

CURSO 2019/2020

TRABAJO DE FIN DE GRADO

EL TEOREMA DE JORDAN-SCHOENFLIES EN EL TORO

ÁLVARO RODRÍGUEZ GARCÍA

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

Madrid, 10 de julio de 2020

RESUMEN. Este trabajo estudia el *teorema de Jordan-Schoenflies* en el toro, que clasifica por homeomorfismo ambiente las curvas de Jordan del toro según lo desconecten o no. Se demostrará que hay dos tipos: las nulhomótopas, que desconectan; y las demás, que no. En particular, los complementos de todas las del mismo tipo son homeomorfos: a una corona circular para las que no desconectan, a un disco y un toro pinchado para las que sí. Además, se estudian los casos en los que los homeomorfismos ambientes se pueden refinar a isotopías.

Palabras clave: Curvas de Jordan, poligonal, Jordan-Schoenflies, toro, recubridor, elevación, homotopía, grupo fundamental, isotopía.

ABSTRACT. We study the *Jordan-Schoenflies theorem* for the torus, which classifies Jordan curves on the torus modulo ambient homeomorphism depending on whether they disconnect the torus or they do not. We show that there are two types of curves: those that are nullhomotopic, which disconnect the torus; and the rest, which do not. Besides, the complements of two curves of the same type are homeomorphic: to an annulus for those which do not disconnect, and to a disk and a punctured torus for those which do. Furthermore, we study which ambient homeomorphisms can be refined to isotopies.

Keywords: Jordan curves, polygonal, Jordan-Schoenflies theorem, torus, covering, lifting, homotopy, fundamental group, isotopy.

ÍNDICE

Introducción	3
1. Recubridores	5
2. El teorema del anillo	10
3. Isotopías del plano	14
4. El teorema de la cuerda	16
5. Grupo fundamental del toro	17
6. Clase de homotopía de una curva de Jordan	19
7. El recubridor meridional	22
8. Primeras isotopías	27
9. Isotopías por transversalidad	29
10. Isotopías de curvas de Jordan de clase $(0, 0)$ y $(0, 1)$	32
11. Homeomorfismos de curvas de Jordan	34
12. Isotopías de curvas de Jordan	36
Referencias	36

INTRODUCCIÓN

Este trabajo estudia el teorema de Jordan-Schoenflies en el toro, que clasifica las curvas de Jordan del toro por homeomorfismo ambiente según lo desconectan o no. Las curvas nulhomótopas son las que desconectan, frente a todas las demás que no lo hacen. Este es el mismo enunciado que en el plano proyectivo [6], y generaliza el enunciado clásico para la esfera (donde todas las curvas son nulhomótopas, y por tanto desconectan); aunque la demostración en estos dos casos es más sencilla por serlo los grupos fundamentales. Además, el toro es la última de las superficies compactas en las que se puede generalizar así el teorema, pues en otras superficies compactas los grupos fundamentales no son abelianos y se pueden encontrar curvas de Jordan que desconectan pero no son homeomorfas ambiente. Al final del texto, refinaremos el resultado para comprobar que las clases módulo isotopía son mucho más estrictas que las clases módulo homeomorfismo ambiente, concluyendo que dos curvas de Jordan son isotópicas ambiente si y solo si tienen la misma clase de homotopía (salvo signo).

El *modus operandi* para demostrar la mayoría de resultados sobre el toro va a consistir en encontrar isotopías en el espacio recubridor adecuado y ver que inducen otra isotopía en el toro. Así, la sección 1 recopilará los resultados clásicos sobre recubridores y elevaciones, donde aprovecharemos para introducir los recubridores del toro que se usarán a lo largo del trabajo. Estos serán fundamentalmente dos, construidos a partir del recubridor exponencial $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$: el recubridor doble exponencial, producto del exponencial por sí mismo, que es el recubridor universal del toro; y el recubridor meridional, que nace en

el plano pinchado e induce elevaciones que preservan alrededor del origen el comportamiento de giro de los lazos en la segunda coordenada de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Usaremos el doble exponencial para los primeros resultados, pero el meridional habrá de usarse más adelante para estudiar los lazos isótopos al meridiano, como adelanta su nombre.

Por supuesto, los resultados en el toro se apoyan en los teoremas clásicos de separación: el de Jordan y el de Schoenflies. Presentaremos ambos en la sección 2, viendo también formulaciones equivalentes y corolarios que serán útiles más adelante. Aquí incluiremos el primer resultado importante del trabajo, el teorema del anillo, que afirma que dadas dos curvas de Jordan encajadas, existe un homeomorfismo de todo el plano que las lleva a dos circunferencias concéntricas. Este resultado, que parece seguirse más o menos trivialmente del teorema de Schoenflies, necesita en realidad una demostración muy cuidadosa, pues está llena de afirmaciones engañosamente simples. En cualquier caso, tanto el teorema del anillo como el de Schoenflies nos servirán para empezar a construir isotopías del plano entre curvas y arcos de Jordan en la sección 3, que serán las que usaremos a lo largo de todas las demás secciones en los espacios recubridores, y las que luego inducirán otras en el toro.

Aún harán falta dos secciones más de resultados preparatorios, antes de meterse de lleno con las curvas de Jordan del toro. En la sección 4, veremos el teorema de la cuerda, un resultado particular de la topología del plano que nos ayudará más adelante a caracterizar las curvas de Jordan del toro y del plano pinchado según su clase de homotopía. En la sección 5, empezaremos a hablar ya del toro, con resultados sobre su grupo fundamental. Aquí introduciremos el concepto de doble grado, análogo al grado de la circunferencia, que nos permitirá determinar con facilidad la clase de homotopía de las curvas de Jordan del toro. Veremos además que la clase de homotopía de una curva de Jordan está bien definida (salvo signo) a partir de la de sus parametrizaciones.

Lo siguiente es ya caracterizar las curvas de Jordan del toro, lo que se hará en la sección 6. Primero veremos que las curvas de Jordan del plano pinchado solo pueden tener clase 0 o ± 1 , y a partir de ello probaremos que, en el toro, solo pueden ser curvas de Jordan las nulhomótopas o las de clase (a, b) , con a y b primos entre sí. Aquí ya podemos ver un resultado importante, y es que la clase de homotopía de una curva de Jordan del toro es invariante por isotopía.

Para empezar a construir isotopías en el toro, hace falta la sección 7, que estudia en profundidad el recubridor meridional. En esta se caracterizan las elevaciones de las curvas de Jordan a través de este recubridor, para terminar identificando unas condiciones suficientes que han de cumplir las isotopías del plano pinchado para inducir isotopías en el toro. La sección 8 empezará a construir isotopías del plano con esas características. Aquí probaremos, por ejemplo, que todas las curvas de Jordan nulhomótopas y que no cortan al paralelo ni al meridiano son isótopas ambiente, y que dos curvas de Jordan disjuntas de clase $(0, 1)$ también son isótopas ambiente.

Para poder refinar estos resultados de isotopía en las afirmaciones mucho más fuertes que andamos buscando, la sección 9 desarrolla lo que llamaremos isotopías por transversalidad. Aquí volvemos a construir isotopías del plano, pero lo hacemos con el recubridor en mente, de forma que en secciones posteriores sea sencillo ver que inducen otra isotopía en el toro. Para ello, definiremos lo que es una curva transversal a una circunferencia, que

es que la corta en un número finito de puntos y es localmente una recta en cada uno. Así, el resultado fundamental de esta sección es que una curva que corta a una circunferencia transversalmente es isotopa a otra que también corta transversalmente pero que tiene menos cortes. Si bien este enunciado parece muy restrictivo, probaremos también que para cualquier curva de Jordan y cualquier conjunto (finito) de circunferencias, existe otra tan cerca como queramos, disjunta y que corta transversalmente a las circunferencias.

La combinación de los resultados anteriores con los resultados de inducción de isotopías nos permite escribir la sección 10, en la que probaremos ya resultados muy fuertes sobre las curvas de clase $(0, 0)$ y $(0, 1)$. De hecho, lo que probaremos es que todas las curvas de clase $(0, 0)$ son isotopas ambiente, y también que todas las de clase $(0, 1)$ lo son. Como ya hemos adelantado, si dos curvas de Jordan tienen distinta clase de homotopía entonces no pueden ser isotopas, pero la sección 11 nos mostrará que sí pueden ser homeomorfas ambiente. De hecho, construiremos explícitamente una familia de homeomorfismos, que llamaremos enroscamientos, que a la postre servirán para probar que todas las curvas de Jordan del toro excepto las nulhomótopas son homeomorfas ambiente. Se sigue de aquí el teorema de Schoenflies para el toro que da nombre a todo el trabajo: que las curvas de Jordan nulhomótopas desconectan al toro en un disco y un toro pinchado; y las demás no desconectan, y tienen a un cilindro abierto como complementario.

Lo único que queda pendiente es aprovechar todos los resultados que hemos visto sobre isotopías para probar que dos curvas de Jordan son isotopas ambiente si y solo si tienen la misma clase de isotopía, esto es, que la clase de homotopía (salvo signo) es el invariante de isotopía. La sección 12 concluye el trabajo con este resultado.

1. RECUBRIDORES

A lo largo de todo el trabajo, usaremos a menudo las propiedades elementales de los recubridores que detallamos aquí. Empezamos por la terminología básica y las notaciones.

Definición 1.1. Dado un espacio X , decimos que otro espacio \tilde{X} es un (*espacio*) *recubridor* de X si existe una aplicación continua suprayectiva $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U cuya imagen inversa $p^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos U_λ en los que p induce por restricción homeomorfismos $p|_{U_\lambda} : U_\lambda \rightarrow U$. Decimos en este caso que U es un *abierto trivializante*.

Ejemplos 1.2. (1) El recubridor prototípico es el *recubridor exponencial* p :

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t \mapsto e^{2\pi it}.$$

por el que la recta real recubre la circunferencia. A menudo usaremos la notación anterior para los puntos del plano como plano de Gauss, identificando el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Con esa notación, $z = re^{2\pi it}$, donde $r = |z| = \|(x, y)\|$ y $e^{2\pi it} = z / |z|$ es el punto de norma 1 y argumento $2\pi t \in \mathbb{R}$, que llamamos el *normalizado* de $z \equiv (x, y)$.

Es sencillo probar que p es recubridor: en efecto, dado $t_0 \in \mathbb{R}$, consideramos la semicircunferencia $S = \{e^{2\pi it} : t_0 - \frac{1}{2} < t < t_0 + \frac{1}{2}\}$. Si definimos la colección de abiertos $U_k =]t_0 + k - \frac{1}{2}, t_0 + k + \frac{1}{2}[$, es directo comprobar que $p^{-1}(S) = \bigcup_k U_k$, y que cada $p|_{U_k}$ es homeomorfismo.

Decimos que el recubridor anterior es el *recubridor universal* porque \mathbb{R} es simplemente conexo.

(2) Considerando el recubridor exponencial p anterior, la aplicación $pp = p \times p$ será también un recubridor para el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, que llamaremos *recubridor doble exponencial*. Explicitándolo, este recubridor tiene la forma:

$$\begin{aligned} pp : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (e^{2\pi i\alpha}, e^{2\pi i\beta}). \end{aligned}$$

Por supuesto, en este caso se comprueba con facilidad que los abiertos trivializantes son el producto de pares de abiertos trivializantes del caso anterior. Es más, p resulta ser inyectivo en los abiertos del tipo $] \alpha, \alpha + 1[\times] \beta, \beta + 1[$ para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Este recubridor es también universal, puesto que de nuevo el espacio recubridor es simplemente conexo.

(3) Un recubridor más exótico, pero que usaremos con asiduidad más adelante, es el *recubridor meridional* del toro:

$$\begin{aligned} q : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ re^{i\theta} &\mapsto (e^{i \ln r}, e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Observemos que denotando $z = re^{i\theta}$, la segunda componente de $q(z)$ es simplemente el normalizado $e^{i\theta} = z / |z|$.

Este recubridor ya no es universal, y este hecho es, en parte, lo que lo hará útil más adelante: induce elevaciones que preservan alrededor del origen las vueltas que dan los lazos en la segunda coordenada del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sin adelantar más los acontecimientos, podemos ver que efectivamente es un recubridor. Dado un punto $p_0 = (z_0, w_0) \in \mathbb{T}^2$, sus imágenes inversas serán:

$$q^{-1}(p_0) = \{\tilde{p}_0^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\arg z_0 + 2k\pi} w_0 : k \in \mathbb{Z}\} \quad (0 \leq \arg z_0 < 2\pi).$$

En base a esto, podemos hallar una colección de abiertos U_k tales que $\tilde{p}_0^k \in U_k$ y la imagen de cada U_k por q coincida, obteniendo así el abierto trivializante U . Para ello, llamamos U_0 a un disco centrado en \tilde{p}_0^0 , y entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$:

$$U_k = e^{2\pi k} U_0 = \{e^{2\pi k} u : u \in U_0\}.$$

Por supuesto, tenemos que tomar U_0 lo suficientemente pequeño para que los U_k no se corten entre sí, pero esto es sencillo: basta con tomarlo de radio igual a un cuarto de la distancia entre \tilde{p}_0^0 y \tilde{p}_0^{-1} . \square

Explicada la terminología, pasamos a ver el problema fundamental relacionado con los recubridores: el de encontrar elevaciones.

Definición 1.3. Dados espacios X, Z , si \tilde{X} recubre X a través de p , y $f : Z \rightarrow X$, entonces decimos que \tilde{f} es una *elevación* de f si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

El problema es si \tilde{f} existe, por lo que se puntea en el diagrama. Es natural preguntarse también por la unicidad de la elevación, que resulta ser una propiedad más general que la existencia. En efecto, podemos probarla sin exigir nada más que la conexión de Z .

Proposición 1.4. *Si Z es conexo en las condiciones anteriores, dos elevaciones que coinciden en un punto z_0 son iguales.*

Idea de la demostración. Localmente, podemos construir todas las elevaciones de f con tan solo limitarnos a un abierto trivializante. Como aquí la restricción del recubridor es homeomorfismo, no hay más que componer f con su inversa para lograr una elevación local. Es más, la propia construcción nos garantiza que podemos describir todas las elevaciones locales de esta manera y, además, que todas ellas son disjuntas.

Visto esto, para probar que las dos elevaciones coinciden en un punto, basta conectarlo con z_0 mediante una cadena de abiertos. Como en cada uno de ellos tenemos la unicidad de la elevación local, la elevación global también coincide en el abierto, y llegamos a la conclusión buscada. \square

Sin embargo, no solo podemos hablar de unicidad, sino que también hay resultados muy importantes de existencia de elevaciones, entre los que destaca el siguiente lema de elevación de homotopías.

