Primeras aplicaciones de la teoría de grado a E.D.s

Poincaré $\left\{ \begin{array}{l} \text{número de vueltas en } \mathbb{R}^2 \\ \\ \text{Índice de Kronecker} \end{array} \right\}$

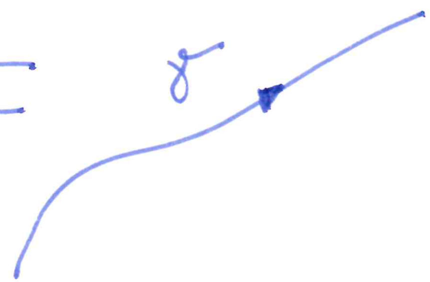
Sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial
(1881 – 1886)

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

$x(t)$ sol definida en I (intervalo maximal)

$\gamma = \{x(t) : t \in I\}$

órbita

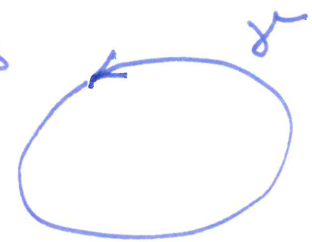


Sols ctes $\equiv$ equilibrios

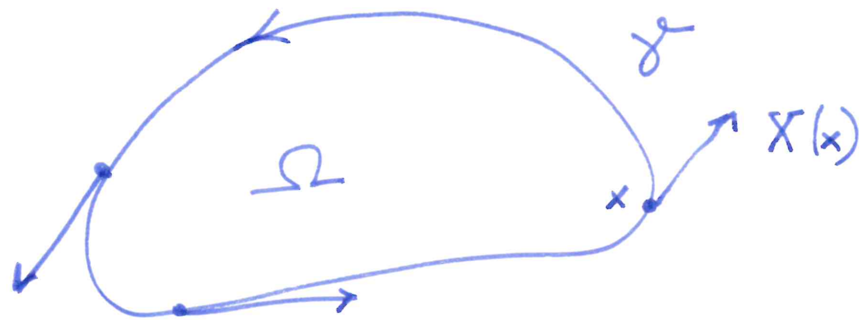
Sols periódicas $\equiv$ curvas cerradas

$\cong$

$\mathbb{S}^1$

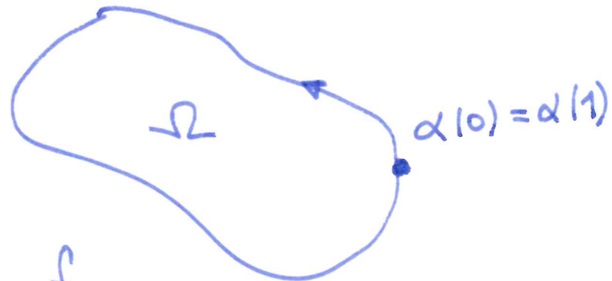


γ órbita cerrada $\Longrightarrow$ $\deg(X, \Omega, 0) = 1$



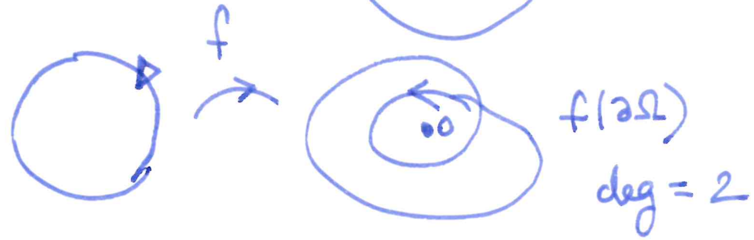
"Dem intuitiva" $\quad f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua $\quad \partial\Omega : \alpha(t),\ t \in [0,1]$

$f(x) \neq 0 \ \forall x \in \partial\Omega \qquad \dfrac{f(\alpha(t))}{|f(\alpha(t))|} = (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$



$\theta(t)$ continua

$$\deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi}(\theta(1) - \theta(0))$$



