Homotopía de Aplicaciones en Espacios Proyectivos Reales

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Curso 2021-22

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

Alejandro Calleja Arroyo

Tutor: Jesús María Ruiz Sancho

Madrid, junio de 2022

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER, JUNIO 2022

HOMOTOPÍA DE APLICACIONES EN ESPACIOS PROYECTIVOS REALES

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

ALEJANDRO CALLEJA ARROYO

Resumen. El objetivo de este trabajo es clasificar mediante el grado los tipos de homotopía de aplicaciones continuas $X \to \mathbb{P}^n$, siendo X la esfera $\mathbb{S}^n$ o el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Para ello, estudiaremos los levantamientos de estas aplicaciones a $\mathbb{S}^n$ y las homotopías entre ellas, así como las condiciones que estas homotopías deben cumplir para que den lugar a homotopías entre las aplicaciones originales de $\mathbb{P}^n$. Una herramienta de gran ayuda para este propósito será el Teorema de Brouwer-Hopf, que clasifica los tipos de homotopía de aplicaciones continuas de una variedad compacta en la esfera en la esfera.

En las últimas secciones estudiamos la functorialidad de $[Z, \cdot]$ y hacemos una comparativa entre $[\mathbb{S}^n, X]$ y $\pi_n(X)$.
Palabras clave: Grado, homotopía par/impar, Teorema de Brouwer-Hopf, espacios recubridores, levantamiento de homotopías, espacio proyectivo real, clasificación del tipo de homotopía.

Abstract. The goal of this work is to classify through the degree the homotopy types of continuous maps $X \to \mathbb{P}^n$, where X is the sphere $\mathbb{S}^n$ or the projective space $\mathbb{P}^n$. To that end, we will study the liftings o this maps to $\mathbb{S}^n$ and the homotopies between them, as well as the conditions that these homotopies must satisfy to give rise to homotopies between the original maps of $\mathbb{P}^n$. A really helpful tool for this end will be the Brouwer-Hopf Theorem, which classifies the homotopy type of continuous maps from a compact manifold to the sphere.

In the last sections we study the functoriality of $[Z, \cdot]$ and make a comparison between $[\mathbb{S}^n, X]$ and $\pi_n(X)$.
Keywords: Degree, even/odd homotopy, Brouwer-Hopf Theorem, covering spaces, homotopy lifting, real projective space, homotopy type classification.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 55P15, 55M30.

Índice

1. Introducción

A lo largo de este trabajo supondremos conocidos los conceptos y resultados que se estudian en las asignaturas de Variedades Diferenciables y Topología Algebraica del grado y de Topología Diferencial del máster, los cuales se pueden encontrar en [GR], [Ha] y [ORR]. Además, el lector interesado puede encontrar en [OR] una construcción más general del grado que la presentada en [ORR].

(1.1) Grado de una aplicación continua. Vamos a recordar la noción de grado para fijar la notación que usaremos en esta memoria. Dada una aplicación continua $f : X \to Y$ entre dos variedades compactas sin borde de igual dimensión, consideremos una aplicación diferenciable $g : X \to Y$ homótopa a f (la cual existe por [ORR, III.6.1, III.8.1]). Tomemos un valor regular $a \in Y$ de g, y sea $g^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_r\}$.

(1) Si X e Y están orientadas, se define el *grado de* f como $\deg f := \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} f$, siendo $\operatorname{sign}_{x_i} f = +1$ si f conserva la orientación en x_i y $\operatorname{sign}_{x_i} f = -1$ si la invierte.
(2) Si alguna de las variedades no está orientada, se define el *grado módulo* 2 *de* f como $\deg_2 f := r \mod 2$.

La definición no depende de las elecciones (se hace como para $Y = \mathbb{S}^n$ en [ORR, IV.8.1]) y por tanto el grado es un invariante de homotopía.

Uno de los resultados más importantes de la Teoría del Grado es el conocido Teorema de Brouwer-Hopf, el cual nos asegura que dada una variedad compacta X de dimensión n, el tipo de homotopía de una aplicación continua $X \to \mathbb{S}^n$ está unívocamente determinado por su grado si X es orientable y por su grado módulo 2 si no lo es (ver [ORR, VII.8.2]). Surge la pregunta de hasta qué punto se puede generalizar este resultado, es decir, qué pasa si sustituimos la esfera $\mathbb{S}^n$ por otra variedad M. Si bien este problema es complicado en general, en algunos casos el propio Teorema de Brouwer-Hopf nos puede ayudar a resolverlo. Vamos a centrarnos en concreto en el caso en el que M es el espacio proyectivo real de dimensión n, $\mathbb{P}^n$. Una cuestión parcial en el caso $n = 2$ se planteó en [MSE]

Pensamos en clasificar los tipos de homotopía de aplicaciones continuas $X \to \mathbb{P}^n$ para cualquier variedad compacta X de dimensión n mediante el grado. La estrategia que nos gustaría utilizar es estudiar los levantamientos de estas aplicaciones a los respectivos recubridores universales de las variedades y aplicarles el Teorema de Brouwer-Hopf, pues es sabido que el recubridor universal de $\mathbb{P}^n$ es $(\mathbb{S}^n, \pi)$ siendo π la aplicación cociente de la relación de equivalencia $x \sim \pm x$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$.

Más detalladamente, el procedimiento sería el siguiente:

Sea $(\widetilde{X}, p)$ el recubridor universal de X. Consideremos dos aplicaciones continuas $f, g : X \to \mathbb{P}^n$. Si estas dos aplicaciones son homótopas mediante una homotopía H, entonces también $f \circ p$ y $g \circ p$ son homótopas mediante $H \circ p$, y por la propiedad de levantamiento de homotopías (ver [Ha, 1.30]) existe una homotopía $\overline{H}$ entre dos levantamientos $\overline{f}$ y $\overline{g}$ de $f \circ p$ y $g \circ p$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
[0,1] \times \widetilde{X} \arrow[r, "\overline{H}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times p"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"] \\
[0,1] \times X \arrow[r, "H"] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\overline{f}, \overline{g}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "f,g"] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}$$

Nos gustaría ahora aplicar la Teoría del Grado para concluir que el grado de ambos levantamientos coincide, y es aquí donde aparece nuestro primer problema, pues para hacer esto necesitamos que $\widetilde{X}$ sea una variedad compacta, lo cual no tiene porqué pasar.

Recíprocamente, si tenemos dos levantamientos $\overline{f}$ y $\overline{g}$ de $f \circ p$ y $g \circ p$ que tienen el mismo grado, queremos usar el Teorema de Brouwer-Hopf para concluir que ambos levantamientos son homótopos, y luego descender la homotopía entre ellos a una homotopía entre f y g. Sin embargo, nos volvemos a encontrar con el problema de que $\widetilde{X}$ no tiene por qué ser compacta, y no podemos garantizar que se cumplan las hipótesis de Brouwer-Hopf. Es más, aún en el caso de que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ fuesen homótopas, nada nos garantiza que la homotopía entre ellos se pueda hacer descender a una homotopía entre f y g.

El último problema que tenemos aparece a la hora de buscar representantes de cada clase de homotopía. De nuevo el problema es que si $\widetilde{X}$ no es compacta no podemos aplicar el Teorema de Brouwer-Hopf como nos gustaría.

Así que nuestro procedimiento no nos vale en el caso general. Sin embargo, observamos que el principal obstáculo que tenemos es el hecho de que $\widetilde{X}$ no sea compacto, así que vamos a centrar nuestra atención en variedades cuyo espacio recubridor sea una variedad compacta.