Proposición 1.5. *En la situación precedente, suponemos que $Z = Y \times [0, 1]$, esto es, que f es una homotopía que denotaremos $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$. Suponemos dada una elevación \tilde{H}_0 de $H_0 = H|_{Y \times \{0\}}$. Entonces, existe una (única) elevación \tilde{H} de H que extiende \tilde{H}_0 , es decir, tal que $\tilde{H}|_{Y \times \{0\}} = \tilde{H}_0$.*

Corolario 1.6. *Sea $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$, con origen $x_0 = \sigma(0)$, y sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces, existe un único camino $\tilde{\sigma}$ con origen \tilde{x}_0 que eleva a x_0 .*

Corolario 1.7. *Sean $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ caminos homótopos con extremos fijos x_0, x_1 , y sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces, sus elevaciones $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ con origen \tilde{x}_0 son homótopas con extremos fijos.*

La proposición anterior no garantiza que la elevación de un lazo sea a su vez un lazo. De hecho, en general no será así. Por eso, será útil identificar las elevaciones que sí son lazos.

Proposición 1.8. *El recubridor p induce un homomorfismo de grupos entre los grupos fundamentales $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. El subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ es el formado por las clases de homotopía de lazos con base x_0 que elevan a lazos con base \tilde{x}_0 .*

No solo nos interesa saber si los lazos elevan a lazos, sino también si las curvas de Jordan elevan a curvas de Jordan. Empezamos recordando el concepto de curva de Jordan (y el de arco de Jordan) para también fijar la notación que se usará en el resto del texto. Estos conceptos se suelen definir en el plano, pero a nosotros nos interesa la definición más general que daremos aquí.

Definiciones y observaciones 1.9. (1) Un subconjunto de un espacio X es una *curva de Jordan* si es homeomorfo a la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 . Normalmente denotaremos las

curvas de Jordan con C, C', \dots o, a veces, con otras mayúsculas como P o P' , sobre todo cuando la curva es una poligonal de $X = \mathbb{R}^2$.

(2) Una curva de Jordan se puede parametrizar por una aplicación $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = \sigma(1)$ y σ es inyectiva en $[0, 1[$.

(3) La parametrización recorrida en el sentido opuesto, $\sigma'(t) = \sigma(1 - t)$, también parametriza a la misma curva de Jordan.

(4) Un subconjunto de X es un *arco (de Jordan)* si es homeomorfo a $[0, 1]$.

(5) Análogamente, un arco se puede parametrizar por una aplicación $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ inyectiva en $[0, 1]$, o por esta misma parametrización recorrida en el sentido opuesto. \square

Proposición 1.10. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubridor. Sea una curva de Jordan de X parametrizada por σ , que tiene una elevación $\tilde{\sigma}$. Si el camino $\tilde{\sigma}$ es un lazo, entonces parametriza a una curva de Jordan, y si no, a un arco de Jordan.*

Demostración. La demostración se sigue con facilidad de las propiedades de las elevaciones. En primer lugar $\tilde{\sigma}$ es inyectiva en $[0, 1[$ por elevar a σ , que lo es. Si $\tilde{\sigma}$ es (resp. no es) un lazo, entonces $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}(1)$ (resp. $\tilde{\sigma}(0) \neq \tilde{\sigma}(1)$), y $\tilde{\sigma}$ es una curva (resp. un arco) de Jordan. \square

Por último, veremos un par de afirmaciones que nos interesan para recubridores, pero son de naturaleza mucho más general y más fáciles de formular con pocas condiciones.

Proposición 1.11. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y localmente inyectiva entre espacios de Hausdorff. Sea $K \subset X$ un compacto en el que f es inyectiva. Entonces f es inyectiva en un entorno de K .*

Demostración. Para empezar, como K es compacto y f es localmente inyectiva, entonces existe un recubrimiento abierto $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$ tal que f es inyectiva en cada uno de los abiertos U_i . Además, por ser K compacto en X Hausdorff, K es localmente compacto y cada $x \in K$ tiene un entorno compacto K^x contenido en algún U_i que contenga a x . Como estos son entornos, contienen a un abierto que contiene a x , y de nuevo por compacidad podemos quedarnos con una colección finita K_1, \dots, K_l que recubre a K .

Queremos entonces construir el entorno de K en el que f es inyectiva. Procedemos por inducción sobre l . Si $l = 1$, entonces $K \subset K_1$, y K_1 está en un U_i donde f es inyectiva, de forma que ya hemos terminado. Si $l > 1$, consideramos los compactos $K^1 = K \cap \bigcup_{i=1}^{l-1} K_i$ y $K^2 = K \cap K_l$, de forma que $K = K^1 \cup K^2$. Como K^1 está recubierto por $l - 1$ compactos K_i , podemos aplicar la hipótesis de inducción para ver que tiene un entorno abierto W_1 donde f es inyectiva; y como K_l está en un U_i , K^2 tiene otro W_2 . Consideramos entonces los cerrados $L_1 = K^1 \setminus W_2$, y $L_2 = K^2 \setminus W_1$, que son cerrados en K^1 y K^2 respectivamente, luego compactos. Además, son disjuntos.

Como f es inyectiva en $K = K^1 \cup K^2$, los compactos $f(L_1)$ y $f(L_2)$ son disjuntos. Además, por ser Y Hausdorff, existen abiertos disjuntos V_1 y V_2 con $f(L_1) \subset V_1$ y $f(L_2) \subset V_2$. Ahora, definimos el abierto:

$$W = (f^{-1}(V_1) \cap W_1) \cup (W_1 \cap W_2) \cup (f^{-1}(V_2) \cap W_2),$$

que como veremos es el entorno de K que buscamos.

Para comprobarlo, veamos primero que $K \subset W$. En efecto, si $x \in K$, entonces $x \in K^1 \cup K^2$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in K^1 \subset W_1$. En este caso, o bien $x \in L_1$ o $x \in W_2$. Si $x \in L_1 \subset f^{-1}(V_1)$, entonces $x \in f^{-1}(V_1) \cap W_1 \subset W$. Si no, $x \in W_2 \cap W_1 \subset W$.

Solo falta ver que efectivamente f es inyectiva en este abierto. Consideramos $x, y \in W$. Desde luego, como $W \subset W_1 \cup W_2$, y en cada uno de estos f es inyectiva, si $x, y \in W_i$ necesariamente $f(x) \neq f(y)$. Por tanto, supongamos que $x \in W_1$, $y \in W_2$ y ninguno de los dos está en ambos. Entonces, $x \in f^{-1}(V_1)$, pues ha de estar en el primero de los tres conjuntos que forman W , ya que los otros dos están contenidos en W_2 , pero x no lo está. Análogamente, $y \in f^{-1}(V_2)$. Así, $f(x) \in V_1$ y $f(y) \in V_2$, pero V_1 y V_2 son disjuntos, luego $f(x) \neq f(y)$, justo como queríamos. \square

Proposición 1.12. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios Hausdorff. Sea $h : X \rightarrow X$ un homeomorfismo que es la identidad fuera de un compacto K , y supongamos que existe un entorno abierto U de K en el que f induce un homeomorfismo sobre un abierto $V \subset Y$. Entonces, el homeomorfismo $h' = f \circ h \circ (f|_U)^{-1} : V \rightarrow V$ es la identidad en $(Y \setminus f(K)) \cap V$, y se extiende (por la identidad) a todo Y .*

Demostración. Por definición de U , $f|_U$ es un homeomorfismo y, entonces, h' está bien definido. Queremos probar que efectivamente h' es la identidad en $(Y \setminus f(K)) \cap V$.

En efecto, sea $y \in (Y \setminus f(K)) \cap V$. Como $y \notin f(K)$, entonces $f^{-1}(y) \cap K = \emptyset$. Esto significa que h es la identidad en $f^{-1}(y)$ porque lo es fuera de K , y por tanto que $h'(y) = y$. En resumen, efectivamente h' es la identidad en $(Y \setminus f(K)) \cap V$.

Ahora, para ver que h' se extiende por la identidad a todo Y , observamos que K es compacto, luego $f(K)$ también lo es, y por ser Y Hausdorff, $f(K)$ es cerrado. Entonces, h' está definido en el abierto V y consideramos la restricción de la identidad al abierto $Y \setminus f(K)$. Por tanto, ambos son iguales en los puntos donde coinciden y se pueden pegar, obteniendo así la extensión que buscamos a $Y = (Y \setminus f(K)) \cup V$. La extensión es continua y abierta por serlo sus partes, y para la biyectividad basta ver que $h'(V) = V$, y $\text{Id}(Y \setminus V) = Y \setminus V$. \square

Podemos extender el resultado anterior a isotopías, así que recordamos la definición.

Definición 1.13. Una *isotopía (ambiente)* es una homotopía $h_s : X \rightarrow X$ tal que cada h_s es homeomorfismo. Se dice entonces que los homeomorfismos h_0 y h_1 son *isótopos*. A menudo nos interesará el homeomorfismo final de la isotopía, cuando $h_0 = \text{Id}$. Diremos en este caso que h_s es una *isotopía de la identidad*.

Así, reformulamos la proposición 1.12 para isotopías.

Proposición 1.14. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios Hausdorff. Sea $h_s : X \rightarrow X$ una isotopía que es la identidad fuera de un compacto K , y suponemos que existe un entorno abierto U de K en el que f induce un homeomorfismo sobre un abierto $V \subset Y$. Entonces, la isotopía $h'_s = f \circ h_s \circ (f|_U)^{-1} : V \rightarrow V$ es la identidad en $(Y \setminus f(K)) \cap V$, y se extiende (por la identidad) a todo Y .*

Demostración. La clave es aplicar la proposición 1.12 a cada uno de los homeomorfismos h_s que conforman la isotopía. Esto nos permite extender cada uno, por la identidad, a

otro $\bar{h}_s : V \rightarrow V$ que extiende $h'_s = f \circ h_s \circ (f|_U)^{-1}$. Ahora, hay que ver que h'_s es una isotopía, es decir, que es continua en s . Pero esto no es un problema, pues h'_s es continua en s por ser h_s isotopía, la identidad es constante en s , y el pegado ocurre en la misma región para todo s . \square

2. EL TEOREMA DEL ANILLO

Tras revisar el teorema de Jordan y el teorema de Schoenflies y algunas de sus variantes, dedicaremos el grueso de esta sección al teorema del anillo que le da nombre. Empezamos, pues, por el archiconocido:

Teorema 2.1 (Teorema de la curva de Jordan). *Una curva de Jordan del plano \mathbb{R}^2 lo desconecta en dos componentes, de cada una de las cuales es frontera.*

Además, se demuestra que una de las componentes está acotada y la otra no. Llamamos a la acotada el *interior* de la curva de Jordan y a la no acotada, el *exterior*.

Compactificando \mathbb{R}^2 por un punto se obtiene la esfera \mathbb{S}^2 , y se deducen los siguientes corolarios:

Corolario 2.2 (Teorema de la curva de Jordan en la esfera). *Una curva de Jordan $C \subset \mathbb{S}^2$ desconecta \mathbb{S}^2 en dos componentes, de cada una de las cuales es frontera.*

Corolario 2.3. *Si L es un cerrado de \mathbb{R}^2 homeomorfo a \mathbb{R} , entonces $\mathbb{R}^2 \setminus L$ tiene dos componentes no acotadas, de cada una de las cuales es frontera.*

El teorema de Schoenflies es un refinamiento del teorema de la curva de Jordan, que nos da más información sobre el interior y el exterior de la curva. Su formulación más fuerte es:

Teorema 2.4 (Teorema de Schoenflies). *Cualquier homeomorfismo entre dos curvas de Jordan del plano se puede extender a todo \mathbb{R}^2 .*

Sin embargo, este enunciado tan fuerte es, en realidad, equivalente al siguiente: la adherencia del interior de una curva de Jordan es homeomorfa al disco unidad.

De nuevo, compactificar el plano por un punto da sus frutos para obtener un teorema equivalente en la esfera.

Corolario 2.5 (Teorema de Schoenflies en la esfera). *Cualquier homeomorfismo entre dos curvas de Jordan de la esfera \mathbb{S}^2 se puede extender a toda ella.*

Otra vez, esto es lo mismo que decir que una curva de Jordan separa a la esfera en dos componentes conexas cuya adherencia es un disco.

El teorema de Schoenflies permite obtener otros resultados de separación en el plano, que no son consecuencia solo del de Jordan. Especial mención merece el siguiente:

Proposición 2.6. (1) *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, y γ un arco contenido en su interior, salvo sus extremos que están en la propia curva, y que la dividen en dos arcos α y β . Entonces γ desconecta el interior de C en dos componentes acotadas, los interiores de las curvas de Jordan $\alpha \cup \gamma$ y $\gamma \cup \beta$, como muestra la figura 1 (izquierda).*

(2) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, y γ un arco contenido en su exterior, salvo sus extremos que están en la propia curva, y que la dividen en dos arcos α y β . Entonces γ desconecta el exterior de C en dos componentes, una acotada, el interior de $\alpha \cup \gamma$, y otra no acotada, el exterior de $\gamma \cup \beta$, como muestra la figura 1 (derecha).

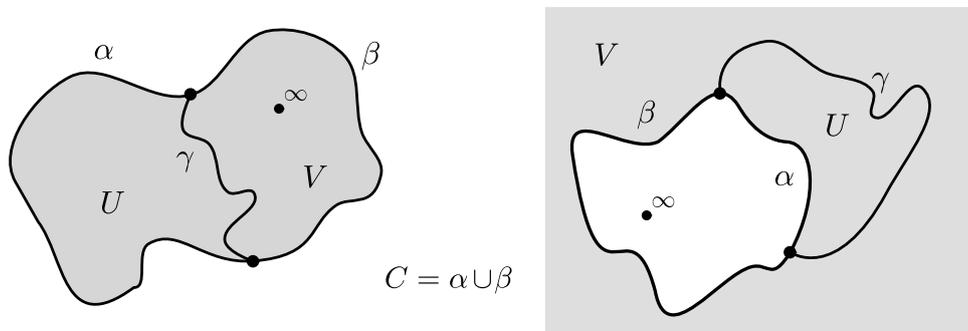


FIGURA 1. Otras separaciones.

Nótese que en (1) no se pueden distinguir los arcos α y β , mientras que en el caso (2) sí: α está en la frontera de la componente acotada. En realidad, (1) y (2) son equivalentes, para pasar de una a otra basta elegir un punto de infinito adecuado, que está indicado también en la figura.

También se puede demostrar el resultado anterior independientemente del teorema de Schoenflies, pero es necesario refinar el de Jordan, pues no es consecuencia directa de este último [3]. Esta es una distinción que no suele precisarse bien en la literatura.

