VARIEDADES DIFERENCIABLES

Muestras de examen

Febrero 2017

 # 1. (1) Definir el concepto de *orientación* en una variedad diferenciable.

(2) Justificar rigurosamente que una banda de Moebius no es orientable.

(3) Demostrar que una hipersuperficie diferenciable es orientable si y sólo si tiene un campo normal global (sin ceros).

 # 2. Se considera la cuádrica reglada $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

(1) Construir un difeomorfismo de M sobre el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, y deducir que M es difeomorfa al plano con un agujero $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(2) Construir un campo tangente a M sin ceros, de la forma

$$X_{(x,y,z)} = (-y + xz, x + yz, h(z))$$

para cierta función diferenciable h.

(3) Mostrar que las órbitas de X son rectas contenidas en M.

 # 3. Denotamos S^+ y S^- los dos casquetes abiertos definidos en la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por las condiciones $z > 0$ y $z < 0$. Sean p y q las restricciones a esos casquetes de la proyección lineal $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

(1) Se orienta $\mathbb{S}^2$ compatible con su normal saliente $\nu(x, y, z) = (x, y, z)$ y $\mathbb{R}^2$ del modo usual. Estudiar si p y q conservan la orientación.

(2) Encontrar una forma diferencial $f(x, y)dx \wedge dy$ que coincida en la esfera con

$$\omega = yz(x^2 + y^2)dx \wedge dz.$$

(3) Calcular la integral $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$ utilizando las proyecciones p y q.

(4) Utilizar el teorema de Stokes para predecir el resultado de (3) sin hacer ninguna integral.

Septiembre 2017

 # 1. (1) Definir el concepto de *flujo* y de *flujo completo* en una variedad y demostrar que en una variedad compacta todos los flujos son completos.

(2) Explicar cómo se orienta el borde de una variedad orientada con borde. Ilustrarlo en el caso particular del semiespacio afín $\{x_1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$.

 # 2. Se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (v \cos u, v \operatorname{sen} u, u)$, y se pide:

(1) Mostrar que φ es un difeomorfismo sobre su imagen $M = \varphi(\mathbb{R}^2)$, que en consecuencia es una superficie diferenciable sin borde.

(2) Encontrar un campo tangente a M de la forma $X_{(x,y,z)} = ((x^2+y^2)x, (x^2+y^2)y, \star)$.

 # 3. Se considera en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ la forma de grado 2

$$\alpha = \frac{-xz}{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z.$$

Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$, y ω la restricción de α a M.

(1) Parametrizar M y buscar una primitiva de ω en M.

(2) Calcular $\int_M \omega$ mediante el teorema de Stokes.

Febrero 2018

 # 1. Tema con demostraciones. Definir flujo y flujo completo y demostrar que el flujo de un campo con soporte compacto es siempre completo.

 # 2. Tema sin demostraciones. Orientabilidad de una variedad diferenciable.

 # 3. Se considera la superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ dada por $z = x^2 - y^2$.

(1) Encontrar un campo tangente a M de la forma $X_{(x,y,z)} = (x, -y, \star)$ y expresarlo utilizando una referencia móvil.

(2) Estudiar las órbitas del campo X.

 # 4. Se considera el toro de revolución $T \subset \mathbb{R}^3$ parametrizado mediante

$$x = (2 + \cos u)\cos v, \quad y = (2 + \cos u)\operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u,$$

y la variedad $M = \{x \leq 0\} \cap T$ con borde $\partial M = \{x = 0\} \cap T$.

(1) Orientar M y su borde ∂M.

(2) Calcular la integral en M de la forma diferencial $\omega = dy \wedge dz$, *utilizando el teorema de Stokes.*

Julio 2018

 # 1. Tema sin demostraciones. La diferencial exterior de una forma en una variedad.

 # 2. Tema con demostraciones. La derivada de una función diferenciable entre dos variedades.

 # 3. Se considera la superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ dada por $x^2 + y^2 - z^4 = 1$.

(1) Encontrar un campo tangente a M de la forma $X_{(x,y,z)} = (2xz^3, 2yz^3, h(z))$.

(2) Describir las órbitas (en M) del campo X. (No hace falta resolver el sistema de las tres EDOs, basta comparar las dos primeras.)

 # 4. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ las superficies con borde

$$M : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1, \qquad N : u^2 + v^2 = w,\ 0 \leq w \leq 1.$$

y una aplicación diferenciable $h : M \to N$ tal que $h(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, z^2)$.

(1) Calcular λ y la forma $\omega = h^*(du \wedge dv)$

(2) Definir orientaciones en las variedades anteriores y calcular la integral en M de la forma diferencial ω, *utilizando el teorema de Stokes en N.*

Enero 2019

 # 1. Tema con demostraciones. Demostrar utilizando particiones diferenciables de la unidad la existencia de funciones meseta y la extensión por cero de una función diferenciable en un entorno de un punto.

 # 2. Tema sin demostraciones. Formas diferenciales.

 # 3. Se considera la cuádrica $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 - y^2 = z$

(1) Encontrar un campo tangente a M de la forma $X_{(x,y,z)} = (-y^3, x^3, \star)$ y expresarlo utilizando una referencia móvil.

(2) Estudiar las órbitas del campo X.