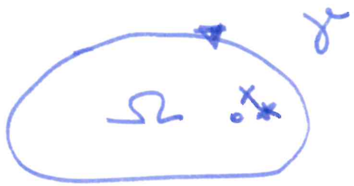
$X(x) \neq 0 \ \forall x \in \gamma$ (no hay equilibrios en γ)

Si el campo tangente a γ diera más de una vuelta ($|\deg| \geq 2$)
la curva tendría puntos múltiples

Si no diera vueltas no se podría cerrar

Corolario $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Si $\exists$ sol periódica $\Rightarrow$ $\exists$ sol cte

Dem



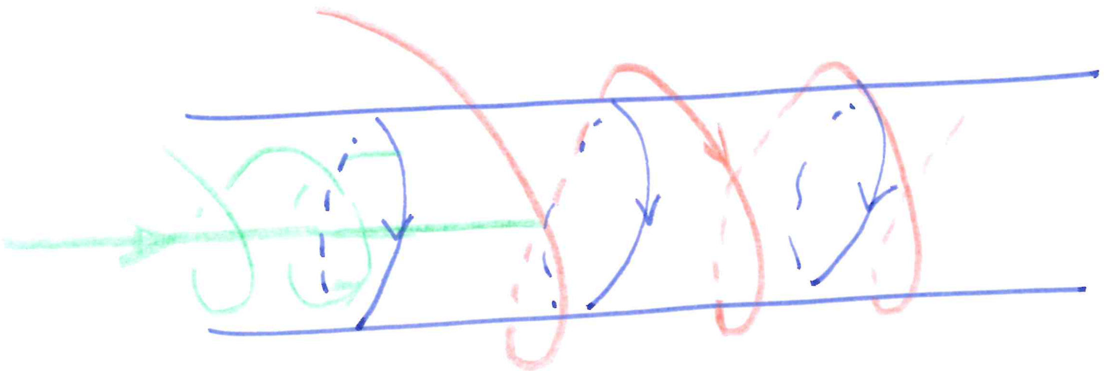
$\deg(X, \Omega, 0) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \exists x_* \in \Omega : X(x_*) = 0$

Pregunta: ¿Hay una extensión del resultado de Poincaré a $\mathbb{R}^3$?

Obstrucción topológica: $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma$ no tiene componente acotada

Contraejemplo al corolario



cilindro foliado por órbitas cerradas

$\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$

$\exists$ órbitas cerradas

$\nexists$ equilibrios

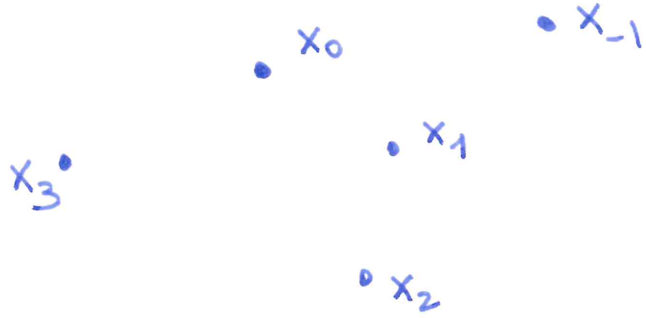
[continua + inyectiva] $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Brouwer (1912) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ homeomorfismo que conserva la orientación