Volviendo al teorema de Schoenflies, su demostración es interesante y objeto de un Trabajo de Fin de Grado anterior [2]. Se basa en aproximar la curva original por poligonales cada vez más cercanas a ella, extendiendo los homeomorfismos entre dominios poligonales. Se desarrollan resultados que nos permiten “embaldosar” el dominio de Jordan correspondiente con poligonales, desembocando en un lema que nos será útil más adelante:

Lema 2.7. *Dada una curva de Jordan $C \subset \mathbb{R}^2$ y un entorno U suyo, existe una curva de Jordan poligonal P contenida en el entorno U y en el interior de C . Además, si C tiene al origen en su interior, podemos tomar P para que también lo tenga.*

Pasamos ya al resultado central de esta sección: el teorema del anillo. Su demostración, que a priori no parece muy complicada, involucra afirmaciones engañosamente simples, que parecen triviales y no lo son. Ya avisamos de que la proposición 2.6(1) era más fuerte que el teorema de la curva de Jordan, y de hecho recurrir a ella nos permitirá probar con relativamente poco esfuerzo algunas de estas afirmaciones, que no son tan sencillas de demostrar partiendo solamente del teorema.

Teorema 2.8 (Teorema del anillo). *Sean dos curvas de Jordan $C, C' \subset \mathbb{R}^2$ disjuntas, con C' en el interior de C . Entonces, existe un homeomorfismo h de \mathbb{R}^2 que las transforma en dos circunferencias concéntricas. En particular, $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$ tiene tres regiones: el interior, homeomorfo a un disco; el exterior de C ; y una tercera homeomorfa al anillo $\{x : 1 < \|x\| < 2\}$.*

Demostración.

(1) Podemos empezar por algunas consideraciones topológicas, sin usar maquinaria pesada (aún). Denotaremos $\mathbb{R}^2 \setminus C = U \cup V$, $\mathbb{R}^2 \setminus C' = U' \cup V'$, donde U y U' son los interiores y V, V' los exteriores. Por hipótesis $C' \subset U$, luego $C' \cap V = \emptyset$, y como V es un abierto conexo no acotado, $V \subset V'$. Así, $V \cap U' = \emptyset$, y por ser U' abierto, $\overline{V} \cap U' = \emptyset$, de forma que $C \cap U' = \emptyset$ y, como C no corta a C' , tenemos $C \subset V'$. Por otro lado, como $\overline{V} \cap U' = \emptyset$, entonces $U' \subset U$. En resumen, hemos probado que las siguientes propiedades (que parecen seguirse del dibujo) son efectivamente ciertas:

$$C' \subset U, \quad C \subset V', \quad U' \subset U, \quad V \subset V', \quad V \cap U' = \emptyset.$$

(2) De todo esto concluimos que:

$$\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C') = (\mathbb{R}^2 \setminus C) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus C') = (U \cup V) \cap (U' \cup V') = U' \cup (U \cap V') \cup V,$$

es decir, que $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$ está compuesto precisamente por las regiones descritas en el enunciado. Si $U \cap V' = U \setminus \overline{U'}$ es conexo, entonces estas tres son las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$. Por tanto, basta probar que la adherencia de la región entre ambas curvas es homeomorfa al anillo $A = \{x : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$, pues en ese caso podemos aplicar el teorema de Schoenflies 2.4 dos veces para extender el homeomorfismo al interior y al exterior.

(3) Consideremos pues dos puntos a_1 y a_2 en la curva C' . Si tomamos los de menor y mayor abscisa, respectivamente, podemos trazar un segmento horizontal desde cada uno de ellos que no corte con C' y llamamos b_1, b_2 respectivamente a los primeros puntos con los que intersecan en C . Queremos dividir C y C' en arcos, de forma que podamos formar dos curvas de Jordan componiéndolos con los segmentos y aplicarles a las dos el teorema de Schoenflies. El resultado se ve en la figura 2.

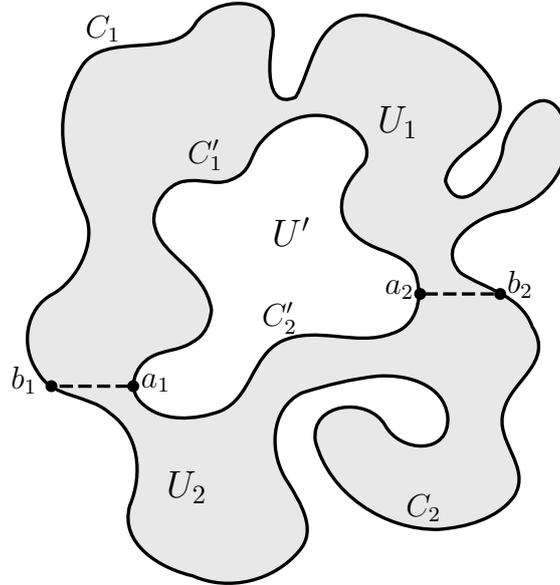


FIGURA 2. Esquema de la división de las curvas C y C' .

(4) Empezamos llamando C'_1 a uno de los arcos de C' que une a_1 con a_2 , y C'_2 al otro. El objetivo ahora es justificar que podemos etiquetar los dos arcos de C , C_1 y C_2 , como se muestra en la figura 2, de forma que los dominios de Jordan U_1 y U_2 cumplan que $\overline{U_1} \cup \overline{U_2}$ sea la adherencia de la región entre C y C' .

Es aquí cuando recurrimos a la proposición 2.6(1). Por ella, el arco $[b_1, a_1] \cup C'_1 \cup [a_2, b_2]$ divide el interior U de C en dos componentes conexas. Una de ellas ha de contener a $C'_2 \setminus \{a_1, a_2\}$, y la denotamos U'' ; y llamamos U_1 a la otra. Visto esto, podemos ya etiquetar a los dos arcos que forman C . Llamamos C_1 al arco de C entre b_1 y b_2 adherente a U_1 , y C_2 al adherente a U'' .

(5) La componente U'' vista antes es el interior del arco

$$J_1 = [a_2, b_2] \cup C_1 \cup [b_1, a_1] \cup C'_1.$$

Aplicamos de nuevo la proposición 2.6(1), para probar que el arco C'_2 divide a U'' en dos componentes, el interior de $C'_1 \cup C'_2$ y el interior de

$$J_2 = [a_2, b_2] \cup C_2 \cup [b_1, a_1] \cup C'_2.$$

La primera de estas componentes ya tenía nombre, U' ; y denotamos la segunda como U_2 .

Todo esto garantiza que U_1 y U_2 son precisamente las que hemos dibujado, es decir, que $U \setminus ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup C')$ tiene tres componentes conexas: U' , U_1 y U_2 . Por tanto, tenemos que $\overline{U_1} \cup \overline{U_2}$ es precisamente la adherencia de la región entre C y C' , esto es, el anillo. Además, como U_1 y U_2 son abiertos disjuntos, $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = J_1 \cap J_2 = [b_1, a_1] \cup [a_2, b_2]$.

(6) Gracias a las condiciones anteriores, podemos definir homeomorfismos de las curvas J_1 y J_2 sobre los bordes de dos medias coronas circulares, dispuestas como se muestra en la figura 3. Esto es, definimos dos homeomorfismos $h_i : J_i \rightarrow J_i^*$ que coincidan en $[b_1, a_1] \cup [a_2, b_2]$. Pero como ya hemos visto que esta es toda la intersección $\overline{U_1} \cap \overline{U_2}$, podemos extender los homeomorfismos al interior de las curvas por medio del teorema de Schoenflies 2.4, y obtener un homeomorfismo \bar{h} de $\overline{U_1} \cup \overline{U_2}$ a la corona circular.

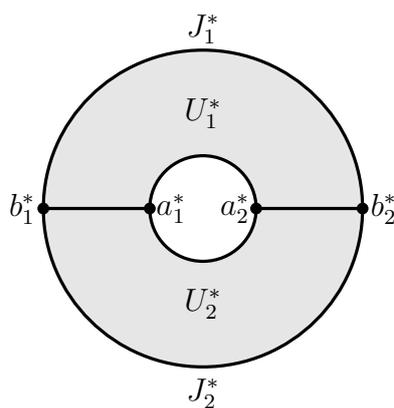


FIGURA 3. Imagen del homeomorfismo sobre la corona circular. Marcamos con * las imágenes de los puntos por el homeomorfismo.

Habiendo probado ya que $\overline{U_1} \cup \overline{U_2}$ es precisamente la región entre C y C' , basta con aplicar el teorema de Schoenflies 2.4 dos veces más, al interior de C' y al exterior de C , para probar que el homeomorfismo \bar{h} se extiende a todo el plano. \square

3. ISOTOPÍAS DEL PLANO

Los teoremas de Jordan nos permiten construir isotopías entre curvas arbitrarias que cumplen ciertas condiciones, y esto es lo que haremos en esta sección. Las isotopías construidas serán muy útiles más adelante, pues veremos que bajo ciertas condiciones inducirán otras en el toro, a través de los recubridores.

Proposición 3.1. Sean $C, C' \subset \mathbb{R}^2$ dos curvas de Jordan disjuntas tales que una está en el interior de la otra. Entonces, dado un entorno U que contenga el anillo cerrado delimitado por C y C' , existe una isotopía h_s tal que $h_0 = \text{Id}$, $h_1(C) = C'$ y tal que h_s es la identidad fuera de cualquier entorno prefijado U del anillo en cuestión.

Demostración. Queremos fabricar una isotopía h_s tal que $h_0 = \text{Id}$, $h_1(C) = C'$, y tal que h_s es la identidad fuera de U . Para empezar, aplicamos el teorema del anillo 2.8, que nos garantiza que existe un homeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que manda C a C_2 , la circunferencia de radio 2, y C' a C_1 , la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 . El homeomorfismo g reduce, pues, el problema al caso con $C = C_2$, $C' = C_1$. Reduciendo entonces el abierto U podemos suponer que es el anillo abierto entre dos circunferencias $C_{1-\varepsilon}$ y $C_{2+\varepsilon}$ para un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño.

La figura 4 explica la construcción de la isotopía geoméricamente mediante proyecciones adecuadas. Se define en dos partes que coinciden en el lado que comparten: en la parte superior se dilata el segmento $[p_0, p]$ sobre el segmento $[p_0, q]$ y en la inferior se contrae el segmento $[p, q_0]$ sobre $[q, q_0]$. Las fórmulas para la parte superior son:

$$\begin{cases} h_1(x) = p_0 + \frac{\|q-p_0\|}{\|p-p_0\|}(x-p_0), \\ h_s(x) = (1-s)x + sh_1(x). \end{cases}$$

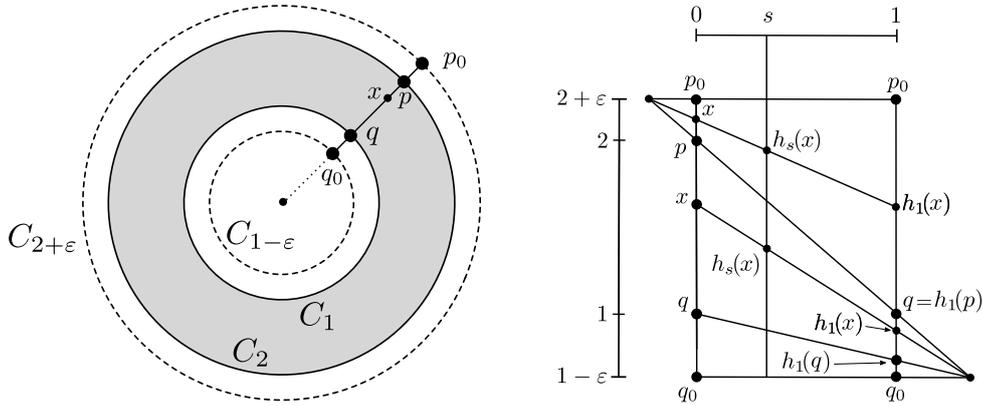


FIGURA 4. Isotopía por interpolación lineal.

La interpolación lineal de la figura se define para cada radio que sale del origen, lo que garantiza la continuidad de cada h_s . En efecto, los puntos p_0, p, q, q_0 con los que se interpola para un punto arbitrario x dependen continuamente de x , en particular de su ángulo con el eje X (lo que sería su argumento complejo si estuviéramos en \mathbb{C}). Las demás propiedades que buscábamos en h_s se comprueban directamente. \square

Proposición 3.2. Sean Γ_1 y Γ_2 dos arcos de \mathbb{R}^2 que coinciden en sus extremos y que no se cortan en ningún otro punto. Sea D el dominio de Jordan delimitado por su unión y sea Γ un tercer arco con los mismos extremos que, salvo ellos, está el exterior de D , de forma que Γ_2 está entre Γ_1 y Γ . Sea U un entorno abierto de D . Entonces, existe una isotopía de la identidad h_s tal que:

- (1) h_s es la identidad en Γ y fuera de U ,
- (2) $h_1(\Gamma_1) = \Gamma_2$, y
- (3) h_1 transforma la región entre Γ_1 y Γ en la región entre Γ_2 y Γ .

Demostración. Sean x_0 y x_1 los extremos de los arcos. Podemos usar el teorema de Schoenflies 2.4 para construir, en cada una de las regiones entre dos arcos consecutivos, homeomorfismos sobre dos triángulos unidos por la base. De esta manera, los homeomorfismos coincidirán en la base, y así se podrán extender a todo el plano. Es decir, podemos suponer que la situación inicial, a la izquierda en la figura 5, se ha reducido a una situación lineal, como a la derecha. Además, como el triángulo que bordea D es compacto, podemos construir el rombo abierto de la figura en el interior de D .

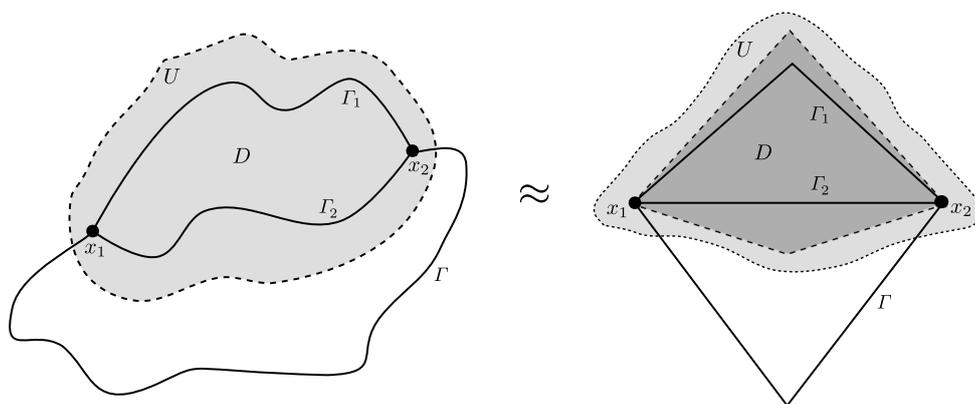


FIGURA 5. Linearización de los datos

Ya en la situación lineal, la isotopía h_s se construye por interpolación lineal en cada segmento vertical, como se ha hecho en la demostración anterior en los segmentos radiales. La interpolación se muestra en la figura 6, donde se ven los puntos p_0, p, q, q_0 y el genérico x . De nuevo, la continuidad de cada h_s se sigue de que los cuatro puntos que definen la interpolación para un x dado dependen continuamente de este, en este caso de su primera coordenada.

