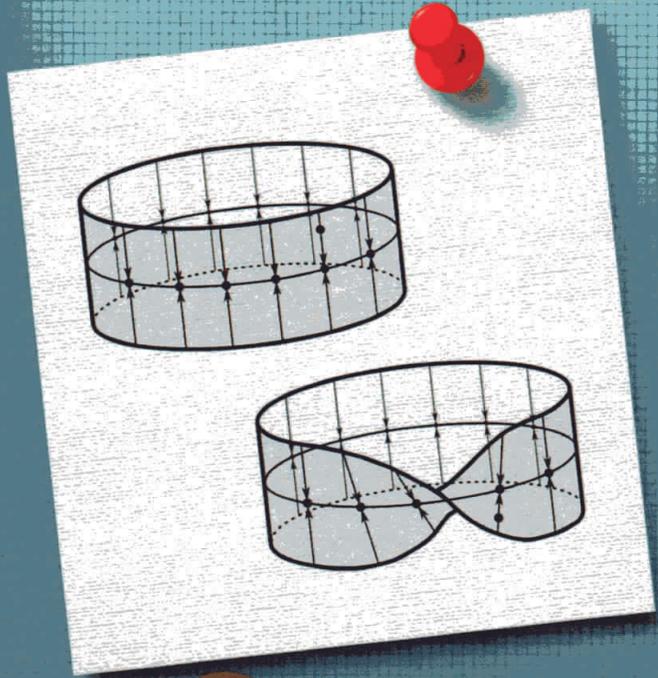


Jaime Dan Porras
María Jaenada
Jesús M. Ruiz

Topología Algebraica muy elemental en dimensión muy baja

2ª Edición



sanz y torres

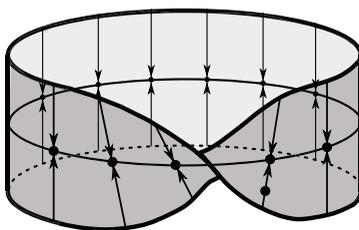
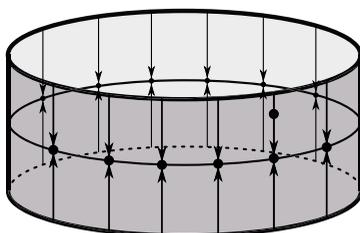
TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

muy elemental en dimensión muy baja

2ª edición

Jaime Dan Porras, María Jaenada, Jesús M. Ruiz

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas, UCM



sanz y torres

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA MUY ELEMENTAL EN DIMENSIÓN MUY BAJA

El editor no se hace responsable de las opiniones recogidas, comentarios y manifestaciones vertidas por los autores. La presente obra recoge exclusivamente la opinión de su autor como manifestación de su derecho de libertad de expresión.

La Editorial se opone expresamente a que cualquiera de las páginas de esta obra o partes de ella sean utilizadas para la realización de resúmenes de prensa.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Por tanto, este libro no podrá ser reproducido total o parcialmente, ni transmitirse por procedimientos electrónicos, mecánicos, magnéticos o por sistemas de almacenamiento y recuperación informáticos o cualquier otro medio, quedando prohibidos su préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso del ejemplar, sin el permiso previo, por escrito, del titular o titulares del copyright.

© Jaime Dan Porras, María Jaenada y Jesús M. Ruiz

© EDITORIAL SANZY TORRES, S. L.

Vereda de los Barros, 17

Pol. Ind. Ventorro del Cano – 28925 Alcorcón (Madrid)

☎ 902 400 416 – 91 323 71 10

www.sanzytorres.com

libreria@sanzytorres.com

www.editorialsanzytorres.com

editorial@sanzytorres.com

ISBN: 978-84-18316-53-1

Depósito legal: M-32035-2021

Portada:

Javier Rojo Abuín

Composición:

Autores

Impresión y Encuadernación:

Safekat, S. L.

Prefacio

Estas notas corresponden a un curso no reglado cuyo objetivo es que un alumno con unos conocimientos básicos de Topología Elemental (subespacios, espacios cociente y productos, compacidad y conexión) se inicie en las ideas de la Topología Algebraica y las aprecie para desear estudiarlas en profundidad. Todo lo que se incluye ha sido parte en uno u otro momento desde 2010 de los cursos de Topología Elemental impartidos por el tercer autor o de TFGs de alumnos suyos (como los que en su momento realizaron los dos primeros autores). No se estructuran ordenadamente como en una exposición teórica sistemática, sino como unos apuntes de aula revisados con detalle. El desarrollo de la teoría se detiene cada vez que se puede obtener un resultado relevante y, confiamos, llamativo para el lector. Tales altos en el desarrollo teórico no quieren ser distracciones, sino promesas de que *the best is yet to come*¹. Se intenta captar la atención con algo más que la belleza elegante de la teoría en sí, aunque sea tanta. En la práctica del aula ha resultado bien. A este respecto, indiquemos que las lecciones 0–12, 15–17, 30–31 son el núcleo de un curso cuatrimestral. Las demás son posibles exposiciones complementarias o temas de trabajo de fin de grado.

En cuanto a objetivos específicos, el central es explicar los conceptos de homotopía, deformación, caminos y lazos, y grupo fundamental. También poder calcular rigurosamente algunos grupos fundamentales importantes: las esferas y la circunferencia, los espacios proyectivos reales, el toro, los bouquets finitos. Aquí se incluyen dos cosas en dimensión arbitraria: las esferas y los espacios proyectivos reales; se hace porque los argumentos no serían más baratos en dimensión 2. Como aplicación se obtienen en dimensión 2 una serie de teoremas importantes: el fundamental del Álgebra, los de Borsuk-Hirsch (a veces atribuidos también a Ulam por su relación con Borsuk), la invarianza del dominio, la invarianza de la dimensión, la invarianza del borde, el del punto fijo de Brouwer, el de la esfera despeinada de Brouwer y el de Brouwer-Hopf. También se llega a demostrar que la esfera no es contráctil.

A continuación el curso se ocupa de los teoremas de Jordan-Schoenflies. En consonancia con el propósito declarado al principio, se utilizan procedimientos elementales. Por supuesto se aclara que el teorema de Jordan es válido en dimensiones superiores, y que el de Schoenflies no lo es. Abundando en esta peculiaridad se analiza la relación con los teoremas de Riemann y de Carathéodory. Un teorema importante que se deduce del de Schoenflies es el teorema del anillo. También se obtiene Jordan-Schoenflies en el plano proyectivo, que tiene un enunciado más sofisticado, pero a nuestro alcance.

¹Patti LaBelle/Groover Washington Junior

La última parte y colofón del curso se dedica a la construcción de superficies mediante cocientes de una región fundamental y mediante sumas conexas de planos proyectivos y toros. Se aprovechan estas construcciones para enunciar (sin demostración) el teorema de clasificación de superficies, y explicar las nociones de primer grupo de homología, orientabilidad, número de Betti, característica de Euler y dimensión de inmersión.

Al final de cada lección se proponen problemas de dificultad variable, desde observaciones sencillas a resultados adicionales relevantes: 258 enunciados en total. Se citan en el texto mediante el símbolo #, y algunos más difíciles o más significativos se marcan con un rayo ✂ o incluso dos ✂✂. Además de ser un desafío para el lector, estos problemas señalados deben estimular la búsqueda de otras lecturas. Consideramos los problemas un complemento imprescindible del texto, junto con unos pocos enlaces (16, incluyendo 13 animaciones verdaderamente atractivas) que hemos elegido entre los muchos muy interesantes que hay sobre la materia.