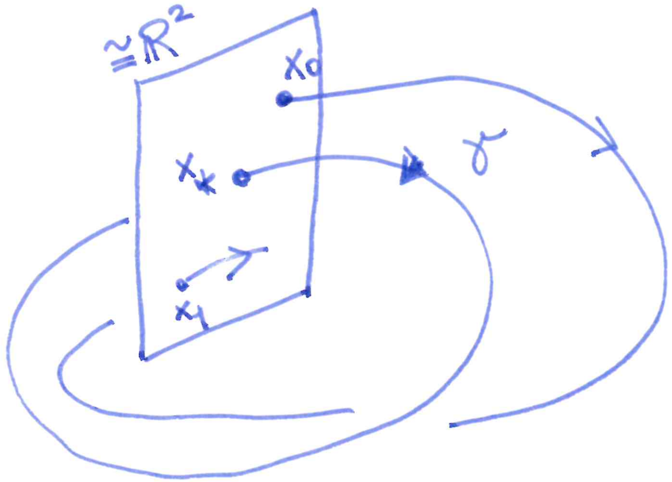
$[\deg(h, B(0), h(0)) = 1]$

$$x_{n+1} = h(x_n), \quad n\in\mathbb{Z}$$

Órbitas $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$



Conexión con $\dot{x} = X(x)$, $x\in\mathbb{R}^3$

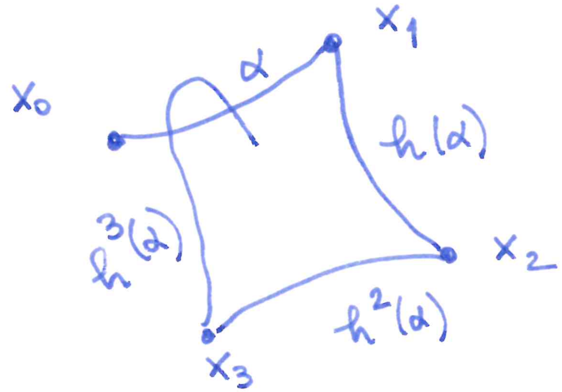


Órbitas cerradas $\equiv$ Ptos fijos o periódicos de h

$x_{n+1} = h(x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}^2$

¿Análogo a X? $\quad X$ ∘ ∘ ∘ $h - id$ $\quad x_{n+1} = x_n + h(x_n) - x_n$

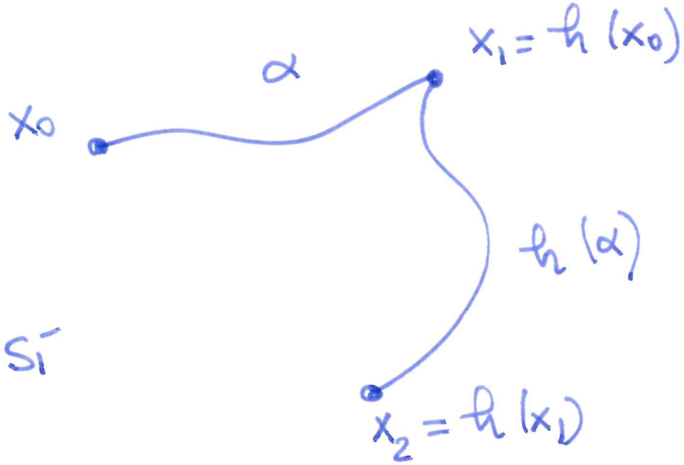
¿Análogo a γ?



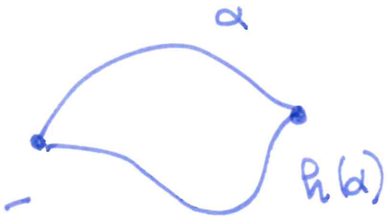
α arco de traslación

$\alpha \cup h(\alpha) \cup \dots \cup h^n(\alpha)$ ∘ ∘ ∘ γ

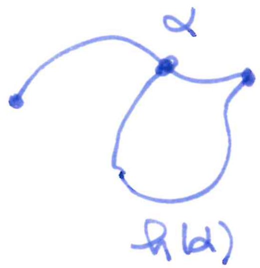
¿Qué es un arco de tralación?



