Un paseo por esferas exóticas

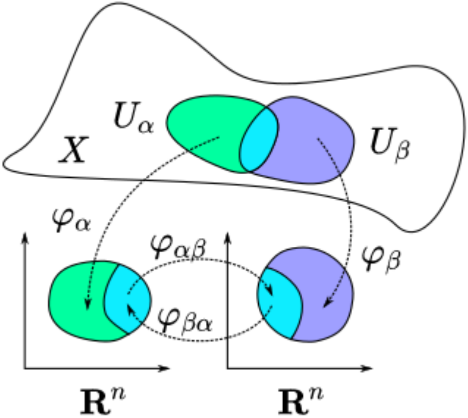
Carlos Meniño Cotón

Universidade de Vigo

01/12/2021

Estructuras diferenciables

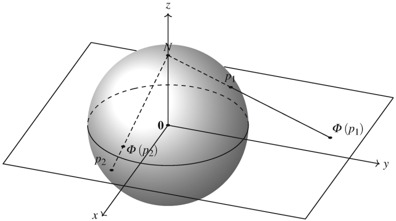
- Estructura Diferenciable$\rightsquigarrow$ Atlas maximal con cambios de coordenadas C^∞.



- Cuestión: Dada M variedad topológica$\rightsquigarrow$ ¿$\exists$ única estructura diferenciable salvo difeomorfismo?(Cierto en dimensiones $1, 2$ y 3).

La esfera S^n

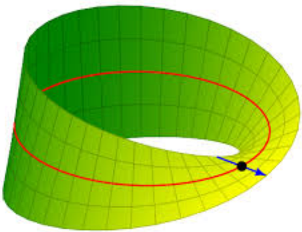
- $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid \; x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1\}$,
- Estructura diferenciable usual dada por las proyecciones estereográficas (polos Norte y Sur).



- Problema ligado a la conjetura de Poincaré: si M es homotópica a S^n y tiene dimensión n,¿es M homeomorfa a S^n?
- Para el caso de estructuras diferenciables: Si M es homeomorfa a S^n y tiene dimensión n,¿es M difeomorfa a S^n?

Fibrados

- $\pi : M \twoheadrightarrow B$ y $\exists$ recubrimiento $B = \bigcup_i U_i$
- $\exists F$ y $\exists \phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to F \times B$ **homeomorfismos**,
- $\pi(x) = p_2(\phi_i(x))$ $\forall x \in U_i$ (siendo $p_2 : F \times B \to B$ la segunda proyección)

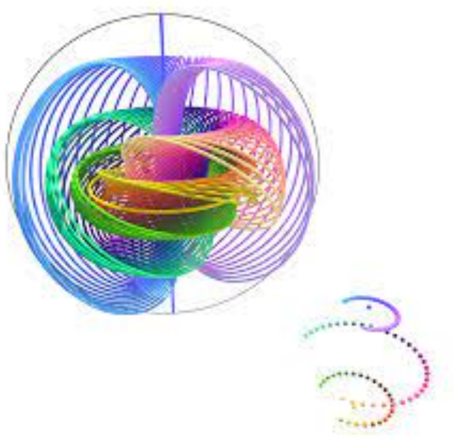


B contráctil $\rightsquigarrow$ Fibración producto (trivial)

Fibración de Hopf en S^3

- Consideramos $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \; |z|^2 + |w|^2 = 1\}$
- $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$, $(z,w) \sim (u,v)$ si $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(z,w) = (\lambda u, \lambda v)$. Si $z \neq 0$ tenemos $[z:w] = [1:w/z]$ y si $z = 0$ $[0:w] = [0:1] \rightsquigarrow \mathbb{C}P^1 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \; S^2$
- $\pi : S^3 \twoheadrightarrow S^2$, $(x,y) \mapsto [x:y] \rightsquigarrow$ fibración de Hopf de S^3
- La fibra es S^1:
  $\pi^{-1}([1:z]) = \{(\lambda, \lambda z) \in S^3\} \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \; |\lambda|^2 = 1/(1+|z|^2)\} \equiv \mathrm{S}^1$.
- Todas las fibras están enlazadas!
- Genera $\pi_3(S^2)$ (no es trivial!).

Proyección estereográfica de la fibración de Hopf



Fibración de Hopf cuaterniónica

- $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$ álgebra cuaterniónica
- Mismas propiedades fundamentales que $\mathbb{C}$ excepto la commutatividad del producto.
- $\mathbb{H}P^1 \equiv \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} \equiv S^4$ recta proyectiva cuaterniónica
- $\pi : S^7 \subset \mathbb{H}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{H}P^1 \equiv S^4$, $(p, q) \mapsto [p : q] \rightsquigarrow$ fibración de Hopf cuaterniónica.
- La fibra es S^3:
$\pi^{-1}([1 : q]) = \{(\lambda, \lambda q) \in S^7\} \equiv \{\lambda \in \mathbb{H} \mid \ |\lambda|^2 = 1/(1 + |q|^2)\} \equiv \mathrm{S}^3$.
- Espacio total:
$\{(p, q, [v : w]) \mid \pi(p, q) = [z : w]\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}P^1 \equiv \ \mathbb{R}^8 \times S^4$