El caso más sencillo es en el que la propia variedad X es simplemente conexa, es decir, cuando X es la esfera $\mathbb{S}^n$, que es el primer caso en el que vemos que el método funciona:

(1.2) Tipos de homotopía $[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$ de aplicaciones de la esfera en el espacio proyectivo real. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ una aplicación que podemos suponer diferenciable por los resultados de aproximación de funciones continuas mediante funciones diferenciables (ver [ORR, III.6.1,III.8.1]). Esta aplicación tiene dos levantamientos $\overline{f}$ y $-\overline{f}$ a $\mathbb{S}^n$, ya que al ser $\mathbb{S}^n$ simplemente conexa, por [Ha, 1.33] existe un levantamiento $\overline{f}$ de f, y es obvio que $-\overline{f}$ también lo es. Además, estos son los únicos, pues si $\widetilde{f}$ es otro levantamiento, entonces dado un punto $x_0 \in \mathbb{S}^n$, se ha de tener $\widetilde{f}(x_0) = \pm\overline{f}(x_0)$, y en virtud de [Ha, 1.34], se tiene $\widetilde{f} = \pm\overline{f}$. Vemos que ambos son diferenciables, pues localmente vienen dados por $\overline{f} = f \circ \pi^{-1}$ para una inversa por la derecha π^{-1} de π.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{S}^n \arrow[ur, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Para hacer la clasificación necesitamos distinguir entre el caso orientable y el no orientable.

Proposición 1.3. (1) Si n es impar, entonces hay una biyección

$$\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n] \to 2\mathbb{Z},\ \ [f] \mapsto \deg f$$

entre el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas de $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{P}^n$ y $2\mathbb{Z}$.

(2) Si n es par, entonces la aplición

$$|\overline{\deg}| : [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n] \to \mathbb{N},\ \ [f] \mapsto |\deg \overline{f}|$$

es una biyección.

Demostración. Comenzamos con el caso orientable, es decir, cuando n es impar. Lo primero que vamos a hacer es estudiar la relación entre el grado de f y el de sus levantamientos. Para ello, tomemos un valor regular $c \in \mathbb{P}^n$ de f. Puesto que π es un difeomorfismo local y $f = \pi \circ \overline{f}$, se tiene que $\overline{c}$ y $-\overline{c}$ son valores regulares de f, donde $\pi^{-1}(c) = \{\pm\overline{c}\}$. Además, $f^{-1}(c) = \overline{f}^{-1}(\overline{c}) \cup \overline{f}^{-1}(-\overline{c})$. Llamemos $\overline{f}^{-1}(\overline{c}) = \{a_1, \ldots, a_r\}$ y $\overline{f}^{-1}(-\overline{c}) = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Es sabido que el grado no depende del valor regular escogido (ver [ORR, IV.8.1(2)]), por lo que $\sum_{i=1}^r \operatorname{sign}_{a_i} \overline{f} = \sum_{j=1}^s \operatorname{sign}_{b_j} \overline{f} = \deg \overline{f}$. Por otra parte, observamos que $\operatorname{sign}_{\overline{c}} \pi = \operatorname{sign}_{-\overline{c}} \pi$ (pues $-\operatorname{id}_{\mathbb{S}^n}$ conserva la orientación), luego $\operatorname{sign}_{a_i} f = \operatorname{sign}_{a_i} \overline{f} \operatorname{sign}_{\overline{c}} \pi = \operatorname{sign}_{a_i} \overline{f}$ para todo $i = 1, \ldots, r$, y $\operatorname{sign}_{b_j} f = \operatorname{sign}_{b_j} \overline{f}$ para todo $j = 1, \ldots, s$. Con todo esto, tenemos

$$\deg f = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{a_i} f + \sum_{j=1}^{s} \operatorname{sign}_{b_j} f = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{a_i} \overline{f} + \sum_{j=1}^{s} \operatorname{sign}_{b_j} \overline{f} = 2 \deg \overline{f}.$$

Veamos ahora que el grado caracteriza el tipo de homotopía de una aplicación continua. En efecto, si $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ es una aplicación continua homótopa a f y $\overline{g}$ es un levantamiento suyo, entonces por la propiedad de levantamiento de homotopías, $\overline{f}$ es homótopa a un lavantamiento de g, es decir, a $\overline{g}$ ó a $-\overline{g}$, y por Brouwer-Hopf $\deg \overline{f} = \deg(\pm\overline{g})$. Pero $\deg(-\operatorname{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$, luego, de hecho, $\deg \overline{f} = \deg \overline{g}$, y así $\deg f = 2 \deg \overline{f} = 2 \deg \overline{g} = \deg g$.

Recíprocamente, si $\deg f = \deg g$, entonces $\deg \overline{f} = \deg \overline{g}$, y por Brouwer-Hopf existe una homotopía $\overline{H}$ entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$. Componiendo con π, obtenemos una homotopía $\pi \circ \overline{H}$ entre f y g.

Así, dos aplicaciones continuas de $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{P}^n$ son homótopas si y solo si tienen el mismo grado. Pero además, por el Teorema de Brouwer-Hopf, para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación continua $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grado m, de forma que $\pi \circ \overline{f}$ es una aplicación de grado $2m$. Por tanto, hay aplicaciones continuas de todos los grados pares.

Pasamos ahora al caso no orientable, es decir, cuando n es par. De nuevo tenemos que dos aplicaciones $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ son homótopas si y solo si $\overline{f}$ es homótopa a $\pm\overline{g}$, siendo $\overline{f}$ y $\overline{g}$ levantamientos de f y g respectivamente. Por el Teorema de Brouwer-Hopf, esto es equivalente a que $\deg \overline{f} = \deg(\pm\overline{g})$, y como $\deg(\pm\overline{g}) = \pm \deg \overline{g}$ (pues en este caso $\deg(-\operatorname{id}_{\mathbb{S}^n}) = -1$), esto es lo mismo que $\deg \overline{f} = \pm \deg \overline{g}$, o en otras palabras, $|\deg \overline{f}| = |\deg \overline{g}|$. Así que en este caso el tipo de homotopía de una aplicación continua viene caracterizado por el valor absoluto del grado de sus levantamientos. Además, al igual que antes, el Teorema de Brouwer-Hopf nos garantiza la existencia de aplicaciones cuyos levantamientos tienen grado $\pm m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Hemos visto cómo nuestro método sirve para clasificar los tipos de homotopía de aplicaciones en el caso más sencillo, cuando la propia variedad X es su recubridor universal. El siguiente paso será estudiar el caso en el que X es una variedad cuyo recubridor universal sea una variedad compacta. En esta memoria vamos a analizar con detalle el caso en el que $X = \mathbb{P}^n$, y por tanto $\widetilde{X} = \mathbb{S}^n$. Tiene la dificultad de que debemos preocuparnos por cuando una homotopía entre aplicaciones $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ puede hacerse descender a una homotopía entre aplicaciones $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$.

2. Aplicaciones pares e impares

Dedicamos esta sección a analizar cómo son los levantamientos a $\mathbb{S}^n$ de aplicaciones $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. Por levantamiento de una aplicación $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ nos referimos a una aplicación $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tal que $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$ según hemos visto en la introducción. También responderemos a la pregunta de qué deben cumplir las homotopías para que desciendan a homotopías de $\mathbb{P}^n$. Veremos que la respuesta en ambos casos la dan las aplicaciones y homotopías pares e impares. Además de esto estudiaremos algunas cuestiones como la paridad de su grado o la diferenciabilidad de los levantamientos de una aplicación diferenciable.

Definición 2.1. Una aplicación $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ se dice que es *par* si cumple $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$, y se dice que es *impar* si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$.