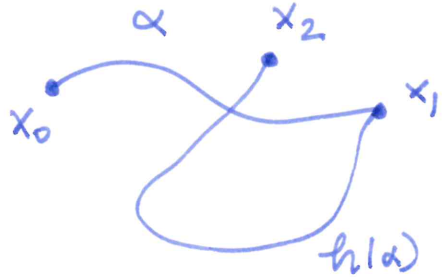
Sí



Sí



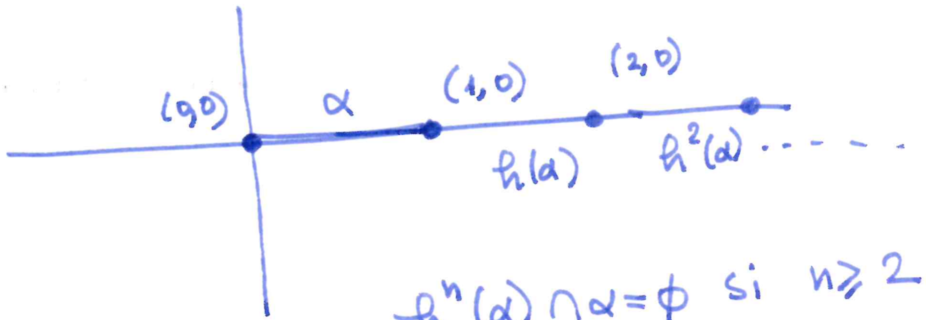
Sí



NO

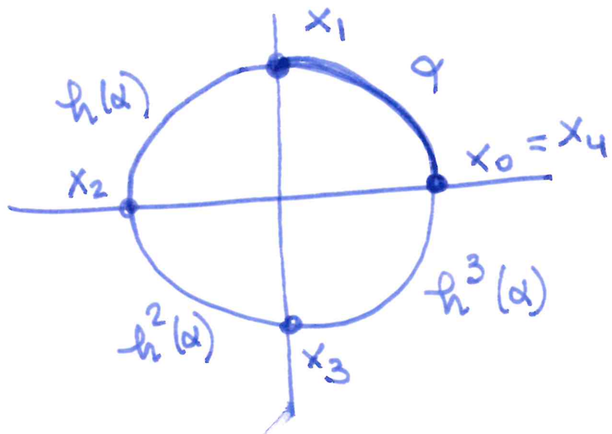
Ejemplos de arcos de traslación

① $h(x,y) = (x+1, y)$



$h^n(\alpha) \cap \alpha = \phi$ si $n \geq 2$

② h Rotación de 90°



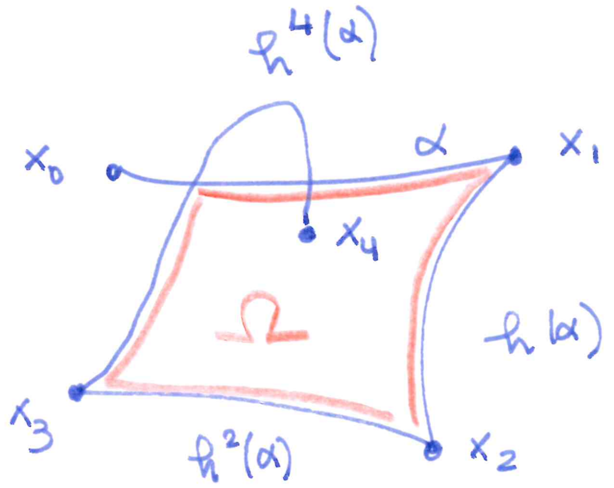
$h^3(\alpha) \cap \alpha \neq \phi$

Lema de Brouwer Si α es arco de traslación con

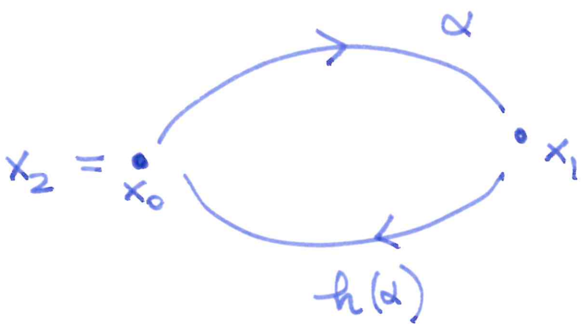
$$h^n(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset \quad \text{para algún } n \geq 2$$