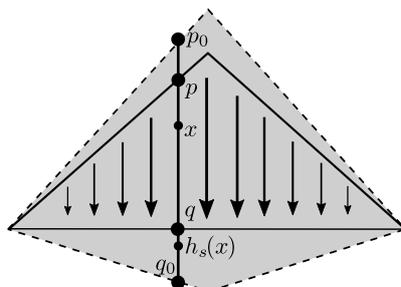


FIGURA 6. Acción del homeomorfismo h_1 sobre el triángulo.

De esa manera, fuera del rombo, h_s es la identidad, y, dentro de él, h_s isotopa toda la región por debajo de I_1 sobre la región por debajo de I_2 . Esto garantiza las tres condiciones requeridas por el enunciado. \square

4. EL TEOREMA DE LA CUERDA

El teorema de la cuerda es un resultado particular de la topología del plano que necesitaremos más adelante.

Lema 4.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ conexo por caminos, y sea C un segmento con ambos extremos en X y con longitud $|C|$. Si $0 < \alpha < |C|$, entonces existe un segmento con extremos en X y paralelo a C , que o bien tiene longitud α , o bien longitud $|C| - \alpha$.*

Demostración. Podemos suponer que X es un arco. En efecto, si X es conexo por caminos, lo es por arcos (por el teorema de Moore [1, Teorema 11.7.2, p.67]), y tomamos un arco cualquiera con los mismos extremos que C . Por comodidad, vamos a trasladar y escalar para poder suponer que $C = [0, 1] \times \{0\}$, un segmento horizontal de longitud 1.

Dado un $\beta \in \mathbb{R}$, llamamos $X_\beta = \{(x + \beta, y) : (x, y) \in X\}$, es decir, X_β es el arco X trasladado en β unidades a la derecha. El segmento que buscamos, de longitud α , tendrá uno de sus extremos en el arco X y el otro α unidades a la derecha, de forma que existirá si y solo si $X \cap X_\alpha$ es no vacío. Por tanto, lo que queremos probar es que no es posible que $X \cap X_\alpha = X \cap X_{1-\alpha} = \emptyset$.

Supongamos que ambas intersecciones son vacías. En este caso, tomamos $p, q \in X_\alpha$, donde p es el de máxima ordenada y q es el de mínima. Llamamos L^+ a la semirrecta vertical en sentido positivo desde p , y L^- a la semirrecta vertical en sentido negativo desde q . Sea $L = L^+ \cup \gamma \cup L^-$, donde γ es el subarco de X que une p con q . L es, por tanto, un cerrado homeomorfo a \mathbb{R} , y por el corolario 2.3 separa a \mathbb{R}^2 en dos componentes no acotadas. La figura 7 resume toda la construcción.

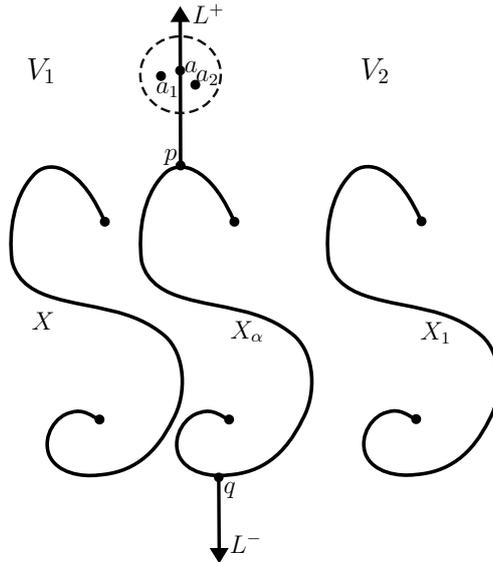


FIGURA 7. Esquema de la situación para determinar las componentes conexas.

Como $(1, 0) \in X \cap X_1$, si logramos probar que X y X_1 están en diferentes componentes conexas, habremos llegado a la contradicción que buscábamos. Para ello, consideramos un punto a en L^+ , y lo tomamos de ordenada mayor que todos los de X , y consideramos un entorno abierto U de a con todos sus puntos de ordenada mayor que los de X . Por ser L la frontera de cada componente conexa (de nuevo por el corolario 2.3), existen $a_1, a_2 \in U \setminus L$, cada uno perteneciente a una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Tomamos a_1 a la izquierda y a_2 a la derecha, y llamamos V_1 a la componente conexa que contiene a a_1 y V_2 a la que contiene a a_2 . Ahora, $p - (\alpha, 0) \in X$ tiene que estar en V_1 : en efecto, todos los puntos con ordenada mayor que la de p forman un semiplano S , y $S \cap V_1$ es un conexo contenido en V_1 y que contiene a a_1 . Como $p - (\alpha, 0)$ está en la adherencia del conexo y no está en L , necesariamente ha de estar también en V_1 . Análogamente, $p + (1 - \alpha, 0)$ está en V_2 , y, por tanto, X y X_1 están en distintas componentes conexas, y hemos llegado a una contradicción. \square

Teorema 4.2 (Teorema de la cuerda). *Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ conexo por caminos, y sea C un segmento con ambos extremos en X y con longitud $|C|$. Para todo $n > 0$, existe un segmento paralelo a C , con extremos en X y de longitud $\frac{1}{n}|C|$.*

Demostración. Podemos probarlo por inducción, aprovechando el lema anterior. En efecto, para $n = 1$ es trivial y para $n = 2$, aplicamos el lema 4.1 para $\alpha = \frac{1}{2}|C|$. Como $|C| - \alpha$ es también $\frac{1}{2}|C|$, ya hemos terminado.

Para probarlo para $n > 2$, lo suponemos cierto para $n - 1$ y cualquier C . Entonces, usando de nuevo el lema 4.1, hay dos posibilidades: o se cumple para $\alpha = \frac{1}{n}|C|$, en cuyo caso ya hemos acabado; o se cumple para $|C| - \alpha = \frac{n-1}{n}|C|$. En este segundo caso, llamamos C' al segmento de longitud $|C'| = \frac{n-1}{n}|C|$ que obtenemos. Pero, ahora, podemos aplicarle la hipótesis de inducción a C' y encontrar un segmento de longitud $\frac{1}{n-1}|C'| = \frac{1}{n}|C|$, tal y como buscábamos. \square

5. GRUPO FUNDAMENTAL DEL TORO

En esta sección empezamos ya a hablar del toro, y en particular discutiremos las peculiaridades de su grupo fundamental, que serán importantes en las demostraciones posteriores. Entre estas, destaca la caracterización de las curvas de Jordan en el toro según su clase de homotopía.

Durante el resto del texto, mientras no se diga lo contrario, vamos a discutir sobre el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, aunque para las visualizaciones recurriremos, por supuesto, al toro de revolución en el espacio.

Definición 5.1. Dos lazos que serán de gran utilidad para estudiar el grupo fundamental del toro son:

- (1) El *paralelo* $t \mapsto (e^{2\pi it}, 1)$.
- (2) El *meridiano* $t \mapsto (1, e^{2\pi it})$.

El punto base canónico del toro es $x_0 = (1, 1) \in \mathbb{C}^2$, que resulta ser punto base tanto del paralelo como del meridiano. Sin embargo, como veremos más adelante, el punto base es en realidad irrelevante en lo que a nosotros nos atañe.

Para comprender el grupo fundamental del toro, recurriremos al recubridor doble exponencial pp que ya vimos en el ejemplo 1.2(2).

Una propiedad que ya mencionamos en el ejemplo y que usaremos a menudo es que el recubridor es inyectivo (y por tanto homeomorfismo sobre su imagen) en cualquier cuadrado $]x, x + 1[\times]y, y + 1[$. También usaremos que la imagen inversa de un punto del toro es una “rejilla” de puntos:

$$\{(x + k, y + l) : k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Recordamos que el recubridor exponencial de \mathbb{S}^1 servía para definir el *número de vueltas* o *grado* de un camino,

$$\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0),$$

para cualquier elevación $\tilde{\sigma}$. Esta aplicación resultaba ser invariante bajo homotopía y, a la postre, inducía un isomorfismo:

$$\# : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

También comentamos en el ejemplo que pp es recubridor por ser producto por sí mismo del recubridor exponencial de la circunferencia. Podemos explotar aún más este hecho, pues nos va a proporcionar una forma de identificar con facilidad la clase de homotopía de los lazos del toro. Resulta que podemos hacer para el toro una construcción muy similar a esta del grado, aprovechando la propiedad que mencionamos, definiendo un “doble grado” en el toro que se construye a partir de los grados en cada coordenada.

Definición 5.2. Dado un camino $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$, definimos su *doble grado* como:

$$\#\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0),$$

para una elevación cualquiera $\tilde{\sigma}$.

Proposición 5.3. *El doble grado está bien definido, y, además, $\#\#\sigma \in \mathbb{Z}^2$ para cualquier camino σ .*

Demostración. Para empezar, por las propiedades del recubridor p , es directo comprobar que, para cualquier elevación, $\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) \in \mathbb{Z}^2$.

Visto esto, consideramos dos elevaciones distintas $\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}$ de σ . Entonces, por las propiedades de p tiene que ser $\bar{\sigma}(0) - \tilde{\sigma}(0) = (k, l) \in \mathbb{Z}^2$. Aplicando p , comprobamos que $\tilde{\sigma} + (k, l)$ es otra elevación de σ , y por la unicidad de la elevación 1.6 ha de ser $\bar{\sigma}$. Entonces,

$$\bar{\sigma}(1) - \bar{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0). \quad \square$$

Observación 5.4. El doble grado, intuitivamente, va a significar lo mismo que significaba el grado para la circunferencia: va a contar el número de vueltas que da el camino. La diferencia es que, en el caso del toro, el número de vueltas estará en \mathbb{Z}^2 (como acabamos de ver), pues hay que diferenciar las vueltas que el camino da en su primera coordenada y las que da en su segunda. En el toro de revolución, esto es diferenciar las vueltas que se dan “alrededor del cuerpo” del toro y las que se dan “alrededor del orificio”. \square

Proposición 5.5. *Sea x_0 un punto base del toro \mathbb{T}^2 . La aplicación:*

$$\begin{aligned} \#\# : \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ [\sigma] &\mapsto \#\#\sigma \end{aligned}$$

está bien definida y es un isomorfismo de grupos. Además, si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, entonces $\#\sigma = (\#\sigma_1, \#\sigma_2)$.

Demostración. Veamos que para $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, entonces $\#\sigma = (\#\sigma_1, \#\sigma_2)$. Para ello, sea $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ una elevación de σ . Por ser el recubridor p producto del exponencial por sí mismo, como $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ eleva a (σ_1, σ_2) en el toro vía p , entonces el camino $\tilde{\sigma}_i$ de \mathbb{R} eleva al camino σ_i de \mathbb{S}^1 con el recubridor exponencial. En fin, tenemos:

$$\begin{aligned} \#\sigma &= \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)(1) - (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)(0) \\ &= (\tilde{\sigma}_1(1) - \tilde{\sigma}_1(0), \tilde{\sigma}_2(1) - \tilde{\sigma}_2(0)) = (\#\sigma_1, \#\sigma_2). \end{aligned}$$

Visto esto, prácticamente hemos acabado: probar que dos caminos del toro homótopos tienen proyecciones homótopas en cada componente \mathbb{S}^1 es directo, y combinando esto con lo demostrado anteriormente tenemos automáticamente que la aplicación está bien definida y que es un isomorfismo. \square

Observaciones 5.6. (1) Se ve que el punto base no juega en realidad ningún papel, salvo el obvio de estar en el lazo. Pero es que además tampoco hay que usar homotopías con punto base fijo, sino que bastan homotopías de lazos: si dos lazos del toro σ y τ son homótopos vía una H_s tal que $H_s(0) = H_s(1)$, entonces $\#\sigma = \#\tau$.

En efecto, tomamos una elevación \widetilde{H}_s de H_s , de manera que por hipótesis se tiene

$$\#\sigma = \widetilde{H}_s(1) - \widetilde{H}_s(0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Por continuidad, resulta que $\#\sigma$ es constante y en consecuencia

$$\#\sigma = \#\sigma_0 = \#\sigma_1 = \#\sigma.$$

Es más, esto permite incluso que σ y τ tengan distinto punto base.

(2) Por otra parte, podemos cambiar arbitrariamente de punto base usando isotopías. Sean $x_0 = pp(z_0), x_1 = pp(z_1)$ dos puntos del toro. En el plano tenemos la isotopía de traslación $\tilde{h}_s(z) = z + s(z_1 - z_0)$, tal que $\tilde{h}_s(z_0) = z_1$. Pero esta, además, es compatible con el recubridor, con lo que induce por cociente una isotopía h_s del toro que lleva x_0 a x_1 . De hecho, esta es una isotopía del tipo:

$$h_s(x, y) = (e^{2\pi i \alpha_0} x, e^{2\pi i \beta_0} y),$$

para $(\alpha_0, \beta_0) = z_1 - z_0$. \square

Para terminar la sección, es interesante observar que el paralelo y el meridiano definidos en 5.1 tienen grado $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente, y por tanto son representantes de los dos generadores de $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ (con el punto base canónico $x_0 = (1, 1)$).

6. CLASE DE HOMOTOPÍA DE UNA CURVA DE JORDAN

Como anticipábamos, necesitamos caracterizar las clases de homotopía en el toro para las cuales se puede elegir una curva de Jordan como representante. Para ello, necesitamos primero hacerlo en el plano sin el origen, para lo que usamos el teorema de la cuerda 4.2. Este plano pinchado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es homeomorfo a $(0, \infty) \times \mathbb{S}^1$ a través del homeomorfismo $z \mapsto (|z|, \rho(z))$, donde ρ es la retracción radial $\rho(z) = z / |z|$. Esto nos permitirá extender

a él el concepto de grado visto para la circunferencia, de forma que para un camino σ de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\#\sigma = \#(\rho \circ \sigma).$$

Esta es, de hecho, una forma de probar directamente que el grupo fundamental del plano pinchado es \mathbb{Z} . Visto lo necesario, pasamos ya al resultado:

Proposición 6.1. *Una clase de homotopía $a \in \mathbb{Z} = \pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}, x_0)$ puede estar representada por una curva de Jordan si y solo si a es 0 o ± 1 .*

Demostración. Para la implicación hacia la izquierda, basta con encontrar tres ejemplos, que de hecho van a ser tres circunferencias: una que no contenga al origen, para clase 0; una que sí lo contenga y esté recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj, para clase 1; y esta misma recorrida en el sentido inverso, para clase -1 . Conocemos la clase de cada una porque coincide con su grado.