 # 4. Se consideran las formas diferenciales

$$\alpha = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\big(x\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z - y\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,z + z\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y\big) \quad \text{y} \quad \beta = \tfrac{1}{z}\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y.$$

Se denotan S^+ y S^- los hemisferios *abiertos* $z > 0$ y $z < 0$ de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Se pide:

(1) Orientar S^+, S^- mediante el vector normal $\nu(x,y,z) = (x,y,z)$, y estudiar si la proyección $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ conserva orientaciones.

(2) Mostrar que β coincide con α en los hemisferios abiertos y usar esto para expresar (sin calcular) las integrales $\int_{S^+} \alpha$ y $\int_{S^-} \alpha$ en las coordenadas (x,y).

(3) Aplicar el teorema de Stokes en cada hemisferio *cerrado* y mostrar que si α fuera exacta, entonces las dos integrales anteriores serían opuestas. ¿Concuerda esto con (2)?

Junio 2019

 # 1. Tema sin demostraciones. Orientación del borde de una variedad.

 # 2. Tema con demostraciones. Parametrizaciones adaptadas a una subvariedad.

 # 3. Se considera en la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ un campo tangente de la forma

$$X_{(x,y,z)} = (xz - y, yz + x, h(x,y)).$$

(1) Determinar la función h y las órbitas estacionarias de X.

(2) Probar que toda curva integral no constante $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tiene su tercera componente $z(t)$ estrictamente decreciente.

(3) Deducir que todas las curvas integrales $c(t)$ no constantes de X son inyectivas y $\lim_{t\to\mp\infty} c(t) = (0,0,\pm 1)$.

 # 4. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ las superficies con borde

$$M : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \le 0, \qquad N : u^2 + v^2 + w^2 = 1,\ w \ge 0,$$

y la aplicación diferenciable biyectiva $h : M \to N$ dada por $h(x,y,z) = \frac{(x,y,z^2)}{\sqrt{1-z^2+z^4}}$.

(1) Orientar M y N, y estudiar dónde h es un difeomorfismo y si conserva o invierte la orientación.

(2) Comprobar el teorema del cambio de variable para una forma exacta $\alpha = \mathrm{d}\,\omega$ mediante el teorema de Stokes.

Enero 2020

 # 1. Tema sin demostraciones. Integración de campos tangentes.

 # 2. Tema con demostraciones. La diferencial exterior: concepto y unicidad.

 # 3. Se considera la superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^3 - y^2 = z$.

(1) Encontrar un campo X tangente a M (no idénticamente nulo) cuyas curvas integrales estén cada una contenida en un plano horizontal $z = \text{cte}$.

(2) Estudiar las órbitas del campo X.

 # 4. Se considera el toro de revolución $T \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $\big(\sqrt{x^2+y^2}-2\big)^2+z^2=1$ y la variedad con borde $M = T \cap \{z \leq 0\}$.

(1) Orientar T mediante una forma de grado 2 como borde de su interior en $\mathbb{R}^3$. Orientar con esa misma orientación M y ∂M como borde de M.

(2) Denotamos $p : M \to \mathbb{R}^2$ la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Comprobar el teorema de Stokes para la forma $\omega = p^*\big(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\big)$.

Septiembre 2020

 # 1. Tema sin demostraciones. El espacio tangente a una variedad en un punto.

 # 2. Se considera la superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

(1) Encontrar un campo tangente a M de la forma $X_{(x,y,z)} = (\star, -x^2z, x^2y)$.

(2) Mostrar que las órbitas no estacionarias de X están contenidas en los cilindros $y^2 + z^2 = \text{cte}$.

(3) Describir geométricamente todas esas órbitas.

 # 3. Se considera en $\mathbb{R}^3$ la superficie con borde $M : x^2 + y^2 - z^2 = 1, -1 \leq z \leq 1$, y en ella la forma diferencial α restricción de

$$d\,x \wedge d\,z + d\,x \wedge d\,y.$$

(1) Orientar M y su borde ∂M.

(2) Estudiar si el difeomorfismo $\sigma(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ conserva la orientación de ∂M.

(3) Encontrar una primitiva de α y calcular $\int_M \alpha$ mediante el teorema de Stokes.

Enero 2022

 # 1. (1) Encontrar un campo tangente a la esfera $\mathbb{S}^2$ (de la forma

$$X = -xz\frac{\partial}{\partial x} - yz\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}$$

y probar que la función $\pi(x,y,z) = z$ es estrictamente creciente en las órbitas no estacionarias.

(2) Describir geométricamente las órbitas de X.

 # 2. (1) Orientar el tronco de cono $M : x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$ y su borde.

(2) Integrar en M la forma diferencial $\omega = \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, usando el teorema de Stokes.

Junio 2022

 # 1. Se considera la superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = z^2 + h(z)$. Determinar h para que el campo $X_{(x,y,z)} = (yz, xz, xy)$ sea tangente a M y $(0,0,\pm 1) \in M$. Describir geométricamente las órbitas de X.

 # 2. Se consideran el tronco de cilindro $M : x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, y el tronco de paraboloide $N : u^2 + v^2 = w$, $0 \leq w \leq 1$.

(1) Orientar ambas variedades y sus bordes.

(2) Determinar en qué puntos la aplicación $f : M \to N$ dada por

$$f(x,y,z) = \big(z(y^2 - x^2), -2xyz, z^2\big)$$

es difeomorfismo local, y si conserva la orientación.

(3) Calcular mediante el teorema de Stokes la integral $\int_M f^*(\mathrm{d}\,v \wedge \mathrm{d}\,w)$.