- $U_+ = S^4 \setminus \{[1:0]\}$, $U_- = S^4 \setminus \{[0:1]\}$
- Consideramos las cartas estereográficas $\phi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{H}$
- $\phi_+([p:1]) = p$, $\phi_-([1:q]) = q$
- Cambio de cartas $\phi_- \circ \phi_+^{-1} : \mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathbb{H} \setminus \{0\}$, $q \mapsto q^{-1}$.
- Fibración de Hopf cuaterniónica sobre $U_\pm$:
  $\pi^{-1}(U_+) \equiv \{(p, q, [z:1]) \mid \ p = q \cdot z\}$,
  $\pi^{-1}(U_-) \equiv \{(p, q, [1:w]) \mid \ q = p \cdot w\}$

Trivialización en cada carta y aplicación de pegado

- Trivializaciones del fibrado en cada carta:
  $\rho_+ : \pi^{-1}(U_+) \to \phi_+(U_+) \times \mathbb{H}$, $(p, q, [z:1]) \mapsto (z, q)$,
  $\rho_+ : \pi^{-1}(U_-) \to \phi_-(U_-) \times \mathbb{H}$, $(p, q, [1:w]) \mapsto (w, p)$
- Aplicación de pegado:
  $\rho_- \circ \rho_+^{-1} : \phi_+(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{H} \to \phi_-(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{H}$,
  $(z, q) \mapsto (qz, q, [z:1]) \mapsto (qz, q, [1:z^{-1}]) \mapsto (z^{-1}, qz)$
- La primera coordenada solo depende de $z \rightsquigarrow$ identificamos fibras de cada trivialización (aunque con cierta torsión)
- Para mantener fibra S^3:
  $\rho_- \circ \rho_+^{-1} : \phi_+(U_1 \cap U_2) \times S^3 \to \phi_-(U_1 \cap U_2) \times S^3$,

$$(z, q) \mapsto \left(\frac{qz}{|z|}, \frac{q}{|z|}, [z:1]\right) \mapsto \left(\frac{qz}{|z|}, \frac{q}{|z|}, [1:z^{-1}]\right) \mapsto \left(z^{-1}, \frac{qz}{|z|}\right)$$

Otras fibraciones

- Dados $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_{n,m} : \phi_+(U_1 \cap U_2) \times S^3 \to \phi_-(U_1 \cap U_2) \times S^3$$
$$(z, q) \mapsto \left(z^{-1}, \frac{z^n q z^m}{|z|^{n+m}} \right)$$

- No necesariamente isomorfos a las fibraciones de Hopf cuaterniónicas (cuaternios no commutan)
- No necesariamente homeomorfos a S^7 para todo $n, m \in \mathbb{Z}$!!
- No existen más formas de pegar estas trivializaciones (salvo isotopía)
- Denotamos $M_{n,m}$ la variedad resultante del anterior pegado (observa que tenemos un atlas de esa variedad)

$M_{n,m} \equiv S^7$ si $|n+m| = 1$

- **Teorema**: Sea M variedad cerrada de dimensión k y sea $f : M \to \mathbb{R}$ función de Morse. Si f tiene únicamente dos puntos críticos entonces $M \equiv S^k$. Demostración: Descomposición de Morse y flujo gradiente.
- Sea $f_+ : \phi_+(U_+) \times S^3 \to \mathbb{R}$, $(z, q) \mapsto \dfrac{Re(q)}{\sqrt{1+|z|^2}}$. Es función de Morse con dos puntos críticos: $(0,1)$ y $(0,-1)$ (máximo y mínimo absolutos)
- Sea $f_- : \phi_+(U_-) \times S^3 \to \mathbb{R}$, $(w, p) \mapsto \dfrac{Re(wp^{-1})}{\sqrt{1+|w|^2}}$. Es función de Morse sin puntos críticos: Multiplicar por $p \in S^3$ es una isometria de $\mathbb{R}^4$ y $\dfrac{Re(w)}{\sqrt{1+|w|^2}}$ no tiene puntos críticos.
- Para $n+m=-1$ se tiene que $f_-(\varphi_{n,m}(z,q)) = f_+(z,q) \rightsquigarrow$ función de Morse en $M_{n,m}$ con solo dos puntos críticos
- El caso $n+m=1$ es "dual" del anterior.

Clases características

¿Cómo distinguir los fibrados $M_{n,m}$ para $|n+m|=1$? sea $\pi : M \twoheadrightarrow B$ un fibrado vectorial con fibra F.