Para la implicación hacia la derecha, sea $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, y sea una curva de clase a . Introducimos el recubridor natural de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} p : (0, \infty) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (r, t) &\mapsto re^{2\pi it}. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es homeomorfo a $(0, \infty) \times \mathbb{S}^1$, podemos probar que p es un recubridor, pues no es más que el producto de la identidad por el recubridor exponencial de la circunferencia visto en el ejemplo 1.2(1). Además, extendiendo las propiedades del grado a nuestro plano pinchado, concluimos que las elevaciones de puntos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ son puntos que comparten ordenada y cuyas abscisas se diferencian en un entero. Es más, como los lazos de clase a tienen, por supuesto, grado a , resulta que sus elevaciones cumplen que $\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (a, 0)$.

En fin, por hipótesis sabemos que $|a| \geq 2$. Entonces, por el teorema de la cuerda 4.2 aplicado a una elevación $\tilde{\sigma}$, con $C = [\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}(1)]$ y $n = |a|$, obtenemos un segmento horizontal $[x, y]$ de longitud $|a|/n = 1$, con extremos sobre la imagen de $\tilde{\sigma}$. Como existen $t \neq s$ tales que $\tilde{\sigma}(t) = x$, $\tilde{\sigma}(s) = y$, componiendo con p tenemos que $\sigma(t) = \sigma(s)$, porque el recubridor manda al mismo punto puntos que se diferencian en $(1, 0)$. Y, entonces, σ no es inyectiva, como queríamos probar. \square

De aquí pasamos directamente al resultado análogo, pero esta vez para curvas de Jordan en el toro. La demostración es algo más complicada que la de la proposición 6.1, pero utiliza varias ideas similares.

Teorema 6.2. *Una clase de homotopía $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 = \pi(\mathbb{T}^2, x_0)$ puede estar representada por una curva de Jordan si y solo si $a = b = 0$ o a y b son primos entre sí. Nótese que la coprimalidad incluye $(a, b) = (\pm 1, 0)$ y $(a, b) = (0, \pm 1)$.*

Demostración. Probemos primero la implicación hacia la izquierda, encontrando representantes para la clase (a, b) . Aquí diferenciamos los dos casos del enunciado.

Primero, si $a = b = 0$, tomamos un punto \tilde{x}_0 de $p^{-1}(x_0)$, y consideramos un cuadrado abierto U de lado 1 y centrado en \tilde{x}_0 . Tomamos una curva de Jordan $\tilde{\sigma}$ cualquiera de punto base \tilde{x}_0 y que esté contenida en U , por ejemplo, una circunferencia lo suficientemente pequeña. Como p es inyectivo en U , el lazo $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$ no tiene autointersecciones, y por

tanto será de Jordan. Como, además, $\tilde{\sigma}$ es nulhomótopo en \mathbb{R}^2 vía una homotopía con punto base fijo \tilde{H}_s , la homotopía $H_s = p \circ \tilde{H}_s$ muestra que σ es también nulhomótopo.

Segundo, si a y b son primos entre sí, consideramos el lazo

$$\sigma : t \mapsto (e^{2\pi i a t}, e^{2\pi i b t}),$$

y su elevación

$$\tilde{\sigma} : t \mapsto (a, b)t.$$

Entonces, $\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (a, b)$, esto es, σ es de clase (a, b) . Ahora, hay que ver que es una curva de Jordan. Si no lo fuera, existirían $t_1, t_2 \in [0, 1)$ distintos, digamos $t_1 < t_2$, tales que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, y en consecuencia $\tilde{\sigma}(t_1)$ y $\tilde{\sigma}(t_2)$ tendrían la misma imagen por p , es decir, $a(t_2 - t_1) = k \in \mathbb{Z}$ y $b(t_2 - t_1) = l \in \mathbb{Z}$. Si $a, b \neq 0$, como $0 < t_2 - t_1 < 1$, resulta que $k < a$ y $l < b$. Pero, entonces, el segmento $\tilde{\sigma}$ tiene pendiente $\frac{l}{k} = \frac{b}{a}$, y por tanto $\frac{b}{a}$ no es una fracción irreducible, en contradicción con que a y b son primos entre sí. Para terminar, lo probamos para el caso $a = 0$ (pues $b = 0$ es análogo). Como $a = 0$, $b = \pm 1$, y, por el argumento anterior, $|l| < 1$, esto es, $l = 0$. Luego $t_2 - t_1 = 0$, que es una contradicción.

Ahora, en lugar de probar la implicación hacia la derecha, probaremos su contrarrecíproco: vamos a ver que una curva de clase (a, b) no puede ser de Jordan si $\gcd(a, b) = d > 1$.

Consideramos un lazo σ de clase (a, b) , y una elevación suya $\tilde{\sigma}$. Entonces, $\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (a, b)$, y aplicamos el teorema de la cuerda 4.2 para $n = d$ al segmento C con extremos $\tilde{\sigma}(0)$ y $\tilde{\sigma}(1)$. Obtenemos un segmento paralelo, cuyos extremos se diferencian en $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ y están en $\tilde{\sigma}$. Ahora, como $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son enteros, sus extremos c_0 y c_1 serán puntos de $\tilde{\sigma}$ cuyas coordenadas se diferencian en un entero. Estos, pues, se corresponden a $s, t \in [0, 1)$ distintos tales que $\sigma(t) = \sigma(s)$, luego σ no es una curva de Jordan. \square

Para formular rigurosamente el teorema de isotopía de curvas de Jordan necesitamos poder hablar de la clase de homotopía de una curva de Jordan, y no solo de la de sus parametrizaciones.

Definición y observaciones 6.3. (1) La *clase de homotopía* de una curva de Jordan del toro es el doble grado de cualquier parametrización suya.

(2) Esta clase de homotopía está bien definida *salvo signo* y no depende de la parametrización utilizada. Lo primero ya se señaló en la observación 1.9(3), donde se vio que toda curva de Jordan se puede reparametrizar inversamente. De hecho, se comprueba inmediatamente que una reparametrización mediante un cambio creciente (resp. decreciente) de parámetro tiene el mismo (resp. opuesto) doble grado, probando así que está bien definida cuando consideramos parametrizaciones con el mismo punto base.

Analizamos, entonces, el cambio de punto base. Consideramos una curva de Jordan C parametrizada por $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$, de forma que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, y queremos reparametrizarla a otra con punto base $x_1 = \sigma(t_1)$. Definimos la nueva parametrización mediante:

$$\tau(s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 - t_1, \\ \sigma(s - 1 + t_1) & \text{si } 1 - t_1 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ahora calculamos el doble grado de σ mediante una elevación cualquiera suya $\tilde{\sigma}$:

$$\#(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (k, l),$$

y resulta que

$$\tilde{\tau}(s) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(s + t_1) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 - t_1, \\ \tilde{\sigma}(s - 1 + t_1) + (k, l) & \text{si } 1 - t_1 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

es una elevación de τ bien definida, y desde luego

$$\#(\tau) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(t_1) + (k, l) - \tilde{\sigma}(t_1) = (k, l). \quad \square$$

La definición anterior es aún más interesante porque proporciona un invariante de isotopía:

Proposición 6.4. *La clase de homotopía de una curva de Jordan del toro es invariante por isotopía.*

Demostración. Sea h_s una isotopía de \mathbb{T}^2 que transforma una curva de Jordan C en otra C' , es decir, tal que h_0 es la identidad y $h_1(C) = C'$. Entonces si σ parametriza C , $\tau = h_1 \circ \sigma$ parametriza C' , y $H_s = h_s \circ \sigma$ es una homotopía entre σ y τ . Pero es además una homotopía de lazos, pues $H_s(0) = h_s(\sigma(0)) = h_s(\sigma(1)) = H_s(1)$, luego σ y τ tienen el mismo doble grado, pues este es invariante bajo homotopía de lazos, como ya se vió en la observación 5.6(1). \square

Que es *el* invariante de isotopía será el último teorema de la memoria.

7. EL RECUBRIDOR MERIDIONAL

En esta sección estudiamos con más detalle el recubridor meridional, que ya se introdujo en el ejemplo 1.2(3). Este recubridor es inyectivo en regiones con forma espiral, como la que se puede ver en la figura 8. Nótese que, a pesar de que definimos el recubridor con el logaritmo neperiano, de aquí en adelante todas las figuras que representen q considerarán el recubridor equivalente donde la base del logaritmo es mucho más cercana a 1, para facilitar la visualización.

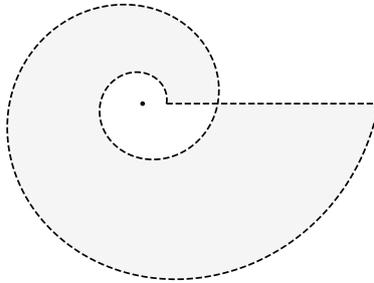


FIGURA 8. Un abierto U maximal donde $q|_U$ es inyectiva.

Proposición 7.1. *El recubridor meridional q induce el siguiente homomorfismo de los grupos fundamentales $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \tilde{x}_0) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) = \mathbb{Z}^2$, para puntos base cualesquiera tales que $x_0 = q(\tilde{x}_0)$:*

$$q_* : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$$

$$b \mapsto (0, b).$$

Demostración. Es suficiente probar que la imagen de un lazo de clase 1 en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un lazo de clase $(0, 1)$, porque la imagen del generador determina el homomorfismo definido arriba. De hecho, vamos a probarlo para el representante prototípico de la clase 1: la circunferencia $\tilde{\sigma} : t \mapsto e^{2\pi it}$. Aplicando q , tenemos:

$$\sigma(t) = q \circ \tilde{\sigma}(t) = (1, e^{2\pi it}),$$

que es precisamente el meridiano, cuya clase es $(0, 1)$ como ya hemos visto. \square

La proposición anterior nos permite conocer mejor el recubridor meridional:

Corolario 7.2. *Las elevaciones vía q de un lazo del toro de clase (a, b) son a su vez lazos si y solo si $a = 0$.*

Demostración. Es consecuencia directa de la proposición anterior 7.1. En efecto, la proposición 1.8 afirma que el subgrupo $q_*(\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}))$ es el de los lazos que elevan a lazos, y por la definición de q_* este subgrupo es el generado por $(0, 1)$, es decir, los lazos de clase (a, b) con $a = 0$. \square

Observaciones 7.3. (1) La imagen inversa del meridiano $t \mapsto (1, e^{2\pi it})$ está formada por circunferencias centradas en el origen, como se puede ver en la figura 9. En efecto, dado $k \in \mathbb{Z}$, los caminos

$$\tilde{\sigma}_k : t \mapsto e^{2\pi k} \cdot e^{2\pi it}$$

elevan al meridiano, lo que se comprueba aplicando q .

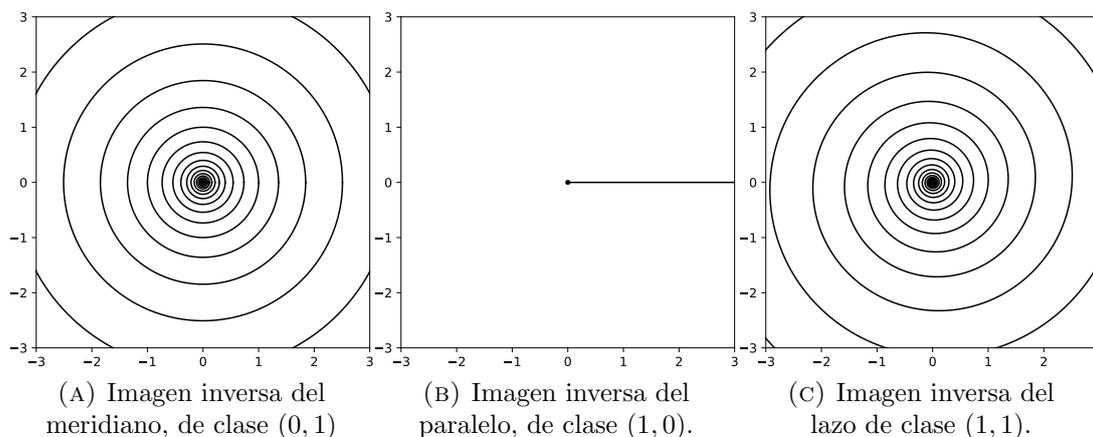


FIGURA 9. Imágenes inversas por el recubridor q .

(2) La imagen inversa del paralelo $t \mapsto (e^{2\pi it}, 1)$ es una semirrecta horizontal abierta que nace en el origen. En efecto, los caminos

$$\tilde{\sigma}_k : t \mapsto e^{2\pi(k+t)}$$

elevan el paralelo, y su unión es la semirrecta que describimos, mostrada, de nuevo, en la figura 9.

(3) Un camino con una imagen inversa un poco más compleja es el lazo de clase $(1, 1)$:

$$\sigma : t \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi it}),$$

que eleva a una espiral. En efecto, sus elevaciones son:

$$\tilde{\sigma} : t \mapsto e^{2\pi(k+t)} \cdot e^{2\pi it},$$

que forman una espiral logarítmica alrededor del origen, que también se muestra en la figura 9. \square

Vamos a introducir un último concepto relacionado con el recubridor y a ver un resultado sobre él que será útil en varias de las demostraciones posteriores.

Definición y proposición 7.4. *Sea C una curva de Jordan del toro \mathbb{T}^2 , parametrizada por σ . Entonces, dos elevaciones $\tilde{\sigma}_0$ y $\tilde{\sigma}_1$ son consecutivas si $|\tilde{\sigma}_1(0)| / |\tilde{\sigma}_0(0)| = e^{2\pi}$. Esto equivale a que, para todo $t \in [0, 1]$:*

$$\tilde{\sigma}_1(t) = e^{2\pi} \tilde{\sigma}_0(t).$$

Demostración. Primero, la condición $|\tilde{\sigma}_1(0)| / |\tilde{\sigma}_0(0)| = e^{2\pi}$ equivale a $\tilde{\sigma}_1(0) = e^{2\pi} \tilde{\sigma}_0(0)$, puesto que los puntos base de todas las elevaciones de σ tienen el mismo argumento complejo, por definición de q . Para probar la equivalencia, dada $\tilde{\sigma}_0(t)$ consideramos la elevación $\bar{\sigma}_1 = e^{2\pi} \tilde{\sigma}_0$, que desde luego cumple la condición anterior. Aplicando q , se comprueba que ambas elevan a σ , y dado que $\tilde{\sigma}_1(0) = \bar{\sigma}_1(0)$, por la unicidad de la elevación 1.6 han de ser la misma. \square

Observación 7.5. Si bien el concepto de elevaciones consecutivas aparece en relación con el recubridor q , a veces será útil extender la noción a lazos consecutivos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sin entenderlos como elevaciones. En cualquier caso, si dos lazos (de Jordan) son consecutivos, resultarán ser elevaciones de un mismo lazo (de Jordan) del toro. \square

Además, en nuestras demostraciones surgirá a menudo la idea de curvas de Jordan consecutivas, entendidas como conjuntos. La siguiente proposición muestra que efectivamente podemos hablar de tal cosa.