Por ejemplo todos los levantamientos $\overline{h}$ de aplicaciones $h : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ son pares:

$$\overline{h}(x) = h(\pi(x)) = h(\pi(-x)) = \overline{h}(-x).$$

Proposición 2.2. Sea $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ una aplicación continua. Entonces existe un levantamiento suyo $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Además, $\overline{f}$ es o bien par o bien impar.

Recíprocamente, si $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es una aplicación continua par o impar, entonces existe una aplicación continua $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ tal que $\overline{f}$ es un levantamiento suyo.

Demostración. Comencemos suponiendo que tenemos una aplicación continua $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. Como $\mathbb{S}^n$ es simplemante conexa, existe un levantamiento $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de $f \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Esto quiere decir que dados dos elementos $x, y \in \mathbb{S}^n$ tales $[x] = [y] \in \mathbb{P}^n$, se ha de tener que $[\overline{f}(x)] = [\overline{f}(y)]$, es decir, si tomamos un $x_0 \in \mathbb{S}^n$ cualquiera, entonces $\overline{f}(x_0) = \pm\overline{f}(-x_0)$. Pero como $\mathbb{S}^n$ es conexa y $\overline{f}$ es continua, se ha de tener o bien $\overline{f}(x) = \overline{f}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$ o bien $\overline{f}(x) = -\overline{f}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$.

Supongamos ahora que la aplicación $\overline{f}$ es par o impar. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ dada por $f([x]) = [\overline{f}(x)]$. Esta aplicación está bien definida, y, puesto que claramente $\overline{f} = f \circ \pi$ es continua, por la Propiedad universal del cociente, f es también continua. □

Observación 2.3. Al igual que ocurría en el caso de aplicaciones $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, si la aplicación $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ es diferenciable, también lo es su levantamiento, pues localmente viene dado por $\overline{f} = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$ donde π^{-1} es una inversa local por la derecha de π. Igualmente, si $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es un levantamiento diferenciable de f, entonces la aplicación f también es diferenciable.

A priori uno podría pensar que cualquier aplicación del proyectivo puede tener tanto levantamientos pares como impares. Sin embargo, resulta que la paridad de los levantamientos de una aplicación continua viene determinada por cómo es el homomorfismo que esta aplicación induce en el grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$.

Proposición 2.4. Sea $n \geq 2$. Sea $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ una aplicación continua y sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un levantamiento suyo. Entonces $\overline{f}$ es par si y solo si el homomorfismo inducido por f, $f_* : \pi_1(\mathbb{P}^n) \to \pi_1(\mathbb{P}^n)$ es el homomorfismo trivial.

Demostración. Supongamos primero que $\overline{f}$ es par. Tomemos un punto $y_0 \in \mathbb{P}^n$ y sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{P}^n$ un lazo con base y_0. Por la propiedad de levantamiento de caminos, dado $x_0 \in \pi^{-1}(y_0)$ existe un único camino $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ con $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$. Se tiene que $\widetilde{\gamma}(1) = \pm x_0$. En cualquier caso, al ser $\overline{f}$ par, $\overline{f} \circ \widetilde{\gamma}$ es un lazo en $\mathbb{S}^n$ con base $\overline{f}(x_0)$, por lo que su clase en el grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$ es $[\overline{f} \circ \widetilde{\gamma}] = 0$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^n \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Observamos ahora que

$$f \circ \gamma = f \circ \pi \circ \widetilde{\gamma} = \pi \circ \overline{f} \circ \widetilde{\gamma},$$

de lo que se deduce $f_*([\gamma]) = \pi_*([\overline{f} \circ \widetilde{\gamma}]) = 0$.

Si ahora $\overline{f}$ es impar, dado un $x_0 \in \mathbb{S}^n$, existe un camino $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ con $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$ y $\widetilde{\gamma}(1) = -x_0$. Se tiene que $\gamma := \pi \circ \widetilde{\gamma}$ es un lazo en $\mathbb{P}^n$ con base $y_0 := \pi(x_0)$. Como $\overline{f}$ es impar, $\overline{f} \circ \widetilde{\gamma}$ es un camino en $\mathbb{S}^n$ con $(\overline{f} \circ \widetilde{\gamma})(0) = f(x_0)$ y $(\overline{f} \circ \widetilde{\gamma})(1) = f(-x_0) = -f(x_0)$. Por tanto, si se tuviese $[\pi \circ \overline{f} \circ \widetilde{\gamma}] = [f \circ \gamma] = 0$, existiría una homotopía relativa al $\{0,1\}$, $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{P}^n$ entre $f \circ \gamma$ y el camino constante $c_{f(y_0)}$. Pero por la propiedad de levantamiento de homotopías, H se levantaría a una homotopía relativa al $\{0,1\}$, $\overline{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$ entre $\pi \circ \overline{f} \circ \widetilde{\gamma}$ y $c_{\overline{f}(x_0)}$, lo cual es imposible. Así que $f_*([\gamma]) \neq 0$, y f_* no es el homomorfismo trivial. $\square$

Con esto ya hemos visto cómo son los levantamientos de aplicaciones continuas en un espacio proyectivo. Nos centramos ahora en estudiar qué deben cumplir las homotopías entre estos levantamientos para que desciendan a una homotopía entre las aplicaciones en el proyectivo.

Una condición necesaria obvia para que una homotopía $H : I \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ descienda a una homotopía $[0,1] \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ es que todas las aplicaciones intermedias H_t desciendan a aplicaciones en el proyectivo, lo que, según hemos visto, es equivalente a que todas estas aplicaciones sean pares o impares. Ahora bien, por la continuidad de las homotopías, no es posible que haya aplicaciones de ambos tipos, es decir, o bien todas las aplicaciones intermedias son pares o bien son todas impares. Así pues, las homotopías que nos interesan son de dos tipos:

Definición 2.5. Decimos que una homotopía $H : I \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es *par* si las aplicacines H_t son pares para todo $t \in I$, y decimos que es *impar* si todas las aplicaciones H_t son impares.

Proposición 2.6. Sea $H : [0,1] \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ una homotopía, y sea $\overline{f}$ un levantamiento de H_0. Entonces existe una homotopía $\overline{H} : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ que levanta a H con $\overline{H}_0 = \overline{f}$, i.e. $\pi \circ \overline{H} = H \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \pi)$. Además $\overline{H}$ es o bien par o bien impar.

Recíprocamente, si $\overline{H} : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es una homotopía par o impar, entonces $\overline{H}$ es un levantamiento de una homotopía $H : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$

Demostración. Supongamos primero $H : [0,1] \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ es una homotopía y $\overline{f}$ un levantamiento de H_0. Por la propiedad de levantamiento de homotopías, existe una homotopía $\overline{H} : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ que levanta a $H \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \pi)$ y con $\overline{H}_0 = \overline{f}$. Además, por lo comentado anteriormente, esta homotopía ha de ser o bien par o bien impar.

Para la segunda parte, definimos la aplicación $H : [0,1] \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ como $H_t([x]) = [\overline{H}_t(x)]$. Por ser H par o impar, esta aplicación está bien definida, y cumple que $\overline{H} = H \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \pi)$. Además, como $[0,1] \times \mathbb{S}$ es compacto y $[0,1] \times \mathbb{P}^n$ es Hausdorff, se tiene que la aplicación $\mathrm{id}_{[0,1]} \times \pi : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to [0,1] \times \mathbb{P}^n$ es una identificación, luego por la propiedad universal dl cociente, H es continua por serlo $\overline{H}$. $\square$

En este trabajo estudiaremos la existencia de homotopías pares/impares entre aplicaciones pares/impares, lo que nos llevará a la siguiente clasificación.