Para terminar hemos incluido una lista reducida de referencias, las que más directamente hemos utilizado para escribir estas notas.

* * *

Esta segunda edición es una revisión muy profunda de la anterior, motivada por la experiencia de uso en el aula. Se ha reescrito completamente la lección 13 y añadido la 28, y se han mejorado varias demostraciones importantes. Se ha retocado todo el texto para afinar estilo, precisión y claridad, en bastantes casos atendiendo las muy atinadas advertencias de los alumnos. También se ha reformado completamente la colección de problemas: 80 más que en la primera edición, reordenados y redactados de nuevo casi todos. Y al remaquetar todo el texto para mejorar el diseño se han añadido códigos QR de las animaciones que se citan.

Madrid, Majadahonda
Diciembre de 2021

J.D. Porras, M. Jaenada, J.M. Ruiz

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

muy elemental en dimensión muy baja

Contenido

Lección 0. Recordatorio de topología	1
Homeomorfismos útiles. Cocientes topológicos. El teorema de extensión de Tietze. Número de Lebesgue de un recubrimiento abierto. Compactificación por un punto y proyección estereográfica. Curvas y superficies.	
Lección 1. Homotopía	10
Aplicaciones homótopas. Aplicaciones nulhomótopas. Convexidad y conjuntos estrellados. Interpolación lineal. Interpolación en esferas. Espacios contráctiles. Homotopía relativa.	
Lección 2. Homotopías de caminos	15
Caminos y lazos; extremos y puntos base. Homotopías de caminos; extremos fijos. Homotopías de lazos; punto base fijo. Representaciones geométricas de los diversos tipos de homotopía. Espacios simplemente conexos; caracterizaciones.	
Lección 3. Esferas	19
Una esfera (de dimensión ≥ 2) es simplemente conexa. Demostración directa por manipulación elemental de caminos. Formulación de la Conjetura de Poincaré. Pequeña reseña histórica.	
Lección 4. Operaciones con caminos	23
Sistematización de las manipulaciones de caminos utilizadas en la lección anterior. Producto de caminos. Propiedades algebraicas salvo homotopía: asociatividad, elementos neutros, inversión.	
Lección 5. El grupo fundamental	26
Grupo fundamental de base un punto dado. Ejemplos sencillos: conjuntos estrellados y esferas. Independencia del punto base. Invarianza por homeomorfismo.	
Lección 6. El problema de elevación	28
Elevación de aplicaciones continuas. Espacios recubridores. Comportamiento local de las elevaciones. Unicidad. Lema de elevación para homotopías. Naturaleza homotópica de la existencia. Elevación de caminos.	
Lección 7. Espacios proyectivos reales	32
Recubridores de los espacios proyectivos reales. Cálculo del grupo fundamental de un espacio proyectivo real de dimensión ≥ 2 . El espacio proyectivo de dimensión 3 y el grupo de rotaciones del espacio afín.	

Lección 8. La circunferencia	35
El recubridor exponencial de la circunferencia. Número de vueltas. Invarianza por homotopía de lazos. Cálculo del grupo fundamental de la circunferencia. El Teorema fundamental del Álgebra.	
Lección 9. Teoremas de Borsuk-Hirsch	39
Variantes de estos teoremas en dimensión 2: de paridad, de la aplicación impar, de coincidencias antipodales, de Lyusternik. Formulaciones en dimensión arbitraria y equivalencias diversas.	
Lección 10. Teorema de invarianza del dominio	42
Una aplicación continua localmente inyectiva del plano en sí mismo es abierta. Consecuencias en dimensión 2: invarianza de interiores y fronteras, invarianza del borde, invarianza de la dimensión. Validez en dimensión arbitraria.	
Lección 11. Funtorialidad <i>aka</i> general non-sense	45
El grupo fundamental como funtor: propiedades formales. Consecuencias: invarianza por homeomorfismo, retracciones. Invarianza del borde. Grupo fundamental de un producto. Ejemplos: el toro, el grupo de rotaciones de \mathbb{R}^3 .	
Lección 12. Teoremas de Brouwer	48
La circunferencia no es retracto del disco. Teorema del punto fijo. Ejemplos con un único punto fijo. Teorema de la esfera despeinada: no hay campos sin ceros en la esfera. Ejemplos con un único cero.	
Lección 13. La esfera no es contráctil	52
Campos tangentes a la esfera a lo largo de una aplicación continua. Campos tangentes independientes en la esfera. Traslación por homotopía de campos tangentes.	
Lección 14. Separación del plano: cuadrivértices	55
Cerrados que separan en el plano. Resultados iniciales sencillos. La engañosa evidencia de muchos resultados delicados. El lema del cuadrivértice.	
Lección 15. Grado de Brouwer-Kronecker	58
Grado de una aplicación entre circunferencias. Ejemplos: la identidad, la antipodal, las simetrías. Reformulación del teorema de paridad de Borsuk-Hirsch. Multiplicatividad. Conservación de la orientación. Teorema de Brouwer-Hopf.	
Lección 16. Retractos de deformación	62
Retractos de deformación fuerte. Espacios fuertemente contráctiles. Deformaciones por interpolación lineal. El isomorfismo inducido entre grupos fundamentales. Espacios agujereados, cilindro, banda de Moebius.	

Lección 17. Separación del plano: arcos	69
Arcos que separan y no separan el plano. El lema del arco. Arcos de Osgood, arcos con área positiva. Fractales.	
Lección 18. Bouquets finitos	71
Bouquets finitos. Deformaciones de la identidad de un bouquet. Cálculo del grupo fundamental: representación de un lazo del bouquet como producto de lazos de los pétalos y carencia de relaciones.	
Lección 19. Puntos singulares	77
Bases de entornos agujerados de un punto del plano. Grupo fundamental de entornos agujerados. Invarianza de la dimensión. Puntos singulares.	
Lección 20. El teorema de la curva de Jordan	82
Interior y exterior de una curva de Jordan, dominio de Jordan. Demostración del teorema a partir del lema del cuadrivértice y del lema del arco.	
Lección 21. Variantes del teorema de Jordan	87
El teorema de Jordan en la esfera. El teorema de Jordan para arcos cerrados sin borde. Un disco topológico no desconecta.	
Lección 22. El teorema de Schoenflies	88
El enunciado y su generalidad. Otras formulaciones más débiles (aparentemente). Consecuencias adicionales de separación.	
Lección 23. Schoenflies para poligonales	92
Demostración para curvas de Jordan poligonales. Exhaustión del disco por una sucesión encajada de dominios de Jordan poligonales.	
Lección 24. El lema de aproximación poligonal	97
Poligonales de lados paralelos a los ejes. Entornos unión de cuadrados abiertos, frontera de esos entornos. Aproximación poligonal de un arco.	
Lección 25. Embaldosado de un dominio de Jordan	102
Cuerdas. Accesibilidad lineal. Cuerdas poligonales. Aproximación. Exhaustión de un dominio de Jordan por una sucesión encajada de dominios de Jordan poligonales.	
Lección 26. Prueba del teorema de Schoenflies	108
Homeomorfismos entre abiertos de embaldosados poligonales del disco y de un dominio de Jordan. Pegados de esos homeomorfismos y límite de los pegados en el borde del disco.	
Lección 27. Interludio complejo	111
El teorema de la aplicación conforme de Riemann y el teorema de Carathéodory. Relaciones con los teoremas de Jordan y de Schoenflies.	