Definición y proposición 7.6. *Sean dos curvas de Jordan C y C' de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que:*

$$C' = \{e^{2\pi} x : x \in C\}.$$

Entonces existen parametrizaciones respectivas σ y σ' que son consecutivas. Decimos entonces que C y C' son consecutivas.

Demostración. Sea σ una parametrización cualquiera de C . La parametrización que buscamos es $\sigma' = e^{2\pi} \sigma$, que parametriza a C' , y que es consecutiva a σ . \square

Observaciones 7.7. Dada una curva de Jordan C de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ parametrizada por σ cuyas elevaciones son lazos, podemos decir aún más sobre sus elevaciones:

(1) Es posible ordenar todas las elevaciones $\tilde{\sigma}_k$ de σ , con $k \in \mathbb{Z}$, de forma que $\tilde{\sigma}_k$ y $\tilde{\sigma}_{k+1}$ sean consecutivas para todo k .

(2) Si σ no es nulhomótopa, sus elevaciones contendrán al origen en su interior, pues ellas tampoco serán nulhomótopas. Es interesante observar que, con el orden definido en (1), cada elevación de la lista tiene a todas las (infinitas) anteriores en su interior, y a todas las (infinitas) siguientes en su exterior, como muestran las figuras 10 y 11 para dos caminos en el toro, en las que se muestran diez elevaciones consecutivas para cada uno.

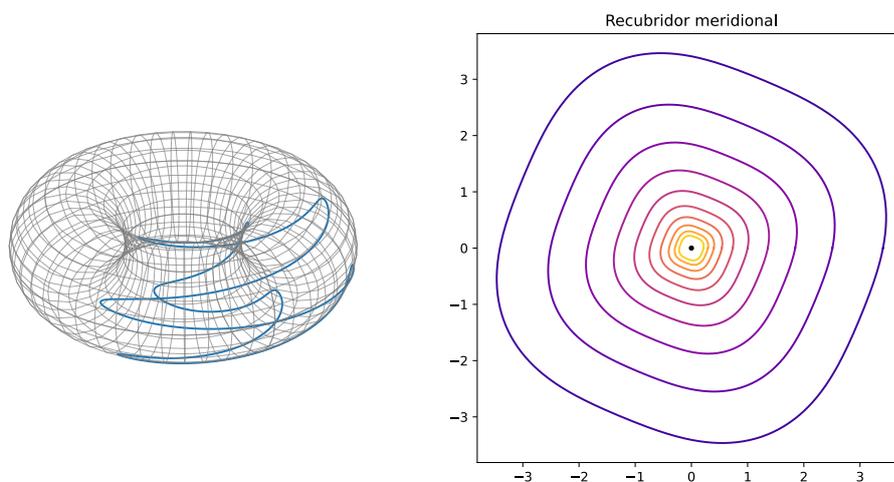


FIGURA 10. Un camino de clase $(0, 1)$ en el toro y varias de sus elevaciones consecutivas vía q .

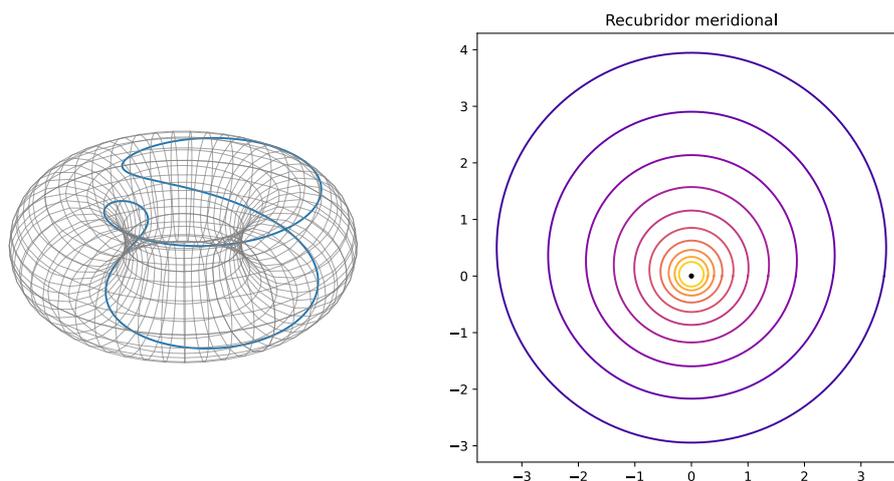


FIGURA 11. Otro camino de clase $(0, 1)$ con varias elevaciones consecutivas vía q .

(3) Si, por el contrario, σ es nulhomótopa, sus elevaciones no contendrán al origen, por ser también nulhomótopas, y tampoco se contendrán las unas a las otras. Un ejemplo de una curva de este tipo, no demasiado simple, se puede ver en la figura 12. \square

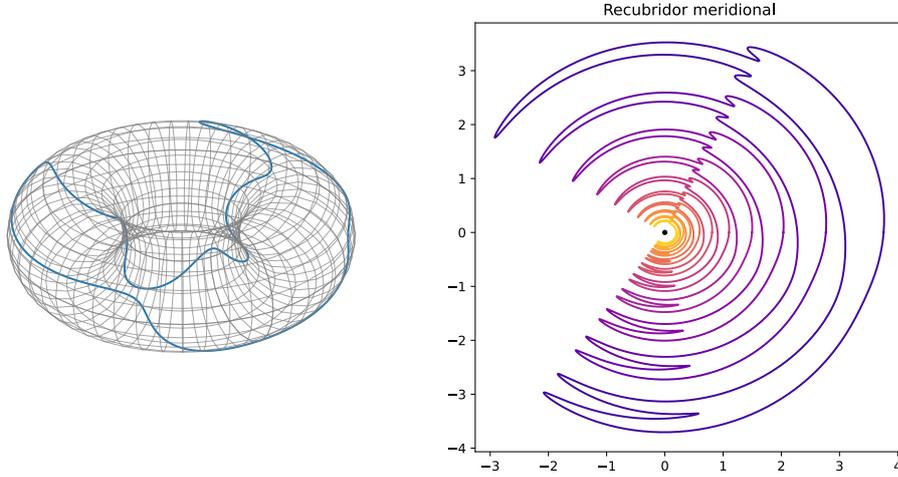


FIGURA 12. Un camino nulhomótopo en el toro y varias elevaciones suyas consecutivas vía q .

Recordamos ahora varios de los resultados de la sección 1, un poco maquillados para que se adapten a nuestras necesidades. Antes, definimos el soporte de un homeomorfismo para simplificar el discurso.

Definición 7.8. Dado un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$, llamamos *soporte* de h al conjunto:

$$\text{sop } h = \{z \in X : h(z) \neq z\},$$

esto es, a los puntos donde h no es la identidad.

La discusión desemboca en una observación, que se usará con asiduidad en las secciones venideras para inducir isotopías del toro a partir de isotopías del espacio recubridor que cumplan ciertas condiciones.

Observaciones 7.9. (1) Sea $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ un homeomorfismo y sea $q : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubridor. Si q es inyectiva en $\overline{\text{sop } h}$ y esta adherencia es compacta, entonces existe por la proposición 1.11 un entorno U de $\overline{\text{sop } h}$ en el que q es inyectiva.

(2) Reescribiendo la proposición 1.12 concluimos que, en las condiciones anteriores, h induce un homeomorfismo $h' = q \circ h \circ (q|_U)^{-1}$ que se puede extender (por la identidad) a todo X .

(3) La proposición 1.14 es la versión para isotopías de la anterior, y la reescribimos como sigue: si h_s es una isotopía ambiente, entonces h'_s también lo es, siempre que $\overline{\text{sop } h} \subset U$ para todo s . \square

8. PRIMERAS ISOTOPÍAS

Toda la preparación de la sección anterior nos permite construir isotopías básicas entre ciertos tipos de curvas del toro, al principio bastante restringidos, pero que luego iremos ampliando a curvas más generales. Empezamos con un resultado bastante general sobre curvas nulhomótopas, cuya demostración no usa el recubridor meridional, en favor del doble exponencial $pp = p \times p$.

Lema 8.1. *Dos curvas de Jordan del toro nulhomótopas y disjuntas del meridiano y del paralelo son isotopas ambiente.*

Demostración. Consideramos en este caso el recubridor doble exponencial pp del ejemplo 1.2(2). Sea C una curva de Jordan en las condiciones del enunciado y consideremos la elevación \tilde{C} de C . Vamos a ver primero que \tilde{C} es isotopa ambiente a una circunferencia de su interior, y después veremos que dos circunferencias construidas así son isotopas.

Antes de nada, \tilde{C} está contenida en un cuadrado abierto $]k, k+1[\times]l, l+1[$, con $k, l \in \mathbb{Z}$. En efecto, la imagen inversa del meridiano son las rectas $x = k$ y la del paralelo, las rectas $y = l$. Como \tilde{C} es conexo y no corta a ninguna de ellas, ha de estar en una componente conexa de:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_k \{x = k\} \cup \bigcup_l \{y = l\} \right),$$

que son precisamente los cuadrados que describíamos. Es más, en cada uno de esos cuadrados hay una elevación $\tilde{C}_{k,l}$ de C , pues trasladando \tilde{C} con coordenadas enteras obtenemos otra elevación de C .

Elegimos $\tilde{C} = \tilde{C}_{0,0}$, contenida en $]0, 1[\times]0, 1[$, y tomamos un abierto U cuya adherencia \bar{U} esté contenida en $]0, 1[\times]0, 1[$ y contenga a \tilde{C} . El interior de \tilde{C} contendrá una circunferencia \tilde{C}' tan pequeña como queramos. Por la proposición 3.1, con el abierto U , podemos probar que \tilde{C} es isotopa a \tilde{C}' y, además, la isotopía induce otra en el toro en virtud de la observación 7.9(3).

Ahora, sean z_1, z_2 los centros de dos circunferencias contenidas en $]0, 1[\times]0, 1[$, que podemos suponer del mismo radio. La isotopía de traslación $\tilde{h}_s(z) = z + s(z_2 - z_1)$ del transforma una en la otra, e induce una isotopía h_s del toro, como ya vimos en la observación 5.6(2). Esta isotopía es la que buscamos. \square

A partir de ahora ya usaremos siempre el recubridor meridional q para encontrar isotopías entre curvas no nulhomótopas. Antes, vamos a caracterizar los conjuntos en los que q es inyectivo, que resultan ser además maximales, aunque esto es algo que no usaremos.

Proposición 8.2. *Dos curvas de Jordan $C, C' \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ consecutivas, y que contengan al origen en su interior, delimitan un abierto U en el cual el recubridor q es inyectivo. De hecho, q es inyectivo en $C \cup U$ y en $C' \cup U$.*

Demostración. Las curvas son consecutivas y contienen al origen en su interior, y por tanto están encajadas, como ya discutimos en la observación 7.7(2). Digamos que C está en el interior de C' , y en ese caso $C' = e^{2\pi}C$.

Para ver que q es inyectiva en U , consideramos dos puntos distintos z_1, z_2 en U . Si $q(z_1) = q(z_2)$, por la primera coordenada ambos puntos tienen el mismo normalizado, digamos w . Ahora, por la segunda coordenada, tenemos que $z_2 = e^{2k\pi} z_1$ para un $k \in \mathbb{Z}$, y podemos suponer que z_1 tiene menor norma, con lo que $k \in \mathbb{Z}^+$.

Sabemos que z_1 está en U y por tanto en el exterior de C . Entonces, z_2 ha de estar en el exterior de $C_k = e^{2k\pi} C$, pues la homotecia es un homeomorfismo del plano. Como el exterior de C_k está contenido en el exterior de $C' = C_1$ por ser $k \in \mathbb{Z}^+$, desde luego $z_2 \notin U$.

Para verlo para $C \cup U$ o $U \cup C'$, tenemos que $z_1 \in C$ si y solo si $z_2 \in C'$, de forma que se cumple quitando uno de los bordes. \square

A partir de la caracterización anterior, vamos a ver que la condición necesaria para que las isotopías del espacio recubridor induzcan otras del toro se puede garantizar en determinadas circunstancias:

Proposición 8.3. *Sean C, C' y C'' tres curvas de Jordan de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, con C'' en el interior de C' , y C' en el interior de C . Si C y C'' son consecutivas, entonces existe una isotopía de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que transforma C' en C , y tal que q es inyectivo en la adherencia de su soporte.*

Demostración. Por la proposición 8.2, q es inyectivo en el anillo U entre C y C'' (que contiene a C'), y también en $C \cup U$. Como $C \cup U$ contiene a la adherencia del anillo entre C y C' , que es compacta, q es inyectivo en esa adherencia, luego tiene un entorno abierto V que no contiene al origen donde q también es inyectivo (por la proposición 1.11). Elegimos otro entorno menor W tal que $\overline{W} \subset V$.

El trabajo pesado está hecho en la proposición 3.1. Con ella, podemos fabricar una isotopía del plano complejo que transforme C' en C y que sea la identidad fuera de W . Esto garantiza que el soporte de la isotopía esté contenido en V y que q sea inyectivo en la adherencia de ese soporte. Para terminar solo falta decir que como el origen no está en V , pues la isotopía lo deja invariante y por tanto su restricción es también una isotopía de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. \square

Tras toda la preparación, construimos la primera isotopía para curvas de Jordan no nulhomótopas, en este caso las disjuntas de clase $(0, 1)$ (recuérdese que $(0, 1) \equiv (0, -1)$ para curvas de Jordan).

Proposición 8.4. *Dos curvas de Jordan del toro disjuntas de clase $(0, 1)$ son isotópicas ambiente.*

Demostración. Empezamos considerando las dos curvas C y C' y dos elevaciones cualesquiera \tilde{C}, \tilde{C}' a través del recubridor meridional q . Las elevaciones son curvas por el corolario 7.2, y son de Jordan por la proposición 1.10. Además, las dos curvas de Jordan \tilde{C} y \tilde{C}' son disjuntas, pues lo son las curvas de Jordan de partida, y cualquier intersección en el recubridor descendería al toro.

Ahora, vamos a ver que podemos elegir \tilde{C} y \tilde{C}' de tal forma que podamos aplicar la proposición anterior y comprobar que son isotópicas. Para ello, denotamos todas las elevaciones de C' como \tilde{C}'_k para cada $k \in \mathbb{Z}$, de forma que \tilde{C}'_k y \tilde{C}'_{k+1} sean consecutivas

(como hacíamos en la observación 7.7(1)). Tendríamos, pues, que $\tilde{C}'_k = e^{2\pi k} \tilde{C}'_0$ para cada k . Para C , tomamos una elevación cualquiera \tilde{C} .