$\Longrightarrow$ $\exists\ \Omega$ disco topológico : $\partial\Omega \subset \alpha \cup h(\alpha) \cup \ldots \cup h^n(\alpha)$

$$\deg(id - h, \Omega, 0) = 1$$

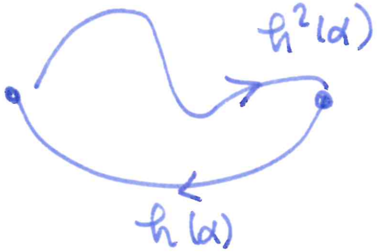


Argumento intuitivo para un 2-ciclo

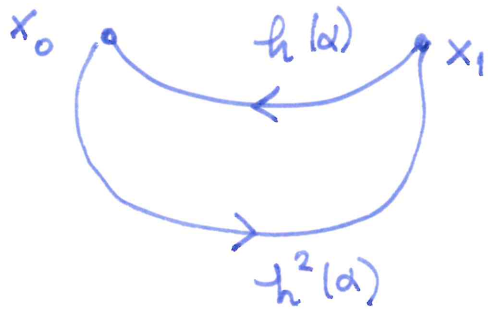


$h^2(\alpha)$ puede cortar a α pero no a $h(\alpha)$

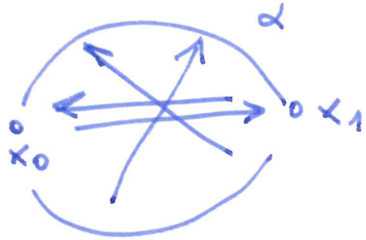
¿Queda por "encima" o por "debajo" de $h(\alpha)$?



conserva orientación



invierte orientación



Variación del argumento sobre α

π

Variación del argumento sobre $h(\alpha)$

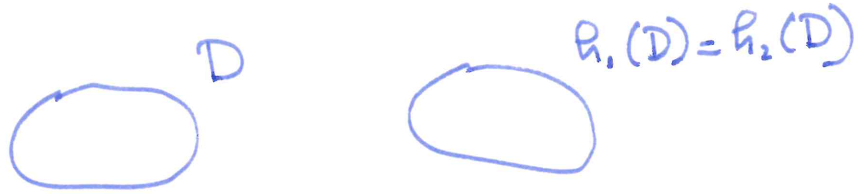
π

Kerekjarto, Scorza-Dragoni

Rey-Pastor?

M. Brown (1984)

$h_1, h_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$

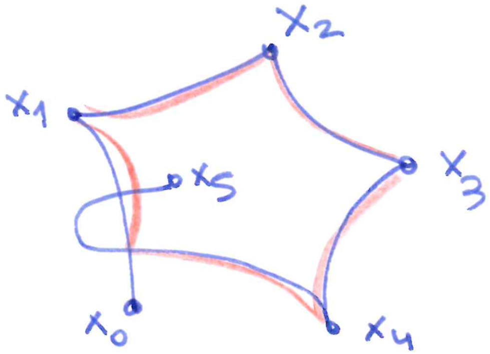


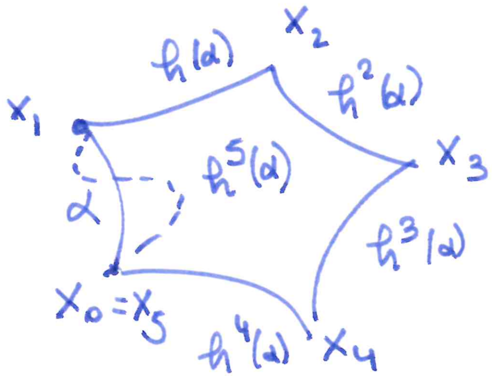
<u>modificación libre</u> $\quad h_1 = h_2$ fuera de D