Lección 28. El teorema del anillo	113
Región encerrada por dos curvas de Jordan, una en el interior de la otra. Descripción del tipo topológico por subdivisión. Extensión de homeomorfismos entre pares de curvas de Jordan.	
Lección 29. Jordan-Schoenflies en el plano proyectivo	116
Validez de los teoremas de Jordan y Schoenflies en otras superficies. Posibles problemas alternativos. Solución en el plano proyectivo real.	
Lección 30. Construcción de superficies	121
Superficies. La esfera \mathbb{S}^2 , el toro \mathbb{T}^2 , el plano proyectivo real \mathbb{P}^2 y la botella de Klein \mathbb{K}^2 . Sumas conexas. La relación fundamental $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$.	
Lección 31. El teorema de clasificación de superficies	130
Enunciado del teorema. Distinción de superficies: el grupo fundamental, el primer grupo de homología, orientabilidad, el número de Betti, la característica de Euler, la dimensión de inmersión.	
Referencias	137
Símbolos	139
Índice	141

Por ejemplo, al colapsar: (i) un lado de un cuadrado, obtenemos un triángulo, (ii) un arco del borde de un disco, obtenemos otro disco, (iii) todo el borde de un disco, obtenemos una esfera.

En estos ejemplos, la proyección canónica no es un homeomorfismo, aunque X e $Y = X/A$ puedan ser homeomorfos (ejemplos (i) y (ii)). Sin embargo, al prescindir del conjunto A y su proyección, que es el punto a , sí obtenemos homeomorfismos: (i) de un cuadrado menos un lado sobre un triángulo menos un vértice, (ii) de un disco cerrado menos un arco en su borde sobre un disco cerrado menos un punto en su borde, (iii) de un disco abierto sobre una esfera menos un punto.

(2) Si identificamos punto a punto los bordes de dos discos, obtenemos una esfera. Decimos que pegamos dos discos por su borde (sobre cómo se puede hacer ese pegado punto a punto, véase # 22.2).

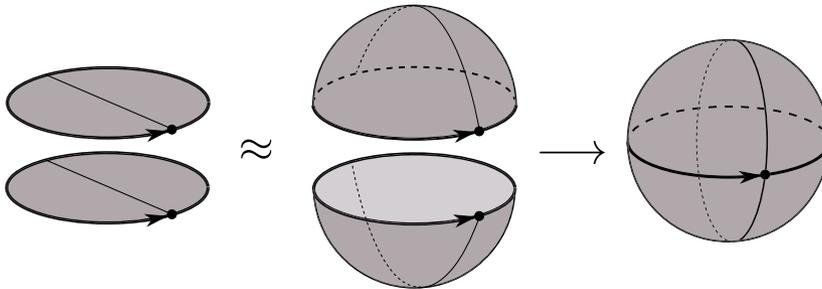


Figura 7. Pegado de dos discos.

(3) Identificando punto a punto dos lados de un cuadrado con igual orientación, obtenemos un cilindro; con orientaciones opuestas, una banda de Moebius.

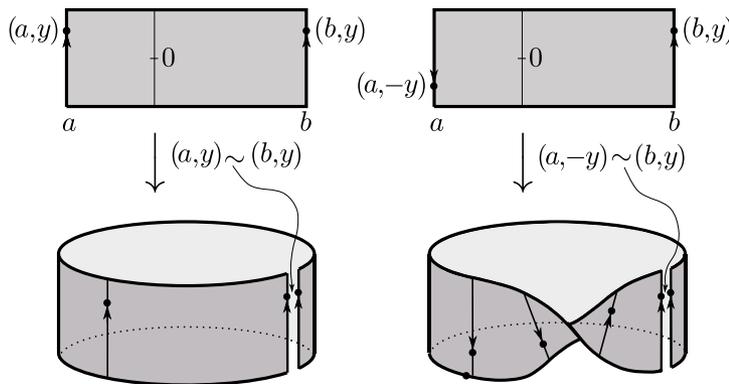
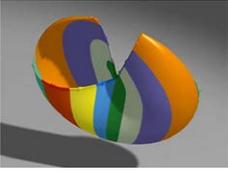


Figura 8. Cilindro y banda de Moebius.



The cross-cap



<https://www.youtube.com/embed/W-sKLN0VBkk>

(6) En dimensión arbitraria podemos hacer lo siguiente. El espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$ es

- (i) el cociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ por proporcionalidad, luego
- (ii) el cociente de la esfera \mathbb{S}^n por la identificación antipodal $x \equiv -x$, luego
- (iii) el cociente de la semiesfera $Q^n = \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$ por identificación antipodal en su borde, el ecuador $E^{n-1} = \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} = 0\}$.

Nótese ahora que por proyección sobre $x_{n+1} = 0$ la semiesfera Q^n es homeomorfa a la bola unidad cerrada $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$, y el homeomorfismo transforma el ecuador de E^{n-1} en el borde \mathbb{S}^{n-1} de \mathbb{D}^n . Así, concluimos que $P^n(\mathbb{R})$ es el cociente de la bola unidad cerrada por identificación antipodal en su borde \mathbb{S}^{n-1} . Como esa identificación define en el borde el espacio proyectivo $P^{n-1}(\mathbb{R})$, tenemos $P^n(\mathbb{R}) = B^n \cup P^{n-1}(\mathbb{R})$ (aquí B^n es la bola abierta). ■

Como es habitual en topología, se utiliza el mismo nombre para espacios homeomorfos. Por ejemplo, *una esfera (de dimensión n)* es un espacio homeomorfo a la esfera unidad $\mathbb{S}^n : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ de \mathbb{R}^{n+1} . Aquí nos interesarán principalmente las esferas de dimensión ≤ 2 . De hecho, si decimos esfera sin precisar dimensión, pensamos en una de dimensión 2; una “esfera” de dimensión 1 es una *curva de Jordan*.

(0.3) Teorema de extensión de Tietze. *Toda aplicación continua $f : A \rightarrow [0, 1]$ definida en un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ se extiende a todo \mathbb{R}^n .*

Este resultado es válido en condiciones mucho más generales: en lugar del espacio afín \mathbb{R}^n basta tener un espacio ambiente X normal y Hausdorff. La demostración es más sencilla en el caso de topología definida por una distancia, como para $X = \mathbb{R}^n$, y algo más si como \mathbb{R}^n se tiene local compacidad. De hecho, una extensión $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ se puede obtener por fórmula explícita (de Hausdorff):

$$\bar{f}(x) = \inf_{a \in A} \left\{ \frac{d(x, a)}{d(x, A)} (f(a) + 1) - 1 \right\} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus A.$$

La comprobación es un ejercicio (largo pero difícil). ■

Se cumplen otras variantes de este teorema, para funciones f con valores en intervalos arbitrarios, y en toda la recta: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) Mostrar que una cadena infinita de esferas \tilde{X} (# 3.7) es un recubridor simplemente conexo de X .