- **Clase de Euler**:
  $B \equiv B \times \{\vec{0}\} \hookrightarrow M$ (sección nula).$\rightsquigarrow$ B define una clase de homología en M: $[B]$. El índice de autointersección de B, $I(B,B)$, en M define el número de Euler del fibrado. El dual de $[B] \cap [B]$ define la clase de Euler $e(\pi)$
- Si F es complejo, se definen inductivamente las **Clases de Chern**:
  $B' = \{(x,\vec{v}) \mid \ x \in B \,, \ \vec{v} \in F_x \setminus \{\vec{0}\}\}$. Se considera sobre cada $(x,\vec{v})$ la fibra $F_x/\langle\vec{v}\rangle$. Las clases de Chern se definen a partir del pullback de la clase de euler de M'. En nuestro caso $c_1(M_{n,m})$ pertenece a $H^2(S^4)$ que es trivial.
- **Clases de Pontryagin**: Si F es espacio vectorial real
  $p_k(\pi) = (-1)^k c_{2k}(\pi \otimes \mathbb{C})$ y vive en $H^{4k}(B)$.

Clases características de las fibraciones de Hopf

- Sea α un generador de $H^4(S^4)$. La clase de Euler de la fibración de Hopf estándar es $\pm\alpha$
- Se tiene que $e(M_{n,m}) = \pm(n+m)\alpha$ y $p_1(M_{n+m}) = \mp 2(n-m)\alpha$.
- Sea $\hat{M}_{n,m}$ fibrado por discos $(\partial \hat{M}_{n,m} = M_{n,m})$.
- Si $M_{n,m}$ es difeomorfo a S^7 estándar podemos considerar la variedad $K_{n.m} = \hat{M}_{n.m} \cup_\partial D^8$. Sea $\tau_{n,m}$ el fibrado tangente de $K_{n,m}$.
- Se tiene que $p_1(\tau_{n,m}) = \pm 2(n-m)\beta$ siendo β un generador de $H^4(K_{n,m}) \equiv \mathbb{Z}$ (por Mayer-Vietoris).

Teorema de la signatura de Hirzebruch

- M variedad cerrada de dimensión 8 orientable y C^∞ y $sg(M)$ es la signatura de la forma cuadrática de intersección $H^4(M) \times H^4(M) \to \mathbb{Z}$, entonces:

$$sg([M]) = \frac{1}{45}(7p_2([M]) - p_1^2([M]))\ .$$

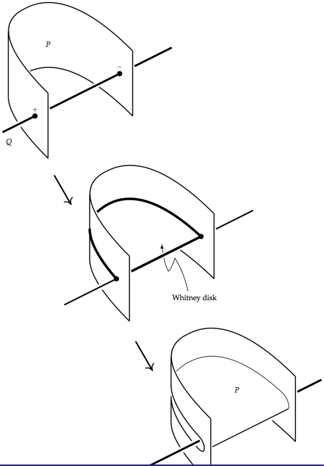
- Como $H^4(K_{n.m}) = \mathbb{Z}$ se sigue que $sg(K_{n.m}) = \pm 1$.
- Tomando igualdades mod 7 evitamos el término en p_2, obteniendo $3 = \pm 4(n-m)^2(\text{mod}7) \rightsquigarrow (n-m)^2 = 1(\text{mod}7). \rightsquigarrow$ Condición necesaria para $M_{n,m}$ ser esfera estándar.
- Ejemplo: $n = 1$, $m = -2$, $(1-(-2))^2 = 9 \neq 1(\text{mod}7)$. $M_{1,-2}$ es una esfera exótica.

Clasificación de esferas exóticas (Kervaire y Milnor-1963)

- Dado $n > 4$, ¿cómo saber el número de estructuras exóticas?
- El monoide $(\Theta_n, \#)$: clases de difeomorfismo (con orientación) de S^n y suma conexa.
- La clave: h-cobordismo. Para $n > 4$ clase de h-cobordismo $\equiv$ clase difeomorfismo $\rightsquigarrow$ clasificación usando topología algebraica.
- Θ_n es finito y forma grupo abeliano para $n \geq 5$. $\Theta_7 = 28$, son las esferas exóticas de dimensión más baja conocidas.

¿Por qué $n \geq 5$?: El truco de Whitney

- Para $n \geq 5$ todo h-cobordismo es trivial $\rightsquigarrow$ Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$.
- Idea: Usar el truco de Whitney para cancelar asas en una descomposición del h-cobordismo.



- El truco de Whitney no funciona (aunque sí se puede conseguir topológicamente! - M. Freedman 1982).
- Se desconoce si existen esferas exóticas en dimensión 4.
- Principal problema: Falta de invariantes pero no de posibles ejemplos: (Gluck Twists).

¿Qué se sabe hasta ahora?

- Clases de difeomorfismo de variedades cerradas es a lo sumo numerable (Cheeger).
- (Akbulut 2009): La familia de Cappel-Shaneson es estándar.
- (Rasmussen 2004): s-invariante (computable). Si $s(M) \neq 0$ entonces M es exótica (requiere superordenadores).
- (Freedman-Gompf-Morrison-Walker 2019): Primeros intentos de cálculo sistemático del s-invariante, sin resultados.

¡Gracias por vuestra atención!