TRABAJO DE FIN DE GRADO, JULIO 2021

COHOMOLOGÍA DE DE RHAM EN VARIEDADES

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

PAULA CORDERO ENCINAR

Resumen. En este trabajo se estudia la cohomología de de Rham en variedades diferenciables. Se realizará una presentación extensa de la misma, con resultados como el teorema de Mayer Vietoris, la invarianza topológica de los grupos de cohomología, la relación entre las cohomologías con y sin soporte compacto mediante la dualidad de Poincaré y el teorema de Künneth que explora la cohomología de variedades producto. No olvidaremos las diversas aplicaciones de la teoría. De forma que calcularemos la cohomología de diferentes variedades, así como el último grupo de cohomología y el de grado 1 de manera general. También, se emplean las diversas herramientas para dar una demostración del teorema de Jordan-Brouwer y estudiar la característica de Euler.

Palabras clave: Cohomología, cocadena, de Rham, Mayer-Vietoris, forma diferencial, forma exacta, forma cerrada, morfismo, dualidad.

Abstract. In this work we study the de Rham cohomology on smooth manifolds. We will exhibit a wide range of significant results, including the Mayer-Vietoris Theorem, the topological invariance of the de Rham cohomology groups, the close relation between the cohomologies with compact and non-compact support shown in the Poincaré duality and the Künneth Theorem, which explores the cohomology of the product of two manifolds. This theory leads to important applications. We will compute the cohomology groups of different manifolds, as well as the top cohomology group and the degree 1 group in a general case. Besides, the tools that we have developed are used to prove the Jordan-Brouwer Theorem and to study the Euler characteristic.

Keywords: Cohomology, cochain, de Rham, Mayer-Vietoris, differential form, exact form, closed form, morphism, duality.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57R19, 57N65, 58A05.

Índice

Introducción

El estudio de la cohomología de de Rham se enmarca entre la topología algebraica y la topología diferencial. Toma su nombre del matemático suizo Georges de Rham, quien en 1931 probó el teorema de de Rham, identificando los grupos de cohomología de de Rham como invariantes topológicos. Sin embargo, este resultado ya había sido sugerido por Henri Poincaré y Élie Cartan. La influencia del teorema de de Rham fue de particular importancia en el desarrollo de la teoría de Hodge y la teoría de haces.

Los ladrillos de la cohomología de de Rham son las formas diferenciales de una variedad. La idea subayacente consiste en definir clases de equivalencia de formas cerradas en una variedad de forma que dos formas cerradas definen la misma clase si su diferencia es exacta. Esto induce una relación de equivalencia que permitirá definir los grupos de de Rham.

En esta memoria, abordaremos la cohomología de de Rham como continuación de la formación recibida en la asignatura de Variedades Diferenciables. Los contenidos se estructuran en 13 secciones.

En la sección 1, se revisan conceptos básicos de variedades y se introducen algunos resultados fundamentales sobre entornos tubulares y homotopía que serán clave en secciones posteriores. A continuación, en la sección 2, sentaremos las bases algebraicas para la construcción posterior de la cohomología.

Tras este marco de introducción, se define en la siguiente sección el concepto de grupo de cohomología de de Rham como espacio cociente en una variedad. Con el fin de proporcionar una herramienta para el cálculo de los grupos de cohomología, presentamos en la sección 4 el teorema de Mayer-Vietoris. Este resultado se basa en expresar la variedad como unión finita de subvariedades abiertas con una cohomología más simple. La sucesión de Mayer-Vietoris es válida para una gran variedad de teorías de cohomología y homología, incluyendo la homología simplicial y la cohomología singular.

Parte de los resultados funtamentales del trabajo se presentan en la sección 5, donde se demuestra que los grupos de cohomología de de Rham consituyen un invariante topológico. Es más, comprobaremos algo más fuerte, ya que basta que dos variedades tengan el mismo tipo de homotopía para tener la isomorfía en los grupos de cohomología. Esto es sorprendente, ya que la definición de la cohomología de de Rham parte de la estructura diferenciable de la variedad. Así mismo, se incluyen algunos resultados en relación a la finitud de los grupos de cohomología.

En las secciones 6 y 7, se aprovechan las herramientas introducidas previamente para calcular la cohomología de diferentes variedades, y probar un resultado célebre como es el teorema de separación de Jordan-Brouwer.

Para poder ir más allá en la exposición, dedicamos la sección 8 a desarrollar la cohomología en el caso de soporte compacto. Es importante tener especial precaución, puesto que el análogo de algunos teoremas previos no será cierto en el caso de soporte compacto.

Lo siguiente consiste en mostrar dos casos en los cuales es posible calcular el grupo de cohomología de manera general: para grado máximo (sección 9) y grado 1 (sección 10). En ambos casos, abordaremos el problema desde su relación con la integral para variedades orientadas y la integral de línea, respectivamente.

En la sección 11, se desarrolla la dualidad de Poincaré explorando la íntima relación entre los grupos de cohomología con y sin soporte compacto. Por completitud, presentamos en la sección 12 la cohomología del producto de variedades con el teorema de Künneth. Para ello seguiremos un método de demostración análogo a la dualidad de Poincaré, a partir del lema de globalización, que se trata de un resultado puramente topológico.

La sección que concluye el trabajo, se centra en la característica de Euler. Aprovechando todo lo anterior, obtenemos de manera sencilla diversos resultados para variedades con cohomología finito-dimensional.

1. Preliminares

En esta sección recordaremos muy concisamente los conceptos y resultados básicos que constituyen los pilares del trabajo. En su mayor parte han sido tratados en el Grado de Matemáticas, y de esta manera fijamos las notaciones.

A. Variedades diferenciables.

Trabajamos con variedades sumergidas, ya que cualquier variedad M puede sumergirse en un espacio afín, es decir, es difeomorfa a una variedad sumergida $N \subset \mathbb{R}^p$. Si no se quiere estimar p el resultado es elemental salvo un poco de teoría de la dimensión por recubrimientos en el caso no compacto. Más difícil es que se puede tomar $p = 2\dim M + 1$ y de hecho $p = 2\dim M$ (*teoremas de inmersión de Whitney*). Recordemos la terminología habitual.

(1) Sea $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^q$ se llama *diferenciable* si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}$ existen y son continuas. En general, una aplicación $f : X \to Y$ entre dos subconjuntos arbitrarios $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ es *diferenciable* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ al que f se extiende diferenciablemente. Diremos que $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables.

(2) Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se llama *variedad diferenciable* si cada punto $x \in M$ tiene un entorno $U \subset M$ difeomorfo a un abierto W de un espacio afín $\mathbb{R}^m$ o un semiespacio afín cerrado $\mathbb{H}^m = \{x_1 \geq 0\}$.

En consecuencia, una variedad tiene todas las propiedades locales de los semiespacios afines (local compacidad, local conexión), y las propiedades globales que hereda del espacio afín en que está contenida (base numerable, topología metrizable).

Un difeomorfismo concreto

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) : W \to U \subset M$$

se denomina *parametrización* de M en x, mientras que el difeomorfismo inverso $\mathtt{x} = (\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_m)$ se llama *sistema de coordenadas*. Dados dos *sistemas de coordenadas* $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ el difeomorfismo $\mathtt{x} \circ \mathtt{y}^{-1}$ es el *cambio de coordenadas*. La dimensión m es la dimensión de M en x, y es localmente constante.

(3) El *borde* de una variedad M es el conjunto de los puntos x que corresponden a puntos de la frontera del semiespacio por una parametrización. Esta definición es consistente porque los difeomorfismos de semiespacios conservan su frontera. El borde se denota ∂M, es un subconjunto cerrado, y una variedad diferenciable sin borde de dimensión $\dim M - 1$.

(4) Sea M una variedad y $\{V_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de M. Por las buenas propiedades topológicas de M, existe un atlas localmente finito y numerable $\{U_i, \mathtt{x}_i\}$ tal que $\{U_i\}$ es un refinamiento de $\{V_\alpha\}$ y $\mathtt{x}_i(U_i) = \mathbb{R}^m$ para cada i.

(5) Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad y $\varphi : W \to U \subset M$ una parametrización en $x \in U$. El espacio vectorial $T_xM = \operatorname{im} d_{\varphi^{-1}(x)}\varphi \subset \mathbb{R}^p$ no depende de la parametrización, y se denonima espacio tangente a M en x. Cada parametrización φ define la base $\{\partial/\partial \mathtt{x}_i|_x = \partial\varphi(\varphi^{-1}(x))/\partial x_i\}$ de T_xM.

B. Formas diferenciales.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. En cada punto x de M tenemos el espacio tangente T_xM y las álgebras $\Lambda^p(T_xM)$ de formas alternadas de grado $p \geq 0$.

(1) Una *forma diferencial* ω de grado p de M es una aplicación,

$$x \mapsto \omega_x \in \Lambda^p(T_xM).$$

El primer ejemplo es la diferencial df de una función $f : M \to \mathbb{R}$, que en cada punto es la derivada $df_x : T_xM \to \mathbb{R}$ (definida como restricción de cualquier extensión local diferenciable de f).

Cualquier forma se expresa localmente en unas coordenadas dadas $\mathtt{x}_i$ mediante una fórmula

$$\omega_x = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} \omega_{i_1,\dots,i_r}(x) d\mathtt{x}_{i_1,x} \wedge \cdots \wedge d\mathtt{x}_{i_r,x} \,.$$

La forma es *diferenciable* si lo son las funciones $\omega_{i_1,\dots,i_r}$. Siempre lo supondremos (probándolo si es necesario).

(2) El espacio vectorial de todas las formas diferenciales de grado p se denota $\Gamma^p(M)$. Para $p = 0$, $\Gamma^0(M)$ denota el conjunto de funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$. La derivada de funciones induce una aplicación $d : \Gamma^0(M) \to \Gamma^1(M)$, que se extiende a formas de grado arbitrario:

Proposición 1.1. *Existe una única aplicación lineal $d : \Gamma^p(M) \to \Gamma^{p+1}(M)$, denominada diferencial exterior, que cumple:*

- *Para $p = 0$ es la diferencial de funciones.*
- *$d \circ d = 0$.*
- *$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^p\, \omega \wedge d\alpha$, donde p es el grado de ω.*

(3) Una forma $\omega \in \Gamma^p(M)$ se denomina *exacta* cuando tiene *primitiva*, es decir, una forma α tal que $\omega = d\alpha$. Se dice que ω es *cerrada* si su diferencial es cero.

Tanto el conjunto de formas exactas, $\mathcal{B}^p(M)$, como el de formas cerradas, $\mathcal{Z}^p(M)$, constituyen subespacios vectoriales de $\Gamma^p(M)$. Toda forma exacta es cerrada, es decir, $\mathcal{B}^p(M) \subset \mathcal{Z}^p(M)$

(4) Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. El *pullback* de f es la aplicación lineal $f^* : \Gamma^p(N) \to \Gamma^p(M)$ definida por

$$(f^*\omega)_x(u_1, \dots, u_p) = \omega_{f(x)}\big(d_xf(u_1), \dots, d_xf(u_p)\big).$$

Se verifica:

- $f^*(\omega \wedge \alpha) = f^*(\omega) \wedge f^*(\alpha)$.
- Si $g : N \to P$ es otra función diferenciable $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}_{\Gamma^p(M)}$.
- $d \circ f^* = f^* \circ d$.

(5) La diferencial exterior de una forma *con soporte compacto* tiene también soporte compacto, debido al carácter local de d. Por tanto, las formas diferenciales con soporte compacto son un subespacio $\Gamma^p_c(M)$ de $\Gamma^p(M)$. Se denota $\mathcal{B}^p_c(M)$ el subespacio de las p-formas que poseen una primitiva *con soporte compacto.*

El *pullback* de una forma diferencial con soporte compacto no tiene por qué tener soporte compacto, pero sí lo tiene cuando f es *propia* (es decir, la preimagen de un compacto es compacto). Así, para aplicaciones propias $f^* : \Gamma^p_c(N) \to \Gamma^p_c(M)$ está bien definido.

C. Orientación.

(1) Una *orientación* en un espacio vectorial E de dimensión finita $m \geq 1$ es una clase de equivalencia de bases de E para la relación: el determinante de la matriz de cambio de base es positivo. La clase de una base $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ se denota $\zeta = [u_1, \dots, u_m]$ y diremos que B es *positiva* en ζ. Existen únicamente dos clases de equivalencia que denominaremos *opuestas,* ζ y $-\zeta$.

(2) Una *orientación de una variedad* M es una colección $\zeta_M = \{\zeta_x : x \in M\}$ de orientaciones ζ_x en cada espacio tangente T_xM, tal que para cada punto $x \in M$ existe un sistema de coordenadas x en un entorno U, que cumpla para todo $y \in U$

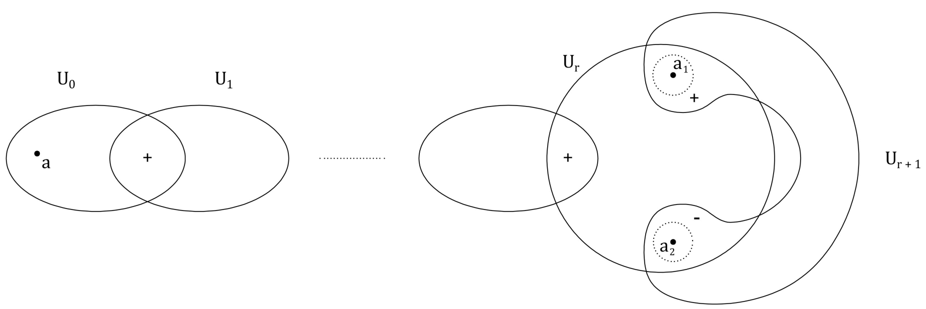
$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_1}\bigg|_y, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_m}\bigg|_y \right] = \zeta_y.$$

Diremos que $\mathtt{x}$ es compatible con ζ_M. La variedad M será orientable cuando exista alguna orientación ζ_M.

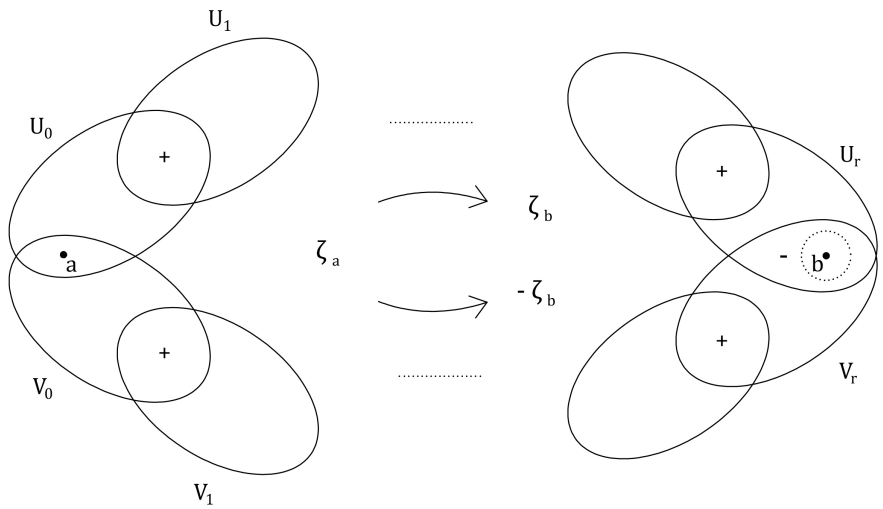
(3) Una variedad es *orientable* si y sólo si tiene un atlas *positivo,* es decir, cuyos cambios de coordenadas tengan todos determinantes jacobianos positivos.

Si la variedad M es conexa, fijada una orientación ζ_a en el espacio tangente T_aM, para todo $x \in M$ existe una cadena finita de abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$, luego dominios de coordenadas y orientados, que conecta a con x. Si los cambios de coordenadas consecutivos son positivos, ζ_a se propaga a ζ_x en T_xM. Si ζ_x es independiente de la cadena elegida, entonces la orientación $\zeta_M = \{\zeta_x\}$ está completamente determinada. Y viceversa, si M es no orientable, entonces hay dos posibilidades:

(i) Para algún $x = b$, no existe una cadena positiva que conecte a con b.



(ii) Para algún $x = b$, ζ_b depende de la cadena elegida.



(4) Una variedad es orientable si y sólo si existe una forma diferencial de grado máximo ω nunca nula. Esto se debe a que dos expresiones locales de ω difieren en un escalar, que es precisamente el determinante jacobiano del cambio de coordenadas.

(5) Por último, el borde de una variedad orientable es orientable, de la manera bien conocida siguiente.

Sea ζ una orientación de la variedad M. Sea $x \in \partial M$. Un vector $u \in T_xM \setminus T_x\partial M$ se llama *saliente* si en unas coordenadas $\mathtt{x}$ en un entorno de x en el que $\mathtt{x}_1 \geq 0$, se tiene $d_x\mathtt{x}(u) \in \{x_1 < 0\}$. Con ese u definimos la orientación $\partial\zeta_x$ por la relación $\zeta_x = [u] \oplus [\partial\zeta_x]$. Se demuestra que esta definición no depende de las elecciones y que es consistente.

D. Integración.

La integral se define en variedades orientables para formas diferenciales con soporte compacto.

(1) Sea U es un abierto de $\mathbb{H}^m$ y $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ con f nula fuera de un compacto. Definimos
$$\int_U \omega = \int_U f$$
donde la integral del segundo miembro es la integral de Riemann. En general, para M una variedad orientada de dimensión m tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.2. *Existe una única forma lineal*
$$\int_M : \Gamma_c^m(M) \to \mathbb{R} : \omega \mapsto \int_M \omega$$
con la siguiente propiedad: Si $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ tiene soporte contenido en U, donde $(U, \mathtt{x})$ es un sistema de coordenadas de M, entonces $\int_M \omega = \varepsilon \int_{\mathtt{x}(U)} (\mathtt{x}^{-1})^*\omega$. Donde $\varepsilon = 1$ si $\mathtt{x}$ es compatible con la orientación y $\varepsilon = -1$ en caso contrario.

Sea ∂M el borde de M con la orientación inducida por M. La inclusión natural $j : \partial M \hookrightarrow M$ induce la restricción $j^* : \Gamma_c^p(M) \to \Gamma_c^p(\partial M)$. Si $\omega \in \Gamma_c^{m-1}(M)$, $j^*\omega = \omega|_{\partial M}$

es una forma diferencial de grado máximo de ∂M, y podemos enunciar un resultado fundamental:

Teorema 1.3 (Teorema de Stokes)**.** *Sea* $\omega \in \Gamma_c^{m-1}(M)$*, entonces* $\omega|_{\partial M} \in \Gamma_c^{m-1}(\partial M)$*,* $d\omega \in \Gamma_c^m(M)$ *y*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M} \ .$$

Una consecuencia inmediata es que en una variedad M *sin borde,* la integral de una forma diferencial exacta $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ es nula.