Si consideramos \tilde{C} y otra elevación cualquiera \tilde{C}'_k , ambas son disjuntas y contienen al origen, de forma que una ha de estar en el interior de la otra. De esta forma, tomamos k como el mayor k que verifica que \tilde{C}'_k está en el interior de \tilde{C} . Este k está bien definido, pues:

- Hay alguna elevación de C' en el interior de \tilde{C} , pues si no, \tilde{C} estaría en el interior de todas las \tilde{C}'_k , pero la intersección de los interiores es vacía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Existe un k con la propiedad pedida, pues \tilde{C} es acotada pero la norma de las \tilde{C}'_k tiende a infinito cuando $k \rightarrow \infty$, de forma que \tilde{C}'_k no puede estar en el interior de \tilde{C} a partir de un cierto k .

Por tanto, \tilde{C} está entre dos elevaciones consecutivas, \tilde{C}'_k y \tilde{C}'_{k+1} , y tomando \tilde{C}'_k , \tilde{C} y \tilde{C}'_{k+1} , nos encontramos en las condiciones de la proposición 8.3. Obtenemos así una isotopía \tilde{h} , que induce otra en el toro por la observación 7.9(3). \square

9. ISOTOPÍAS POR TRANSVERSALIDAD

Necesitamos aún algo más de trabajo para probar que cualesquiera dos curvas de Jordan de clase $(0, 1)$ son isótopas. Esto requerirá analizar las posibles intersecciones de las dos curvas, y para ello necesitamos estudiar primero un tipo especial de intersección: la intersección transversal.

Definición 9.1. Una curva de Jordan $C \subset \mathbb{R}^2$ es *transversal* a una circunferencia Σ si la corta en una cantidad finita de puntos, y en cada uno de ellos C es localmente una recta que atraviesa a Σ .

Las curvas topológicas pueden ser muy patológicas, pero la transversalidad es lo suficientemente genérica para que, dado un conjunto (finito) de circunferencias, cada curva tenga otra arbitrariamente cerca transversal a todas ellas.

Lema 9.2. Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan y $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ una colección finita de circunferencias disjuntas. En todo entorno U de C hay una curva de Jordan C' contenida en el interior de C y transversal a todas las circunferencias $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$. Además, si C contiene al origen en su interior, podemos elegir C' para que también lo contenga.

Demostración. Gracias al lema 2.7, podemos encontrar una curva de Jordan poligonal P que esté en U y en el interior de C , y que contenga al origen en su interior si C lo contiene. Esta poligonal corta a las circunferencias en una cantidad finita de puntos y veremos que podemos hacer la intersección transversal en todos. Representamos en la figura 13 las posibles intersecciones con una circunferencia.

Solo hay tres posibles tipos de intersección: o bien ya es transversal, o bien es tangente, o bien es incidente, esto es, toca la circunferencia en un vértice. Cuando es tangente, podemos evitar el corte añadiendo dos vértices, uno a cada lado del punto de tangencia, y uniéndolos con un tercero, que esté en el exterior de la intersección con Σ_i . Cuando es incidente, uniendo dos puntos (no extremos) de los segmentos que inciden eliminamos

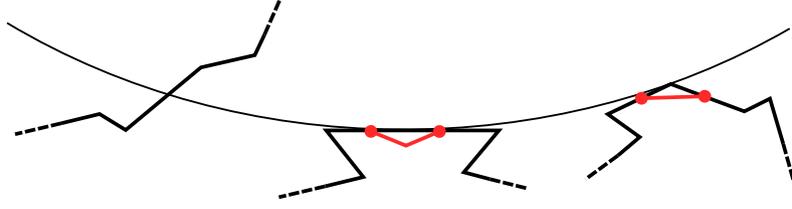


FIGURA 13. Las tres situaciones en las que una poligonal puede cortar a una circunferencia. De izquierda a derecha, corte transversal, corte tangente y corte incidente. En rojo, los arreglos necesarios.

el corte. Si la poligonal atravesara en el punto de incidencia, el nuevo segmento también atravesaría, con lo que sería transversal. Además, en ambos casos podemos tomar los puntos nuevos lo suficientemente cercanos al punto problemático para que la nueva poligonal no tenga nuevas intersecciones con otra circunferencia o consigo misma, y esté contenida en U . \square

El resultado fundamental para nosotros es que podemos construir isotopías en entornos de intersecciones transversales, como prueba el siguiente lema técnico.

Lema 9.3. *Sea C una curva de Jordan de \mathbb{R}^2 transversal a una circunferencia Σ . Sea γ un arco de Jordan de C , con los extremos en Σ y exterior a ella en el resto de puntos. Los dos extremos delimitan un arco de Jordan J de Σ , elegido de forma que γ y J delimiten un dominio de Jordan E exterior a Σ , lo cual es posible por la proposición 2.6(2). Entonces, dado un entorno U de \bar{E} , existe una isotopía de la identidad h_s tal que:*

- (i) h_s es la identidad fuera de U , y
- (ii) $h_1(C) \cap \Sigma \cap U = \emptyset$ (quizá reduciendo U).

En particular, el número de puntos de intersección de $h_1(C)$ y Σ es estrictamente menor que el de C y Σ .

Demostración. Denotamos x_0, x_1 los extremos (comunes) de los dos arcos $\gamma \subset C$ y $J \subset \Sigma$. Nuestro objetivo es “aplastar” la curva $\gamma \cup J$, de forma que toda la “joroba” γ pase a estar bajo Σ . El abierto U del enunciado contiene a esta “joroba”, la adherencia \bar{E} del interior de $\gamma \cup J$. Sin embargo, vamos a empezar viendo que nuestra elección de U ha de ser aún más cuidadosa, como se muestra en la figura 14.

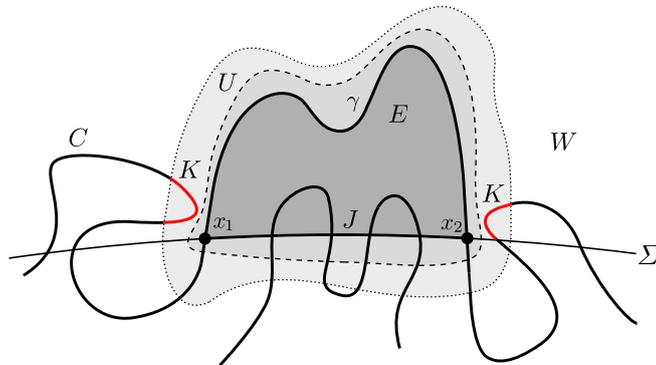


FIGURA 14. Reducción de U para excluir ciertas partes de C .

Para reducir U , consideramos la circunferencia Σ , que descompone el plano en dos componentes conexas, en una de las cuales, que llamamos W , está γ (excepto sus extremos). Por otra parte $C \setminus \Sigma = C \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ es una unión disjunta de arcos abiertos de extremos los p_i de intersección con Σ . De esos arcos, unos están en el interior de $\gamma \cup J$ y otros en el exterior: de estos últimos, consideramos los que están en W y denotamos K la unión de sus adherencias. Este conjunto $K \subset C$ es un compacto disjunto de \bar{E} , y reduciendo U podemos suponer $K \cap U = \emptyset$. Remarcamos que C puede atravesar Σ en más puntos del arco J que sus extremos, pero ya veremos que eso no será un problema.

Tomamos puntos $y_i \in \Sigma \setminus J$ a cada lado de J , de manera que el arco de Σ entre y_i y x_i esté totalmente contenido en U . Linearizando la situación como en la demostración de 3.2, podemos construir un arco Γ_1 de extremos y_0, y_1 contenido (salvo los y_i) en $U \cap W$ y en el exterior de $\gamma \cup J$. Llamamos Γ_2 al arco de Σ entre y_0 e y_1 que contiene a J , y Γ al otro, el resto de la circunferencia Σ . Esta construcción queda recogida en la figura 15.

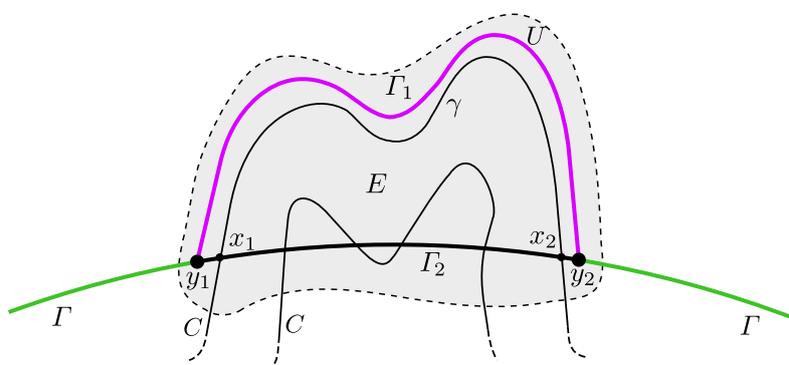


FIGURA 15. Preparación para la isotopía h_s .

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la proposición 3.2 a Γ_1, Γ_2 y Γ , donde es importante resaltar de nuevo que Γ es el resto de la circunferencia y por tanto se cierra fuera de la imagen. Así, obtenemos una isotopía h_s que es la identidad en Γ y fuera de U y transforma toda la región entre Γ_1 y Γ (que incluye la “joroba” y el interior de Σ) en la región entre Γ_2 y Γ (que es solamente el interior de Σ). Toda la transformación queda reflejada en la figura 16.

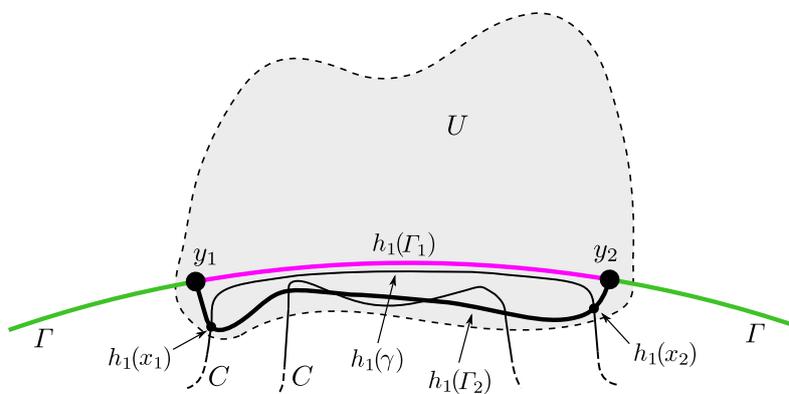


FIGURA 16. Acción de la isotopía h_s .

Por construcción, h_s es la identidad fuera de U , y parece claro que $h_1(C) \cap \Sigma \cap U = \emptyset$, pero hacemos el cálculo:

$$\begin{aligned} h_1(C) \cap \Sigma \cap U &= h_1(C) \cap (\Gamma \cup \Gamma_2) \cap h_1(U) \\ &= h_1(C) \cap (h_1(\Gamma) \cup h_1(\Gamma_1)) \cap h_1(U) \\ &= h_1(C \cap \Gamma \cap U) \cup h_1(C \cap \Gamma_1 \cap U) = \emptyset. \end{aligned}$$

Está claro que, como se dijo en el enunciado, podría hacer falta reducir U , pues en general la condición (ii) no se cumple con el U original (reflejado con el gris más claro en la figura 14). Es más, sin ello no podríamos probar que el número de puntos de intersección se reduce tras la isotopía, que es el resultado realmente importante del enunciado. \square

10. ISOTOPÍAS DE CURVAS DE JORDAN DE CLASE $(0, 0)$ Y $(0, 1)$

En esta sección analizamos el tipo de isotopía de: (1) las curvas de Jordan de clase $(0, 0)$ (nulhomótopas), y (2) las curvas de Jordan de clase $(0, 1)$. Estos dos tipos de curvas de Jordan tienen elevaciones que también son curvas de Jordan para el recubridor meridional $q : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{T}^2$, según la proposición 1.10 y el corolario 7.2.

Empezamos fijando algunas notaciones relativas a q . Denotamos M el meridiano de \mathbb{T}^2 , discutido en la observación 7.3(1). Ya vimos entonces que $q^{-1}(M)$ es una unión de circunferencias Σ_k centradas en el origen y radio $e^{2\pi k}$; denotamos B_k el disco abierto de ese radio. Dos circunferencias Σ_k y Σ_{k+1} son consecutivas en el sentido de la definición 7.6, y según la proposición 8.2 el recubridor q es inyectivo en $B_{k+1} \setminus B_k$.

La primera parte de la discusión es común a las dos clases de curvas. Ya hemos desarrollado en las secciones previas los lemas necesarios, y es cuestión de unirlos cuidadosamente.

Lema 10.1. *Sea C una curva de Jordan del toro de clase $(0, 0)$ o $(0, 1)$. Entonces C es isótopa a otra curva de Jordan C' (de la misma clase) disjunta del meridiano.*

Demostración. Antes de nada, observamos que la clase de C' es necesariamente la de C porque la clase es invariante por isotopía, como vimos en la proposición 6.4. Consideramos una elevación de C que llamamos \tilde{C} . Como hemos recordado antes, \tilde{C} es una curva de Jordan de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. El recubridor q es inyectivo en \tilde{C} , y por la proposición 1.11 también lo es en un entorno abierto U suyo. Por ser \tilde{C} compacta y no pasar por el origen, está contenida en una corona circular abierta W entre dos circunferencias Σ_i y Σ_j de $q^{-1}(M)$ (no necesariamente consecutivas). Vamos a comprobar que podemos suponer que \tilde{C} es transversal a todas las circunferencias Σ_k contenidas entre Σ_i y Σ_j , esto es, con $i < k < j$ (a las demás no las interseca).

En efecto, podemos reducir U para que $\bar{U} \subset W$, y así \bar{U} sea compacto. También podemos reducir U aún más para que el recubridor q sea inyectivo en su adherencia. Ahora aplicamos el lema 9.2 a U , y encontramos en el interior de \tilde{C} una curva de Jordan $P \subset U$ transversal a todas las circunferencias Σ_k contenidas en W . Además, si \tilde{C} tiene al origen en su interior, por el lema tomamos P para que también lo tenga. De esta forma, garantizamos que el abierto U contiene el anillo entre P y \tilde{C} (tomando, si hace falta, una P más próxima a \tilde{C}): si P no tuviera al origen en su interior, este estaría en el anillo y

$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no podría contener este anillo. Esto no es un problema si \tilde{C} no contiene al origen en su interior, pues entonces el anillo tampoco lo contiene.

Garantizadas las condiciones sobre U , podemos aplicar la proposición 3.1, y \tilde{C} y P son isotópicas en el plano por una isotopía cuyo soporte está contenido en U . Esto, unido a las características de U , nos permite aplicar la observación 7.9(3) para obtener una isotopía del toro entre C y $C' = q(P)$ (que es una curva de Jordan, pues $q|_P$ es homeomorfismo).

