio lineal *tangente* $T_xM \subset \mathbb{R}^p$ de dimensión $m = \dim_x M$. La intuición tal vez preferiría un espacio tangente apoyado en el punto x, pero si se traslada x al origen de coordenadas esta distinción es innecesaria.

(1.1) Espacios tangentes. Sean $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad, $x \in M$ y $\varphi : W \to M$ una parametrización de M con $W \subset \mathbb{R}^m$ o $\mathbb{H}^m$ y $\varphi(a) = x$. Esa parametrización es una aplicación diferenciable de W en $\mathbb{R}^p$, y su derivada en a una aplicación lineal $d_a\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Afirmamos que la imagen de esta aplicación lineal no depende de la parametrización. En efecto, si $\psi : V \to M$ es otra parametrización con, digamos, $\psi(b) = x$, derivando el cambio de coordenadas $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ obtenemos $d_b\psi \circ d_a h = d_a\varphi$. Como $d_a h$ es un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^m$, concluimos que las dos aplicaciones $d_a\varphi$ y $d_b\psi$ tienen la misma imagen.

De este modo, podemos definir el *espacio tangente a M en x*, como la imagen de $d_a\varphi$, que se denota por T_xM. Los elementos de T_xM son los *vectores tangentes a M en x*. Además, puesto que sabemos que las derivadas de las parametrizaciones son inyectivas, la dimensión de este espacio tangente es precisamente m. El espacio *afín* tangente a M en x es el trasladado $x + T_xM$, que como decíamos antes responde más a la idea intuitiva de espacio tangente.

Capítulo III

Campos y ecuaciones diferenciales

En este capítulo se define *campo tangente* a una variedad, que es una colección diferenciable de vectores tangentes a la misma. Los campos se suman y se multiplican por funciones diferenciables, operaciones ligadas a la noción de *referencia móvil* y *paralelizabilidad*; por otra parte, los campos actúan como derivaciones sobre las funciones diferenciables. Un campo se interpreta geométricamente como una familia de curvas parametrizadas, o *flujo*. La obtención del flujo a partir del campo es un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias, inverso del de obtener el campo como *generador infinitesimal* del flujo. Cuando el campo tiene *soporte compacto* se obtienen flujos *completos*, esto es, curvas integrales parametrizadas por toda la recta real $\mathbb{R}$. Por último, los flujos nos permitirán describir como una derivada el denominado *corchete de Lie* de dos campos, cuya definición habremos dado antes de modo puramente algebraico.

1. Campos en variedades

Sean M una variedad diferenciable de dimensión m, y TM su fibrado tangente.

Definición 1.1 Un *campo tangente a M* es una aplicación $X : M \to TM$ del tipo $x \mapsto (x, X_x)$.

Salvo que se preste a confusión, hablaremos simplemente de campos, sin añadir el término *tangente*. Un campo se llama *continuo* (resp. *diferenciable*) cuando lo es como aplicación entre variedades. Si no se especifica nada *siempre se supondrá que es diferenciable*. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos diferenciables de M. Este conjunto se dota inmediatamente de dos operaciones:

(1) *Suma*: $(X + Y)_x = X_x + Y_x$.

(2) *Producto por funciones diferenciables*: $(fX)_x = f(x)X_x$.

Capítulo IV

Formas diferenciales

Las dos primeras secciones de este capítulo resumen lo básico sobre *formas multilineales alternadas*, *producto exterior* y *determinantes*, de la manera que más conviene para introducir las *formas diferenciales*. Una forma diferencial es una colección diferenciable de formas alternadas en los espacios tangentes de una variedad; su *grado* es el de esas formas alternadas. Su *expresión en coordenadas locales* es sencilla y permite hacer cálculos al modo clásico. Las formas de grado cero son simplemente las funciones diferenciables. El primer ejemplo de forma de grado 1 es la *diferencial de una función*, que es también el primer paso de la definición de *diferencial exterior* de una forma de grado arbitrario. Con la diferencial, aparecen las formas *exactas* y las *cerradas*, y con éstas se definen los grupos de *cohomología de de Rham,* y la *característica de Euler* de una variedad.

1. Aplicaciones multilineales alternadas

Sea E un espacio vectorial real de dimensión m. Una *forma multilineal de grado* r es una aplicación $\alpha : E \times \cdots^r \times E \to \mathbb{R}$ que es lineal separadamente en cada variable. Con la suma y el producto por escalares, el conjunto de todas las formas multilineales de grado r es un espacio vectorial real que denotamos por $\mathcal{J}^r(E)$. Asimismo podemos multiplicar formas multilineales: dadas $\alpha \in \mathcal{J}^r(E)$, $\beta \in \mathcal{J}^s(E)$, definimos $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{J}^{r+s}(E)$ por la fórmula

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) = \alpha(v_1, \dots, v_r)\beta(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}).$$

Es inmediato que ésta es una operación *asociativa* y *distributiva* respecto de la suma, pero *no es conmutativa.* Por ejemplo, $\varphi \otimes \psi \neq \psi \otimes \varphi$ para dos formas lineales φ, ψ independientes cualesquiera.

Obsérvese que para $r = 1$ el espacio $\mathcal{J}^1(E)$ es simplemente el dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Vamos a continuación a encontrar bases para todos estos espacios.

