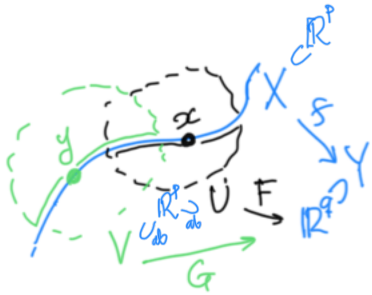
§ I.1 VARIEDADES DIFERENCIABLES

• **Aplicación diferenciable**

$f: X \to Y$, $\quad X \subset \mathbb{R}^p$, $\quad Y \subset \mathbb{R}^q$

$$\left[\ \forall x \in X\ \exists F: U^x \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{R}^q,\quad U^x \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^p,\quad f|_{U\cap X} = F|_{U\cap X}\ \right]$$

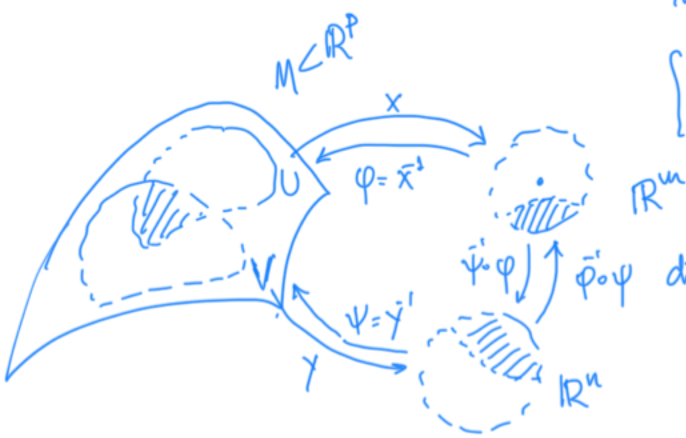


las extensiones no son únicas y dependen de cada punto.

• **Difeomorfismo** $\quad \exists f, f^{-1}$ & ambos diferenciables

..... **local** $\quad$ es un difeo de un entorno de x sobre otro de $f(x)$

• **Variedad diferenciable** $\quad M \subset \mathbb{R}^p\ \ \forall x \in M\ \exists$ difeo $x: U^x \to W$, $\quad U^x \overset{ab}{\subset} M$, $\quad W \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m$



$\left\{ \begin{array}{l} x: \text{sistema de coordenadas} \\ \varphi: \text{parametrización} \end{array} \right.$

$\psi^{-1}\circ\varphi$, $\varphi^{-1}\circ\psi$ difeo "cambio de coordenadas"

$\Downarrow$

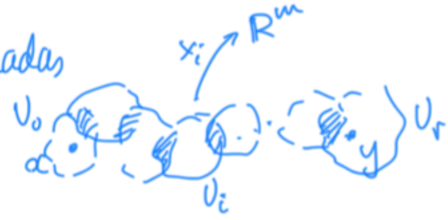
$n = m = \dim_x M$

• **Ejemplos**: Esferas, cilindros, cuádricas no singulares...
Proyecciones estereográficas.

• **Propiedades topológicas**: locales, las de $\mathbb{R}^m$ (conexión por caminos, compacidad, contractibilidad)

globales, las hereditarias de $\mathbb{R}^p$ (II Axioma, I Ax.)

+ M conexa ⇒ conexa por caminos & cadenas de coordenadas



• **Localización de aplicaciones**

$$\begin{tikzcd}
a \in M \arrow[r, "f"] & N \ni b = f(a) \\
U^a \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "f|"] \arrow[d, shift left, "x"] & V^b \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, shift right, "y"'] \\
A \arrow[u, shift left, "\varphi"] \arrow[r, "g"', "\psi^{-1}\circ f\circ\varphi"] & B \arrow[u, shift right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^m \supset A$, $\quad B \subset \mathbb{R}^n$, $\quad g = \psi^{-1}\circ f \circ \varphi$

continuidad: $\exists\, U^a \subset f^{-1}(V^b)$

$\left[\begin{array}{l} f \text{ diferenciable} \\ \Updownarrow \\ \forall \text{ localización } g \text{ lo es} \end{array} \right.$