(2) Definir un isomorfismo $\pi(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ similar al número de vueltas de la circunferencia. Recuérdese ahora # 6.10.

El espacio X se llama *collar de esferas*, y análogamente se definen collares con mayor número de esferas, todos con grupo fundamental \mathbb{Z} .

12. Sea X un collar de esferas.

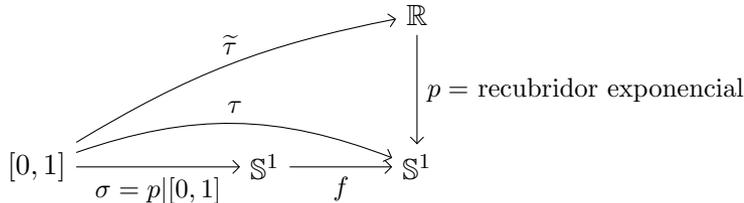
(1) Mostrar que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 : (x, y) \mapsto x$ factoriza a través de una identificación $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ y una retracción $\rho : X \rightarrow A \subset X$, salvo homeomorfismo $A \approx \mathbb{S}^1$.

(2) Estudiar los homomorfismos inducidos entre los grupos fundamentales.

Lección 9. Teoremas de Borsuk-Hirsch

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *simétrico* si es invariante antipodal: $x \in A$ si y sólo si $-x \in A$. Una aplicación $f : A \rightarrow A$ definida en un conjunto simétrico se llama *par* si $f(-x) = f(x)$ y se llama *impar* si $f(-x) = -f(x)$. Con estas definiciones:

Teorema 9.1 (Teorema de paridad de Borsuk-Hirsch). *Denotamos $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ el lazo que genera el grupo fundamental, es decir, $\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación par (resp. impar). Entonces $\#(f \circ \sigma)$ es par (resp. impar).*



Demostración. Para calcular el número de vueltas de $\tau = f \circ \sigma$ elegimos una elevación $\tilde{\tau}$ de τ . Si f es par,

$$\tau(t + \frac{1}{2}) = f(\sigma(t + \frac{1}{2})) = f(-\sigma(t)) = f(\sigma(t)) = \tau(t)$$

para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Así $h(t) = \tilde{\tau}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{\tau}(t) \in \mathbb{Z}$, y como $h(t)$ es una función continua, es constante, digamos $\equiv k$. En consecuencia

$$\#(\tau) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0) = (\tilde{\tau}(\frac{1}{2}) + k) - (\tilde{\tau}(\frac{1}{2}) - k) = 2k.$$

Similarmente, si f es impar

$$\tau(t + \frac{1}{2}) = f(-\sigma(t)) = -f(\sigma(t)) = -\tau(t),$$

$j : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$. Entonces tomando como punto base $x_0 \in \mathbb{S}^1$ tenemos

$$\text{Id}_* = \rho_* \circ j_* : \pi(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \pi(\mathbb{D}^2, x_0) \rightarrow \pi(\mathbb{S}^1, x_0).$$

Ésta es la sucesión ¡imposible! $\text{Id} : \mathbb{Z} \rightarrow \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$. ■

De aquí se deduce un primer resultado importante de Brouwer:

Teorema 12.2 (Teorema del punto fijo). *Toda aplicación continua $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ tiene algún punto fijo $x = f(x)$.*

Demostración. Supongamos que $x \neq f(x)$ para todo x . Entonces la recta que pasa por x y $f(x)$ corta a \mathbb{S}^1 en dos puntos distintos. El que está del mismo lado que x (figura 29) es $\rho(x) = x + \lambda(x - f(x))$ con

$$\lambda = \frac{-\langle x, x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|x\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2}.$$

En efecto, la raíz con signo negativo da el otro punto de corte, y esto es así para todo x , porque el λ que nos interesa es > 0 y el otro < 0 , luego el que nos interesa es el mayor de ambos.

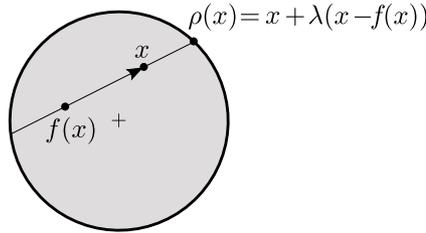


Figura 29. Retracción sobre la circunferencia.

Claramente $\rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es una función continua, y por construcción una retracción. Pero tal retracción no puede existir por el resultado anterior. En suma, debe ser $x = f(x)$ para algún x . ■

Ejemplo 12.3. Así, lo menos que puede tener una aplicación continua $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ es un punto fijo. Es fácil exhibir un ejemplo: cualquier giro de centro el origen. Pero es esencial en el teorema que \mathbb{D}^2 sea el disco cerrado, así que lo interesante es encontrar un ejemplo de un f con un único punto fijo *en el borde*. Una manera de obtener ese ejemplo es observar que \mathbb{D}^2 es la compactificación por un punto del semiplano superior $x \geq 0$. En ese semiplano una traslación horizontal $\tau(x, y) = (x + 1, 0)$ es un homeomorfismo sin puntos fijos, y se puede extender a esa compactificación dejando fijo el punto añadido. ■

El segundo teorema de Brouwer que probaremos se refiere a la esfera. Recordemos que el plano tangente a la esfera \mathbb{S}^2 en un punto x es el plano ortogonal a x ,

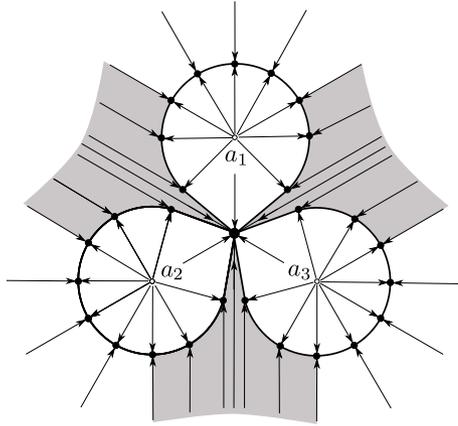


Figura 37. Plano con tres agujeros.

(4) La interpolación sirve muy a menudo como en el caso anterior. Supongamos que tenemos una reetracción $\rho : X \rightarrow A$ de cierto conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces intentamos definir la deformación

$$H_s(x) = (1 - s)x + s\rho(x),$$

Esto será posible cuando para cada x el segmento $[x, \rho(x)]$ esté totalmente contenido en X . Esta forma particular de convexidad es infrecuente y por ejemplo nos muestra que la circunferencia es retrato de deformación del cilindro, y lo es también de la banda de Moebius.

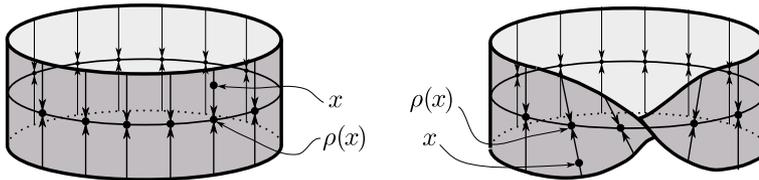


Figura 38. Deformaciones sobre una circunferencia.

En esta figura representamos mediante puntos y flechas cómo se hace la reetracción en cada caso: todos los puntos x de un segmento se transforman en el punto $\rho(x)$ de intersección del segmento y la circunferencia central del cilindro o de la banda.