E. Entornos tubulares.

A partir del *fibrado normal* de una variedad *sin borde* en el espacio afín que la contiene, es posible construir los *entornos tubulares* de la variedad. La propiedad más relevante es que una variedad *sin borde* es retracto *diferenciable* de sus entornos tubulares. La diferenciabilidad del retracto se pierde para variedades *con borde.*

Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable de dimensión m. Para cada $x \in M$ denotamos por N_xM el complemento ortogonal de T_xM en $\mathbb{R}^p$, que llamaremos *espacio normal.* Sean

$$NM = \{(x,u) \in M \times \mathbb{R}^p : \ u \in N_xM\} \subset M \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \ , \ \nu : (x,u) \mapsto x.$$

El par $(NM, \ \nu)$ es el *fibrado normal* de M en $\mathbb{R}^p$, y es una variedad de dimensión p.

Teorema 1.4 (Entornos tubulares)**.** *Sea* $M^m \subseteq \mathbb{R}^p$ *una variedad diferenciable sin borde y sea* NM *su fibrado normal. Entonces la aplicación diferenciable*

$$e : NM \to \mathbb{R}^p : (x,u) \mapsto x+u$$

induce un difeomorfismo $e|_\Omega : \Omega \to W$*, de un entorno abierto* Ω *de* $M \times \{0\}$ *en* NM *sobre un entorno abierto* W *de* M *en* $\mathbb{R}^p$*.*

Esto permite definir la retracción diferenciable $\pi : W \to M$ por $\pi = \nu|_\Omega \circ (e|_\Omega)^{-1}$. En particular, M es cerrado en W. Además, existe una aplicación continua positiva $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$T = \{z \in W : \ ||z - \pi(z)|| \leq \varepsilon(\pi(z))\}$$

es un entorno de M en $\mathbb{R}^p$ localmente cerrado y la restricción $\pi|_T : T \to M$ es propia. Si M es compacta, ε se puede tomar constante.

F. Homotopía.

Con el objetivo de poder aplicar métodos diferenciales a problemas topológicos debemos recordar una serie de conceptos.

(1) Dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 : X \to Y$ son *homótopas* si existe una aplicación continua

$$F : X \times [0,1] \to Y : (x,t) \mapsto F_t(x)$$

tal que $F_0 = f_0, F_1 = f_1$. Denotaremos $f_0 \simeq f_1$ y diremos que F es una *homotopía* entre f_0 y f_1. La homotopía es una relación de equivalencia.

Igualmente se consideran homotopías propias entre aplicaciones propias.

(2) Dos espacios X e Y tienen el mismo *tipo de homotopía* si existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$.

(3) Sea X un espacio y $A \subset X$. Diremos que A es un retracto de X si existe una aplicación continua $\rho : X \to A$, tal que $\rho(a) = a$ para todo $a \in A$.

(4) Un espacio X es *contráctil* si Id_X es homótopa a una constante o equivalentemente, X tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

(5) El resultado fundamental que necesitaremos más adelante es el siguiente:

Teorema 1.5. *Sean M y N variedades diferenciables,*

1. *Toda aplicación continua $f : M \to N$ es homótopa a una aplicación diferenciable.*
2. *Sean $f_0, f_1 : M \to N$ dos aplicaciones diferenciables y homótopas. Entonces lo son por una homotopía diferenciable. Si f_0, f_1 son homótopas por una homotopía relativa a un conjunto cerrado $A \subset M$, entonces lo son por una homotopía diferenciable relativa a A.*
3. *Toda aplicación continua y propia, $f : M \to N$, es propiamente homótopa a una aplicación diferenciable.*
4. *Sean $f_0, f_1 : M \to N$ dos aplicaciones diferenciables, propias y homótopas. Entonces lo son por una homotopía diferenciable y propia.*

2. Complejos de cocadenas

En esta sección, presentamos una serie de definiciones algebraicas que aplicaremos posteriormente en la construcción de la cohomología de de Rham.

Una sucesión de espacios vectoriales y aplicaciones lineales

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se dice *exacta* cuando $\ker g = \operatorname{im} f$. Una sucesión $A^* = \{A^p, d^p\}$,

$$\cdots \longrightarrow A^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} A^{p+2} \longrightarrow \cdots \tag{1}$$

de espacios vectoriales y aplicaciones lineales se llama *complejo de cocadenas* si $d^{p+1} \circ d^p = 0$ para todo p. Será *exacta* si $\ker d^{p+1} = \operatorname{im} d^p$ para todo p. Nótese que los índices son crecientes. Si los índices fuesen decrecientes, se trataría de un *complejo de cadenas.*

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

se llama sucesión *exacta corta.* Esta definición conlleva de forma implícita que f *es inyectiva, g es sobreyectiva y* $\ker g = \operatorname{im} f$. Además, es inmediato que se cumple

$$\dim B = \dim A + \dim C.$$

Toda sucesión exacta de la forma (1), induce sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} d^{p-1} \longrightarrow A_p \longrightarrow \operatorname{im} d^p \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Lema 2.1. *Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta corta de espacios vectoriales. Si A y C son de dimensión finita entonces B también lo es. Además, $B \cong A \oplus C$.*

Demostración. Tomemos $\{a_i\}$ y $\{c_j\}$ bases de A y C, respectivamente. Por ser g sobreyectiva, existe $b_j \in B$ tal que $f(b_j) = c_j$ para cada j. De forma que $\{f(a_i), b_j\}$ constituye una base de B: veamos que dicho conjunto es un sistema generador linealmente independiente. Sea $b \in B$, $g(b) = \sum_j \lambda_j c_j$. Luego, $b - \sum_j \lambda_j b_j \in \ker g = \operatorname{im} f$. Por tanto, $b - \sum_j \lambda_j b_j = f(a) = \sum_i \alpha_i f(a_i)$. Finalmente, probemos la independencia lineal. Sea $\sum_i \alpha_i f(a_i) + \sum_j \lambda_j b_j = 0$ comprobemos que necesariamente todos los coeficientes son nulos. Aplicando g, se sigue que $\sum_j \lambda_j c_j = 0$, por ser $\{c_j\}$ base de C se tiene $\lambda_j = 0$ para todo j. Por tanto, queda $\sum_i \alpha_i f(a_i) = 0$, por ser f inyectiva y los $\{a_i\}$ linealmente independientes. Concluimos que $\alpha_i = 0$ para todo i. $\square$

Sea $A^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(A, \mathbb{R})$ el espacio vectorial dual de A. Obsérvese que si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es una sucesión exacta, entonces la sucesión dual

$$C^* \xrightarrow{g^!} B^* \xrightarrow{f^!} A^*$$

también lo es. Es claro que $f^! \circ g^! = (g \circ f)^! = 0$. Por otro lado, si $\phi \in \ker f^!$ entonces $\ker g = \operatorname{im} f \subset \ker \phi$. Luego, $\psi \in (\operatorname{im} g)^*$, $\psi(g(x)) = \phi(x)$ está bien definido. Como todo operador en $\operatorname{im} g$ se puede extender a una aplicación lineal en todo C (usando el *lema de Zorn* en el caso infinito dimensional) tenemos la inclusión $\ker f^! \subseteq \operatorname{im} g^!$.

Lema 2.2 (Lema de los cinco). *Sea el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & A_5
\end{array}$$

con filas exactas. Si f_1, f_2, f_4, f_5 son isomorfismos, entonces, también lo es f_3.

Demostración. Comprobemos la inyectividad de f_3. Sea $x \in A_3$ tal que $f_3(x) = 0$. Entonces, $f_4 \circ \alpha_3(x) = \beta_3 \circ f_3(x) = 0$, luego $\alpha_3(x) = 0$ por la inyectividad de f_4. Debido a la exactitud de la cadena superior, existe $y \in A_2$ tal que $x = \alpha_2(y)$. Ahora $\beta_2 \circ f_2(y) = f_3 \circ \alpha_2(y) = 0$, por tanto, $f_2(y) \in \ker \beta_2 = \operatorname{im} \beta_1$. Por la sobreyectividad de f_1, existirá $z \in A$ tal que $f_2(y) = \beta_1 \circ f_1(z) = f_2 \circ \alpha_1(z)$, donde la última igualdad se sigue de la conmutatividad. Finalmente, aplicando la inyectividad de f_2, $y = \alpha_1(z)$. Por tanto, $x = \alpha_2 \circ \alpha_1(z) = 0$ por la exactitud.

Análogamente para la sobreyectividad, sea $x \in B_3$. Por ser f_4 sobreyectiva, existe $y \in A_4$ tal que $\beta_3(x) = f_4(y)$. Entonces, $f_5 \circ \alpha_4(y) = \beta_4 \circ f_4(y) = \beta_4 \circ \beta_3(x) = 0$. Luego, $\alpha_4(y) = 0$, que por exactitud conduce a $y = \alpha_3(z)$ para cierto $z \in A_3$. Ahora, $\beta_3 \circ f_3(z) = f_4 \circ \alpha_3(z) = f_4(y) = \beta_3(x)$, esto es $f_3(z) - x \in \ker \beta_3 = \operatorname{im} \beta_2$. Sea $k \in B_2$ tal que $\beta_2(k) = f_3(z) - x$. Por la sobreyectividad de f_2, $k = f_2(u)$ con $u \in A_2$ y por conmutatividad $f_3 \circ \alpha_2(u) = \beta_2 \circ f_2(u) = f_3(z) - x$. Lo que concluye, $x = f_3(z - \alpha_2(u))$. $\square$

Definición 2.3. Sea $A^* = \{A^p, d^p\}$ un complejo de cocadenas. El *p-ésimo grupo (vectorial) de cohomología* de A^* es:

$$H^p(A^*) = \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1}.$$

Los elementos de $\ker d^p$ se llaman *cociclos*, los de $\operatorname{im} d^{p-1}$ *cobordes*, y los de $H^p(A^*)$ *clases de cohomología.*

Observamos que dado un complejo de cocadenas A^*, tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \to \ker d^p \to A^p \to \operatorname{im} d^p \to 0.$$

Luego, tomando cocientes construimos las sucesiones exactas

$$0 \to H^p(A^*) \to A^p / \operatorname{im} d^{p-1} \to \operatorname{im} d^p \to 0.$$

Lema 2.4. *Sean A^* y B^* complejos de cadenas. Se cumple*

$$H^p(A^* \oplus B^*) = H^p(A^*) \oplus H^p(B^*).$$

Demostración. Es inmediato que

$$\ker\left(d^p : A^p \oplus B^p \to A^{p+1} \oplus B^{p+1}\right) = \ker\left(d^p : A^p \to A^{p+1}\right) \oplus \ker\left(d^p : B^p \to B^{p+1}\right),$$
$$\operatorname{im}\left(d^{p-1} : A^{p-1} \oplus B^{p-1} \to A^p \oplus B^p\right) = \operatorname{im}\left(d^{p-1} : A^{p-1} \to A^p\right) \oplus \operatorname{im}\left(d^{p-1} : B^{p-1} \to B^p\right),$$

lo que prueba el resultado. □

Un *morfismo* $f : A^* \to B^*$ entre complejos de cocadenas es una familia de aplicaciones lineales $f^p : A^p \to B^p$, tales que $d_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_A^p$. El siguiente diagrama conmutativo expresa esto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A^{p-1} & \xrightarrow{d^{p-1}} & A^p & \xrightarrow{d^p} & A^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \Big\downarrow f^{p-1} & & \Big\downarrow f^p & & \Big\downarrow f^{p+1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & B^{p-1} & \xrightarrow{d^{p-1}} & B^p & \xrightarrow{d^p} & A^{p+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

En adelante, simplificaremos superíndices en la notación, salvo para evitar confusiones.

Comprobamos a continuación que los morfismos $f : A^* \to B^*$ inducen de forma natural otros: $H^p(A^*) \to H^p(B^*)$.

Proposición 2.5. *El morfismo $f : A^* \to B^*$ induce aplicaciones lineales,*

$$f : H^p(A^*) \to H^p(B^*), \quad [a] \mapsto [f(a)].$$

Demostración. Si $a \in A^p$ es un cociclo, entonces $d \circ f(a) = f \circ d(a) = 0$. Luego, $f(a)$ es un cociclo. Si $a = d(\tilde{a})$ es un coborde, entonces $f(a) = f \circ d(\tilde{a}) = d \circ f(\tilde{a})$, con lo que $f(a)$ también es un coborde. Por tanto, f transforma cociclos en cociclos y cobordes en cobordes. Naturalmente, definimos la aplicación f inducida en los grupos de cohomología:

$$f[a] = [f(a)] \ , \qquad [a] \in H^p(A^*) \ ,$$

donde a es un cociclo. Veamos que no depende del representante de la clase de cohomología elegido. Sea $a' = a + d(\tilde{a})$, entonces $[f(a')] = [f(a) + f \circ d(\tilde{a})] = [f(a) + d \circ f(\tilde{a})] = [f(a)]$. Luego, $f : H^p(A^*) \to H^p(B^*)$ está bien definida. □

Para terminar esta sección, introducimos una serie de resultados relativos a sucesiones de complejos de cocadenas que podremos extender a variedades y nos serán de gran utilidad para demostrar el Teorema de Mayer-Vietoris.

La sucesión de complejos de cocadenas

$$0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$$

es *exacta corta* si para todo p la sucesión $0 \to A^p \xrightarrow{f} B^p \xrightarrow{g} C^p \to 0$ lo es.

Definición 2.6. Sea $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Definimos

$$\partial^* : H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*)$$

como la aplicación lineal dada por

$$\partial^*[c] = \big[f^{-1}\big(d(g^{-1}(c))\big)\big]$$

La definición anterior establece que para todo $b \in g^{-1}(c)$ se tiene que $d(b) \in \operatorname{im} f$ y que el elemento $a \in A^{p+1}$, tal que $f(a) = d(b)$ es un cociclo. Además, también afirma que la clase de cohomología $[a] \in H^{p+1}(A^*)$ es independiente de la elección de $b \in g^{-1}(c)$. Sin embargo, esto no es evidente ya que los morfismos f y g no son necesariamente biyecciones. Explicamos, a continuación, este abuso de notación comprobando que ∂^* está bien definida. Para ello es necesario demostrar las siguientes afirmaciones implícitas en la definición anterior. Sea $[c] \in H^p(C^*)$,

1. Si $b \in B^p$ cumple $g(b) = c$ y $d(c) = 0$. Entonces, $d(b) \in \operatorname{im} f$.
   Demostración. $g \circ d(b) = d \circ g(b) = d(c) = 0$, lo que prueba que $d(b) \in \ker g = \operatorname{im} f$. □

2. Si $a \in A^{p+1}$, tal que $f(a) = d(b)$. Se tiene $d(a) = 0$.
   Demostración. Por la inyectividad de f, basta comprobar $f \circ d(a) = 0$. Lo que se sigue de las propiedades de d, $f \circ d(a) = d \circ f(a) = d \circ d(b) = 0$. □

3. Sean $b_i \in B^p$ con $g(b_1) = g(b_2) = c$, y $a_i \in A^{p+1}$ con $f(a_i) = d(b_i)$. Entonces, $[a_1] = [a_2] \in H^{p+1}(A^*)$.
   Demostración. Como $b_1 - b_2 \in \ker g = \operatorname{im} f$, existe $\tilde{a} \in A^p$ tal que $f(\tilde{a}) = b_1 - b_2$. Luego, $f \circ d(\tilde{a}) = d \circ f(\tilde{a}) = d(b_1) - d(b_2) = f(a_1 - a_2)$. Por ser f inyectiva, $a_1 = a_2 + d(\tilde{a})$. Concluimos por 2. que $[a_1] = [a_2]$. □

Teorema 2.7 (Sucesión exacta larga de cohomología)**.** *Sea $0 \to A^p \xrightarrow{f} B^p \xrightarrow{g} C^p \to 0$ una sucesión exacta de complejos de cocadenas. Entonces, la sucesión*

$$\cdots \to H^p(A^*) \xrightarrow{f} H^p(B^*) \xrightarrow{g} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f} H^{p+1}(B^*) \to \cdots$$

es exacta.

Dividiremos la demostración en tres pasos que trataremos como lemas separados.

Lema 2.8. *Para una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas, la sucesión*

$$H^p(A^*) \xrightarrow{f} H^p(B^*) \xrightarrow{g} H^p(C^*)$$

es exacta.

Demostración. Se sigue de la exactitud de la sucesión corta, que $g \circ f = 0 : A^p \to C^p$. En efecto, si $[a] \in H^p(A^*)$

$$g \circ f[a] = g[f(a)] = [g \circ f(a)] = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $[b] \in H^p(B^*)$ cumple $g[b] = 0$. Entonces, $g(b) = d(c)$ con $c \in C^{p-1}$. Por hipótesis, $g : B^p \to C^p$ es sobreyectiva para todo p, luego existe $\tilde{b} \in B^{p-1}$ tal que $g(\tilde{b}) = c$. Por tanto, $0 = g(b) - d(c) = g(b) - d \circ g(\tilde{b}) = g(b) - g \circ d(\tilde{b}) = g(b - d(\tilde{b}))$. Por formar f y g una sucesión exacta, existe $a \in A^p$ tal que $f(a) = b - d(\tilde{b})$. Si a es un p-cociclo, entonces define una clase de cohomología $[a] \in H^p(A^*)$ y se verifica $f[a] = [b - d(\tilde{b})] = [b]$, probando la exactitud de la cadena del enunciado. Por tanto, para concluir veamos que a es un cociclo. Por la inyectividad de $f : A^p \to B^p$ para todo p, basta comprobar que $f \circ d(a) = 0$. Teniendo en cuenta que b es un cociclo y aplicando las propiedades de d:

$$f \circ d(a) = d \circ f(a) = d(b - d(\tilde{b})) = d(b) = 0,$$

hemos terminado. □

Lema 2.9. *La sucesión* $H^p(B^*) \xrightarrow{g} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$ *es exacta.*

Demostración. Sea $[b] \in H^p(B^*)$, entonces $\partial^* \circ g[b] = \partial^*[g(b)] = \left[f^{-1}(d(b))\right] = 0$. Recíprocamente, supongamos $[c] \in H^p(C^*)$ con $\partial^*[c] = 0$. Por ser $g : B^p \to C^p$ sobreyectiva para todo p, elegimos $b \in B^p$ tal que $g(b) = c$. Por otro lado, como

$$0 = \partial^*[c] = \left[f^{-1}\big(d(g^{-1}(c))\big)\right] = \left[f^{-1}\big(d(b)\big)\right]$$

se sigue que existe $a \in A^p$, tal que $d(b) = f \circ d(a)$. Luego, $d(b - f(a)) = 0$ y $g(b - f(a)) = g(b) = c$, ya que $g \circ f = 0$. Lo que concluye, $g[b - f(a)] = [c]$. □

Lema 2.10. *La sucesión* $H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f} H^{p+1}(B^*)$ *es exacta.*

Demostración. Sea $[c] \in H^p(C^*)$, tenemos $f \circ \partial^*[c] = [d(b)] = 0$, donde $g(b) = c$, por definición de ∂^*. Recípocamente, tomamos $[a] \in H^{p+1}(A^*)$ tal que $f[a] = 0$. Lo que equivale a $f(a) = d(b)$ para cierto $b \in B^p$. Entonces, $g(b)$ es un cociclo pues $d \circ g(b) = g \circ d(b) = g \circ f(a) = 0$. Y cumple $\partial^*[g(b)] = [a]$. □

Esto concluye la demostración del Teorema 2.7.