Teorema 2.7. (1) *Si n es impar, entonces existe una biyección*

$$\deg : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \to \mathbb{Z}, \ [f] \mapsto \deg f.$$

(2) *Si n es par, definimos los conjuntos*

$$\begin{array}{l} [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_0 := \{[f] \in [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \mid f_* = 0\} \\ [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1 := \{[f] \in [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \mid f_* \neq 0\} \end{array} .$$

Se tiene $[\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] = [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_0 \cup [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1$, y las siguentes aplicaciones son biyectivas:

$$\begin{array}{ll} \deg_4 : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_0 \to \mathbb{Z}_2, & [f] \mapsto \frac{1}{2} \# \overline{f}^{-1}(c) \mod 2 \\ |\widetilde{\deg}| : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1 \to 2\mathbb{N}+1, & [f] \mapsto |\deg \overline{f}| \end{array}$$

donde f es un representante diferenciable de $[f]$, $\overline{f}$ un levantamiento suyo y c un valor regular de $\overline{f}$.

Acabamos esta sección estudiando la relación entre la paridad de una función y su grado. En primer lugar, recordamos el conocido Teorema de Borsuk-Ulam.

Teorema 2.8 (Borsuk-Ulam)**.** *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación continua impar. Entonces f tiene grado impar.*

Demostración. Ver [ORR, IV.10.1]. □

En el caso par tenemos el siguiente resultado complementario.

Proposición 2.9. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación continua par. Entonces f tiene grado par. Si además n es par, entonces $\deg f = 0$.

Demostración. Sea $y_0 \in \mathbb{S}^n$. Se tiene $f^{-1}(y_0) = \{\pm x_1, \dots, \pm x_r\}$. Distinguimos dos casos:

(1) Si n es impar se tiene que $-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ conserva la orientación, luego para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que

$$d_{x_i} f(\zeta_{x_i}) = d_{x_i} f \circ d_{-x_i}(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n})(\zeta_{-x_i}) = d_{-x_i}(f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}))(\zeta_{-x_i}) = d_{-x_i} f(\zeta_{-x_i}),$$

donde ζ_x es la orientación estándar de $\mathbb{S}^n$ en el punto x. Así pues, f preserva la orientación en x_i si y solo si lo hace en $-x_i$, de forma que $\deg f = \sum_{i=1}^r 2 \operatorname{sign}_{x_i} f = 2 \sum_{i=1}^r \operatorname{sign}_{x_i} f$, que es par.

(2) Si n es par, entonces $-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ invierte la orientación, por lo que

$$d_{x_i} f(\zeta_{x_i}) = -d_{x_i} f \circ d_{-x_i}(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n})(\zeta_{-x_i}) = d_{-x_i}(f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}))(\zeta_{-x_i}) = -d_{-x_i} f(\zeta_{-x_i}),$$

de forma que f conserva la orientación en un punto y la invierte en su opuesto, y $\deg f = \sum_{i=1}^r (\operatorname{sign}_{x_i} f - \operatorname{sign}_{x_i} f) = 0$.

□

3. Construcciones explícitas

El objetivo de esta sección es probar la existencia de aplicaciones impares $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de todos los grados impares en cualquier dimensión y la de aplicaciones pares de cualquier grado par en dimensión impar, lo que usaremos más adelante para probar la sobreyectividad de las aplicaciones deg y $|\widetilde{\deg}|$ definidas en el Teorema 2.7.

Teorema 3.1. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ impar existe una aplicación continua $\overline{f}_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grado k.*

Demostración. Consideremos para cada entero positivo $k \in \mathbb{Z}^+$ la función

$$h_k(t) := \sqrt{\frac{1-(1-t)^k}{t}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(1-t)^{i-1}},$$

cuya derivada es

$$h_k'(t) = -\frac{1}{2h(t)}\sum_{i=1}^{k-1} i(1-t)^{i-1}.$$

Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ de forma natural, podemos suponer que $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}$. De esta forma, podemos definir la aplicación $\overline{f}_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por $\overline{f}_k(z,x) := (z^k, x')$, siendo $x' = xh_k(\|x\|^2)$. Cuando k es impar esta aplicación es claramente impar, por lo que si probamos que tiene grado k habremos acabado.

Lo primero que observamos es que h_k esdiferenciable, ya que su radicando no se anula nunca. Por tanto, $\overline{f}_k$ también es también diferenciable, y podemos calcular su grado a través de sus valores regulares. Para encontrar estos valores regulares, vamos a estudiar el determinante Jacobiano de $\overline{f}_k$ en un punto (z,x) y veremos qué condiciones se han de cumplir para que sea no nulo. Observamos que la matriz Jacobiana es

$$J_{(z,x)}\overline{f}_k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \frac{\partial x'}{\partial x} \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}$$

es la matriz de la diferencial de $x + yi = z \mapsto z^k = u(x,y) + v(x,y)i$. Como z^k es una aplicación polinómica, es holomorfa, y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Así,

$$\det(A) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geq 0.$$

Además vemos que $\det(A) = 0$ si y solo si $z^k = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i = 0$, es decir, si y solo si $z = 0$. Por tanto, los puntos que nos interesan son aquellos (z,x) tales que $z \neq 0$ (y por tanto $\|x\| \neq 1$).

Si la dimensión es $n = 1$, con esto ya acabamos el estudio de $J_{(z,x)}\overline{f}_k$. Supongamos que $n > 1$. Si llamamos $x' = (x'_1, \dots, x'_{n-1})$ y $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, se tiene que

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} x_i h_k(\|x\|^2) = \begin{cases} h_k(\|x\|^2) + 2x_i^2 h'_k(\|x\|^2) & \text{si} \quad i = j \\ 2x_i x_j h'_k(\|x\|^2) & \text{si} \quad i \neq j \end{cases},$$

por lo que $\frac{\partial x'}{\partial x}$ es la matriz $(c_1 \dots c_{n-1})$ cuyas columnas son $c_j = h_k e_j + 2h'_k x_j x$. De esta manera, desarrollando el determinante obtenemos

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) &= \det(h_k e_1, \dots, h_k e_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \det(h_k e_1, \dots, 2h'_k x_j x, \dots, h_k e_{n-1}) \\ &= h_k^{n-2}(h_k + 2h'_k \|x\|^2). \end{aligned}$$

Para determinar cuándo este determinante es positivo vamos a hacer uso de la igualdad $h_k(t)^2 + 2t h_k(t) h'_k(t) = k(1-t)^{k-1}$, la cual probamos a continuación. Lo hacemos por inducción sobre k:

En el caso $k = 1$ se tiene $h_1(t)^2 + 2t h_1(t) h'_1(t) = 1 = (1-t)^0$, y la igualdad es cierta.

Supongamos que se cumple para el caso $k-1$ y veamos que se cumple para k. En efecto,

$$\begin{aligned} h_k(t)^2 + 2t h_k(t) h'_k(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} (1-t)^i - t \sum_{i=1}^{k-1} i(1-t)^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} (1-t)^i - t \sum_{i=1}^{k-2} i(1-t)^{i-1} + (1-t)^{k-1} - t(k-1)(1-t)^{k-2} \\ &= h_{k-1}(t)^2 + 2t h_{k-1}(t) h'_{k-1}(t) + (1-t)^{k-1} - t(k-1)(1-t)^{k-2} \\ &= (k-1)(1-t)^{k-2} + (1-t)^{k-1} - t(k-1)(1-t)^{k-2} \\ &= (1-t)(k-1)(1-t)^{k-2} + (1-t)^{k-1} = k(1-t)^{k-1}, \end{aligned}$$

luego efectivamente se da la igualdad.