Estos dos espacios tienen pues grupo fundamental \mathbb{Z} , pero no son homeomorfos: esto tardará aún en poderse probar (problema # 20.2). Por otra parte, la banda de Moebius es homeomorfa al plano proyectivo menos un punto (# 7.2), luego $\mathbb{P}^2 \setminus \{a\}$ también tiene grupo fundamental \mathbb{Z} (véase # 16.12). ■

Mostrar que esta construcción tiene efectivamente por límite un arco. Ese arco tiene área positiva para amplitudes adecuadas de las divisiones centrales.

Este arco es un *fractal*, según denominación acuñada por Mandelbrot. Los fractales tienen dimensión topológica 1, pero se les atribuye una dimensión métrica entre 1 y 2. Más ejemplos de estos fenómenos pueden verse en las siguientes animaciones:



"Flow Snake"

Fractal charm: space filling curves



<https://www.youtube.com/embed/RU0wScIj36o>

3. Demostrar que un arco cerrado poligonal de \mathbb{R}^2 no desconecta a ningún abierto conexo que lo contenga.

4. Demostrar que un arco cerrado no desconecta un plano agujereado.

5. Del problema # 14.4 también se deduce el lema del arco. Comparar los argumentos de aquel problema y los de la demostración de 17.1.

Lección 18. Bouquets finitos

Ya hemos visto algunos ejemplos de curvas que son retracts de deformación fuerte del plano con agujeros. Naturalmente todas ellas tienen el mismo grupo fundamental: el del plano con agujeros. En esta lección vamos a calcularlo con rigor. Puede considerarse como una introducción modesta al *teorema de van Kampen*.

(18.1) Deformaciones de un intervalo. (1) Mediante las interpolaciones lineales que se representan en la figura siguiente

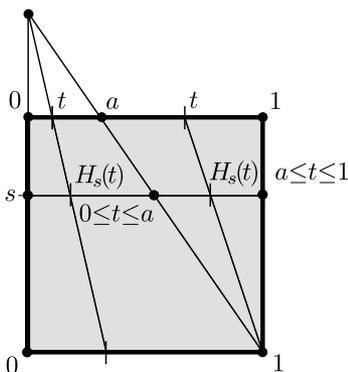


Figura 42. Deformación de un intervalo.

Otra manera de formular esto es que las únicas relaciones $\tau_1 * \dots * \tau_m \simeq x_0$ son las triviales, o aún de otra manera, que si $\tau_1 * \dots * \tau_m$ es nulhomótopo en X entonces cada τ_i es nulhomótopo en Y o en Z según corresponda. Pero es preferible razonar en términos del grupo $\pi_Y * \pi_Z$, aunque luego se entenderá que la demostración proporciona la nulhomotopía que decimos.

Demostración. Supongamos pues dada una homotopía (de lazos de base x_0) $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ con $\Phi_0 = \tau_1 * \dots * \tau_m$, $\Phi_1 \equiv x_0$. Por compacidad (0.4), existen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_r = 1$, de manera que cada cuadrado $E_k^\ell = [t_{k-1}, t_k] \times [s_{\ell-1}, s_\ell]$ cumple $\Phi(E_k^\ell) \subset U$ o V .

Podemos refinar la partición para que el dominio de cada τ_i sea unión de intervalos $[t_{k-1}, t_k]$ consecutivos. Además consideramos nuestra deformación $H_s : X \rightarrow X$, y la homotopía $\Psi = H_1 \circ \Phi$. Representamos todos estos datos así:

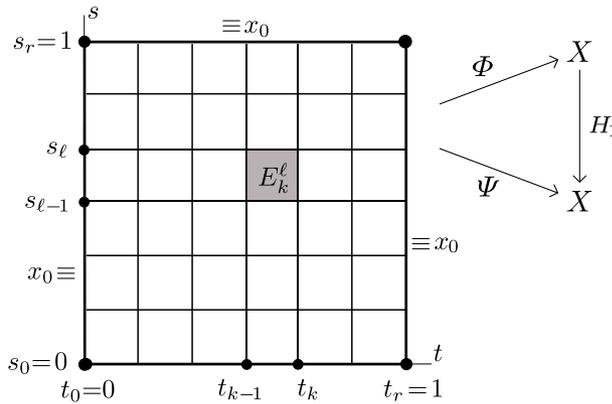


Figura 44. Homotopía en un bouquet.

Observamos que por las propiedades de la deformación, la composición $\alpha_i = H_1 \circ \tau_i$ sigue siendo un lazo de base x_0 en Y o Z según fuera τ_i , y $H_s \circ \tau_i$ es una homotopía, en Y o Z según corresponda, entre τ_i y α_i . Por tanto, $[\tau_1] * \dots * [\tau_m] = [\alpha_1] * \dots * [\alpha_m]$ en $\pi_Y * \pi_Z$ (de hecho $\alpha_1 * \dots * \alpha_m = \Psi|_{s=s_0}$).

Dicho esto, coloreamos la retícula asignando una letra Y o Z a los cuadrados E_k^ℓ según dónde estén contenidas sus imágenes: si $\Phi(E_k^\ell) \subset U$ (resp. V).

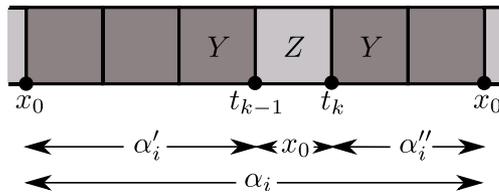


Figura 45. Recoloreado de la homotopía.

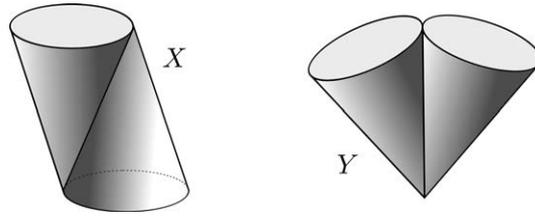


Figura 55. Dos maneras de pegar dos conos por una generatriz.

✦ # 5. Sean X un espacio compacto y $C = C_a X$ el cono sobre él, con vértice a (# 1.4). Mostrar que se puede calcular el invariante $\pi_{C,a}$ y coincide con $\pi(X, x_0)$. (En realidad esto cubre todos los casos discutidos en esta lección, pues todos los puntos analizados tienen esta *estructura cónica local*.)

Lección 20. El teorema de la curva de Jordan

Recordemos que una *curva de Jordan* es un conjunto homeomorfo a la circunferencia. En esta lección probamos el célebre:

Teorema 20.1 (Teorema de la curva de Jordan). *Una curva de Jordan $C \subset \mathbb{R}^2$ desconecta \mathbb{R}^2 en dos componentes, de cada una de las cuales es frontera.*

Además, una de las componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ es acotada y la otra no (14.1(2)). La acotada se denomina *interior* de C y la no acotada *exterior*. Típicamente, denotaremos U al interior y V al exterior; el compacto $D = C \cup U$ es el *dominio de Jordan* de C .

Para poner en evidencia que el resultado es engañosamente simple, véase la curva de Jordan del dibujo.