Definición 2.11. Dos morfismos $f, g : A^* \to B^*$ son *homótopos* si existe una aplicación lineal $s : A^p \to B^{p-1}$ tal que

$$d \circ s + s \circ d = f - g : A^p \to B^p$$

para todo p. Diremos que s es un *operador de homotopía.*

Lema 2.12. *Dados dos morfismos homótopos $f, g : A^* \to B^*$, se cumple:*

$$f = g : H^p(A^*) \to H^p(B^*).$$

Demostración. Sea $[a] \in H^p(A^*)$

$$(f-g)[a] = [f(a) - g(a)] = [(d \circ s + s \circ d)(a)] = [(s \circ d)(a)] = [s(d(a))] = 0.$$

□

3. Formas diferenciales y cohomología

En esta sección, definimos la cohomología de de Rham de una variedad a partir de los espacios de formas diferenciales $\Gamma^p(M)$. Veremos, también, que los *pullbacks* inducen aplicaciones entre grupos de cohomología.

Del teorema de la diferencial exterior, se deduce que la sucesión $\Gamma^*(M) = \{\Gamma^p(M), d^p\}$ es un complejo de cocadenas.

Definición 3.1. El *p-ésimo grupo de cohomología de de Rham* es el espacio cociente

$$H^p(M) = \frac{\ker(d : \Gamma^p(M) \to \Gamma^{p+1}(M))}{\operatorname{im}(d : \Gamma^{p-1}(M) \to \Gamma^p(M))}.$$

De hecho, $H^p(M)$ es un espacio vectorial real, y su dimensión b_p se denomina *p-ésimo numero de Betti* de M.

Podemos definir un producto bilineal, asociativo y anticonmutativo

$$H^p(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}(M),$$

imponiendo $[\omega_1] \wedge [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$. Comprobamos que está bien definido:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + d\eta_1) \wedge (\omega_2 + d\eta_2) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + d\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\eta_2 + d\eta_1 \wedge d\eta_2 \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\eta_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \eta_2 + \eta_1 \wedge d\eta_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $H^*(M)$ es un álgebra.

Las aplicaciones diferenciables inducen morfismos sobre los complejos de cocadenas asociados a las formas diferenciales de una variedad. Luego, por la proposición 2.5 el morfismo f^* induce otro que denotaremos igual $f^* : H^p(N) \to H^p(M)$ y cumplirán propiedades análogas a las de los *pullbacks*:

- $f^*([\omega_1] \wedge [\omega_2]) = f^*[\omega_1] \wedge f^*[\omega_2]$.
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^p(P) \to H^p(M)$.
- Si Id es la identidad en M, entonces Id^* es la identidad en $H^p(M)$.

Esto nos permite extraer los siguientes resultados:

Corolario 3.2. *Para cualquier $p \geq 0$, tenemos un funtor contravariante H^* de la categoría de variedades diferenciables y funciones diferenciables a la categoría de los espacios vectoriales reales.*

En particular, cohomologías de de Rham de dos variedades diferenciables difeomorfas son isomorfas.

Conviene también, particularizar otro resultado de la sección 1 para el caso de variedades. Sean M, N y L variedades diferenciables y sean $f : N \to M$, $g : L \to N$ aplicaciones diferenciables.

Teorema 3.3 (Sucesión exacta larga de cohomología)**.** *Sea* $0 \to \Gamma^p(M) \xrightarrow{f^*} \Gamma^p(N) \xrightarrow{g^*} \Gamma^p(L) \to 0$ *una sucesión exacta de complejos de cocadenas. Entonces, la sucesión*

$$\cdots \to H^p(M) \xrightarrow{f^*} H^p(N) \xrightarrow{g^*} H^p(L) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(M) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(N) \to \cdots$$

es exacta.

Así mismo, la definición de morfismos homótopos se extiende a los *pullbacks*.

Por último, establecemos un resultado que nos permirá calcular el grupo de cohomología de una variedad para $p = 0$.

Proposición 3.4. *Sea M una variedad diferenciable. El grupo $H^0(M)$ es el espacio de funciones constantes en cada componente conexa. Por tanto,* $\dim H^0(M)$ *es igual al número de componentes conexas.*

Demostración. El grupo de cohomología $H^0(M)$ es el núcleo de la diferencial de funciones, $d : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \Gamma^1(M)$. Esto es, se trata del espacio vectorial de las aplicaciones diferenciables tales que $df = 0$. Esto significa que f es constante en cada componente conexa. $\square$

4. Sucesión de Mayer-Vietoris

En esta sección, probaremos el teorema de Mayer-Vietoris que servirá para calcular los grupos de cohomología de de Rham de diferentes variedades, expresándolas como unión de subvariedades abiertas con una cohomología más simple.

Sea M una variedad diferenciable y sean U_1 y U_2 abiertos de M tales que $M = U_1 \cup U_2$. Tenemos las inclusiones que se muestran en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& U_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\
U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"] & & M \\
& U_2 \arrow[ur, "i_2"] &
\end{tikzcd}$$

que inducen *pullbacks* en los espacios de formas diferenciales de cada variedad:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma^p(U_1) \arrow[dr, "j_1^*"] & \\ \Gamma^p(M) \arrow[ur, "i_1^*"] \arrow[dr, "i_2^*"'] & & \Gamma^p(U_1\cap U_2) \\ & \Gamma^p(U_2) \arrow[ur, "j_2^*"'] & \end{tikzcd}$$

Estos a su vez inducen aplicaciones entre los grupos de cohomología.

Teorema 4.1. *Sean U_1 y U_2 abiertos de una variedad diferenciable M cuya unión sea la variedad. Para $\nu = 1, 2$, sean i_ν y j_ν las inclusiones consideradas en el diagrama anterior. Entonces, la sucesión*

$$0 \to \Gamma^p(M) \xrightarrow{I^p} \Gamma^p(U_1) \oplus \Gamma^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Gamma^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

es exacta, donde

$$I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega)) = (\omega|_{U_1}, \omega|_{U_2})\ , \qquad J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2).$$

Demostración. Comenzamos probando que I^p es inyectiva. Sea $\omega \in \Gamma^p(M)$, tal que $I^p(\omega) = 0$, por tanto, $i_1^*(\omega) = i_2^*(\omega) = 0$. Sean x_i sistemas de coordenadas cuyos dominios W_i recubran M. Podemos elegir los abiertos W_i tales que $W_i \subset U_1$ o $W_i \subset U_2$. Tomemos W_i, podemos suponer por lo anterior, que $W_i \subset U_1$. Entonces, escribimos $\omega|_{W_i}$ en coordenadas locales como

$$\omega|_{W_i} = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq m} f_{i_1,\ldots,i_p}\, d\mathrm{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\mathrm{x}_{i_p} = \sum_K f_K d\mathrm{x}_K.$$

Puesto que $W_i \subset U_1$, se sigue que $\omega|_{W_i} = i_1^*(\omega)|_{W_i} = 0$. Luego, $\omega|_{W_i} = \sum_K f_K d\mathrm{x}_K = 0$ si y sólo si $f_K = 0$ para todo K. Entonces, tenemos que $\omega|_{W_i} = 0$ para todo i. Como los conjuntos W_i constituyen un recubrimiento por abiertos de M concluimos que $\omega = 0$.

Pasamos a probar que $\ker J^p = \operatorname{im} I^p$.

$$J^p \circ I^p(\omega) = j_1^* i_1^*(\omega) - j_2^* i_2^*(\omega) = (i_1 \circ j_1)^*(\omega) - (i_2 \circ j_2)^*(\omega) = \omega|_{U_1\cap U_2} - \omega|_{U_1\cap U_2} = 0$$

Luego, $\operatorname{im} I^p \subseteq \ker J^p$. Para demostrar el contenido inverso tomamos dos p-formas diferenciales $\omega_\nu \in \Gamma^p(M)$, $\nu = 1, 2$ tales que $J^p(\omega_1, \omega_2) = 0$. Luego, $\omega_1|_{U_1\cap U_2} = \omega_2|_{U_1\cap U_2}$, de forma que podemos definir

$$\omega = \begin{cases} \omega_1, & x \in U_1, \\ \omega_2, & x \in U_2. \end{cases}$$

Veamos que ω es diferenciable. Sea W_i un recubrimiento por abiertos de M. Si $W_i \subset U_1 \backslash U_2$ o $W_i \subset U_2 \backslash U_1$ es claro que $\omega|_{W_i}$ es diferenciable por serlo ω_ν, $\nu = 1, 2$. Si $W_i \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$, podemos escribir en coordenadas

$$\begin{cases} \omega_1|_{W_i} &= \sum_K f_K d\mathrm{x}_K, \\ \omega_2|_{W_i} &= \sum_K g_K d\mathrm{x}_K. \end{cases}$$

Como $\omega_1|_{U_1\cap U_2} = \omega_2|_{U_1\cap U_2}$ se sigue que $f_K(x) = g_K(x)$ para $x \in U_1 \cap U_2$. Definiendo la función diferenciable $h : W_i \to \mathbb{R}$

$$h_K(x) = \begin{cases} f_K, & x \in U_1, \\ g_K, & x \in U_2. \end{cases}$$

Tenemos que $\omega|_{W_i} = \sum_K h_K d\mathrm{x}_K$ es diferenciable. Por tanto, se tiene que $\omega \in \Gamma^p(M)$ y $I^p(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$.

Finalmente, veamos que J^p es sobreyectiva. Para ello, como $M = U_1 \cup U_2$, tomamos una partición diferenciable de la unidad θ_1, θ_2 subordinada a U_1, U_2. Sea $\alpha \in \Gamma^p(U_1 \cap U_2)$, veamos que existen ω_1, ω_2 tales que $J^p(\omega_1, \omega_2) = \alpha$. Para ello usamos las funciones θ_i para extender α a los abiertos U_i. El soporte de θ_2, $\mathrm{sop}_M\, \theta_2 = \overline{\{x \in M |\ \theta_2(x) \neq 0\}}$, cumple $\mathrm{sop}_M(\theta_2) \cap U_1 \subset U_1 \cap U_2$, podemos definir $\omega_1 \in \Gamma^p(U_1)$ como

$$\omega_1 = \begin{cases} \theta_2\alpha, & x \in U_1 \cap U_2, \\ 0, & x \in U_1 \setminus \mathrm{sop}_M(\theta_2). \end{cases}$$

Análogamente, definimos $\omega_2 \in \Gamma^p(U_2)$ como

$$\omega_2 = \begin{cases} -\theta_1\alpha, & x \in U_1 \cap U_2, \\ 0, & x \in U_2 \setminus \mathrm{sop}_M(\theta_1). \end{cases}$$

Con esta elección, tenemos que $J^p(\omega_1, \omega_2) = \theta_2\alpha + \theta_1\alpha = \alpha$, obteniendo la sobreyectividad de J^p. $\square$

En la notación del teorema anterior, es claro que, $I^p \circ d = d \circ I^p$ y $J^p \circ d = d \circ J^p$. Por lo tanto, son morfismos.

$$I : \Gamma^*(M) \to \Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2),$$
$$J : \Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2) \to \Gamma^*(U_1 \cap U_2).$$

Luego el teorema 4.1 proporciona una sucesión exacta de complejos de cocadenas. A partir del teorema 3.3, obtenemos una sucesión exacta larga de grupos de cohomología. Finalmente, el lema 2.4 concluye

$$H^p(\Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2)) = H^p(\Gamma^*(U_1)) \oplus H^p(\Gamma^*(U_2)) = H^p(U_1) \oplus H^p(U_2),$$

y obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2 (Mayer-Vietoris)**.** *Sea M una variedad diferenciable, y sean U_1, U_2 abiertos de M tales que $M = U_1 \cup U_2$. Entonces, la siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \to H^p(M) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(M) \to \cdots$$

donde

$$I^*([\omega]) = (i_1^*[\omega], i_2^*[\omega]) = ([\omega|_{U_1}], [\omega|_{U_2}])\ , \quad J^*([\omega_1], [\omega_2]) = j_1^*[\omega_1] - j_2^*[\omega_2].$$

Observación 4.3. Sea $[\omega] \in H^p(U_1 \cap U_2)$, calculemos $\partial^*[\omega] \in H^p(U_1 \cup U_2)$. Consideremos una partición de la unidad $\{\theta_1, \theta_2\}$ subordinada al recubrimiento $\{U_1, U_2\}$ de $U_1 \cup U_2$. Entonces, $J^p(\theta_2\omega|_{U_1}, -\theta_1\omega|_{U_2}) = \omega$. Puesto que ω es cerrada se cumple que

$$d(\theta_i\omega) = d\theta_i \wedge \omega\ .$$

Además, $d\theta_1 + d\theta_2 = 0$ en $U_1 \cup U_2$. Luego, $d\theta_2 \wedge \omega = -d\theta_1 \wedge \omega$ en $U_1 \cup U_2$ y $\mathrm{sop}(d\theta_2 \wedge \omega), \mathrm{sop}(d\theta_1 \wedge \omega) \subset U_1 \cap U_2$. Por lo tanto, tenemos

$$\partial^*[\omega] = [d\theta_2 \wedge \omega] = -[d\theta_1 \wedge \omega] \ .$$

Corolario 4.4. *Si los abiertos U_1, U_2 son disjuntos, entonces*

$$I^* : H^p(M) = H^p(U_1 \cup U_2) \to H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

es un isomorfismo.

Corolario 4.5. *Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de abiertos de M disjuntos dos a dos y U su unión. Entonces*

$$H^p(U) \to \prod H^p(U_\alpha)$$

es un isomorfismo.

5. Homotopía

En esta sección, obtenemos que los grupos de cohomología de de Rham constituyen un invariante topológico. Aún más, dos variedades con el mismo tipo de homotopía tienen grupos de de Rham isomorfos.

La clave para demostrar la invarianza por homotopía consistirá en la construcción de un operador de homotopía (definición 2.11).

Lema 5.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. Para todo $t \in \mathbb{R}$ definimos la aplicación diferenciable,*

$$i_t : M \to M \times \mathbb{R} \ , \quad x \mapsto (x, t).$$

Entonces, los morfismos inducidos $i_0^*, i_1^* : \Gamma^p(M \times \mathbb{R}) \to \Gamma^p(M)$ son homótopos.

Demostración. La demostración se reduce a construir un operador lineal $s : \Gamma^p(M \times \mathbb{R}) \to \Gamma^{p-1}(M)$ tal que

$$d \circ s + s \circ d = i_1^* - i_0^*.$$

Para poder definir dicho operador resultará esencial entender la expresión local de una forma diferencial $\omega \in \Gamma^p(M \times \mathbb{R})$. Sea (U_i, x_i) un atlas de M y $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ una proyección. Entonces, $(\pi^{-1}(U_i), (\mathrm{x}_i, \mathrm{Id}_\mathbb{R}))$ son un atlas de $M \times \mathbb{R}$. Para cada $x \in M$ identificamos el espacio tangente $T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R})$ con la suma directa $T_xM \oplus \mathbb{R}$. Sea $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$, podemos elegir un abierto $\pi^{-1}(U_i)$ tal que $(x, t) \in \pi^{-1}(U_i)$, entonces tenemos la siguiente base de $\Lambda^p(T_xM \oplus \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} &(d\mathrm{x}_{i,\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\mathrm{x}_{i,\alpha_p})_{(x,t)}, && 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \le m, \\ &(dt \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta_{p-1}})_{(x,t)}, && 1 \le \beta_1 < \ldots < \beta_{p-1} \le m. \end{aligned}$$

En consecuencia, dada $\omega \in \Gamma^p(M \times \mathbb{R})$ podemos escribir $\omega|_{\pi^{-1}(U_i)}$ en coordenadas locales como

$$\begin{aligned} \omega|_{\pi^{-1}(U_i)} &= \sum_\alpha h_\alpha(x,t) d\mathrm{x}_{i,\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\mathrm{x}_{i,\alpha_p} + \sum_\beta g_\beta(x,t) dt \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta_{p-1}} \\ &= \sum_\alpha h_\alpha(x,t) d\mathrm{x}_{i,\alpha} + \sum_\beta g_\beta(x,t) dt \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta}. \end{aligned}$$

Donde h_α y g_β son funciones $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Luego, pasamos a definir el operador s,

$$(s\omega)_x(X_1, \dots, X_{p-1}) = \int_0^1 \omega_{(x,t)}\big(\tfrac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{p-1}\big) dt.$$

Debido a la linealidad de la integral, el operador s es claramente lineal. Veamos que cumple la condición $d \circ s + s \circ d = i_1^* - i_0^*$. Por el carácter local de la definición, basta comprobarlo para $\omega_i = \omega|_{\pi^{-1}(U_i)}$. Utilizando su expresión en coordenadas locales junto con la linealidad de s tenemos que,

$$\begin{aligned}(s\omega_i)(X_1, \dots, X_{p-1}) &= \sum_\alpha \int_0^1 h_\alpha(x,t) d\mathrm{x}_{i,\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\mathrm{x}_{i,\alpha_p}\big(\tfrac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{p-1}\big)\ dt \\ &\quad + \sum_\beta \int_0^1 g_\beta(x,t) dt \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta_{p-1}}\big(\tfrac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{p-1}\big)\ dt \\ &= \sum_\beta \int_0^1 g_\beta(x,t)\ d\mathrm{x}_{i,\beta}\big(X_1, \dots, X_{p-1}\big)\ dt \\ &= \sum_\beta \Big(\int_0^1 g_\beta(x,t)\ dt\Big)\ d\mathrm{x}_{i,\beta}\big(X_1, \dots, X_{p-1}\big).\end{aligned}$$

Entonces, podemos afirmar que

$$s\omega_i = \sum_\beta \Big(\int_0^1 g_\beta(x,t)\ dt\Big)\ d\mathrm{x}_{i,\beta}. \tag{3}$$

Debido a la linealidad de la diferencial exterior, d conmuta con el sumatorio en β. Aplicando las propiedades de la diferencial exterior junto con el teorema de derivación bajo el signo integral, tenemos

$$\begin{aligned}d(s\omega_i) &= \sum_\beta d\Big(\int_0^1 g_\beta(x,t)\ dt\Big) \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta} = \sum_{\beta,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}\Big(\int_0^1 g_\beta(x,t)\ dt\Big) d\mathrm{x}_{i,j} \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta} \\ &= \sum_{\beta,j}\Big(\int_0^1 \frac{\partial g_\beta(x,t)}{\partial x_{i,j}}\ dt\Big) d\mathrm{x}_{i,j} \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta}\end{aligned}$$

con $1 \leq j \leq m$. Por otro lado, calculamos $d\omega_i$:

$$d\omega_i = \sum_\alpha \frac{\partial h_\alpha(x,t)}{\partial t} dt \wedge d\mathrm{x}_{i,\alpha} + \sum_{\alpha,j} \frac{\partial h_\alpha(x,t)}{\partial x_{i,j}} d\mathrm{x}_{i,j} \wedge d\mathrm{x}_{i,\alpha} - \sum_{\beta,j} \frac{\partial g_\beta(x,t)}{\partial x_{i,j}} dt \wedge d\mathrm{x}_{i,j} \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta}.$$

Utilizando la ecuación (3), es inmediato obtener $s(d\omega_i)$,

$$s(d\omega_i) = \sum_\alpha \Big(\int_0^1 \frac{\partial h_\alpha(x,t)}{\partial t}\ dt\Big) d\mathrm{x}_{i,\alpha} - \sum_{\beta,j}\Big(\int_0^1 \frac{\partial g_\beta(x,t)}{\partial x_{i,j}}\ dt\Big) d\mathrm{x}_{i,j} \wedge d\mathrm{x}_{i,\beta}.$$

Comparando esta expresión con la obtenida para $d(s\omega_i)$, concluimos que

$$\begin{aligned}d(s\omega_i) + s(d\omega_i) &= \sum_\alpha \Big(\int_0^1 \frac{\partial h_\alpha(x,t)}{\partial t}\ dt\Big) d\mathrm{x}_{i,\alpha} = \sum_\alpha h_\alpha(x,1) d\mathrm{x}_{i,\alpha} - \sum_\alpha h_\alpha(x,0) d\mathrm{x}_{i,\alpha} \\ &= i_1^*(\omega_i) - i_0^*(\omega_i).\end{aligned}$$

En la última igualdad, se ha usado la linealidad del *pullback* junto con su conmutatividad con la diferencial exterior. Por tanto, podemos afirmar que los morfismos i_0^*, i_1^* son homótopos. □

Observación 5.2. Del lema 2.12, deducimos que los morfismos inducidos en los grupos de cohomología de de Rham coinciden, $i_0^* = i_1^* : H^p(M \times \mathbb{R}) \to H^p(M)$.