Así pues, tenemos que si $\|x\| \neq 1$ (que es el caso que nos interesa), entonces

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) &= h_k(\|x\|)^{n-2} \left(h_k(\|x\|^2) + 2h'_k(\|x\|^2)\|x\|^2\right) \\ &= h_k(\|x\|)^{n-3}(k(1 - \|x\|^2)^{k-1}) > 0, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\det(J_{(z,x)}\overline{f}_k) = \det(A) \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) > 0.$$

Con esto es fácil ver que $\overline{f}_k$ conserva la orientación en todos los puntos de la forma $(z, 0)$ con $z \neq 0$. En efecto, sea $v = (z, x)$. Se tiene que $T_{(z,x)}\mathbb{S}^n = L[v]^\perp$, y la orientación estándar de $\mathbb{R}^{n+1}$ es $\zeta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \{v\} \oplus \zeta_{(z,x)}$, donde $\zeta_{(z,x)}$ es la orientación habitual de $\mathbb{S}^n$ en (z, x). Como $\det(J_{(z,x)}\overline{f}_k) > 0$, se tiene que la aplicación lineal $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ cuya matriz respecto de la base canónica es $J_{(z,x)}\overline{f}_k$, satisface que $J(\zeta_{\mathbb{R}^{n+1}}) = \zeta_{\mathbb{R}^{n+1}}$, y $J(\{v\} \oplus \zeta_{(z,x)}) = \{J(v)\} \oplus J(\zeta_{(z,x)})$, así que si vemos que $w := J(v)$ es un vector saliente, se habrá de tener $J(\zeta_{(z,x)}) = \zeta_{(z,x)}$, y $\overline{f}_k$ conservará la orientación en (z, x). Para ver esto, hacemos un cálculo sencillo para obtener $J(z, x) = (kz^k, \alpha x)$, donde $\alpha =$

$h_k(\|x\|^2) + 2\|x\|^2 h_k'(\|x\|^2) > 0$. En consecuencia, si llamamos $u := \overline{f}_k(v) = (z^k, h(\|x\|^2)x)$ tenemos que $\langle u, w\rangle = k|z|^{2k} + \alpha h(\|x\|^2)\|x\|^2 > 0$, lo que significa que efectivamente w es saliente.

Una vez que sabemos que $\overline{f}_k$ conserva la orientación en los puntos de la forma (z, x) con $z \neq 0$, ya solo falta ver como es la preimagen de la imagen de estos puntos. Veamos que $\overline{f}_k^{-1}(f(z,x)) = \{(\zeta_1, x), \ldots, (\zeta_k, x)\}$, siendo las ζ_i las k raíces k-ésimas de z^k en $\mathbb{C}$. En efecto, si $\overline{f}_k(\zeta, y) = \overline{f}_k(z, x) = (z^k, xh_k(\|x\|^2)$, se ha de tener $\zeta^k = z^k$, luego $\zeta = \zeta_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$. Además, $\|y\|^2 = 1 - |\zeta|^2 = 1 - |z|^2 = \|x\|^2$, de forma que $xh_k(\|x\|^2) = yh_k(\|y\|^2) = yh_k(\|x\|^2)$, y como $h_k(\|x\|^2) \neq 0$, ha de ser $x = y$.

Con todo esto ya estamos en disposición de calcular el grado de $\overline{f}_k$:

$$\deg \overline{f}_k = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign}_{(\zeta_i, x)} \overline{f}_k = \sum_{i=1}^{k} 1 = k,$$

como queríamos.

Para encontrar funciones con grados negativos basta observar que la composición $\sigma \circ \overline{f}_k$ de $\overline{f}_k$ con la simetría $\sigma : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por $\sigma(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, x_{n+1})$ tiene grado

$$\deg(\sigma \circ \overline{f}_k) = (\deg \sigma)(\deg \overline{f}_k) = -k.$$

□

Para las funciones pares tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación continua par $\overline{f}_{2k} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grado $2k$.

Demostración. En primer lugar, si $n = 1$, entonces la aplicación $f(z) = k^{2k}$ es par y tiene grado $2k$ como hemos probado, en el Teorema 3.1. Supongamos pues que $n > 1$. Como $\mathbb{P}^n$ es una variedad compacta y orientable, por el Teorema de Brouwer-Hopf, para cada $k \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación diferenciable $\widetilde{f}_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ de grado k. Sea $\overline{f}_{2k} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un levantamiento de $\pi \circ \widetilde{f}_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ (que existe por la Proposición 2.2).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \arrow[r, "\overline{f}_{2k}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{P}^n \arrow[r, "\pi\circ\widetilde{f}_k"'] \arrow[ur, "\widetilde{f}_k"] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}$$

Como $\overline{f}_{2k}$ es un levantamiento de una aplicación $\mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$, es una aplicación par. También podemos observar que $(\pi \circ \widetilde{f}_k)_* = \pi_* \circ (\widetilde{f}_k)_* = 0$, y aplicar la Proposición 2.4.

Calculemos ahora el grado de $\overline{f}_{2k}$. Como $\widetilde{f}_k$ es diferenciable y π un difeomorfismo local, todas nuestras aplicaciones son diferenciables. Sea $c \in \mathbb{S}^n$ un valor regular de $\widetilde{f}_k$. Como π es difeomorfismo local, se tiene que c es también valor regular de $\overline{f}_k$. Sea $\widetilde{f}_k^{-1}(c) = \{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)\}$. Por ser $\overline{f}_{2k}$ par, se tiene que $\overline{f}_{2k}^{-1}(c) = \{x_1, \ldots, x_r, -x_1, \ldots, -x_r\}$. Por ser n impar, π conserva la orientación en todos los puntos, luego $\operatorname{sign}_{\pi(x_i)} \widetilde{f}_k = \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f}_{2k} =$

$\operatorname{sign}_{-x_i} \overline{f}_k$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Así,

$$\deg \overline{f}_{2k} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f}_{2k} + \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{-x_i} \overline{f}_{2k} = 2 \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{\pi(x_i)} \widetilde{f}_k = 2 \deg \widetilde{f}_k = 2k.$$

$\square$

Más adelante veremos que los resultados de esta sección son suficientes para probar la existencia de aplicaciones de cualquier grado en dimensión impar y es casi suficiente en dimensión par. Sin embargo, en este último caso se necesitan algunos resultados que estudiaremos en la sección 5.

4. Homotopía de aplicaciones impares

Dedicamos las dos siguientes secciones a estudiar cuando existe una homotopía par o impar (según corresponda) entre dos aplicaciones pares o impares con el mismo grado. En esta sección nos centramos en el caso de aplicaciones impares, donde la respuesta es que siempre existe esta homotopía. La demostración de este hecho la haremos por inducción sobre la dimensión de las esferas. Para ello, antes probaremos que se puede suponer que las dos aplicaciones son diferenciables y conservan hemisferios, y que en tal caso, las restricciones de estas aplicaciones al ecuador (es decir, el conjunto de puntos de la esfera cuya última coordenada es cero) tienen el mismo grado que las originales, de forma que la hipótesis de inducción nos dará una homotopía impar entre estas restricciones. Usando lo que se conoce como *suspensión* de la homotopía entre las restricciones, encontraremos una homotopía impar entre las aplicaciones originales.

Antes de comenzar con la demostración, aclaremos lo que significa que una aplicación conserve hemisferios.

Definición 4.1. Sea $n \geq 2$ y consideremos la esfera $\mathbb{S}^n$. Definimos el *hemisferio superior, hemisferio inferior* y *ecuador* como

$$\begin{aligned} H^+ &:= \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}, \\ H^- &:= \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} \leq 0\}, \quad \text{y} \\ \mathbb{S}^{n-1} &:= \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} = 0\} \end{aligned}$$

respectivamente.

Sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación. Decimos que $\overline{f}$ *conserva hemisferios* si $\overline{f}(H^+) \subset H^+$, $\overline{f}(H^-) \subset H^-$, y en consecuencia $\overline{f}(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

Lema 4.2. Sea $n \geq 2$ y sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación continua impar. Entonces $\overline{f}$ es homótopa mediante una homotopía impar a una aplicación diferenciable impar que conserva hemisferios.

Demostración. Lo hacemos en varios pasos.

(1) *Podemos suponer que $\overline{f}$ es diferenciable.*

Por los teoremas de aproximación de aplicaciones continuas por aplicaciones diferenciables, dado $\varepsilon > 0$, si llamamos $\delta := \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, existe una aplicación diferenciable $\overline{h}_\delta : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tal que

$\|\overline{h}_\delta - \overline{f}\| < \delta$. Observamos que al ser $\overline{f}$ impar y cumplir $\|\overline{f}(x)\| = 1$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\overline{h}_\delta(x) - \overline{h}_\delta(-x)\| &= \|\overline{h}_\delta(x) - \overline{f}(x) - \overline{h}_\delta(-x) + \overline{f}(-x) + 2\overline{f}(x)\| \\ &\geq 2\|\overline{f}(x)\| - \|\overline{f}(x) - \overline{h}_\delta(x)\| - \|\overline{h}_\delta(-x) - \overline{f}(-x)\| \\ &\geq 2 - 2\delta.\end{aligned}$$

Por tanto, si $\delta < 1$, $\overline{h}_\delta(x) \neq \overline{h}_\delta(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$, de forma que podemos definir la aplicación

$$\overline{\phi}_\varepsilon(x) := \frac{\overline{h}_\delta(x) - \overline{h}_\delta(-x)}{\|\overline{h}_\delta(x) - \overline{h}_\delta(-x)\|},$$

que es impar y diferenciable y cumple

$$\begin{aligned}\|\overline{\phi}_\varepsilon(x) - \overline{f}(x)\| &= \left\| \frac{\overline{h}_\delta(x) - \overline{h}_\delta(-x)}{\|\overline{h}_\delta(x) - \overline{h}_\delta(-x)\|} - \overline{f}(x) \right\| \\ &= \frac{\left\| \overline{h}_\delta(x) - \overline{f}(x) - \overline{h}_\delta(-x) + \overline{f}(-x) + \Big(2 - \|\overline{h}_\delta(x) - \overline{h}_\delta(-x)\|\Big)\overline{f}(x) \right\|}{\|\overline{h}_\delta(x) - \overline{h}_\delta(-x)\|} \\ &\leq \frac{\|\overline{h}_\delta(x) - \overline{f}(x)\| + \|\overline{f}(-x) - \overline{h}_\delta(-x)\| + (2 - (2 - 2\delta))\|\overline{f}(x)\|}{2 - 2\delta} \\ &\leq \frac{4\delta}{2 - 2\delta} = \frac{2\delta}{1 - \delta} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Así pues, tomando ε suficientemente pequeño tendremos que para cada $x \in \mathbb{S}^n$ será $\overline{f}(x) \neq -\overline{\phi}_\varepsilon(x)$, y la aplicación

$$\overline{H}_t(x) = \frac{(1-t)\overline{f}(x) + t\overline{\phi}_\varepsilon(x)}{\|(1-t)\overline{f}(x) + t\overline{\phi}_\varepsilon(x)\|}$$

estará bien definida. Así tenemos una homotopía impar entre $\overline{f}$ y $\overline{f}_1 := \overline{\phi}_\varepsilon$, y sustituyendo $\overline{f}$ por $\overline{f}_1$, podemos suponer que $\overline{f}$ es diferenciable.

(2) *Supuesto que $\overline{f}$ es diferenciable, podemos suponer que tiene a $c := (0, \dots, 0, 1)$ y $-c$ como valores regulares.*

Sea $a \in H^+$ una valor regular de $\overline{f}$. Al ser $\overline{f}$ impar, se tiene que $-a \in H^-$ es también valor regular. Tomemos un entorno abierto y conexo V de a y c tal que $V \cap (-V) = \varnothing$. Sabemos que existe una difeotopía $\overline{F}_t$ tal que $\overline{F}_0(a) = a$, $\overline{F}_1(a) = c$ y la restricción $\overline{F}_t|_{\mathbb{S}^n \setminus V}$ es la identidad para todo $t \in [0,1]$. Definimos la aplicación

$$\overline{H}_t(x) := \begin{cases} \overline{F}_t(x) & \text{si} \quad x \in V \\ -\overline{F}_t(-x) & \text{si} \quad x \in -V \\ x & \text{si} \quad x \notin V \cup (-V). \end{cases}$$

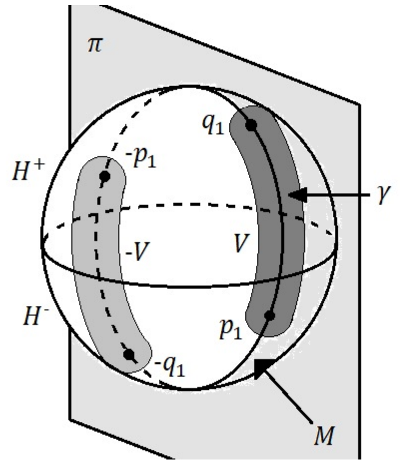
La aplicación $\overline{H}_t \circ \overline{f}$ es claramente una homotopía impar entre $\overline{f}$ y la aplicación $\overline{f}_2 := \overline{H}_1 \circ \overline{f}$, y esta última tiene a c (y por tanto a $-c$) como valores regulares. Así, podemos sustituir $\overline{f}$ por $\overline{f}_2$ para suponer que $\overline{f}$ tiene a c y $-c$ como valores regulares.

(3) *Supuesto que c y $-c$ son valores regulares de $\overline{f}$, podemos suponer que la preimagen de c está contenida en H^+ y la preimagen de $-c$ está contenida en H^-.*

Sean $\overline{f}^{-1}(c) := \{p_1, \dots, p_r\}$ y $\overline{f}^{-1}(-c) = \{-p_1, \dots, -p_r\}$, y supongamos que $\overline{f}^{-1}(c) \nsubseteq H^+$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p_1 \notin H^+$. Sea π un plano que contiene a la recta $L[p_1]$ y tal que $\pm p_j \notin \pi$ si $j \neq 1$, el cual existe por estar en dimensión mayor o igual que 2. Llamemos $M := \pi \cap \mathbb{S}^n$, que es una circunferencia. Tomamos un punto $q_1 \in M \cap H^+$ distinto de $-p_1$. Existe un entorno abierto y conexo V de p_1 y q_1 tal que $V \cap (-V) = \varnothing$ y tal que $\pm p_j \notin V$ si $j \neq 1$. En efecto, sea $\gamma \subset M$ el arco cerrado de circunferencia que une p_1 y q_1 y no contiene a $-p_1$. Obviamente $\pm p_j \notin \gamma$ si $j \neq 1$, por lo que la función $d : \gamma \to \mathbb{R}$ dada por $d(x) = \operatorname{dist}(x, \{\pm p_2, \dots, \pm p_r\})$ es continua y positiva. Por la compacidad de γ, existe $\varepsilon := \min_{x\in\gamma} d(x) > 0$. Se tiene que

$$V := \bigcup_{p\in\gamma} \Big(\mathbb{S}^n \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)\Big)$$

es un entorno abierto y conexo de p_1 y q_1 que no contiene a $\pm p_j$ si $j \neq 1$, y reduciéndolo si fuera necesario, podemos suponer que $V \cap (-V) = \varnothing$.