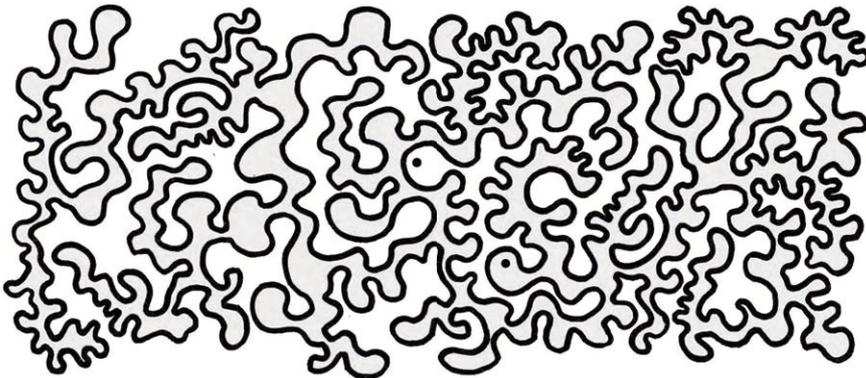


Figura 56. El teorema de la curva de Jordan.

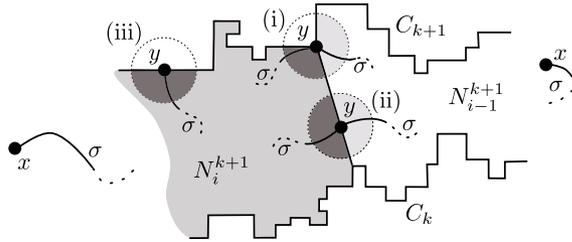


Figura 78. Región entre poligonales de Jordan.

Ahora, según esos tres casos, un disco suficientemente pequeño centrado en y queda descompuesto por las poligonales que pasan por y en:

- (i) tres componentes conexas, una en el interior de N_i^{k+1} , otra en el de N_{i-1}^{k+1} y otra en el exterior de C_{k+1} ,
- (ii) dos componentes, una en el interior de N_i^{k+1} , otra en el de N_{i-1}^{k+1} , y
- (iii) dos componentes, una en el interior de N_i^{k+1} y otra en el exterior de C_{k+1} .

Como el exterior de C_{k+1} está excluido por la elección de y , antes de y el camino σ pasa por el interior de un N_i^{k+1} . Pero el conexo $\sigma \setminus \{y\}$ no corta a la frontera de ese N_i^{k+1} , luego está totalmente en su interior, y lo está origen x . ■

Resumimos toda la construcción así:

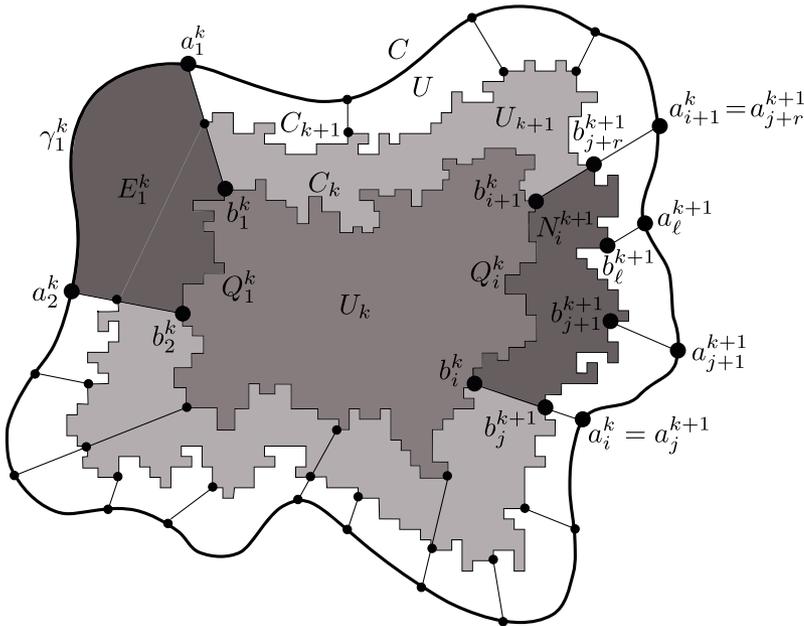


Figura 79. Embaldosado del recinto de Jordan.

- # 4. Probar que una curva de Jordan C desconecta \mathbb{P}^2 si y sólo si es el borde de un disco cerrado $D \subset \mathbb{P}^2$, si y sólo si es el borde de una banda de Moebius cerrada.
- # 5. Probar que una curva de Jordan C desconecta (resp. no desconecta) \mathbb{P}^2 si y sólo si tiene un entorno homeomorfo a un cilindro circular (resp. a una banda de Moebius).
- ↗ # 6. Sean C, C' dos curvas de Jordan disjuntas de \mathbb{P}^2 . Probar que hay un homeomorfismo de \mathbb{P}^2 que las transforma en o bien dos circunferencias de un plano afín $\mathbb{P}^2 \setminus \ell$, o bien en una recta de infinito ℓ y una circunferencia de $\mathbb{P}^2 \setminus \ell$.
- # 7. Buscar dos curvas de Jordan en el toro que no lo desconecten y no representen el mismo lazo en el grupo fundamental, cuyos complementarios sean homeomorfos. ¿Qué dice esto de la existencia de un homeomorfismo del toro que transforme una de las curvas en la otra?
- # 8. Sea S el toro con dos agujeros de la figura.

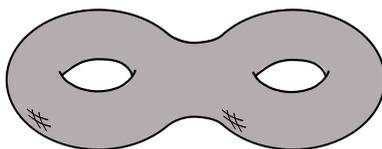


Figura 87. Toro con dos agujeros

Buscar dos curvas de Jordan en S que lo desconecten y cuyos complementarios no sean homeomorfos. Deducir que las curvas no son homeomorfas por un homeomorfismo de S .

Lección 30. Construcción de superficies

Como sabemos, un conjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ es una *superficie (topológica)* si es localmente homeomorfo al plano. En esta lección vamos a describir todas las superficies *compactas* que existen, aunque esa afirmación de que *son todas* es un teorema de calado, que describimos un poco en la última lección de estas notas.

(30.1) Las tres superficies de partida. (1) Se trata de tres espacios que ya conocemos: la esfera \mathbb{S}^2 , el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y el plano proyectivo \mathbb{P}^2 . Ya sabemos que los tres son cocientes de un cuadrado, según se ve en la figura siguiente.

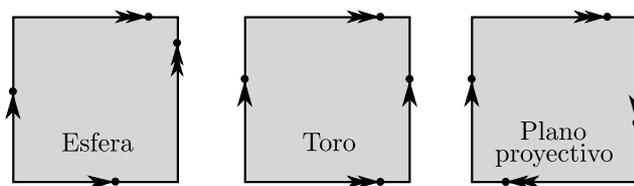


Figura 88. Las tres primeras superficies.

(30.5) La relación fundamental $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$. Para probar esta igualdad utilizaremos una vez más el corta y pega. Calcularemos las dos sumas conexas involucradas a partir de representaciones de $\mathbb{P}^2 \setminus D$, $\mathbb{T}^2 \setminus D$ y $\mathbb{K}^2 \setminus D$. En la figura 92 anterior hemos visto cómo obtener la de $\mathbb{T}^2 \setminus D$, y de manera completamente análoga se obtienen las otras dos, en el caso de \mathbb{P}^2 con una simplificación adicional, según mostramos a continuación.