Este resultado nos permitirá extraer una serie de consecuencias que recogemos a continuación.

Teorema 5.3. *Sean $f, g : M \to N$ aplicaciones diferenciables homótopas. Entonces, los morfismos inducidos*

$$f^*, g^* : \Gamma^*(N) \to \Gamma^*(M)$$

son homótopos, y $f^* = g^* : H^*(N) \to H^*(M)$.

Demostración. Por el teorema 1.5, existe una homotopía diferenciable $G : M \times [0,1] \to N$. Para poder extenderla a una homotopía $F : M \times \mathbb{R} \to N$ tal que $F \circ i_0 = f(x)$ y $F \circ i_1 = g(x)$, tomamos una función diferenciable meseta $\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ con $\phi(t) = 0$ para $t \leq 1/3$ y $\phi(t) = 1$ para $t \geq 2/3$. Definimos

$$F : M \times \mathbb{R} \to N \ , \ F(x,t) = G(x, \phi(t)),$$

y observamos que $F(x,t) = f(x)$ para $t \leq 1/3$ y $F(x,t) = g(x)$ para $t \geq 2/3$. De forma que F es la homotopía diferenciable buscada.

Entonces, tenemos el morfismo $F^* : \Gamma^p(N) \to \Gamma^p(M \times \mathbb{R})$, el cual conmuta con la diferencial exterior. Componiendo con el operador s del lema anterior, tenemos el morfismo, $S = s \circ F^* : \Gamma^p(N) \to \Gamma^{p-1}(M)$. Veamos que se trata de un operador de homotopía para f^* y g^*.

$$\begin{aligned} d \circ S + S \circ d &= (d \circ s) \circ F^* + s \circ F^* \circ d = (d \circ s) \circ F^* + (s \circ d) \circ F^* \\ &= (d \circ s + s \circ d) \circ F^* = i_1^* \circ F^* - i_0^* \circ F^* = g^* - f^*. \end{aligned}$$

□

En el teorema anterior, nos hemos restringido a funciones f, g diferenciables. Sin embargo, podemos relajar esta condición para poder aplicar el resultado a funciones continuas. Por el teorema 1.5, si $\phi : M \to N$ es una función continua existe una función diferenciable $f : M \to N$ tal que $f \simeq \phi$. Entonces, por ser la homotopía una relación de equivalencia y por el teorema anterior, $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ está unívocamente determinada por ϕ y no depende de la elección de f. Luego, podemos introducir la siguiente definición.

Definición 5.4. Sea $\phi : M \to N$ una función continua entre variedades diferenciables. Definimos la aplicación lineal

$$\phi^* = f^* : H^p(N) \to H^p(M)$$

para cualquier función f diferenciable homótopa a ϕ.

Teorema 5.5. *Sean M, N y L variedades diferenciables y $p \in \mathbb{Z}$.*

1. *Sean* $\phi_0, \phi_1 : M \to N$ *aplicaciones continuas y homótopas. Entonces*
$$\phi_0^* = \phi_1^* : H^p(N) \to H^p(M).$$
2. *Si* $\phi : M \to N$ *y* $\psi : N \to L$ *son aplicaciones continuas, entonces* $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : H^p(L) \to H^p(M)$.
3. *(Invarianza homotópica) Si* M *y* N *tienen el mismo tipo de homotopía, entonces* $H^p(N) \cong H^p(M)$. *Esto ocurre en particular si* M *y* N *son homeomorfas, o si* M *es retracto de deformación de* N.

Demostración. El teorema 1.5 nos garantiza la existencia de funciones diferenciables $f_0, f_1 : M \to N$ tales que $\phi_\nu \simeq f_\nu$, con $\nu = 0, 1$. Teniendo en cuenta que la homotopía es una relación de equivalencia, aplicamos el teorema anterior a f_0 y f_1. Por tanto, $f_0^* = f_1^* : H^p(N) \to H^p(M)$. El resultado de 1. se sigue de la definición de $\phi_\nu^* : H^p(N) \to H^p(M)$. Para el apartado 2., elegimos aplicaciones diferenciables f y g tales que $f \simeq \phi$ y $g \simeq \psi$. Por tanto, $g \circ f \simeq \psi \circ \phi$. Resulta ahora evidente que $(\psi \circ \phi)^* = (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \phi^* \circ \psi^*$. Finalmente, si M y N tienen el mismo tipo homotópico existen aplicaciones continuas $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$. Del apartado previo se deduce que $f^* : H^p(N) \to H^p(M)$ es la inversa de g^* y, por tanto, un isomorfismo. □

Como señalamos en la introducción, que los grupos de de Rham solo dependan del tipo de homotopía es sorprendente, ya que su definición está ligada a la estructura diferenciable y a priori no existen indicios para afirmar que diferentes estructuras diferenciables en una misma variedad topológica den lugar a los mismos grupos de de Rham.

Teorema 5.6 (Lema de Poincaré)**.** *Si* M *es una variedad contráctil, entonces* $H^p(M) = 0$ *para* $p \geq 1$ *y* $H^0(M) = \mathbb{R}$.

Demostración. Al ser M contráctil, tiene el mismo tipo de homotopía que un punto $*$. La invarianza por homotopía de los grupos de cohomología de de Rham, afirma que $H^p(M) = H^p(*)$. Evidentemente, $H^0(*) = \mathbb{R}$ y $H^p(*) = 0$ para $p \geq 1$. □

Antes de concluir esta sección, incluimos un par de resultados destacables sobre la finitud de los grupos de cohomología.

Teorema 5.7. *Sean* $U_1, \ldots, U_r \subset \mathbb{R}^m$ *abiertos convexos y* $U = U_1 \cup \cdots \cup U_r$. *Entonces,* $H^p(U)$ *tiene dimensión finita.*

Demostración. Observemos que la convexidad se conserva por intersección y los convexos son contráctiles.

Procedemos por inducción sobre el número de abiertos convexos. Si $r = 1$ la afirmación se sigue del Lema de Poincaré. Supuesto cierto para $r-1$, consideramos $V = U_1 \cup \cdots \cup U_{r-1}$. Por el Teorema de Mayer-Vietoris tenemos la sucesión exacta
$$\cdots \to H^{p-1}(V \cap U_r) \xrightarrow{\partial^*} H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(V) \oplus H^p(U_r) \xrightarrow{J^*} H^p(V \cap U_r) \to \cdots$$

donde $V \cap U_r = (U_1 \cap U_r) \cup \cdots \cup (U_{r-1} \cap U_r)$ es unión de $r-1$ abiertos convexos. Por la hipótesis de inducción V y $V \cap U_r$ cumplen el teorema. Ahora, del lema 2.1 junto con la ecuación (2) se sigue que

$$H^p(U) \cong \operatorname{im} \partial^* \oplus \operatorname{im} I^*$$

con $\dim \operatorname{im} \partial^* \leq \dim H^p(V \cap U_r)$ y $\dim \operatorname{im} I^* \leq \dim H^p(V) \oplus H^p(U_r)$. Lo que concluye que $H^p(U)$ es finito dimensional. □

Teorema 5.8. *Si M^m es una variedad compacta sin borde, $H^p(M)$ es de dimensión finita.*

Demostración. Consideramos la variedad M^m inmersa en $\mathbb{R}^{m+k}$ y elegimos un entorno tubular W. Por ser M compacta existe un conjunto finito de bolas abiertas $U_1, \ldots, U_r$ en $\mathbb{R}^{m+k}$ cuya unión $U = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ satisface $M \subseteq U \subseteq W$.

Considerando la inclusión $i : M \hookrightarrow U$ y la retracción $\pi : W \to M$, se cumple $\pi|_U \circ i = \mathrm{Id}_M$. Luego,

$$i^* \circ \pi|_U^* = \mathrm{Id}_M^* : H^p(M) \to H^p(M).$$

En consecuencia, $i^* : H^p(U) \to H^p(M)$ es sobreyectiva y $\dim H^p(M) \leq \dim H^p(U) < \infty$, donde la última desigualdad se sigue del teorema anterior.

□

Conviene observar que este argumento es válido si M no tiene borde. Si hay borde es necesario usar collares en lugar de entornos tubulares, tema que no desarrollamos en esta memoria.

6. Cálculo de grupos de cohomología

Con las herramientas introducidas podemos calcular los grupos de cohomología de algunas variedades.

La cohomología de $\mathbb{R}^m$ y $\mathring{D}^m$ se obtiene del lema de Poincaré: $H^0 = \mathbb{R}$ y $H^p = 0$ si $p \geq 1$.

Proposición 6.1. *Sea A un conjunto cerrado arbitrario de $\mathbb{R}^m$ tal que $A \neq \mathbb{R}^m$, entonces existen isomorfismos*

$$\begin{aligned} H^{p+1}(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) &\cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus A) \qquad \textit{para } p \geq 1 \;, \\ H^1(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) &\cong H^0(\mathbb{R}^m \setminus A)/\mathbb{R} \;, \\ H^0(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) &\cong \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración. Definimos los subespacios abiertos de $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^m \times (0, \infty) \cup (\mathbb{R}^m \setminus A) \times (-1, \infty) \;, \\ U_2 &= \mathbb{R}^m \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^m \setminus A) \times (-\infty, 1) \;. \end{aligned}$$

Entonces, $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}$ y $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^m \setminus A) \times (-1, 1)$. Veamos que U_1 es contráctil. Sea $\phi : U_1 \to U_1$ con $\phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} + 1)$, para todo

$x \in U_1$, tanto el segmento que une x con $\phi(x)$ como el que une $\phi(x)$ con un punto fijo en $\mathbb{R}^m \times (0, \infty)$ están contenidos en U_1. Por tanto, existen homotopías $\mathrm{Id}_{U_1} \simeq \phi$ y $\phi \simeq cte.$ lo que prueba la contractibilidad de U_1. Análogamente, se obtiene que U_2 es contráctil. Luego, sus grupos de cohomología vienen dados por el lema de Poincaré.

Como la proyección $\mathrm{pr} : U_1 \cap U_2 \to (\mathbb{R}^m \setminus A) \times \{0\}$ es un retracto de deformación, entonces, $U_1 \cap U_2$ y $(\mathbb{R}^m \setminus A) \times \{0\} \cong \mathbb{R}^m \setminus A$ tienen el mismo tipo de homotopía. Luego, sus grupos de cohomología son isomorfos. Por otro lado, al ser U_1 y U_2 contráctiles la sucesión de Mayer-Vietoris

$$H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \to H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) \to H^{p+1}(U_1) \oplus H^{p+1}(U_2)$$

nos da que ∂^* es un isomorfismo para $p \geq 1$. Que junto con lo anterior nos permite afirmar que $H^{p+1}(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus A)$ para $p \geq 1$.

Consideremos ahora la sucesión exacta

$$0 \to H^0(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) \to 0 \ .$$

Donde $H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)$ está formado por pares de funciones constantes (c_1, c_2). Haciendo actuar J^* tenemos $J^*(c_1, c_2) = c_1 - c_2$, es decir, $\mathrm{im}\, J^* = \mathbb{R}$. De la exactitud de la sucesión

$$\ker \partial^* = \mathrm{im}\, J^* = \mathbb{R} \ .$$

Al ser ∂^* sobreyectivo, obtenemos el segundo isomorfismo del enunciado

$$H^1(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}) \cong H^0(U_1 \cap U_2) / \ker \partial^* \cong H^0(\mathbb{R}^m \setminus A)/\mathbb{R} \ .$$

La última afirmación del enunciado se sigue de la conexión de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus A \times \{0\}$. □

Corolario 6.2. *Para $m \geq 2$,*

$$H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & si\, p = 0,\ m-1 \ , \\ 0 & en\ caso\ contrario \ . \end{cases}$$

Mientras que,

$$H^p(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & si\, p = 0 \ , \\ 0 & en\ caso\ contrario \ . \end{cases}$$

Ejemplo 6.3. S^{m-1} es retracto de deformación de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ vía la aplicación

$$\rho : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to S^{m-1} \ , \ x \mapsto \frac{x}{||x||} \ .$$

Luego ambas variedades tienen el mismo tipo de homotopía y, en consecuencia, sus grupos de de Rham son isomorfos. Por lo tanto,

$$H^p(S^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \ , \\ 0 & 0 < p < m, \\ \mathbb{R} & \text{si } p = m \ . \end{cases}$$

A su vez, por ser la banda de Möbius retracto de deformación de S^1 conocemos también sus grupos de cohomología.

A continuación, calculamos los grupos de cohomología del espacio proyectivo real de dimensión m, $P^m(\mathbb{R})$, que es una variedad compacta y conexa. Por conexión $H^0(P^m(\mathbb{R})) \cong \mathbb{R}$.

Ejemplo 6.4. El espacio proyectivo real, $P^m(\mathbb{R})$ es el cociente de la esfera S^m por la identificación antipodal. La identificación $\pi : S^m \to P^m(\mathbb{R})$ es un difeomorfismo local sobreyectivo y cumple $\pi(x) = \pi(y)$ si $x = y$ o $x = -y$.

Por otro lado, la aplicación antipodal $A : S^m \to S^m$, $Ax = -x$, induce un morfismo $A^* : \Gamma^p(S^m) \to \Gamma^p(S^m)$ que cumple $(A^*)^2 = (A^2)^* = \mathrm{Id}^*$. Un resultado básico de álgebra lineal afirma que al tener A^* orden 2, $\Gamma^p(S^m)$ es suma directa de los subespacios propios correspondientes a autovalores 1 y -1, $\Gamma^p(S^m) = \Gamma^p(S^m)_+ \oplus \Gamma^p(S^m)_-$. Es inmediato que la diferencial exterior respeta esta descomposición, pues dado $\omega \in \Gamma^p(S^m)_i$ con $i = +, -$, $A^*(d\omega) = d(A^*\omega) = i\ d\omega$. Por lo tanto, se preserva al tomar grupos de cohomología, $H^p(S^m) = H^p(S^m)_+ \oplus H^p(S^m)_-$.

Consideremos ahora el isomorfismo local $\pi^* : \Gamma^p(P^m(\mathbb{R})) \to \Gamma^p(S^m)$. Como $\pi \circ A = \pi$, se tiene $A^* \circ \pi^* = \pi^*$, entonces $\pi^*(\Gamma^p(P^m(\mathbb{R}))) \subset \Gamma^p(S^m)_+$. Es más, esta inclusión es una igualdad. Pues dado $\sigma \in \Gamma^p(S^m)_+$, existe $\omega \in \Gamma^p(P^m(\mathbb{R})))$ tal que $\pi^*\omega = \sigma$ y está unívocamente determinado por

$$\omega_{\pi(x)}(w_1, \dots, w_m) = \sigma_x(v_1, \dots, v_m)$$

para todo $x \in S^m$ y $w_i = d_x\pi(v_i)$. Por tanto, se sigue que $\pi^* : \Gamma^p(P^m(\mathbb{R})) \to \Gamma^p(S^m)_+$ es un isomorfismo.

Por último, veamos que la aplicación lineal $A^* : H^m(S^m) \to H^m(S^m)$ es la multiplicación por $(-1)^{m+1}$. Considerando $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, toda $\omega \in \Gamma^m(S^m)$ se puede expresar como $\omega = a\sigma$ con $a \in \mathbb{R}$ y σ definida por

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{m+1} = \det(x, \dots),$$

donde $x \in \mathbb{R}^{m+1}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} A^*(\omega_x)(v_1, \dots, v_m) &= \omega_{A(x)}(A(v_1), \dots, A(v_m)) \\ &= a \det(-x, -v_1, \dots, -v_m) = (-1)^{m+1}\omega_x(v_1, \dots, v_m). \end{aligned}$$

Luego, $H^m(S^m) \cong \mathbb{R}$ coincide con el subespacio propio $H^m(S^m)_i$ para $i = (-1)^{m+1}$ de la aplicación lineal $A^* : H^m(S^m) \to H^m(S^m)$.

Recordando la cohomología de de Rham de la esfera y teniendo en cuenta lo anterior, concluimos

$$H^p(P^m(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0\ , \\ 0 & 0 < p < m\ , \\ \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = m \text{ impar}, \\ 0 & \text{si } p = m \text{ par}. \end{cases} \end{cases}$$

Obsérvese que H^m distingue la orientabilidad de $P^m(\mathbb{R})$.

7. Teorema de Jordan-Brouwer

En esta sección exponemos cómo utilizando métodos de cohomología podemos probar un resultado importante como es el teorema de separación de Jordan-Brouwer.