Suponiendo ya que \tilde{C} es transversal a las Σ_k , tenemos que $\tilde{C} \cap q^{-1}(M)$ es finito, y vamos a usar el lema de isotopía 9.3 para reducir el número de puntos de intersección, es decir, para encontrar una curva de Jordan C' del toro isotopa a C y que tenga una elevación \tilde{C}' transversal a las circunferencias Σ_k y que las corte en menos puntos que \tilde{C} . Una vez demosetremos esto, bastará con repetir el proceso hasta que ya no queden puntos de intersección: si \tilde{C}' no corta a las Σ_k , entonces $C' = q(\tilde{C}')$ no corta al meridiano.

Procedemos como sigue. Sea $z \in \tilde{C}$ de norma máxima. Este punto no puede estar en ninguna Σ_k pues por transversalidad debería atravesarla y habría en \tilde{C} puntos de norma mayor. Por tanto, z está en el anillo abierto W entre dos circunferencias consecutivas $\Sigma = \Sigma_k$ y $\Sigma' = \Sigma_{k+1}$. Si $\tilde{C} \subset W$, hemos acabado. En otro caso \tilde{C} corta transversalmente a Σ y z está en un arco γ de \tilde{C} contenido en W excepto sus extremos $x_0, x_1 \in \Sigma$, y exterior a Σ salvo estos. Consideramos los dos arcos J y J' que x_0 y x_1 determinan en Σ , nombrados para que el interior E de $\gamma \cup J$ esté en el exterior de $J \cup J' = \Sigma$ (lo que es posible en virtud de la proposición 2.6(2)). Concluimos que E está contenido en el anillo abierto W , pues el exterior de Σ' es conexo, no acotado y no corta a $\gamma \cup J$.

Después de todo esto, como q es inyectivo en $W \cup \Sigma$, lo es en \bar{E} , luego en un entorno suyo V . Por el lema de isotopía 9.3 hay una isotopía h_s del plano que es la identidad fuera de V y tal que $h_1(\tilde{C})$ no corta a Σ en V . Esta isotopía desciende al toro como es habitual y $C' = q(h_1(\tilde{C}))$ es una nueva curva de Jordan con una elevación que corta transversalmente a las Σ_k y en menos puntos que \tilde{C} , justo como queríamos. \square

Después de esta primera isotopía debemos distinguir el caso nulhomótopo, y de hecho ya podemos demostrar el resultado fundamental para este caso.

Teorema 10.2. *Todas las curvas de Jordan del toro de clase $(0, 0)$ son isotópicas ambiente.*

Demostración. Sea $C \subset \mathbb{T}^2$ una curva de Jordan de clase $(0, 0)$. Por el lema anterior 10.1, podemos suponer que C no corta al meridiano y consideramos una elevación suya \tilde{C} . Como C no corta al meridiano, \tilde{C} estará en el anillo abierto W limitado por dos circunferencias consecutivas Σ_k y Σ_{k+1} . Esto se debe a que el origen no está en el interior de \tilde{C} , pues \tilde{C} es nulhomótoma en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea U un entorno abierto de \tilde{C} con $\bar{U} \subset W$, y como q es inyectiva en W lo es en \bar{U} . Ahora consideramos cualquier circunferencia S contenida en el interior de \tilde{C} que no corte al eje real positivo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y la isotopía de 3.1 que lleva \tilde{C} a S y deja fijo $\mathbb{C} \setminus U$ desciende, como es habitual, a una isotopía del toro que lleva C a $C' = q(S)$. Pero por construcción C' no corta al meridiano, por estar S en W , ni al paralelo, porque la elevación de este es el semieje real positivo.

Hemos probado que toda curva de Jordan de clase $(0, 0)$ es isotopa a una que no corta ni al meridiano ni al paralelo. Como estas son todas isotopas entre sí por el lema 8.1, hemos terminado. \square

Visto el resultado central para las curvas nulhomótopas, podemos pasar al análogo para curvas de clase $(0, \pm 1)$.

Teorema 10.3. *Todas las curvas de Jordan del toro de clase $(0, 1)$ son isotopas (al meridiano).*

Demostración. Sea $C \subset \mathbb{T}^2$ una curva de Jordan de clase $(0, 1)$. Por el lema 10.1, podemos suponer que C no corta al meridiano. Pero dos curvas de Jordan de clase $(0, 1)$ disjuntas son isotopas ambiente, como ya hemos probado en la proposición 8.4, y ya hemos acabado. \square

11. HOMEOMORFISMOS DE CURVAS DE JORDAN

Lo que nos queda ahora es extender los resultados obtenidos para curvas de Jordan de clase $(0, 1)$ a todas las no nulhomótopas. Para lograrlo, empezamos introduciendo dos homeomorfismos del toro:

Definición 11.1. El homeomorfismo del toro $h_L(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = (e^{i(\theta+\varphi)}, e^{i\varphi})$ se llama *enroscamiento paralelo*, y el homeomorfismo $h_M(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = (e^{i\theta}, e^{i(\theta+\varphi)})$ se llama *enroscamiento meridional*. Nos referiremos a ellos y a sus inversos como *enroscamientos*.

Proposición 11.2. *Los enroscamientos inducen los siguientes isomorfismos del grupo fundamental:*

$$\begin{aligned} h_{L*}(a, b) &= (a + b, b), \\ h_{M*}(a, b) &= (a, a + b). \end{aligned}$$

Demostración. Como de costumbre, basta ver a donde van los generadores. Lo probamos para h_L , y la prueba para h_M es análoga. Consideramos el paralelo σ y el meridiano τ , como los definimos en 5.1. Entonces, sus imágenes por h_L son:

$$\begin{aligned} h_L(\sigma(t)) &= h_L(e^{2\pi it}, e^0) = (e^{2\pi it}, 0), \\ h_L(\tau(t)) &= h_L(e^0, e^{2\pi it}) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi it}). \end{aligned}$$

Esto es, h_L manda el paralelo en sí mismo, y el meridiano en un lazo de clase $(1, 1)$ (pues eleva por el recubridor universal al segmento diagonal entre el origen y $(1, 1)$). Por tanto, h_{L*} tiene la forma buscada. \square

Observación 11.3. Los homeomorfismos inversos h_L^{-1} y h_M^{-1} inducen isomorfismos del grupo fundamental

$$\begin{aligned} h_{L*}^{-1}(a, b) &= (a - b, b), \\ h_{M*}^{-1}(a, b) &= (a, b - a). \end{aligned} \quad \square$$

Observación 11.4. El homeomorfismo $h = h_L \circ h_M^{-1} \circ h_L$ induce un isomorfismo $h_* : (a, b) \mapsto (b, -a)$. \square

No necesitamos nada más para pasar ya al lema básico de esta sección.

Lema 11.5. *Dada una clase $(a, b) \neq (0, 0)$ de $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$, existe un homeomorfismo del toro $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $h_*(a, b) = (0, d)$, donde $d = \gcd(a, b)$.*

Demostración. Consideramos el caso $|a| \geq |b|$. Si $b = 0$ ya hemos terminado, y, si no dividimos a entre b para encontrar enteros n y r tales que $a = bn + r$ con $0 \leq r < |b|$. El enroscamiento h_L^{-n} induce un isomorfismo de grupos fundamentales que cumple $(a, b) \mapsto (r, b)$, por la observación 11.3. Para el caso $|b| \leq |a|$ el argumento es análogo usando el enroscamiento h_M .

En ambos casos, hemos obtenido un homeomorfismo que manda la clase (a, b) a otra (a', b') tal que una de las componentes es estrictamente menor (en valor absoluto) y la otra igual, y además $\gcd(a, b) = \gcd(a', b')$. Repitiendo el argumento hasta que $a = 0$ o $b = 0$, nos queda necesariamente $(d, 0)$ o $(0, d)$ (pues $\gcd(a, b) = d$ para cualquier (a, b) del proceso). Ya hemos terminado, pues, si tenemos $(d, 0)$, basta con aplicar el homeomorfismo de la observación 11.4 para obtener $(0, d)$. \square

La demostración anterior es simplemente el algoritmo de Euclides de búsqueda del máximo común divisor [4, 1.b, p.36]. Pasamos a ver un par de casos particulares, que ejemplifican lo que será el teorema central de todo el trabajo.

Ejemplo 11.6. (1) Consideramos una curva de Jordan nulhomótopa del toro, por ejemplo, la imagen de la circunferencia $\tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{2}(1 + i) + \frac{1}{4}e^{2\pi it}$ del plano vía pp , $\sigma = pp \circ \tilde{\sigma}$. Es nulhomótopa porque $\tilde{\sigma}$ lo es en \mathbb{R}^2 .

La curva σ desconecta al toro en un disco y un toro pinchado. Para verlo, no hay más que considerar al toro como el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ con la relación de equivalencia que pega sus lados dos a dos en la misma dirección. Aquí, nuestro camino será precisamente $\tilde{\sigma}$, totalmente fuera de las regiones afectadas por el cociente. Así, comprobamos que el interior es un disco, mientras que el exterior es un toro sin un disco cerrado, esto es, un toro pinchado.

(2) Por otro lado, el toro sin el paralelo P es un cilindro abierto. En efecto, podemos escribir un homeomorfismo explícito entre $\mathbb{T}^2 \setminus P$ y $\mathbb{S}^1 \times]0, 2\pi[$. Este es:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{T}^2 \setminus P &\mapsto \mathbb{S}^1 \times]0, 2\pi[\\ (z, w) &\mapsto (z, \arg w), \end{aligned}$$

pues recordamos que el paralelo P es el conjunto $\mathbb{S}^1 \times \{1\} \subset \mathbb{T}^2$. \square

Y, por fin, podemos formular el resultado en el que culmina todo este trabajo.

Teorema 11.7. *Hay dos tipos de curvas de Jordan en el toro por homeomorfismo ambiente: las nulhomótopas, que desconectan al toro; y las demás, que no. Además, si C es nulhomótopa, las dos componentes conexas de $\mathbb{T}^2 \setminus C$ son un disco y un toro pinchado; y, si C no es nulhomótopa, $\mathbb{T}^2 \setminus C$ es un cilindro abierto.*

Demostración. El teorema 10.2 muestra que todas las curvas nulhomótopas son la misma bajo homeomorfismo ambiente. Además, el ejemplo 11.6(1) muestra una curva nulhomótopa que desconecta al toro en un disco y un toro pinchado, así que todas deben hacer lo mismo.

Para las demás, sabemos por el teorema 6.2 que las curvas de Jordan del toro tienen clase de homotopía (a, b) , con $\gcd(a, b) = 1$. Dada una curva de este tipo, por el lema 11.5, existe un homeomorfismo ambiente h_1 que la lleva en otra curva de clase $(d, 0) = (1, 0)$. Ahora, existe h_2 que manda esta al meridiano, por el teorema 10.3. El homeomorfismo $h_2 \circ h_1$ es el que buscamos. Análogamente al caso nulhomótopo, recurrimos al ejemplo 11.6(2) para ver que $\mathbb{T}^2 \setminus C$ es un cilindro abierto. \square

Podemos terminar la sección con un pequeño comentario sobre los retractsos en el toro.

Observación 11.8. Una curva de Jordan del toro es un retracto suyo si y solo si no lo desconecta. \square

Demostración. Si una curva de Jordan del toro no lo desconecta, entonces es homeomorfa ambiente al meridiano, por el teorema 11.7. Como además el meridiano es un retracto del toro (por la proyección que colapsa la primera coordenada de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$), la curva también lo es.

Para ver el recíproco, si una curva de Jordan del toro $A \subset \mathbb{T}^2$ es un retracto suyo, entonces la inclusión que induce en los grupos fundamentales es inyectiva, y por tanto A no puede ser nulhomótopa. Aplicando de nuevo el teorema 11.7, A no desconecta al toro. \square

12. ISOTOPÍAS DE CURVAS DE JORDAN

En las secciones 7 y 9 se han probado cuidadosamente varios resultados con isotopías, pero en la sección 11 no los hemos usado, dándonos por satisfechos con homeomorfismos ambiente. Esta sección será muy corta, pero mostrará que hay muchas más clases módulo isotopía que clases módulo homeomorfismo y las determinará todas. Recordemos que la clase de homotopía de una curva de Jordan está definida salvo signo (por la definición 6.3(1)).

Teorema 12.1. *Dos curvas de Jordan C y C' del toro son isótopas si y solo si sus clases de homotopía son iguales.*

Demostración. Ya hemos visto en la proposición 6.4 que dos curvas de Jordan isótopas tienen la misma la clase de homotopía, y ya anticipábamos allí que el último resultado de la memoria sería que es *el* invariante. Veámoslo.

Sean C y C' dos curvas de Jordan la misma clase de homotopía. Usamos el lema 11.5 para fabricar un homeomorfismo g que lleve C a una curva de Jordan $g(C)$ de clase $(0, 1)$, y por tanto C' a otra $g(C')$ de clase $(0, 1)$. Como todas las curvas de clase $(0, 1)$ son isótopas, existe una isotopía h_s tal que $h_1(g(C)) = g(C')$. Entonces $g^{-1} \circ h_s \circ g$ es una isotopía de C a C' :

$$g^{-1} \circ h_1 \circ g(C) = g^{-1} \circ g(C') = C'. \quad \square$$

REFERENCIAS

- [1] E. OUTERELO DOMÍNGUEZ, J. MARGALEF ROIG, J.L. PINILLA FERRANDO: *Topología, volumen V*. Alhambra, 1975.

- [2] M. JAENADA: *El teorema de Schoenflies*.
<http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/wp-content/uploads/sites/52/2020/03/maria.pdf> (consultado el 8 de marzo de 2020).
- [3] J. DAN PORRAS: *El teorema de la curva de Jordan y los grafos planares*.
<http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/wp-content/uploads/sites/52/2020/03/jaime.pdf> (consultado el 8 de marzo de 2020).
- [4] J.F. FERNANDO, J.M. GAMBOA: *Estructuras algebraicas: divisibilidad en anillos conmutativos*.
Sanz y Torres, 2014.
- [5] D. ROLFSEN: *Knots and links*.
AMS Chelsea Publishing, 1976.
- [6] J. DAN PORRAS, M. JAENADA, J.M. RUIZ: *Topología algebraica muy elemental en dimensión muy baja*.
Sanz y Torres, 2019.
- [7] S.S. CAIRNS: *An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem*.
Proc. AMS 2:6 (1951) 860–867.
- [8] R. LUISTO: *Proof of the Jordan curve theorem*.
<https://luisto.fi/documents/JordanCurveTheorem.pdf> (consultado el 23 de marzo de 2020).
- [9] M.H.A. NEWMAN: *Elements of the topology of plane sets of points*.
University Press, Cambridge 1964.
- [10] E. OUTERELO, J.M^a SÁNCHEZ ABRIL: *Elementos de topología*.
Sanz y Torres, Madrid 2008.
- [11] L. SIEBENMANN: *The Osgood-Schoenflies theorem revisited*.
Russian Math. Surveys 60:4 (2005) 645–672.