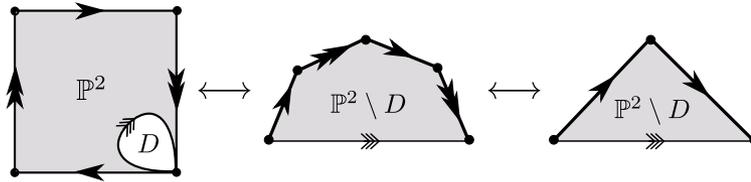


Figura 93. Supresión de un disco en \mathbb{P}^2 .

Aquí suprimimos el disco D del plano proyectivo \mathbb{P}^2 y tras un par de equivalencias $\mathbb{P}^2 \setminus D$ queda representado por el triángulo de la derecha con las identificaciones que se indican. De la misma manera obtenemos dos pentágonos con ciertas identificaciones que representan $\mathbb{T}^2 \setminus D$ y $\mathbb{K}^2 \setminus D$:

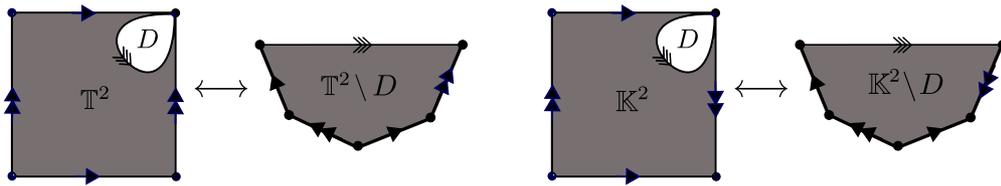


Figura 94. Supresión de un disco en \mathbb{T}^2 y \mathbb{K}^2 .

Pegando ahora la base del triángulo de la figura 93 con los lados horizontales de cada pentágono de la figura 94, obtenemos las dos sumas conexas $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2$ y $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$, con las identificaciones que representamos en la figura siguiente:

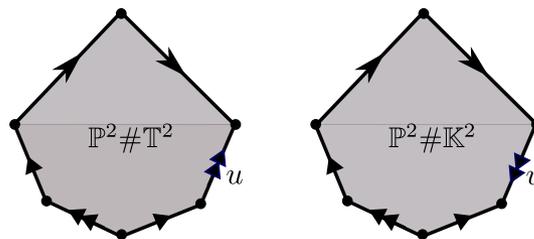


Figura 95. Sumas conexas de \mathbb{P}^2 con \mathbb{T}^2 y con \mathbb{K}^2 .

(31.5) El género. El entero k de las superficies de nuestra lista las clasifica topológicamente lo mismo que β y χ . Este

$$k = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi) & \text{si la superficie es orientable,} \\ 2 - \chi & \text{si la superficie es no orientable,} \end{cases}$$

se denomina *género (topológico)* y se denota g .

Si la superficie M es orientable, el género g nos dice cuántos toros hay que pegar para obtenerla: denotamos $M = T(g)$.

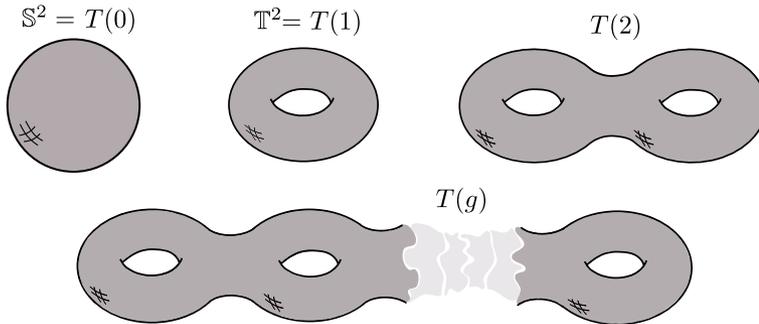


Figura 103. Superficies orientables

Se suele decir que g es el número de agujeros de la superficie. Esto no tiene nada que ver con la noción introducida de la lección 16 y siguientes.

Análogamente, si M es no orientable, g es el número de planos proyectivos que deben sumarse para obtener M : denotamos $M = P(g)$.

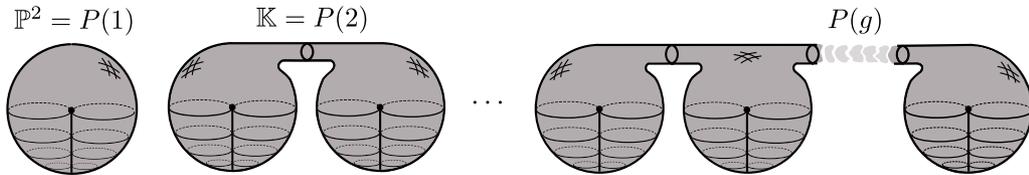


Figura 104. Superficies no orientables

Aquí usamos como imagen de \mathbb{P}^2 la inmersión de Steiner dada en 0.2(5). Insistamos en que esa inmersión no es una imagen homeomorfa del plano proyectivo, sino de un cociente suyo, que sirve como representación en \mathbb{R}^3 . El concepto de agujero en este caso es menos claro... pero siempre hay que dejar algo en que pensar. (Nótese que cada *pieza* de $P(g)$ es un \mathbb{P}^2 menos un disco, es decir, una banda de Moebius.) ■

Referencias

La bibliografía sobre los temas tratados en las lecciones precedentes es extensísima, desde textos básicos a tratados sistemáticos, incluyendo los muchos que se ofrecen generosamente en la red. La selección siguiente es extremadamente subjetiva e incluye sólo algunas de las fuentes que hemos consultado específicamente para nuestra presentación.

La referencia [13] es una introducción a la topología y [10] es otra de más alcance. El libro [11] es excelente para estudiar el grupo fundamental, como lo son las primeras 36 páginas de [6]; la demostración del teorema de la esfera de Brouwer viene de este último texto. De [4] hemos extraído los tecnicismos mínimos para probar que la esfera no es contráctil. El libro mejor de la topología del plano es [12], un clásico bastante difícil de leer, pero quizá la única fuente absolutamente fiable. Para el teorema de Jordan debemos citar [9] y [8], pero [17] tiene muchas concomitancias con la demostración que proponemos; así mismo recomendamos [7]. En [1] y [2] se inspiran partes de nuestra prueba del teorema de Schoenflies, para el que también sugerimos [15] y [16]. Las 25 páginas iniciales de [14] son lectura obligada para la topología del plano y del toro, y satisfara la curiosidad de quien se pregunte en qué forma se enuncia Jordan-Schoenflies en el toro. En [3] se trata la variable compleja que mencionamos a propósito de Jordan-Schoenflies. Finalmente citamos otra vez [11], ahora para la clasificación de superficies, que aquí sólo esbozamos y que [5] trata en extenso.