Teorema 7.1. *Sean $A \neq \mathbb{R}^m$ y $B \neq \mathbb{R}^m$ cerrados de $\mathbb{R}^m$. Si A y B son homeomorfos, entonces*

$$H^p(\mathbb{R}^m \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus B)\ .$$

Demostración. Gracias a 6.1, tenemos por inducción en n:

$$H^{p+n}(\mathbb{R}^{m+n} \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus A) \quad p > 0\ ,$$
$$H^n(\mathbb{R}^{m+n} \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^m \setminus A)/\mathbb{R}$$

para $n \geq 1$. Análogamente para B. Veamos que $\mathbb{R}^{2m} \setminus A$ y $\mathbb{R}^{2m} \setminus B$ son homeomorfos. Sea $\phi : A \to B$ un homeomorfismo. Por el teorema de extensión de Tietze, podemos extender ϕ a una aplicación $f_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ y definir el siguiente homeomorfismo

$$h_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m\ ; \quad (x, y) \mapsto (x, y + f_1(x))\ .$$

De la misma forma, extendemos ϕ^{-1} a una aplicación continua $f_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ y definimos

$$h_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m\ ; \quad (x, y) \mapsto (x + f_2(y), y)\ .$$

Entonces, podemos considerar el homeomorfismo $h = h_2^{-1} \circ h_1$, que cumple $h(x, 0_m) = (0_m, \phi(x))$ para $x \in A$. Componiendo con $g : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}\ ,\ (x, y) \mapsto (y, x)$, obtenemos el homeomorfismo $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$. La restricción $\tilde{\phi}|_{\mathbb{R}^{2m}\setminus A}$ nos da el homeomorfismo buscado.

Luego, tenemos las siguientes cadenas de isomorfismos

$$H^p(\mathbb{R}^m \setminus A) \cong H^{p+m}(\mathbb{R}^{2m} \setminus A) \cong H^{p+m}(\mathbb{R}^{2m} \setminus B) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus B) \quad p > 0\ ,$$
$$H^0(\mathbb{R}^m \setminus A)/\mathbb{R} \cong H^m(\mathbb{R}^{2m} \setminus A) \cong H^m(\mathbb{R}^{2m} \setminus B) \cong H^0(\mathbb{R}^m \setminus B)/\mathbb{R}\ .$$

□

Corolario 7.2. *Si A, $B \subset \mathbb{R}^m$ son dos conjuntos cerrados homeomorfos, entonces $\mathbb{R}^m \setminus A$ y $\mathbb{R}^m \setminus B$ tienen el mismo número de componentes conexas.*

Demostración. Al ser A y B homeomorfos, entonces $A, B \neq \mathbb{R}^m$ o $A, B = \mathbb{R}^m$. Puesto que si $A = \mathbb{R}^m$ y $B \neq \mathbb{R}^m$ entonces $\mathbb{R}^{m+1} \setminus A$ tiene dos componentes conexas, mientras $\mathbb{R}^{m+1} \setminus B$ tiene solo una, lo que no es posible. En el caso $A, B \neq \mathbb{R}^m$, la afirmación se sigue del teorema anterior junto con el hecho de que $\dim H^0$ es el número de componentes conexas.

□

Teorema 7.3 (Teorema de Jordan-Brouwer)**.** *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ homeomorfo a S^{m-1} entonces*

(i) *$\mathbb{R}^m \setminus \Sigma$ tiene dos componentes conexas U_1 y U_2, donde U_1 es acotada y U_2 no lo es.*
(ii) *Σ es el conjunto de puntos frontera de U_1 y U_2.*

Llamamos U_1, U_2 dominios interior y exterior de Σ respectivamente.

Demostración. Como Σ compacto, entonces es cerrado. Luego, por el corolario anterior basta demostrar la existencia de dos componentes conexas para $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

Las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^m \setminus S^{m-1}$ son

$$\mathring{D}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid ||x|| < 1\} , \quad W = \{x \in \mathbb{R}^m \mid ||x|| > 1\} .$$

Tomando $r = \text{máx}_{x\in\Sigma} ||x||$, tenemos $\Sigma \subset B_r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid ||x|| \leq r\}$. Además, el conjunto conexo $rW = \mathbb{R}^m \setminus B_r$ estará contenido en una de las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^m \setminus \Sigma$ y la otra será acotada. Esto prueba (i).

Sea $p \in \Sigma$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ un entorno abierto de p. El conjunto $A = \Sigma \setminus (\Sigma \cap V)$ es cerrado en Σ y homeomorfo a un conjunto cerrado propio B de S^{m-1}. Como $\mathbb{R}^m \setminus B$ es conexo, por el corolario anterior también lo será $\mathbb{R}^m \setminus A$. Luego, dados $p_1 \in U_1$ y $p_2 \in U_2$ existe un camino continuo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m \setminus A$ con $\gamma(0) = p_1$ y $\gamma(1) = p_2$. Por (i), $\gamma^{-1}(\Sigma) = [c_1, c_2] \subset (0,1)$ es no vacío y cerrado. Tenemos que $\gamma(c_1), \gamma(c_2) \in \Sigma \cap V$, de forma que podemos encontrar $t_1 \in [0, c_1)$ y $t_2 \in (c_2, 1]$ tales que $\gamma(t_1) \in U_1 \cap V$ y $\gamma(t_2) \in U_2 \cap V$. Esto es, p es un punto frontera de ambos dominios U_1, U_2. ☐

Teorema 7.4. *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ homeomorfo a S^{m-1} y sean U_1, U_2 los dominios interior y exterior de Σ. Entonces*

$$H^p(U_1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si } p = 0 \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases} , \qquad H^p(U_2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si } p = 0, m-1 \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. El caso $p = 0$ se sigue del teorema de Jordan-Brouwer. Sea $W = \mathbb{R}^m \setminus D^m$, para $p > 0$ existen isomorfismos

$$H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus \Sigma) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus S^{m-1}) \cong H^p(\mathring{D}^m) \oplus H^p(W) \cong H^p(W) .$$

Sean la inclusión $i : W \hookrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ y $g : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to W$ definida por

$$g(x) = \frac{||x|| + 1}{||x||} x .$$

Entonces, $i \circ g \simeq \text{Id}_{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}}$ y $g \circ i \simeq \text{Id}_W$. Luego, $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ y W tienen el mismo tipo de homotopía e i^* es un isomorfismo. Por tanto,

$$H^p(W) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0, m-1 , \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Garantizando $H^p(U_1) = H^p(U_2) = 0$ para $p \notin \{0, m-1\}$. Para concluir veamos que $H^{m-1}(U_2) \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \in U_1$ y que el conjunto acotado $U_1 \cup \Sigma$ está contenido en D^m. De modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \\ W \arrow[ur, "i"] \arrow[r] & U_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

que induce el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & H^{m-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \arrow[dl, "i^*"'] \arrow[d] \\
H^{m-1}(W) & H^{m-1}(U_2) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde i^* es un isomorfismo. Entonces, se sigue que $\dim H^{m-1}(U_2) \geq 1$. Por otro lado, $H^{m-1}(U_1) \oplus H^{m-1}(U_2) \cong H^{m-1}(W) \cong \mathbb{R}$. Luego, necesariamente $H^{m-1}(U_1) = 0$ y $H^{m-1}(U_2) = \mathbb{R}$. □

El teorema anterior muestra que la cohomología de U_1 coincide con la de $\mathbb{R}^m$ y la de U_2 con la de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Sin embargo, en general U_1 y U_2 no tienen los tipos de homotopía de esos complementarios. Es decir, el teorema de Schönflies se cumple para cohomología, pero no para homotopía en dimensión $m > 2$. El ejemplo más famoso es la *esfera cornuda de Alexander* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, para la que U_1 no es simplemente conexo.

8. Cohomología de de Rham con soporte compacto

En esta sección, recopilaremos resultados análogos a los de las secciones previas para el espacio lineal de formas diferenciales con soporte compacto $\Gamma_c^p(M)$. Debemos tener precaución a la hora de particularizar los teoremas que se han demostrado para el caso general ya que en ocasiones el análogo para soporte compacto no será cierto.

La sucesión $\Gamma_c^*(M) = \{\Gamma_c^p(M), d^p\}$ es también un complejo de cocadenas. Esto nos permite definir el p-ésimo grupo de cohomología de de Rham con soporte compacto, $H_c^p(M)$. Es inmediato que para una variedad M compacta, los grupos de cohomología con y sin soporte compacto coinciden, $H^p(M) = H_c^p(M)$ para todo p.

Podemos definir un producto bilineal, asociativo y anticonmutativo dotando a $H_c^*(M)$ de estructura de álgebra.

Si M es una variedad conexa y no compacta tenemos el siguiente resultado.

Proposición 8.1. *Sea M una variedad diferenciable conexa y no compacta, entonces el grupo de cohomología $H_c^0(M) = 0$.*

Demostración. El grupo $H_c^0(M)$ está compuesto por las funciones $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ constantes. Por ser M no compacto, necesariamente f se anulará en algún punto, luego f es idénticamente nula. □

Corolario 8.2. *Sea M una variedad diferenciable. La dimensión de $H_c^0(M)$ coincide con el número de componentes conexas compactas.*

Esto nos permite afirmar que los $H_c^p(M)$ ya no son invariantes homotópicos, puesto que $H_c^0(\mathbb{R}^m) \neq H_c^0(*)$.

Por la proposición 2.5, los morfismos $f^* : \Gamma_c^p(N) \to \Gamma_c^p(M)$ propios inducirán otros que denotaremos de la misma forma, $f^* : H_c^p(N) \to H_c^p(M)$ con propiedades análogas a los *pullbacks*.

Conviene remarcar que existe otro caso en el que una aplicación induce un morfismo entre espacios de formas diferenciales con soporte compacto.

Sea la inclusión $i : U \hookrightarrow M$ donde U es un subespacio abierto de M. Podemos definir el operador $i_* : \Gamma_c^p(U) \to \Gamma_c^p(M)$ que asocia a una p forma con soporte compacto ω en U, la forma con soporte compacto

$$(i_*\omega)_p = \begin{cases} \omega_p & \text{si } p \in U \ , \\ 0 & \text{si } p \notin \operatorname{sop}_U \omega \ . \end{cases}$$

Es inmediato que $i_* \circ d = d \circ i_*$, por lo tanto, i_* induce un morfismo en los grupos de cohomología con soporte compacto.

Teorema 8.3. *Sean U_1 y U_2 abiertos de una variedad diferenciable M, con $M = U_1 \cup U_2$. Para $\nu = 1, 2$, consideremos las inclusiones $i_\nu : U_\nu \to M$ y $j_\nu : U_1 \cap U_2 \to U_\nu$. Entonces, la sucesión*

$$0 \to \Gamma_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{J_p} \Gamma_c^p(U_1) \oplus \Gamma_c^p(U_2) \xrightarrow{I_p} \Gamma_c^p(M) \to 0$$

es exacta, donde

$$I_p(\omega_1, \omega_2) = i_{1*}(\omega_1) + i_{2*}(\omega_2) \ , \qquad J_p(\omega) = (j_{1*}(\omega), -j_{2*}(\omega)).$$

La situación es análoga a la de 4.1, pero hemos sustituido *restricción* por *extensión por cero,* lo que invierte el sentido de los homomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma_c^p(U_1) \arrow[dr, "i_{1*}"] & \\
\Gamma_c^p(U_1 \cap U_2) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \Gamma_c^p(M) \\
& \Gamma_c^p(U_2) \arrow[ur, "i_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Introducimos, además, la notación $\partial_*[\omega] \in H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2)$. Tomando $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_\nu \in \Gamma_c^p(U_\nu)$ y $\operatorname{sop}_M(\omega_\nu) \subset U_\nu$ (existen por ser I_p sobreyectiva), se cumple que $\partial_*[\omega] = [d\omega_1|_{U_1 \cap U_2}] = -[d\omega_2|_{U_1 \cap U_2}]$.

Esto da lugar a la siguiente sucesión de Mayer-Vietoris.

Teorema 8.4 (Mayer-Vietoris con soporte compacto)**.** *Sea M una variedad diferenciable, y sean U_1, U_2 abiertos de M tales que $M = U_1 \cup U_2$. Entonces, la siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \to H_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{J_*} H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) \xrightarrow{I_*} H_c^p(M) \xrightarrow{\partial_*} H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2) \to \cdots$$

donde

$$I_*([\omega_1], [\omega_2]) = i_{1*}[\omega_1] + i_{2*}[\omega_2] \ , \quad J_*([\omega]) = (j_{1*}[\omega], -j_{2*}[\omega]).$$

Corolario 8.5. *Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de abiertos de M disjuntos dos a dos y U su unión. Entonces*
$$H_c^p(U)^* \to \prod H_c^p(U_\alpha)^*$$
es un isomorfismo.

En la sección de homotopía, construimos un operador de homotopía $s : \Gamma^p(M \times \mathbb{R}) \to \Gamma^{p-1}(M)$ para demostrar la invarianza homotópica. Por su definición, se sigue que
$$s(\Gamma_c^p(M \times \mathbb{R})) \subset \Gamma_c^{p-1}(M)\ .$$
Sin embargo para que el operador de homotopía sea propio debemos restringirnos al dominio $M \times I$,
$$s : \Gamma_c^p(M \times I) \to \Gamma_c^{p-1}(M)\ .$$
Esto crea dificultades técnicas cuando M es una variedad *con borde*. De forma que para soporte compacto nos restringiremos al caso sin borde, que será el que nos interesará cuando estudiemos la relación entre integral y cohomología.

Podemos extender 5.3, 5.4, 5.5 para aplicaciones diferenciables o continuas según corresponda, propiamente homótopas. Resumimos esto en el siguiente teorema:

Teorema 8.6. *Sean M y N variedades diferenciables sin borde. Si $f, g : M \to N$ son aplicaciones continuas y propias, tales que son propiamente homótopas. Entonces, $f^* = g^* : H^p(N) \to H^p(M)$.*

Ejemplo 8.7. Calculemos los grupos de cohomología $H_c^p(\mathbb{R}^m)$ para $m \geq 1$ y $p < m$. Por 8.1, tenemos que $H_c^0(\mathbb{R}^m) = 0$.

Veamos que $H_c^p(\mathbb{R}^m) = 0$ para $0 < p < m$. Identificamos $\mathbb{R}^m = S^m \setminus \{p\}$ por proyección estereográfica y consideramos la inclusión canónica $i : \mathbb{R}^m \hookrightarrow S^m$. Basta comprobar que
$$i_* : H_c^p(\mathbb{R}^m) \to H_c^p(S^m) = H^p(S^m) = 0$$
es inyectiva. Sea $\omega \in \Gamma_c^p(\mathbb{R}^m)$ cerrada. Entonces, $i_*\omega = d\eta$ para $\eta \in \Gamma^{p-1}(S^m)$. Como ω tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^m = S^m \setminus \{p\}$, elegimos un entorno abierto contráctil U de p en S^m sobre el cual $i_*\omega$ se anule. Reduciendo U si es necesario podemos encontrar una forma diferencial $\alpha \in \Gamma^{p-2}(U)$ tal que $d\alpha = \eta$ en U. Tomando una función meseta $f \equiv 1$ en un entorno de p y $f \equiv 0$ fuera de U, tenemos que $\tilde{\eta} = \eta - d(f\alpha)$ es una $(p-1)$-forma diferencial en S^m bien definida que se anula en un entorno de p. Luego, $i^*\tilde{\eta} = \tilde{\eta}|_{S^m\setminus\{p\}} \in H_c^p(M)$. Y se cumple $d \circ i^*(\tilde{\eta}) = i^* \circ d\tilde{\eta} = i^* \circ i_*(\omega) = \omega$.

9. Integral y cohomología

Trataremos ahora la integral de formas y su estrecha relación con la cohomología. Esto nos permitirá calcular el último grupo de cohomología tanto en el caso general como con soporte compacto.

Puesto que la integral sobre una variedad M *sin borde* de una forma diferencial exacta $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ es nula podemos definir de forma consistente la integral en cohomología:

Teorema 9.1. *Sea M una variedad diferenciable conexa, orientada y sin borde, la integral*
$$\int_M : H_c^m(M) \to \mathbb{R}\ ,\ [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

es una isomorfismo lineal bien definido. Es decir, una m-forma con soporte compacto es exacta si y solo si su integral es nula.

Demostración. La observación previa nos muestra que la aplicación está bien definida. Dividimos el resto de la demostración en cuatro pasos.

(1) $\int_M$ es una forma lineal no nula.

Sea $U \subset M$ un abierto de M difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ y $\mathtt{x}$ un sistema de coordenadas asociado a U que conserve la orientación. Consideramos en U la m-forma:

$$\omega = \mathtt{x}^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m).$$

Tomando una función meseta θ, con soporte compacto contenido en U y tal que $\mathtt{x}(\operatorname{sop}\theta) \subset \mathbb{R}^m$ no tenga medida nula, podemos extender ω a una forma con soporte compacto en toda la variedad M

$$\tilde{\omega} = \theta\mathtt{x}^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m) = \mathtt{x}^*((\theta \circ \mathtt{x}^{-1})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m).$$

Integrando tenemos

$$\int_M \tilde{\omega} = \int_{\mathtt{x}(U)} (\mathtt{x}^{-1})^*\tilde{\omega} = \int_{\mathtt{x}(U)} (\theta \circ \mathtt{x}^{-1})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

la integral de Riemann de una función positiva en un conjunto de medida no nula. Por lo tanto, $\int_M \tilde{\omega} > 0$.

Esto demuestra que la aplicación lineal que hemos definido es sobreyectiva, lo que ya es interesante. Por ejemplo, para una esfera $H_c^m(S^m) = H^m(S^m) = \mathbb{R}$. Luego, $\int_M : H_c^m(M) \to \mathbb{R}$ es un isomorfismo. En decir, *toda m-forma de S^m con integral nula es exacta*.

(2) Para todo $m \geq 0$, $H_c^m(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$.

Para $m = 0$ es inmediato. Luego, sea $m \geq 1$ veamos que la aplicación sobreyectiva

$$\int_{\mathbb{R}^m} : H_c^m(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$$

es un isomorfismo. Para ello basta probar que dado $\omega \in \Gamma_c^m(\mathbb{R}^m)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^m} \omega = 0$, entonces ω tiene una primitiva con soporte compacto. Identificamos $\mathbb{R}^m = S^m \setminus \{p\}$ y consideramos la inclusión canónica $i : \mathbb{R}^m \hookrightarrow S^m$ que induce $i_* : \Gamma_c^p(\mathbb{R}^m) \to \Gamma_c^p(S^m) = \Gamma^p(S^m)$. Si $\omega \in \Gamma_c^m(\mathbb{R}^m)$ entonces $i_*\omega \in \Gamma_c^m(S^m)$ y

$$\int_{S^m} i_*\omega = \int_{\mathbb{R}^m} \omega = 0.$$

Por el comentario previo para S^m, existe $\eta \in \Gamma^{m-1}(S^m)$ tal que $d\eta = i_*\omega$. Análogamente al ejemplo 8.7, como ω tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^m$, podemos suponer que η se anula en un entorno de $\{p\}$. Luego, $i^*\eta \in H_c^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ cumple $d \circ i^*(\eta) = \omega$, lo que concluye el caso de $\mathbb{R}^m$.