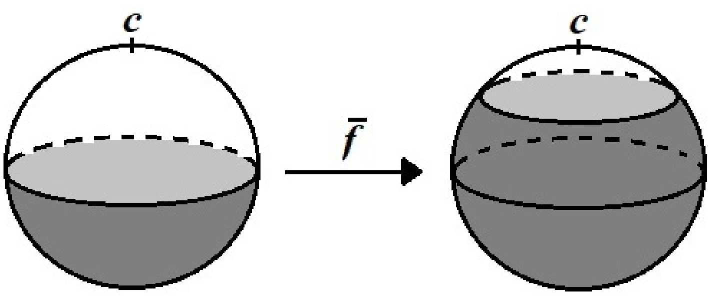


Al igual que en el paso anterior, podemos construir una difeotopía impar $\overline{H}_t$ que sea la identidad fuera de $V \cup (-V)$ y que mande p_1 a q_1 y $-p_1$ a $-q_1$, de forma que la aplicación $\overline{f} \circ \overline{H}_t$ es una homotopía impar entre $\overline{f}$ y la aplicación $\overline{f}_3 := \overline{f} \circ \overline{H}_1$, y esta última cumple que $\overline{f}_3^{-1}(c) = \{q_1, p_2, \dots, p_r\}$ tiene un punto menos en H^- que $\overline{f}^{-1}(c)$. Así pues, reiterando este proceso una cantidad finita de veces, acabamos encontrando una homotopía impar entre $\overline{f}$ y una aplicación tal que la preimagen de c está contenida en H^+ (y la de $-c$ en H^-). Así pues, si sustituimos $\overline{f}$ por $\overline{f}_3$, podemos suponer que $\overline{f}^{-1}(c) \subset H^+$ y $\overline{f}^{-1}(-c) \subset H^-$.

(4) *Supuesto $\overline{f}^{-1}(c) \subset H^+$, probamos que existe una aplicación diferenciable impar que conserva hemisferios a la que $\overline{f}$ es homótopa mediante una homotopía impar.*

Como $c \notin \overline{f}(H^-)$ y $-c \notin \overline{f}(H^+)$, existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que $f(H^-) \subset \{x_{n+1} < \varepsilon\}$ y $\overline{f}(H^+) \subset \{x_{n+1} > -\varepsilon\}$. Sea $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función meseta par tal que $\lambda|_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \equiv 0$ y $\lambda|_{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)} \equiv 1$. Definimos la aplicación $\overline{h} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por

$$\overline{h}(x) := \frac{(x', \lambda(x_{n+1})x_{n+1})}{\|(x', \lambda(x_{n+1})x_{n+1})\|},$$



donde $x = (x', x_{n+1})$. Esta aplicación es impar y cumple que $\overline{h}(x) \neq -x$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$, ya que si se diese la igualdad, se tendría que tener $x' = 0$, y por tanto $x_{n+1} = \pm 1$, es decir, $x = \pm c$. Pero $\lambda(\pm 1) = 1$, por lo que $\overline{h}(\pm c) = \pm c$. Por tanto, podemos definir la aplicación

$$\overline{H}_t(x) := \frac{t\overline{h}(x) + (1-t)x}{\|t\overline{h}(x) + (1-t)x\|},$$

que es una homotopía impar entre $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ y $\overline{h}$. Así, la composición $\overline{H}_t \circ \overline{f}$ es una homotopía impar entre $\overline{f}$ y $\overline{f}_4 := \overline{h} \circ \overline{f}$.

Veamos que $\overline{f}_4(H^+) \subset H^+$ y $\overline{f}_4(H^-) \subset H^-$. En efecto, sea $x \in H^+$. Entonces, escribiendo $\overline{f} = (\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_{n+1})$, se tiene que $\overline{f}_{n+1}(x) \geq -\varepsilon$, y tenemos dos posibilidades:

Si $\overline{f}_{n+1}(x) \geq 0$, entonces como sabemos que $\lambda(\overline{f}_{n+1}(x)) \geq 0$, se tiene que $(\overline{h} \circ \overline{f})_{n+1} = \lambda(\overline{f}_{n+1}(x))\overline{f}_{n+1}(x) \geq 0$, y $\overline{f}_4(x) \in H^+$.

Si $-\varepsilon \leq \overline{f}_{n+1}(x) \leq 0$, entonces $\lambda(\overline{f}_{n+1}(x)) = 0$, de forma que $(\overline{h} \circ \overline{f})_{n+1}(x) = \lambda(\overline{f}_{n+1}(x))\overline{f}_{n+1}(x) = 0$, y $\overline{f}_4(x) \in H^+$.

Análogamente se ve que $\overline{f}_4(H^-) \subset H^-$.

Este concluye la demostración. □

Pasamos ahora a probar que la restricción a $\mathbb{S}^{n-1}$ de una aplicación que conserva hemisferios tiene el mismo grado que la aplicación original. Para ello necesitaremos un importante resultado de la Teoría del Grado cuya demostración se puede encontrar en [OR, III.1.8].

Proposición 4.3 (Teorema del Borde)**.** Sea X una variedad compacta y orientada de dimensión n con borde Y y sea N una variedad orientada, conexa y sin borde de dimensión $n-1$. Sea $H : X \to N$ una aplicación diferenciable. Entonces

$$\deg(H|_Y) = 0.$$

Con este resultado se puede probar la siguiente proposición:

Proposición 4.4. Sea $n \geq 2$ y sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación que respeta hemisferios. Supongamos que $c := (0, \dots, 0, 1)$ es un valor regular de $\overline{f}$. Se tiene

$$\deg(\overline{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg \overline{f}.$$

Demostración. Como c es un valor regular de $\overline{f}$ con $\overline{f}^{-1}(c) := \{p_1, \ldots, p_r\}$, podemos tomar un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $B := \overline{B}_\varepsilon(c) \cap \mathbb{S}^n$ no corte al ecuador y $\overline{f}^{-1}(B)$ sea una unión disjunta de entornos B_i de los p_i, de forma que cada restricción

$$\overline{f}|_{B_i} : B_i \to B$$

es un difeomorfismo. Nótese que además los B_i no cortan al ecuador, pues si lo hiciesen, como $\overline{f}(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$, B también lo cortaría.

Sean $S_i := \partial B_i$ y $S := \partial B$. Vamos a ver que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ es

$$\deg(\overline{f}|_{S_i}) = \operatorname{sign}_{p_i} \overline{f},$$

donde consideramos las orientaciones de S_i y S como bordes de B_i y B respectivamente. Para ello, sea $a \in S$ un valor regular de $\overline{f}|_{S_i}$. Como $\overline{f}|_{B_i}$ es un difeomorfismo, $(\overline{f}|_{S_i})^{-1}(a)$ consta de un único punto al que llamamos b_i. Basta por tanto comprobar que $\overline{f}$ conserva la orientación en p_i si y solo si $\overline{f}|_{S_i}$ lo hace en b_i. Sea $v_1 \in T_{b_i}B_i$ un vector saliente, y tomemos una base positiva $\{v_2, \ldots, v_n\}$ de $T_{b_i}S_i$, es decir, tal que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base positiva de $T_{b_i}B_i$. Si probamos que $d_{b_i}\overline{f}(v_1)$ es un vector saliente se tendrá que $\{d_{b_i}\overline{f}(v_1), d_{b_i}\overline{f}(v_2), \ldots, d_{b_i}\overline{f}(v_n)\}$ es una base positiva de T_aB si y solo si

$$\{d_{b_i}\overline{f}(v_2), \ldots, d_{b_i}\overline{f}(v_n)\} = \{d_{b_i}(\overline{f}|_{S_i})(v_2), \ldots, d_{b_i}(\overline{f}|_{S_i})(v_n)\}$$

lo es de T_aS, es decir, que $\overline{f}$ conservará la orientación en b_i si y solo si lo hace $\overline{f}|_{S_i}$. Como B_i es conexo y $\overline{f}$ es un difeomorfismo, $\overline{f}$ conserva la orientación en p_i si y solo si lo hace en b_i, luego esto concluiría el argumento.