Proposición 1.1 *Sea* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ *una base de* $E^* = \mathcal{J}^1(E)$. *Entonces el conjunto*

$$\{\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_r} : 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq m\}$$

Capítulo V

Integración en variedades

Este capítulo es una introducción elemental a la *integración de formas en variedades.* Se empieza con la noción de *orientación* de una variedad. Una variedad se orienta eligiendo bases en sus espacios tangentes, bases que sean compatibles con sistemas locales de coordenadas. Esto equivale a la existencia de *atlas positivos* y a la existencia de formas diferenciales nunca nulas de grado máximo. Orientar una hipersuperficie del espacio afín es construir un *campo normal global*, lo que se puede hacer fácilmente cuando se tiene una ecuación global; mediante ese campo normal global se define la *curvatura de Gauss* de la hipersuperficie. Las variedades con borde son orientables si y sólo si lo es su interior, en cuyo caso hay una *orientación del borde* como hipersuperficie de la de partida. Una vez hecho todo esto, se traslada a variedades la integral de Riemann, utilizando de modo esencial el *cambio de variables.* Por supuesto, el resultado central es el *teorema de Stokes.* Además, la integral sirve para determinar el grupo de cohomología de dimensión máxima, y para definir el *grado de Brouwer-Kronecker* de una aplicación diferenciable.

1. Orientación de variedades

Una *orientación* en un espacio vectorial E de dimensión finita $m \geq 1$ es una clase de equivalencia de bases para la relación siguiente: dos bases $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ y $B' = \{u'_1, \dots, u'_m\}$ son equivalentes si el determinante $\det_B B' = \det_B(u'_1, \dots, u'_m)$ es positivo. La clase de equivalencia ζ de B se denotará $\zeta = [u_1, \dots, u_m]$, y diremos que B es *positiva en* ζ. Es claro que hay dos clases de equivalencia exactamente, que denominaremos *opuestas*; si ζ es una de ellas, la otra se denotará $-\zeta$. En el caso $E = \{0\}$ convenimos en llamar orientación a una elección de signo $+1$ o -1. En $E = \mathbb{R}^m$ la orientación natural $\zeta^{(m)}$, que denominaremos *estándar*, es la que define la base estándar $\{e_1, \dots, e_m\}$: ésta es la orientación que siempre se considera en $\mathbb{R}^m$. Por ejemplo, la orientación estándar del plano afín es la contraria al avance de las agujas del reloj, y la del espacio viene dada por la conocida *regla del sacacorchos.*

Para orientar variedades (con o sin borde) se utiliza la noción anterior en los espacios tangentes. Una *orientación de una variedad* M es una elección, que

Capítulo VI

Mediciones en variedades

Las unidades de medida de una variedad se definen a partir de la elección de una *métrica riemanniana*, que no es más que una colección diferenciable de productos escalares en los espacios tangentes de la variedad. Esta métrica permite definir el *elemento de volumen* y el *volumen* de la variedad. En el caso de hipersuperficies, el volumen está íntimamente ligado a la curvatura por el *Teorema de la curvatura de Gauss,* e interviene en el *teorema de Gauss-Bonnet*. Para curvas obtenemos la noción de *longitud*, que nos define la *distancia geodésica* en la variedad. Las *isometrías diferenciables* son los difeomorfismos que conservan la métrica riemanniana, y tienen la propiedad de conservar distancias y volúmenes.

1. Métrica riemanniana

Recordemos primero que un *producto escalar* en un espacio vectorial real E es una forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E\to\mathbb{R}$ tal que

$$\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle;\quad \langle u,u\rangle>0 \text{ si } u\neq 0.$$

El producto escalar que siempre se considera en $E=\mathbb{R}^m$ es el *euclídeo*:

$$\langle u,v\rangle=u_1v_1+\cdots+u_mv_m.$$

Para variedades esto se adapta así:

Definición 1.1 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. Una *métrica riemanniana* $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ en M es una colección de productos escalares

$$g_x=\langle\cdot,\cdot\rangle_x : T_xM\times T_xM\to\mathbb{R},\quad x\in M,$$

que satisface la siguiente condición de *diferenciabilidad*: para cada par X,Y de campos tangentes diferenciables de M la función

$$\langle X,Y\rangle : M\to\mathbb{R} : x\mapsto\langle X_x,Y_x\rangle_x$$

es diferenciable.

Cuestiones

Las siguientes afirmaciones tratan aspectos básicos de la materia de este texto. Decidir cuáles son verdaderas y cuáles son falsas.

Número 1. Dos superficies diferenciables cualesquiera son localmente difeomorfas.

Número 2. Todos los campos del plano afín son completos.

Número 3. Una variedad que tiene una referencia móvil global es difeomorfa a un espacio afín.

Número 4. Una banda de Möbius no tiene referencias móviles globales.

Número 5. Si dos variedades con borde no son difeomorfas, entonces sus bordes tampoco lo son.

Número 6. Toda forma diferencial de grado dos del espacio afín es cerrada.

Número 7. Toda superficie euclídea topográfica (i.e. un grafo) es isométrica a un abierto del plano euclídeo.

Número 8. Dos estructuras riemannianas distintas de una variedad no pueden tener el mismo elemento de volumen.

Número 9. Un homeomorfismo diferenciable puede no ser un difeomorfismo.

Número 10. Toda derivación es una derivada parcial respecto de unas coordenadas locales adecuadas.

Número 11. Un campo sin ceros es siempre completo.

Número 12. Una variedad es orientable si y sólo si tiene una referencia móvil global.

Número 13. Una aplicación diferenciable entre dos variedades con borde transforma el borde de una en el borde de la otra.

Número 14. Toda forma diferencial de grado uno del plano afín es la diferencial de una función.

Símbolos

Índice