(3) Veamos un caso algo más general. Sea la forma $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ con integral no nula y soporte contenido en un abierto V difeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Queremos comprobar que para todo $\alpha \in \Gamma_c^m(M)$ existe $a \in \mathbb{R}$ y $\eta \in \Gamma_c^{m-1}(M)$ tal que $\alpha = a\omega + d\eta$. Lo que equivale a que la clase de cohomología $[\alpha]$ sea proporcional a $[\omega]$.

Tomando una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_i\}$ subordinada a un atlas positivo $(U_i, \mathtt{x}_i)$ de M, escribimos $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \theta_i\alpha$, la suma es finita por tener α soporte compacto y ser la partición de la unidad localmente finita, y $\text{sop}(\theta_i\alpha) \subset U_i$. Como $[\alpha] = \sum_{i=1}^{r}[\theta_i\alpha]$ podemos suponer que α tiene soporte contenido en un abierto V_0 difeomorfo a $\mathbb{R}^m$.

Entonces, usando la conexión de M, existe una cadena $V_0, \ldots, V_k = V$ de abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ y $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, existe $\omega_i \in \Gamma_c^m(M)$ una forma diferencial con integral no nula y con soporte contenido en $V_{i-1} \cap V_i$. Por (2), la proporcionalidad de clases se cumple en V_0. Entonces, resulta que $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega_1]$, que lo es por recurrencia a $[\omega]$.

(4) Caso general. Sean $\omega, \omega_1, \alpha \in \Gamma_c^m(M)$ tales que ω, ω_1 tienen integral no nula y ω tiene soporte contenido en un abierto difeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Por (3), tenemos que las clases de cohomología cumplen $[\omega_1] = \lambda[\omega]$ con $\lambda \neq 0$ y $[\alpha] = \mu[\omega]$. Entonces, $[\alpha] = \mu/\lambda[\omega_1]$. Lo que concluye la demostración. $\square$

Además, utilizando la integral en cada componente conexa, afirmamos que para variedades no conexas el grupo de cohomología $H_c^m(M)$ es $\mathbb{R}^{b_0}$, donde b_0 es el primer número de Betti. Por lo tanto, $H_c^m(M) \cong H^0(M)$. Esto nos permitirá introducir la dualidad de Poincaré más adelante.

Los dos teoremas siguientes se enuncian en el contexto de variedades *sin borde*.

Teorema 9.2. *Sea M una variedad conexa y no orientable, entonces $H_c^m(M) = 0$.*

Demostración. Comenzamos probando la siguiente afirmación:

(1) Sea $\omega \in \Gamma_c^m(M)$. Si existen $a \in M$ y un entorno abierto W_a tal que $\text{sop}\,\omega \subset W_a$. Entonces, $[\omega] = 0$.

El caso $\int_{W_a} \omega|_{W_a} = 0$ es trivial por ser $\int_{W_a}$ un isomorfismo. Por tanto, supongamos $\int_{W_a} \omega|_{W_a} \neq 0$.

Recordando la caracterización dada de no orientabilidad, distinguimos dos situaciones.

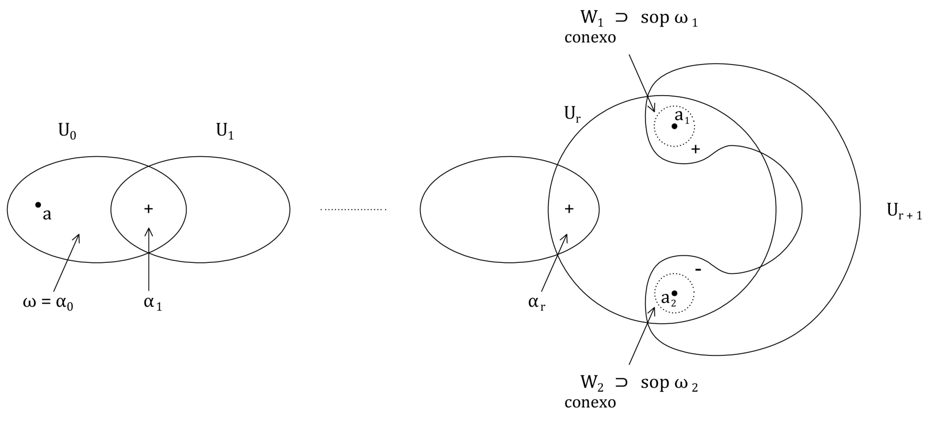


FIGURA 1. Caso (i)

Caso (i): Sea $U_0, \dots, U_{r+1}$ una cadena cualquiera entre a y b de abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ con cambios consecutivos entre $U_0, \dots, U_r$ positivos. Tomamos $W_a = U_0$.

Por la sobreyectividad de la integral, existen $\omega_i \in \Gamma_c^m(M)$ $i = 1, \dots, r-1$, tales que $\operatorname{sop} \omega_i \subset U_i \cap U_{i+1}$ y $\int_{U_i} \omega_i|_{U_i} \neq 0$. El teorema de cambio de variables garantiza $\int_{U_i} \omega_i|_{U_i} = \int_{U_{i+1}} \omega_i|_{U_{i+1}}$. Nótese que la integral está bien definida en cada abierto.

Consideramos también $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_c^m(M)$ con soporte en abiertos conexos $W_1, W_2 \subset U_r \cap U_{r+1}$ e integral no nula en dichos abiertos, donde W_1, W_2 son entornos de puntos a_1, a_2. Por hipótesis, el cambio en $U_r \cap U_{r+1}$ es positivo en a_1, luego en W_1, y negativo en a_2, luego en W_2.

Del teorema anterior se tiene, $[\omega_{i-1}] = a_i[\omega_i]$, donde $a_i = \int_{U_i} \omega_{i-1} / \int_{U_i} \omega_i$. Por recurrencia, $[\omega] = a[\omega_r]$ con $a = \int_{W_a} \omega / \int_{U_r} \omega_r \neq 0$. Entonces,

$$[\omega] = \begin{cases} b_1\ [\alpha_1]\ ,\ b_1 = \int_{W_a} \omega / \int_{U_r} \alpha_1 \neq 0\,, \\ b_2\ [\alpha_2]\ ,\ b_2 = \int_{W_a} \omega / \int_{U_r} \alpha_2 \neq 0\,. \end{cases}$$

Luego, $[\alpha_1] = b_2/b_1[\alpha_2]$. Por otro lado, como U_{r+1} es conexo, fijamos la orientación dada por ζ_p, $p \in W_1$, compatible con $\mathtt{y}_1$. Entonces, se tiene

$$[\alpha_1] = b\ [\alpha_2]\ ,\ b = \frac{\int_{U_{r+1}} \alpha_1}{\int_{U_{r+1}} \alpha_2} = \frac{\int_{U_r} \alpha_1}{-\int_{U_r} \alpha_2} = -b_2/b_1\ .$$

Sumando las expresiones obtenidas: $2[\alpha_1] = 0$. Por tanto, $[\omega] = b_1\ [\alpha_1] = 0$.

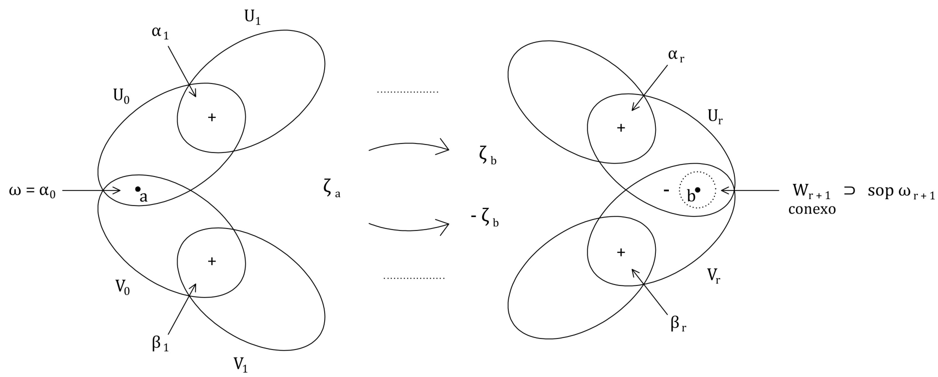


FIGURA 2. Caso (ii)

Caso (ii): Sean dos cadenas finitas $U_0, \dots, U_r$ y $V_0, \dots, V_r$ entre a y b de abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$, tal que $W_a = U_0 \cap V_0$ y $b \in U_r \cap V_r$, con cambios positivos consecutivos en cada cadena. Y tal que el cambio entre ambas cadenas sea positivo en a, luego en $U_0 \cap V_0$ y negativo en b, luego en $U_r \cap V_r$.

Análogamente al caso anterior, existen m-formas con soporte compacto en las intersecciones consecutivas, tales que por recurrencia en cada cadena:

$$[\omega] = \begin{cases} b_1\ [\omega_{r+1}]\ ,\ b_1 = \int_{U_0} \omega / \int_{U_r} \omega_{r+1} \neq 0\,, \\ b_2\ [\omega_{r+1}]\ ,\ b_2 = \int_{V_0} \omega / \int_{V_r} \omega_{r+1} \neq 0\,, \end{cases}$$

donde $\operatorname{sop}(\omega_{r+1}) \subset U_r \cap V_r$. Aplicando el teorema de cambio de variables en $U_0 \cap V_0$ y $U_r \cap V_r$, tenemos

$$\int_{U_0} \omega = \int_{V_0} \omega\,, \qquad \int_{U_r} \omega_{r+1} = -\int_{V_r} \omega_{r+1}\,.$$

Luego, $b_1 = -b_2$, $[\omega] = b_1\,[\omega_{r+1}] = -b_1\,[\omega_{r+1}] = -[\omega]$. Lo que prueba $[\omega] = 0$.

Esto concluye la demostración de (1). Sea, ahora, $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ arbitraria. Por tener soporte compacto, existen entornos abiertos $W_{a_1}, \dots, W_{a_r}$ que cumplen (1), tales que $\operatorname{sop}(\omega) \subset W_{a_1} \cup \cdots \cup W_{a_r}$. Tomando el abierto $V = M \setminus \operatorname{sop}(\omega)$, existe una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_i; \theta\}$ subordinada a $\{W_{a_i}; V\}$, tal que $\omega = \sum_{i=1}^r \theta_i \omega$. Como $\operatorname{sop}(\theta_i\omega) \subset W_{a_i}$, tenemos:

$$[\omega] = \sum_{i=1}^{r} [\theta_i \omega] = 0\ .$$

□

Teorema 9.3. *Sea M una variedad conexa y no compacta, entonces $H^m(M) = 0$.*

Demostración. En primer lugar, sea $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ con soporte compacto contenido en un abierto $U_1 \subset M$ difeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Como M no es compacta, existe una cadena infinita $U_1, U_2, U_3, \dots$ de abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ tales que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ y conexa, y tal que la familia $\{U_i\}$ es localmente finita. Elegimos $\omega_i \in \Gamma_c^m(M)$ con $\operatorname{sop}\omega_i \subset U_i \cap U_{i+1}$ e $\int_{U_i} \omega_i \neq 0$.

Por 9.1 existen constantes $a_i \in \mathbb{R}$ y formas $\eta_i \in \Gamma_c^{m-1}(M)$ con $\operatorname{sop}\eta_i \subset U_i$ tales que en U_i

$$\omega = a_1\omega_1 + d\eta_1\ , \qquad \omega_i = a_{i+1}\omega_{i+1} + d\eta_{i+1}$$

para $i \geq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \omega &= a_1\omega_1 + d\eta_1 = d\eta_1 + a_1 d\eta_2 + a_1 a_2 \omega_2 = \dots \\ &= d\eta_1 + a_1 d\eta_2 + a_1 a_2 d\eta_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{r=0}^{k-1} a_r d\eta_k \end{aligned}$$

donde $a_0 = 1$ y el último término está bien definido por ser la familia $\{\operatorname{sop}\eta_i\}_{i \in I}$ localmente finita. Por tanto, ω es exacta.

Sea ahora $\{\theta_i\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a un atlas positivo $\{U_i, \mathtt{x}_i\}$ de M tal que los dominios U_i cumplen $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ y conexa. Entonces, dada $\omega \in \Gamma^m(M)$ tenemos

$$\omega = \sum_i \theta_i \omega$$

donde $\operatorname{sop}\theta_i\omega \subset U_i$. Por lo anterior, se sigue que $\theta_i\omega$ es exacta, $\theta_i\omega = d\eta_i$ con $\operatorname{sop}\eta_i \subset \operatorname{sop}\theta_i$. Como la familia $\{\theta_i\}_{i \in I}$ es localmente finita, se tiene la exactitud de $\omega = \sum_i d\eta_i = d(\sum_i \eta_i)$. Concluyendo que $H^p(M) = 0$. □

10. Integración de 1-formas

Al igual que para el grupo de cohomología de grado máximo, en el caso de grado 1, también podemos obtener algunos resultados generales.

En primer lugar, introducimos algo de notación:

Definición 10.1. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ un camino diferenciable a trozos y $\omega \in \Gamma^1(M)$, definimos la *integral de línea*

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \int_a^b h \ ,$$

donde $\gamma^*\omega = hdt$ con $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable a trozos.

Teorema 10.2. *Sea M^m una variedad diferenciable. Si $\omega \in \Gamma^1(M)$ tiene integral nula en cualquier lazo diferenciable a trozos, entonces es exacta.*

Demostración. Supongamos primero que M es conexa. Puesto que $\int_\gamma \omega = 0$ para todo lazo γ diferenciable a trozos, se sigue por las propiedades de la integral, que las integrales de línea de ω no dependen del camino elegido. Luego, dados dos puntos $x, y \in M$, podemos denotar $\int_\sigma \omega = \int_x^y \omega$ para cualquier camino σ de x a y.

Elegimos ahora un punto base $a \in M$ y definimos la función $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_a^x \omega$. Veamos que f es diferenciable y $df = \omega$. Para ello, basta comprobarlo localmente.

Sean $(U, \mathtt{x})$ unas coordenadas en las que

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^m \omega_i \ d\mathtt{x}_i \ .$$

Para $x \in U$, sea $\gamma : [0,1] \to U$ el camino diferenciable $\gamma(t) = \mathtt{x}^{-1}(t\mathtt{x}(x))$. Tenemos que $\gamma(0) = \mathtt{x}^{-1}(0)$, $\gamma(1) = x$. Además, $\mathtt{x}_i \circ \gamma(t) = t\mathtt{x}_i(x)$ y $d(\mathtt{x}_i \circ \gamma) = \mathtt{x}_i(x)dt$. Luego,

$$(\gamma^*\omega)_t = \omega_{\gamma(t)}(d_t\gamma) = \sum_{i=1}^m (\omega_i \circ \gamma)(t) \ d(\mathtt{x}_i \circ \gamma) = \sum_{i=1}^m (\omega_i \circ \gamma)(t) \ \mathtt{x}_i(x)dt.$$

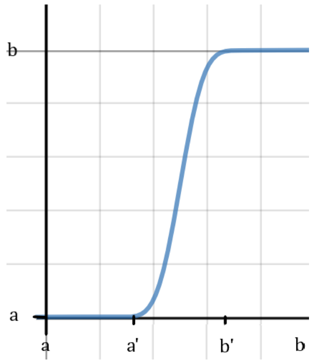
Entonces,

$$f(x) = \int_a^x \omega = \int_a^{\gamma(0)} \omega + \int_{\gamma(0)}^x \omega = cte + \int_{[0,1]} \gamma^*\omega = cte + \sum_{i=1}^m \Big(\int_0^1 \omega_i(\gamma(t))dt \Big) \mathtt{x}_i(x),$$

que es claramente diferenciable en U, pues el camino γ depende diferenciablemente de x y las funciones ω_i son diferenciables.

Finalmente, si M no es conexa, lo anterior prueba que en cada componente conexa, M_k, existe $f_k \in \mathcal{C}^\infty(M_k)$ tal que $df_k = \omega|_{M_k}$. Entonces, tomando $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f = f_k$ en M_k completamos la demostración. □

Observación 10.3 (Reparametrización de alisamientos)**.** Sea $\theta : [a,b] \to [a,b]$ una función meseta tal que $\theta : (a', b') \to (a,b)$ es un difeomorfismo creciente.



Para todo $\eta \in \Gamma^1[a,b]$, $\eta = h(t)dt$, se tiene que

$$\theta^*\eta = h(\theta(t))\, \theta'(t)dt.$$

Luego

$$\int_a^b \eta = \int_a^b \theta^*\eta = \int_{a'}^{b'} \theta^*\eta$$

es simplemente un cambio de variable integral. Además, observamos que θ es homótopa a la identidad, mediante la homotopía

$$H_s(t) = (1-s)t + s\theta(t) : H_0(t) = t \simeq H_1(t) = \theta(t).$$

□

Suponemos M conexa y consideramos el grupo fundamental $\pi_1(M, x_0)$ de M con punto base $x_0 \in M$. Sea el espacio vectorial $\mathrm{Hom}(\pi_1(M,x_0),\mathbb{R})$, definimos la aplicación

$$\phi : H^1(M) \to \ \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x_0),\mathbb{R})$$

tal que dada $[\omega] \in H^1(M)$

$$\phi[\omega] : \pi_1(M,x_0) \to \mathbb{R}\ , \quad [\sigma] \mapsto \int_\gamma \omega\ ,$$

donde γ es cualquier camino diferenciable a trozos en $[\sigma]$.

Teorema 10.4. *Sea M una variedad conexa. Para todo $x_0 \in M$, la aplicación ϕ : $H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x_0),\mathbb{R})$ es un monomorfismo lineal bien definido.*

Demostración. Comprobemos que ϕ está bien definida.

(i) Por 1.5, dada $[\sigma] \in \pi_1(M,x_0)$ existe un lazo diferenciable $\gamma \in [\sigma]$.

(ii) Veamos que $\int_\gamma \omega$ es independiente del representante $\gamma \in [\sigma]$ diferenciable a trozos. Es decir, dados $\gamma, \gamma' \in [\sigma]$, comprobemos que $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$.

Sean $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$ tal que $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ es diferenciable. Por la observación previa, existe $\theta_i : [t_{i-1}, t_i] \to [t_{i-1}, t_i]$ con las propiedades mencionadas. Definiendo $\theta = \bigcup_i \theta_i : [a,b] \to [a,b]$, tenemos que $\theta \simeq \mathrm{Id}$.

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "\gamma"] & M \\ {[a,b]} \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\gamma\circ\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces, $\gamma \circ \theta \simeq \gamma$ y

$$\int_\gamma \omega = \int \gamma^*\omega = \int \theta^*\gamma^*\omega = \int (\gamma\circ\theta)^*\omega = \int_{\gamma\circ\theta} \omega\ .$$

En adelante supondremos γ diferenciable, pues $\gamma\circ\theta$ es localmente constante en las junturas t_i. Además, es localmente constante en $t = a$ y $t = b$ cuya imagen corresponde al punto base x_0. Luego, γ desciende a $\tilde{\gamma} : S^1 = [a, b]/a \equiv b \to M$ diferenciable. Análogamente para γ'.