$\deg(id - h_1, \Omega, 0) = \deg(id - h_2, \Omega, 0)$ por excisión

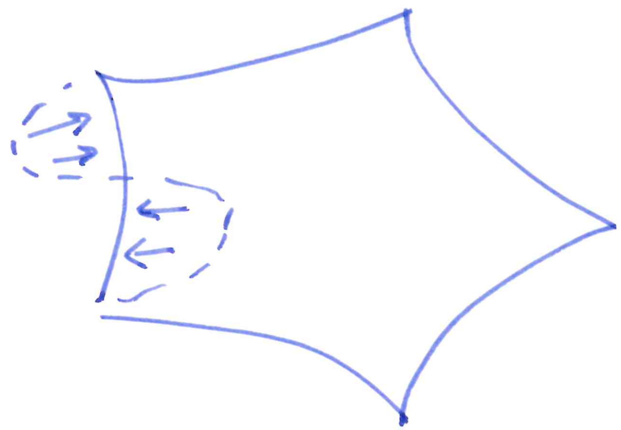
El grado se conserva por una cadena de modificaciones libres

$h_1 \sim h_2 \sim \dots \sim h_n$





x_0 5-ciclo



isotopía de Alexander

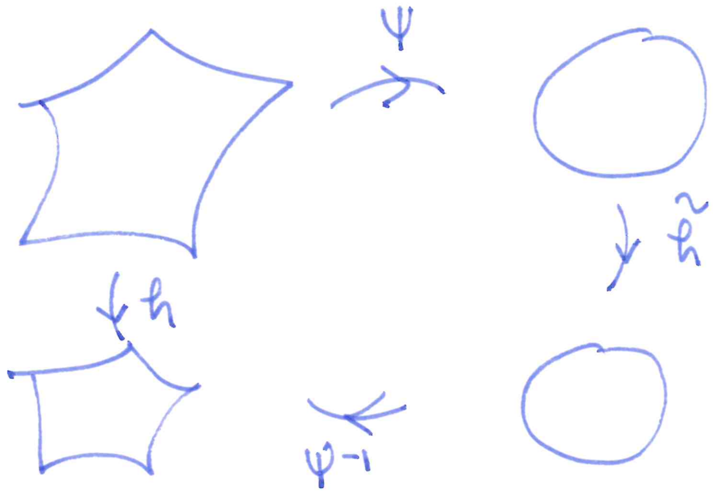
Cut-open

$\Gamma = \alpha \cup h(\alpha) \cup \dots \cup h^n(\alpha)$ curva invariante

$\deg(id - h, \Omega, 0) = 1$

T^{a} Punto fijo Lefchetz

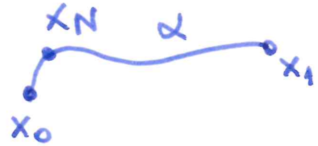
$x = \lambda \tilde{h}(x)$ $\quad$ $\tilde{h} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$



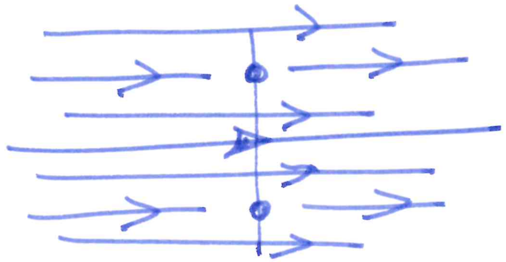
Corolario $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ continua + inyectiva + conserva orientación

$$\limsup_{n\to+\infty} |x_n| < \infty \implies \exists \text{ pto fijo}$$

Dem $\exists$ pto recurrente



Contraejemplo en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$ invierte orientación



$h = S\circ\phi_T$

Contraejemplo al lema de Brouwer si se invierte orientación

$h(x,y) = (2x, -y)$

$\deg(id-h,\Omega,0)=0$