- [1] R.H. Bing: *The geometric topology of 3-manifolds*. AMS, Rhode Island 1983.
- [2] S.S. Cairns: *An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem*. Proc. AMS 2:6 (1951) 860–867.
- [3] H. Cartan: *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*. Dover, New York 1995.
- [4] J.E. Derwent: *On the covering homotopy theorem*. Indag. Math. 21 (1959) 275-279.
- [5] J. Gallier, D. Xu: *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2013.
- [6] M.J. Greenberg, J.R. Harper: *Algebraic Topology, a first course*. CRC Press, Boca Ratón 2018
- [7] J.-Y. Le Dimet: *Le plan, la sphère et le théorème de Jordan*. Ellipses, Paris 2012.
- [8] R. Luisto: *Proof of the Jordan Curve Theorem*.
<https://luisto.fi/documents/JordanCurveTheorem.pdf>

- [9] R. Maehara: *The Jordan Curve Theorem via the Brouwer Fixed Point Theorem*. Am. Math. Monthly 91:10 (1984) 641–643.
- [10] M. Manetti: *Topología*. Springer-Verlag, Milán 2008.
- [11] W.S. Massey: *A basic course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York 1991.
- [12] M.H.A. Newman: *Elements of the topology of plane sets of points*. University Press, Cambridge 1964.
- [13] E. Outerelo, J.M^a Sánchez Abril: *Elementos de topología*. Sanz y Torres, Madrid 2008.
- [14] D. Rolfsen: *Knots and links*. AMS Chelsea, Providence 2003.
- [15] L. Siebenmann: *The Osgood-Schoenflies theorem revisited*. Russian Math. Surveys 60:4 (2005) 645–672.
- [16] C. Thomassen: *The Jordan-Schoenflies Theorem and the Classification of surfaces*. Am. Math. Monthly 99 (2) (1992), 116–131.
<http://www.maths.ed.ac.uk/aar/jordan/thomass.pdf>
- [17] D. Weng: *Invariance of domain and the Jordan curve theorem in \mathbb{R}^2* .
<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Weng.pdf>

Símbolos

$(1-s)a_i + sa_j$	1	$\pi(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$	33
$Y = X/A$	3	$P^3(\mathbb{R}) \approx SO(3)$	34
$K \rightarrow T, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	5	$f : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$	34
$\mathbb{P}^2 = P^2(\mathbb{R})$	6	$\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$	35
$P^n(\mathbb{R}) = B^n \cup P^{n-1}(\mathbb{R})$	7	$\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$	36
$\mathbb{S}^n : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$	7	$\#\sigma = \#(\alpha' * \sigma * \alpha)$	37
$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$	10	$\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$	38
$f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$	10	$f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$	38
$H_s : f \simeq g$	10	$q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	38
$\frac{(1-s)f+sg}{\ (1-s)f+sg\ }$	11	$\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, P^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	38
$H_s : f \simeq_A g$	13	$q : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	38
$C_a X$	14	$f(-x) = \pm f(x)$	39
$H_s : \sigma \simeq \tau$	16	$\mathbb{S}^2 \not\subset \mathbb{R}^2$	40
$\exp(2\pi i\theta) = (\cos 2\pi\theta, \text{sen } 2\pi\theta)$	17	$\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	41
$\sigma * \tau$	23	$\mathbb{S}^n \not\subset \mathbb{R}^n$	42
$\sigma'(t) = \sigma(1-t)$	25	$f(\text{Fr}(S)) = \text{Fr}(f(S))$	43
$\pi(X, x_0)$	26	$f_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$	45
$\pi(\mathbb{S}^n) = \{1\}$	27	$\pi(X \times Y) = \pi(X) \times \pi(Y)$	46
$h_\alpha[\sigma] = [\alpha' * \sigma * \alpha]$	27	$\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}^2$	47
$f_*[\sigma] = [f \circ \sigma]$	27	$\pi(\mathbb{R}^n \setminus \{a\})$	47
$\Phi : \pi(X, x_0) \rightarrow [\mathbb{S}^1, X]$	28	$p : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$	48
$\rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$	28	$\pi(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$	48
$f = p \circ \tilde{f}$	28	$\rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$	48
$p : \tilde{X} \rightarrow X, p^{-1}(U) = \bigcup_\lambda U_\lambda$	28	$\rho(x) = x + \lambda(x - f(x))$	49
$H = p \circ \tilde{H}$	30	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow SO(3)$	50
$\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$	31	$\varphi_k(x) = \text{dist}(x, C_k) / \sum_\ell \text{dist}(x, C_\ell)$	53
$p : \mathbb{S}^n \rightarrow P^n(\mathbb{R}), p^{-1}(U) = U_+ \cup U_-$	32	$\mathbb{R}^2 \setminus h(\mathbb{D}^2)$	57
$\alpha(t) = (0 : \dots : \text{sen } \pi t : \cos \pi t)$	32	$\text{deg}(f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1)$	58
$\pi(P^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$	32	$\text{deg}(\pm \text{Id})$	59

Índice

- Abierto
 - afín con grupo fundamental finito, 68
 - con frontera poligonal, 97
 - de un cociente, 3
 - saturado, 3
 - trivializante, 28
- Adyacencia, 132
- Anillo entre dos curvas de Jordan, 114
- Aplicación
 - impar, 39, 42, 59, 61
 - nulhomótopa, 11, 18, 38, 61, 130
 - par, 39, 59
- Aproximación poligonal
 - de un arco, 99
 - de un disco, 95
- Arco, 15
 - de Osgood, 70
 - infinito de \mathbb{R}^2 , 87
- Banda de Moebius, 4, 86, 117, 122, 128
 - el borde no es retracto, 68
 - unión otra banda, 124
 - unión un disco, 128
 - y cilindro, 10
- Bases de entornos encajados por retracción, 79
- Botella de Klein, 123, 129, 130
 - es unión de dos bandas de Moebius, 124
- Bouquet, 64, 72, 76
 - de esferas, 22
- Cadena de esferas, 22
- Camino, 15
 - inverso, 25
- Campo tangente
 - a la esfera, 52
 - a lo largo de una aplicación, 52
 - a la esfera \mathbb{S}^2 , 50
 - a una esfera de dimensión impar, 52
- Caracol de Pascal, 116
- Característica de Euler, 131, 132
 - de una suma conexa, 134
- Círculo polaco, 113
- Circunferencia, 21, 35, 48, 116
- Cociente topológico, 3
- Colapsamiento, 3
- Collar de esferas, 39, 69
- Compactificación de Alexandroff por un punto, 8
- Conjetura de Poincaré, 21
- Conjugación de caminos, 27
- Conjunto estrellado, 11
 - es contráctil, 13
- Cono sobre un espacio, 14
- Conos tangentes, 80, 81
- Conservación de la orientación, 59
- Corta y pega, 122
- Cross-cap, 6
- Cuaterniones, 34
- Cuerda poligonal, 104
- Curva, 9
 - de Jordan, 7, 51, 121
 - en \mathbb{P}^2 , nulhomótopa o no, 116
 - en \mathbb{S}^2 , 87
 - de Schoenflies, 90
- Deformación continua, 10
 - de un cociente, 66
 - de un intervalo, 71
 - por interpolación lineal, 63
- Dimensión, 9
 - de inmersión, 134
- Dominio de Jordan, 82, 90
- El anillo despiezado, 114
- El plano no contiene a la esfera, 40, 45
- Elevación, 28
 - de caminos, 31
 - de homotopías, 30, 33, 36
 - de una aplicación
 - entre circunferencias, 62
 - entre dos recubridores, 34, 38, 62
 - entre espacios proyectivos, 34