Puesto que $\gamma, \gamma' \in [\sigma]$, existe una homotopía con punto base fijo $H_s : \gamma \simeq \gamma'$ que desciende a $\tilde{H}_s : \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\gamma}'$ en $S^1 \times [0, 1]$. Por 1.5, como $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ son diferenciables, existe una homotopía diferenciable $F : S^1 \times [0, 1] \to M$, con $F_0 = \tilde{\gamma}$ y $F_1 = \tilde{\gamma}'$. Para todo $[\omega] \in H^1(M)$, $F^*\omega \in H^1(S^1 \times [0, 1])$ y $dF^*\omega = 0$. Entonces, aplicando el teorema de Stokes con la orientación correcta, concluimos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^1\times[0,1]} dF^*\omega = \int_{\partial(S^1\times[0,1])} F^*\omega = \int_{S^1\times\{1\}} F_1^*\omega - \int_{S^1\times\{0\}} F_0^*\omega \\ &= \int_{S^1\times\{1\}} \tilde{\gamma}'^*\omega - \int_{S^1\times\{0\}} \tilde{\gamma}^*\omega = \int_a^b \gamma'^*\omega - \int_a^b \gamma^*\omega = \int_{\gamma'} \omega - \int_\gamma \omega\ . \end{aligned}$$

(iii) Por último, observamos que si $[\omega] = [\tilde{\omega}] \in H^1(M)$, entonces

$$\int_\gamma \omega - \int_\gamma \tilde{\omega} = \int_\gamma df = f(x_0) - f(x_0) = 0\ .$$

Comprobamos que $\phi[\omega]$ es un homomorfismo lineal de grupos, pues dadas $[\sigma], [\sigma'] \in \pi_1(M, x_0)$, se tiene

$$[\sigma] * [\sigma'] = [\sigma * \sigma'] = [\gamma * \gamma'],$$

donde $\gamma \in [\sigma]$ y $\gamma' \in [\sigma']$ son lazos diferenciables a trozos. Entonces,

$$\phi[\omega]([\sigma] * [\sigma']) = \int_{\gamma*\gamma'} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{\gamma'} \omega = \phi[\omega]([\sigma]) + \phi[\omega]([\sigma']).$$

Finalmente, veamos que ϕ es inyectiva. Sea $\phi[\omega] = 0$, es decir, $\int_\gamma \omega = 0$ para cualquier lazo diferenciable a trozos γ de punto base x_0. Si γ' es otro lazo diferenciable a trozos de punto base y_0, existe un camino diferenciable a trozos α de extremos x_0 e y_0, con reparametrización en sentido inverso $\bar{\alpha}$, tal que $\alpha * \gamma' * \bar{\alpha}$ es un lazo diferenciable a trozos de punto base x_0. Luego,

$$0 = \int_{\alpha*\gamma'*\bar{\alpha}} \omega = \int_\alpha \omega + \int_{\gamma'} \omega - \int_\alpha \omega = \int_{\gamma'} \omega$$

para cualquier lazo diferenciable a trozos. Entonces, 10.2 concluye la inyectividad. □

Si tuviésemos herramientas más sofisticadas que escapan esta memoria, se podría demostrar que en realidad ϕ es un isomorfismo.

Corolario 10.5. *Sea M una variedad conexa cuyo grupo fundamental es finito, entonces $H^1(M) = 0$.*

Demostración. No existen homomorfismos de un grupo finito en $\mathbb{R}$. □

Observación 10.6. Sea M una variedad conexa, y $\phi : H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M, x_0), \mathbb{R})$ el isomorfismo anterior.

(1) Por ser M conexa, el grupo fundamental no depende del punto base, denotaremos simplemente $\pi(M)$. En general, este grupo no es necesariamente conmutativo. Definimos el grupo fundamental abelianizado

$$\pi^{ab}(M) = \frac{\pi(M)}{\langle xyx^{-1}y^{-1}\rangle}.$$

Puesto que para todo $[\omega] \in H^1(M)$, $\phi[\omega](xyx^{-1}y^{-1}) = \phi[\omega](x) + \phi[\omega](y) - \phi[\omega](x) - \phi[\omega](y) = 0$, se sigue que

$$\mathrm{Hom}(\pi(M), \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\pi^{ab}(M), \mathbb{R}).$$

(2) Sea $T = \left\langle x \in \pi^{ab}(M) |\ \exists k \in \mathbb{Z}\ , k \geq 1 \text{ tal que } x^k = 1 \right\rangle$ el conjunto de elementos de torsión de $\pi^{ab}(M)$. Dado $x \in T$, para todo $[\omega] \in H^1(M)$, $k\phi[\omega](x) = \phi[\omega](x^k) = \phi[\omega](1) = 0$. Entonces,

$$\mathrm{Hom}(\pi(M), \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\pi^{ab}(M)/T, \mathbb{R}).$$

(3) Introduciendo el grupo de homología singular de grado p de M con coeficientes enteros, $H_p(M, \mathbb{Z})$, se ve que $\pi^{ab}(M) = H_1(M, \mathbb{Z})$. Eliminar la torsión y extender los escalares $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, se traduce algebraicamente en $H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, de forma que el isomorfismo de integración, ϕ, sobre lazos diferenciables a trozos es:

$$\phi : H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi(M, x_0), \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_1(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) = H_1(M, \mathbb{R})^*,$$

donde $*$ denota el espacio dual. Luego, el teorema 10.4 es el primer paso del teorema de de Rham: la integración sobre ciclos de dimensión arbitraria es un isomorfismo

$$\phi : H^p(M) \to H_p(M, \mathbb{R})^*.$$

□

Podremos apreciar un paralelismo con la dualidad de Poincaré en la siguiente sección.

11. Dualidad de Poincaré

En esta sección, exploraremos la íntima relación que existe entre los grupos de cohomología con y sin soporte compacto. En adelante, trataremos con variedades *sin borde.*

Sea M^m una variedad orientada. Tenemos el producto bilineal, asociativo y anticonmutativo:

$$H^p(M) \times H^q_c(M) \to H^{p+q}_c(M)\ , \quad ([\omega_1], [\omega_2]) \mapsto [\omega_1 \wedge \omega_2]\ .$$

Definición 11.1. El *producto escalar de Poincaré*

$$P_M^p : H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \to \mathbb{R} \ , \quad ([\omega_1],[\omega_2]) \mapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2 \ .$$

es una aplicación bilineal que induce el *operador dual de Poincaré*

$$\mathcal{P}_M^p : H^p(M) \to H_c^{m-p}(M)^* \ ,$$

donde

$$\mathcal{P}_M^p([\omega]) : H_c^{m-p}(M) \to \mathbb{R} \ , \quad [\alpha] \mapsto \int_M \omega \wedge \alpha \ .$$

Teorema 11.2 (Dualidad de Poincaré)**.** *Sea M^m una variedad orientable. Para todo p, el operador de Poincaré $\mathcal{P}_M^p$ es un isomorfismo lineal.*

Dividiremos la demostración en varios pasos.

Lema 11.3. *Sea M una variedad orientable.*

(i) *Sean U_1, U_2 abiertos de M, tales que U_1, U_2 y $U_1 \cap U_2$ satisfacen la dualidad de Poincaré. Entonces, $U = U_1 \cup U_2$ también la cumple.*
(ii) *Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ una familia de abiertos de M disjuntos dos a dos y U su unión. Si para todo $\alpha \in A$, $\mathcal{P}_{U_\alpha}^p$ es un isomorfismo, entonces $\mathcal{P}_U^p$ también lo es.*
(iii) *Todo abierto $U \subset M$ difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ satisface la dualidad de Poincaré.*

Demostración. (i) El siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^p(U) \arrow[r, "I^*"] \arrow[d, "\mathcal{P}_U^p"] & H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{U_1}^p \oplus \mathcal{P}_{U_2}^p"] & H^p(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{U_1 \cap U_2}^p"] & H^{p+1}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{P}_U^{p+1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_c^{m-p}(U)^* \arrow[r, "I^!"] & H_c^{m-p}(U_1)^* \oplus H_c^{m-p}(U_2)^* \arrow[r, "J^!"] & H_c^{m-p}(U_1 \cap U_2)^* \arrow[r, "(-1)^{p+1}\partial^!"] & H_c^{m-p-1}(U)^* \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

tiene filas exactas y por hipótesis $\mathcal{P}_{U_1}^p \oplus \mathcal{P}_{U_2}^p$ y $\mathcal{P}_{U_1 \cap U_2}^p$ son isomorfismos para todo p. Veamos que además es conmutativo, entonces por el *lema de los cinco*, $\mathcal{P}_U^p$ es un isomorfismo.

Basta probar la conmutatividad para los dos bloques siguientes:

(1) Sean $V \subseteq U \subseteq M$ abiertos. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
H^p(U) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\mathcal{P}_U^p"] & H^p(V) \arrow[d, "\mathcal{P}_V^p"] \\
H_c^{m-p}(U)^* \arrow[r, "i^!"] & H_c^{m-p}(V)^*
\end{tikzcd}$$

Sean $[\omega] \in H^p(U)$, $[\tau] \in H_c^{m-p}(V)$.

$$\mathcal{P}_V^p \circ i^*([\omega])[\tau] = \mathcal{P}_V^p([i^*\omega])[\tau] = \int_V i^*\omega \wedge \tau \ ,$$

$$i^! \circ \mathcal{P}_U^p([\omega])[\tau] = \mathcal{P}_U^p([\omega])[i_*\tau] = \int_U \omega \wedge i_*\tau = \int_V i^*(\omega \wedge i_*\tau) = \int_V i^*\omega \wedge \tau \ .$$

Donde se ha utilizado que $\mathrm{sop}_U(\omega \wedge i_*\tau) \subset \mathrm{sop}_U(i_*\tau) = \mathrm{sop}_V(\tau)$ e $i^* \circ i_* = \mathrm{Id}$.

(2) Veamos, ahora, que

$$\begin{array}{ccc} H^p(U_1\cap U_2) & \xrightarrow{\partial^*} & H^{p+1}(U) \\ \big\downarrow \mathcal{P}^p_{U_1\cap U_2} & & \big\downarrow \mathcal{P}^{p+1}_U \\ H^{m-p}_c(U_1\cap U_2)^* & \xrightarrow{(-1)^{p+1}\partial^!} & H^{m-p-1}_c(U)^* \end{array}$$

es conmutativo.

Sean $[\omega]\in H^p(U_1\cap U_2)$, $[\tau]\in H^{m-p-1}_c(U)$. Por ser $J^p:\Gamma^p(U_1)\oplus\Gamma^p(U_2)\to\Gamma^p(U_1\cap U_2)$ sobreyectiva (4.1), $\omega=j_1^*(\omega_1)-j_2^*(\omega_2)$ donde $\omega_\nu\in\Gamma^p(U_\nu)$. Al ser ω cerrada, $(d\omega_1,d\omega_2)\in\ker J^{p+1}=\operatorname{im} I^{p+1}$, con $I^{p+1}=(i_1^*,i_2^*):\Gamma^{p+1}(U)\to\Gamma^{p+1}(U_1)\oplus\Gamma^{p+1}(U_2)$. Luego, existe $\kappa\in\Gamma^{p+1}(U)$ cerrada tal que $i_\nu^*(\kappa)=d\omega_\nu$. Entonces, $\partial^*[\omega]=[\kappa]$ y

$$\mathcal{P}^{p+1}_U\circ\partial^*([\omega])[\tau]=\mathcal{P}^{p+1}_U([\kappa])[\tau]=\int_U\kappa\wedge\tau\ .$$

Recordamos de la sección 8, que $\partial_*[\tau]=[j_1^*(d\tau_1)]=-[j_2^*(d\tau_2)]$ con $\tau=\tau_1+\tau_2$, $\tau_\nu\in\Gamma^{m-p-1}_c(U_\nu)$. Además, por ser τ cerrada, $\operatorname{sop}_{U_\nu}(d\tau_\nu)\subset U_1\cap U_2$. Definiendo $[\sigma]=\partial_*[\tau]$, con $\sigma\in\Gamma^{m-p}_c(U_1\cap U_2)$ cerrada,

$$\partial^!\circ\mathcal{P}^p_{U_1\cap U_2}([\omega])[\tau]=\mathcal{P}^p_{U_1\cap U_2}([\omega])[\sigma]=\int_{U_1\cap U_2}\omega\wedge\sigma\ .$$

Veamos que ambas integrales difieren solo en un factor $(-1)^{p+1}$.

$$\int_U\kappa\wedge\tau=\int_U\kappa\wedge\tau_1+\int_U\kappa\wedge\tau_2=\int_{U_1}d\omega_1\wedge\tau_1+\int_{U_2}d\omega_2\wedge\tau_2\ .$$

Como $d(\omega_\nu\wedge\tau_\nu)=d\omega_\nu\wedge\tau_\nu+(-1)^p\omega_\nu\wedge d\tau_\nu$ e $\int_{U_\nu}$ es un isomorfismo,

$$\begin{aligned}(-1)^{p+1}\int_U\kappa\wedge\tau&=\int_{U_1}\omega_1\wedge d\tau_1+\int_{U_2}\omega_2\wedge d\tau_2\\&=\int_{U_1\cap U_2}j_1^*(\omega_1\wedge d\tau_1)+\int_{U_1\cap U_2}j_2^*(\omega_2\wedge d\tau_2)\\&=\int_{U_1\cap U_2}j_1^*(\omega_1)\wedge\sigma-\int_{U_1\cap U_2}j_2^*(\omega_2)\wedge\sigma=\int_{U_1\cap U_2}\omega\wedge\sigma\ .\end{aligned}$$

(ii) Se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} H^p(U) & \longrightarrow & \prod H^p(U_\alpha) \\ \big\downarrow \mathcal{P}^p_U & & \big\downarrow \prod\mathcal{P}^p_{U_\alpha} \\ H^{m-p}_c(U)^* & \longrightarrow & \prod H^{m-p}_c(U_\alpha)^* \end{array}$$

(iii) Únicamente es necesario comprobar que $\mathcal{P}^0_U:H^0(U)\to H^m_c(U)^*$ es un isomorfismo. Lo que se reduce a que la aplicación no sea nula, pues $H^0(U)\cong H^m_c(U)\cong\mathbb{R}$. Pero la imagen de la función constante 1, que genera $H^0(U)$, es el isomorfismo no trivial $\int_U$. □

Teorema 11.4 (Lema de globalización)**.** *Sea M^m una variedad diferenciable, $\{V_\alpha\}$ un recubrimiento abierto y $\mathcal{U}$ una colección de abiertos de M que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{U}$.
(ii) *Todo abierto $U \subset V_\alpha$ difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ pertece a $\mathcal{U}$.*
(iii) *Si U_1, U_2, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, entonces $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$.*
(iv) *La unión de abiertos de $\mathcal{U}$, disjuntos dos a dos, está en $\mathcal{U}$.*

Entonces, M pertenece a $\mathcal{U}$.

Demostración. La demostración se basa en la siguiente afirmación:

(1) Sea $U_1, U_2, \ldots$ una sucesión localmente finita de abiertos de M con adherencia compacta. Si $(*)\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}$ para todo conjunto I finito, entonces, $\bigcup_i U_i \in \mathcal{U}$.

En primer lugar, veamos que toda unión finita $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ pertenece a $\mathcal{U}$. Los casos $k = 1, 2$ se siguen de (iii) y $(*)$. Supuesto cierto para $k-1$, entonces $V = U_1 \cup \cdots \cup U_{k-1}$ y U_k pertenecen a $\mathcal{U}$. Pero la hipótesis de inducción también se cumple para

$$V \cap U_k = \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i \cap U_k \in \mathcal{U} \, .$$

Luego, por (iii) tenemos el resultado para $k = m$.

Definimos, ahora, de forma inductiva los conjuntos I_m y los abiertos $W_m \subset M$: $I_1 = \{1\}$ y $W_1 = U_1$ y para $m \geq 2$

$$I_m = \{m\} \cup \{i |\ i > m,\ U_i \cap W_{m-1} \neq \emptyset\} \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} I_j \, , \qquad W_m = \bigcup_{i\in I_m} U_i \, .$$

Por inducción se sigue que los I_m son finitos, pues supuesto cierto para I_{m-1}, entonces W_{m-1} tiene adherencia compacta. Pero por ser la familia $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ localmente finita, W_{m-1} interseca un número finito de U_i. Luego, I_m es finito. Es más, si $m \geq 2$ no pertenece a ningún I_k con $k < m$, entonces, $m \in I_m$. Por tanto, $\mathbb{N}$ es unión disjunta de los I_m.

Como las uniones finitas y el vacío pertenecen a $\mathcal{U}$, $W_m \in \mathcal{U}$ y

$$W_m \cap W_{m+1} = \bigcup_{(i,j)\in I_m \times I_{m+1}} U_i \cap U_j \in \mathcal{U} \, ,$$

donde se ha utilizado además la condición $(*)$. Nótese que $W_m \cap W_k = \emptyset$ para $k \geq m+2$. Pues en caso contrario, existiría $i \in I_k$ tal que $U_i \cap W_m \neq \emptyset$. Entonces, por definición de I_m, $i \in I_j$ para cierto $j \leq m+1$.

Usando la condición (iv), se sigue que los siguientes conjuntos están en $\mathcal{U}$:

$$W^{(0)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_{2m} \, , \qquad W^{(1)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_{2m-1} \, , \qquad W^{(0)} \cap W^{(1)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m \cap W_{m+1} \, .$$

Por tanto, por (iii) $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = W^{(0)} \cap W^{(1)} \in \mathcal{U}$. Lo que prueba (1).

Probemos el caso particular, $M = (U, \mathtt{x})$. Tomando $V = \mathtt{x}(U) \subset \mathbb{R}^m$, podemos encontrar un recubrimiento localmente finito y numerable $\{W_j\}$ de V. Tal que cada $W_j \subset \mathtt{x}(V_\alpha) \subset V$

es relativamente compacto y es una bola abierta para la norma $|| \, ||_\infty$,

$$W = \prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i) \ .$$

Es claro que, toda intersección finita $W_1 \cap \cdots \cap W_k$ es vacía o de la forma $\prod_{i=1}^{m}(a_i, b_i)$, luego, difeomorfa a $\mathbb{R}^m$.

Entonces, la familia $\{\mathtt{x}^{-1}(W_j)\}$ es un recubrimiento localmente finito y numerable de U. Tales que los $\mathtt{x}^{-1}(W_j) \subset V_\alpha$ son relativamente compactos y cuyas intersecciones finitas son difeomorfas a $\mathbb{R}^m$, luego, por (ii) pertenecen a $\mathcal{U}$. Por tanto, (1) concluye que $U \in \mathcal{U}$.

Para el caso general, tenemos que existe un atlas de M localmente finito y numerable $(U_i, \mathtt{x}_i)$. Tales que los U_i son relativamente compactos. Entonces, lo anterior nos asegura que tanto los U_i como sus intersecciones finitas están en $\mathcal{U}$. Finalmente, (1) afirma que $M = \bigcup U_i$ está en $\mathcal{U}$. □

Sea, ahora,

$$\mathcal{U} = \{U \subset M | \ U \text{ abierto}, \mathcal{P}_U^p \text{ es un isomorfismo para todo } p\}$$

y $\{V_\alpha\} = M$ el recubrimiento trivial. El lema anterior nos asegura que la familia $\mathcal{U}$ satisface las condiciones del teorema. Luego, $M \in \mathcal{U}$ lo que demuestra la dualidad de Poincaré.

Corolario 11.5. *Si M es una variedad orientable y compacta, entonces $H^p(M)$ es el dual de $H^{m-p}(M)$. Por lo tanto, los números de Betti cumplen $b_p = b_{m-p}$.*

Corolario 11.6. *Si M es orientable y compacta de dimensión $m = 4k$, tenemos la forma bilineal no degenerada y simétrica:*

$$H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}.$$

La *signatura* de M es la signatura de esta forma bilineal cuando M es conexa. En caso contrario, la signatura de M es la suma de las signaturas en cada componente conexa. Constituye un invariante que ha sido estudiado en detalle, inicialmente con el teorema de Rokhlin y el teorema de la signatura de Hirzebruch. Además, interviene en los resultados profundos que valieron a Donaldson la medalla Fields, en su trabajo sobre variedades diferenciables de dimensión 4 exóticas, esto es, homeomorfas a $\mathbb{R}^4$ pero no difeomorfas.

Si la dimensión de M no es múltiplo de 4, la teoría-L permite generalizar la definición anterior. En este contexto, surgen los invariantes de Kervarie para variedades de dimensión $4k+2$ o el invariante de de Rham para variedades de dimensión $4k+1$.

12. Teorema de Künneth

El objetivo de esta sección es calcular la cohomología del producto de dos variedades a partir de la cohomología de los factores. Seguiremos un método análogo al empleado para demostrar la dualidad de Poincaré.

Introducimos antes una serie de resultados algebraicos sobre productos tensoriales $V \otimes W$ de espacios vectoriales.

Lema 12.1. *Sea W un espacio vectorial de dimensión finita n, y V un espacio vectorial cualquiera. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de W. Entonces, para $\alpha \in V \otimes W$ existen $v^1, \ldots, v^n \in V$ únicos tales que $\alpha = \sum_{j=1}^{n} v^j \otimes e_j$.*

De este resultado se deduce que si $\{V_\alpha\}_\alpha$ es una familia de espacios vectoriales y W un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces,

$$\prod_\alpha (V_\alpha \otimes W) \cong (\prod_\alpha V_\alpha) \otimes W \ .$$

Lema 12.2. *Sea $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una sucesión exacta de espacios vectoriales y W es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, la sucesión*

$$A \otimes W \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} B \otimes W \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}} C \otimes W$$

es exacta.

Lo que queremos demostrar es que la cohomología de un producto cartesiano es el producto tensorial de cohomologías bajo ciertas hipótesis.

Teorema 12.3 (Künneth)**.** *Sean M y N variedades diferenciables y supongamos que N tiene una cohomología de dimensión finita. Entonces,*

$$H^*(M \times N) = H^*(M) \otimes H^*(N) \ .$$

definido como,

$$H^k(M \times N) = \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N)$$

para $0 \leq k \leq \dim M + \dim N$.

Demostración. Sea $U \subseteq M$ un abierto y sean las proyecciones $\pi_1 : U \times N \to M$, $\pi_2 : U \times N \to N$. Definimos el morfismo lineal

$$\psi_U : \Gamma^*(U) \otimes \Gamma^*(N) \to \Gamma^*(U \times N) \ , \quad (\omega \otimes \eta) \mapsto \pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta \ .$$

Observamos que $\psi_U(\mathcal{Z}^p \otimes \mathcal{Z}^q) \subset \mathcal{Z}^{p+q}(U \times N)$ y $\psi_U(\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{Z}^q), \psi_U(\mathcal{Z}^p \otimes \mathcal{B}^q) \subset \mathcal{B}^{p+q}(U \times N)$. Por tanto, ψ_U induce un morfismo en los grupos de cohomología

$$\psi_U : H^*(U) \otimes H^*(N) \to H^*(U \times N) \ .$$

Nuestro objetivo es demostrar que ψ_M es un isomorfismo. Consideremos para ello la colección

$$\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq M |\ U \text{ abierto, } \psi_U \text{ es un isomorfismo}\} \ ,$$

y veamos que cumple las propiedades (i)-(iv) del lema de globalización para el recubrimiento trivial. Esto nos dará el resultado del teorema.

La propiedad (i) es obvia. (ii) es equivalente a demostrar que

$$\psi_{\mathbb{R}^m} : H^*(\mathbb{R}^m) \otimes H^*(N) \to H^*(\mathbb{R}^m \times N)$$

es un isomorfismo. Lo que a su vez se reduce a comprobarlo únicamente para

$$\psi_{\mathbb{R}^m} : H^0(\mathbb{R}^m) \otimes H^p(N) \to H^p(\mathbb{R}^m \times N) \ .$$

Sin embargo, $H^0(\mathbb{R}^m) \otimes H^p(N) = H^p(N)$. Luego, $\psi_{\mathbb{R}^m}(\eta) = \pi_2^*\eta$. Pero considerando la inclusión canónica $N \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times N$, $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times N \to \{0\} \times N \subset \mathbb{R}^m \times N$ es homótopa a Id en $\mathbb{R}^m \times N$. Por tanto, $\pi_2^* = \mathrm{Id}^* : H^p(N) \to H^p(\mathbb{R}^m \times N)$ es un isomorfismo.

Para la propiedad (iii), sean $U_1, U_2, U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Fijamos $n \geq 0$ y sea $0 \leq p \leq n$. A partir de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H^p(U_1 \cup U_2) \to H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \to H^p(U_1 \cap U_2) \to H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \to \cdots$$

construimos la sucesión exacta

$$\begin{aligned}\cdots \to H^p(U_1 \cup U_2) \otimes H^{n-p}(N) \to (H^p(U_1) \otimes H^{n-p}(N)) \oplus (H^p(U_2) \otimes H^{n-p}(N))\\ \to H^p(U_1 \cap U_2) \otimes H^{n-p}(N) \to H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \otimes H^{n-p}(N) \to \cdots\end{aligned}$$

pues por hipótesis $H^{n-p}(N)$ tiene dimensión finita. Sumando en p obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned}\cdots \to \bigoplus_{p=0}^{n} H^p(U_1 \cup U_2) \otimes H^{n-p}(N) \to \bigoplus_{p=0}^{n} (H^p(U_1) \otimes H^{n-p}(N)) \oplus (H^p(U_2) \otimes H^{n-p}(N))\\ \to \bigoplus_{p=0}^{n} H^p(U_1 \cap U_2) \otimes H^{n-p}(N) \to \bigoplus_{p=0}^{n} H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \otimes H^{n-p}(N) \to \cdots\end{aligned}$$

Si demostramos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\bigoplus_{p=0}^{n} H^p(U_1 \cup U_2) \otimes H^{n-p}(N) \arrow[r, "\psi_{U_1 \cup U_2}"] \arrow[d] & H^n((U_1 \cup U_2) \times N) \arrow[d] \\
\bigoplus_{p=0}^{n} (H^p(U_1) \otimes H^{n-p}(N)) \oplus (H^p(U_2) \otimes H^{n-p}(N)) \arrow[r, "\psi_{U_1} \oplus \psi_{U_2}"] \arrow[d] & H^n(U_1 \times N) \oplus H^n(U_2 \times N) \arrow[d] \\
\bigoplus_{p=0}^{n} H^p(U_1 \cap U_2) \otimes H^{n-p}(N) \arrow[r, "\psi_{U_1 \cap U_2}"] \arrow[d] & H^n((U_1 \cap U_2) \times N) \arrow[d] \\
\bigoplus_{p=0}^{n} H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \otimes H^{n-p}(N) \arrow[r, "\psi_{U_1 \cup U_2}"] \arrow[d] & H^{n+1}((U_1 \cup U_2) \times N) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, el lema de los cinco nos garantiza que $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$ concluyendo la propiedad (iii). El único bloque cuya conmutatividad no es inmediata es

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{p=0}^{n} H^p(U_1 \cap U_2) \otimes H^{n-p}(N) \arrow[r, "\psi_{U_1 \cap U_2}"] \arrow[d, "\partial^* \otimes \mathrm{Id}"] & H^n((U_1 \cap U_2) \times N) \arrow[d, "\partial^*"] \\
\bigoplus_{p=0}^{n} H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \otimes H^{n-p}(N) \arrow[r, "\psi_{U_1 \cup U_2}"] & H^{n+1}((U_1 \cup U_2) \times N)
\end{tikzcd}$$

Sea $[\omega]\otimes[\eta]\in H^p(U_1\cup U_2)\otimes H^{n-p}$. Entonces

$$\begin{aligned}\partial^*\circ\psi_{U_1\cap U_2}([\omega]\otimes[\eta]) &= \partial^*[\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\eta]\ ,\\ \psi_{U_1\cup U_2}\circ(\partial^*\otimes\mathrm{Id})([\omega]\otimes[\eta]) &= \pi_1^*\circ\partial^*[\omega]\wedge\pi_2^*[\eta]\ .\end{aligned}$$

Consideremos una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_1,\theta_2\}$ subordinada al recubrimiento $\{U_1,U_2\}$ de $U_1\cup U_2$. Entonces, $\{\pi_1^*\theta_1,\pi_1^*\theta_2\}$ es una partición subordinada a $\{U_1\times N, U_2\times N\}$ de $(U_1\cup U_2)\times N$. Recordando el cálculo de ∂^* que obtuvimos en 4.3 y usando que η es cerrada tenemos:

$$\begin{aligned}\partial^*[\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\eta] &= [d((\pi_1^*\theta_2)\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\eta)] = [d\circ\pi_1^*(\theta_2\omega)]\wedge\pi_2^*[\eta]\\ &= \pi_1^*[d(\theta_2\omega)]\wedge\pi_2^*[\eta] = \pi_1^*\circ\partial^*[\omega]\wedge\pi_2^*[\eta]\ .\end{aligned}$$

Finalmente, comprobemos que se cumple (iv). Sea $\{U_\alpha\}$ una familia numerable de elementos de $\mathcal{U}$ disjuntos dos a dos. Tenemos el isomorfismo

$$\prod_\alpha\psi_{U_\alpha}:\prod_\alpha(H^*(U_\alpha)\otimes H^*(N))\to\prod_\alpha H^*(U_\alpha\times N)\ .$$

Puesto que $H^*(N)$ tiene dimensión finita, el comentario posterior a 12.1 nos da el isomorfismo $\phi:(\prod_\alpha H^*(U_\alpha))\otimes H^*(N)\to\prod_\alpha(H^*(U_\alpha)\otimes H^*(N))$. Por otro lado, gracias a 4.5 podemos identificar $\prod_\alpha H^*(U_\alpha)\cong H^*(\bigcup_\alpha U_\alpha)$ y $\prod_\alpha H^*(U_\alpha\times N)\cong H^*((\bigcup_\alpha U_\alpha)\times N)$. Combinando todo esto, obtenemos el isomorfismo

$$(\prod_\alpha\psi_{U_\alpha})\circ\phi: H^*\big(\bigcup_\alpha U_\alpha\big)\otimes H^*(N)\to H^*\big(\big(\bigcup_\alpha U_\alpha\big)\times N\big)$$

que coincide con $\psi_{\bigcup_\alpha U_\alpha}$. Esto concluye (iv).

Por tanto, $\mathcal{U}$ cumple las cuatro propiedades del lema de globalización. De forma que $M\in\mathcal{U}$ y ψ_M es un isomorfimo. ☐

Ejemplo 12.4. Presentamos algunos ejemplos interesantes consecuencia del teorema de Künneth:

- Producto de esferas: en particular $S^2\times S^2$ que tiene $H^2=\mathbb{R}^2$. Luego, $S^2\times S^2$ no es homeomorfo a S^4, aunque es simplemente conexo. Esto obliga a formular diferente la conjetura de Poincaré en dimensión $n\geq 4$.
- Toros de revolución $T^m=S^1\times\cdots\times S^1$, por inducción en la dimensión m

  $$H^p(T^m)=\mathbb{R}^{\binom{m}{p}}.$$

  Los toros constituyen un grupo de Lie que juega un papel fundamental en la teoría de los sistemas integrables, en concreto en el teorema de Arnold-Liouville.

13. Característica de Euler

Recordamos que dada una variedad M, la dimensión del espacio vectorial $H^p(M)$, b_p, se denomina *p-ésimo número de Betti.* Si M tiene una cohomología finito-dimensional, definimos su característica de Euler:

$$\chi(M) = \sum_p (-1)^p b_p.$$

Lema 13.1. *Sean U, V abiertos de una variedad diferenciable. Si los grupos de cohomología de U, V y $U \cap V$ tienen dimensión finita, entonces los de $U \cup V$ también la tienen y*

$$\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)\ .$$

Demostración. La finito dimensionalidad de la cohomología de $U \cup V$ se deduce inmediatamente de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\cdots \xrightarrow{J^{p-1}} H^{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial^{p-1}} H^p(U \cup V) \xrightarrow{I^p} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{J^p} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial^p} \cdots\ .$$

Por la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris tenemos que

$$\begin{aligned} \dim H^p(U \cup V) &= \dim(\operatorname{im} \partial^{p-1}) + \dim(\operatorname{im} I^p), \\ \dim H^p(U) \oplus H^p(V) &= \dim(\operatorname{im} I^p) + \dim(\operatorname{im} J^p), \\ \dim H^p(U \cap V) &= \dim(\operatorname{im} J^p) + \dim(\operatorname{im} \partial^p), \end{aligned}$$

donde $0 \leq p \leq m$ con m la dimensión de la variedad. Sustituyendo en la definición de la característica de Euler tenemos

$$\begin{aligned} \chi(U \cup V) &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial^{p-1}) + \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} I^p), \\ \chi(U) + \chi(V) &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} I^p) + \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} J^p), \\ \chi(U \cap V) &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} J^p) + \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial^p). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \chi(U \cup V) - (\chi(U) + \chi(V)) + \chi(U \cap V) &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial^{p-1}) + \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial^p) \\ &= \dim(\operatorname{im} \partial^{-1}) + (-1)^m \dim(\operatorname{im} \partial^m). \end{aligned}$$

Recordamos que $H^{-1}(U \cup V) = H^{m+1}(U \cup V) = 0$. Luego, $\partial^{-1} = \partial^m = 0$, lo que prueba la segunda afirmación. $\square$

A partir del teorema de Künneth, se deduce el siguiente resultado:

Corolario 13.2. *Sean M y N variedades diferenciables con cohomologías de dimensión finita. La característica de Euler de $M \times N$ es:*

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N)\ .$$

Demostración. Es inmediato que

$$\begin{aligned}\sum_p (-1)^p \dim H^p(M\times N) &= \sum_p (-1)^p \sum_q \dim H^q(M)\cdot \dim H^{p-q}(N)\\ &= \Big(\sum_q (-1)^q \dim H^q(M)\Big)\Big(\sum_k (-1)^k \dim H^k(N)\Big)\ ,\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue del teorema de Künneth. □

Como consecuencia de la dualidad de Poincaré se sigue:

Proposición 13.3. *Sea M una variedad orientada y compacta.*

1. *Si* $\dim M = 2n+1$, *entonces* $\chi(M)=0$.
2. *Si* $\dim M = 4n+2$, *entonces* $\chi(M)$ *es par.*

Demostración. En el caso (1):

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{2n+1} (-1)^p b_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b_p + \sum_{p=n+1}^{2n+1} (-1)^p b_{2n+1-p} = \sum_{p=0}^{n} ((-1)^p + (-1)^{2n+1-p}) b_p = 0\ .$$

Análogamente para (2) tenemos

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{4n+2} (-1)^p b_p = \sum_{p=0}^{2n} ((-1)^p + (-1)^{4n+2-p}) b_p + b_{2n+1}\ .$$

Como $((-1)^p + (-1)^{4n+2-p}) = \pm 2$, falta comprobar que b_{2n+1} es par. Para ello consideramos el producto escalar de Poincaré

$$P_M^{2n+1} : H^{2n+1}\times H^{2n+1} \to \mathbb{R}\ , \quad ([\omega_1],[\omega_2]) \mapsto \int_M \omega_1\wedge\omega_2\ ,$$

que es no degenerado y cumple para todo $[\omega_1],[\omega_2]\in H^{2n+1}(M)$:

$$P_M^{2n+1}([\omega_1],[\omega_2]) = \int_M \omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{(2n+1)^2}\int_M \omega_2\wedge\omega_1 = -P_M^{2n+1}([\omega_2],[\omega_1])\ .$$

Por tanto, P_M^{2n+1} está determinado por una matriz $b_{2n+1}\times b_{2n+1}$ antisimétrica y no degenerada. Luego, tiene orden par.

□

Ejemplo 13.4. Finalmente, calculamos la característica de Euler de variedades bien conocidas:

- La esfera S^m es una variedad compacta. Luego, recordando la cohomología de la esfera, tenemos

  $$\chi(S^m) = 0 \quad \text{si } m \text{ impar}\ , \qquad \chi(S^m) = 2 \quad \text{si } m \text{ par.}$$

  Por lo tanto, para la variedad $S^m\times S^n$ se deduce,

  $$\chi(S^m\times S^n) = 4 \quad \text{si } m,n \text{ pares}\ , \qquad \chi(S^m\times S^n) = 0 \quad \text{en caso contrario.}$$

- Consideremos el toro de revolución $T^m = S^1 \times \cdots \times S^1$. Por inducción en la dimensión m, a partir de 13.2 se sigue

$$\chi(T^m) = 0 \ .$$

- Dado el espacio proyectivo real $P^m(\mathbb{R})$,

$$\chi(P^m(\mathbb{R})) = 0 \quad \text{si } m \text{ impar} \ , \qquad \chi(P^m(\mathbb{R})) = 1 \quad \text{si } m \text{ par.}$$

Referencias

[1] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables.* Sanz y Torres, Madrid 2016.

[2] I. Madsen, J. Tornehave: *From Calculus to Cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes.* Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[3] J.M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer GTM, The Netherlands 2013.

[4] M. Abate, F. Tovena: *Geometria Differenziale.* Springer Unitext, Milan 2011.

[5] E. Outerelu, J.A. Rojo, J.M. Ruiz: *Topología Diferencial.* Sanz y Torres, Madrid 2014.