Veamos por tanto que $d_{b_i}\overline{f}(v_1)$ es saliente. En vista de [ORR, I.6.7], basta ver que existen un abierto $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$, un entorno $U \subset B$ de a y una parametrización de la forma $\varphi : [0, \delta) \times A \to U$ tal que $d_{b_i}\overline{f}(v_1) = d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ para ciertos $t_1, t_2, \ldots, t_n \in R$ con $t_i < 0$. Pero la misma proposición nos asegura que al ser v_1 saliente, existe una parametrización $\psi : [0, \delta) \times A \to V$ para cierto entorno $V \subset B_i$ de b_i tal que $v_1 = d_{\psi^{-1}(b_i)}\psi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ para $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ y $t_1 < 0$, de forma que, al ser $\overline{f}|_{B_i}$ un difeomorfismo,

$$\varphi := \overline{f} \circ \psi : [0, \delta) \times A \to U := \overline{f}(V)$$

es una parametrización que cumple

$$\begin{aligned} d_{b_i}\overline{f}(v_1) &= d_{b_1}\overline{f} \circ d_{\psi^{-1}(b_i)}\psi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = d_{\psi^{-1}(b_i)}(\overline{f} \circ \psi)(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ &= d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

con $t_1 < 0$, luego es la parametrización buscada.

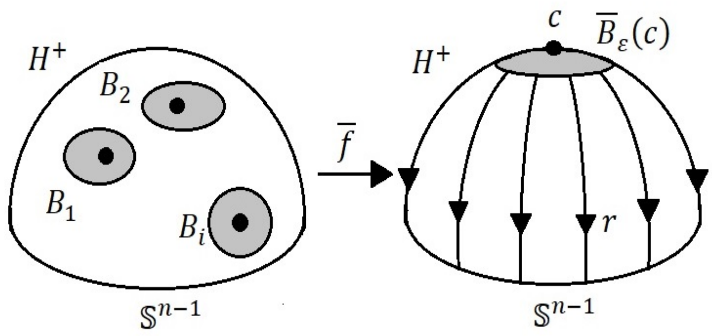
Una vez visto que $\deg(\overline{f}|_{S_i}) = \operatorname{sign}_{p_i} \overline{f}$, definamos

$$X := H^+ \setminus \left(\bigcup_{i=1}^r \mathring{B}_i \right),$$

que es una variedad compacta orientada y conexa de dimensión n con borde

$$Y = \mathbb{S}^{n-1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^r S_i \right),$$

donde $\mathbb{S}^{n-1}$ y los S_i son disjuntos dos a dos por serlo $\mathbb{S}^{n-1}$ y los B_i.



Sea $r : H^+ \to \mathbb{S}^{n-1}$ la aplicación dada por $r(x', x_{n+1}) = \frac{(x',0)}{\|(x',0)\|}$. La aplicación $r \circ (\overline{f}|_X) : X \to \mathbb{S}^{n-1}$ está en las condiciones de la Proposición 4.3, por lo que

$$\deg(r \circ \overline{f})|_Y = \deg(r \circ \overline{f}|_X)\,|_Y = 0.$$

Vamos a calcular este grado explícitamente. Sea $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ un valor regular de $(r \circ \overline{f})|_Y$. Existe un único $b \in S$ tal que $r(b) = a$. Sean $(\overline{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}})^{-1}(a) = \{q_1, \dots, q_s\}$ y $\overline{f}^{-1}(b) = \{b_1, \dots, b_l\}$. Se tiene

$$\Big((r \circ \overline{f})|_Y\Big)^{-1}(a) = \{q_1, \dots, q_s\} \cup \{b_1, \dots, b_l\}.$$

Observamos que la orientación de $\mathbb{S}^{n-1}$ como parte del borde de X coincide con su orientación como borde de de H^+, mientras que la orientación de cada S_i como parte del borde de X_i es la opuesta a la orientación como borde de B_i. De todo esto deducimos que

$$0 = \deg(r \circ \overline{f})|_Y = \deg(\overline{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) - \sum_{i=1}^{r} \deg\Big((r \circ \overline{f})|_{S_i}\Big).$$

Por otra parte, $r|_S : S \to \mathbb{S}^{n-1}$ es un difeomorfismo que conserva la orientación, ya que no es más que la composición de una proyección ortogonal con una homotopía. Por tanto $\deg\Big((r \circ \overline{f})|_{S_i}\Big) = \deg(\overline{f}|_{S_i})$ para cada $i = 1, \dots, r$, y concluimos que

$$\deg(\overline{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \sum_{i=1}^{r} \deg(\overline{f}|_{S_i}) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{p_i} \overline{f} = \deg \overline{f}.$$

□

Con todo esto ya podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 4.5. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sean $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dos aplicaciones impares con $\deg \overline{f} = \deg \overline{g}$. Entonces existe una homotopía impar entre ellas.*

Demostración. Como habíamos dicho, vamos a demostrarlo por inducción.

En el caso $n = 1$ estamos tratando con circunferencias. Es sabido que el recubridor universal de $\mathbb{S}^1$ es $(\mathbb{R}, \varphi)$, siendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la aplicación dada por $s \mapsto (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s)$.

Sean $\widehat{f}, \widehat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ levantamientos de $\overline{f}$ y $\overline{g}$, es decir, aplicaciones continuas que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\widehat{f},\widehat{g}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "\overline{f},\overline{g}"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Dado $s \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\varphi(\widehat{f}(s+1)) = \overline{f}(\varphi(s+1)) = \overline{f}(\varphi(s)) = \varphi(\widehat{f}(s)),$$

e igualmente $\varphi(\widehat{g}(s+1)) = \varphi(\widehat{g}(s))$. Por tanto $\widehat{f}(s+1) = \widehat{f}(s)+d$ y $\widehat{g}(s+1) = \widehat{g}(s)+d'$ para ciertos $d, d' \in \mathbb{Z}$, los cuales son independientes del $s \in \mathbb{R}$ (esto último se puede ver mediante un argumento estándar de conexión). Vamos a ver que de hecho $d = d' = \deg \overline{f} = \deg \overline{g}$. Lo hacemos para $\overline{f}$, pues para $\overline{g}$ es análogo.

Consideremos la aplicación $\widehat{h}_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\widehat{h}_d(s) = ds$. La aplicación $\widehat{H}_t(s) := t\widehat{f}(s) + (1-t)ds$ es una homotopía entre $\widehat{f}$ y $\widehat{h}_d$. Además, observamos que para todo $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \widehat{H}_t(s+1) &= t\widehat{f}(s+1) + (1-t)d(s+1) = t(\widehat{f}(s) + d) + (1-t)(ds+d) \\ &= t\widehat{f}(s) + (1-t)ds + d = \widehat{H}_t(s) + d, \end{aligned}$$

de forma que la aplicación $\overline{H}_t(\varphi(s)) = \varphi(\widehat{H}_t(s))$ está bien definida. Para ver que es continua, consideremos una sucesión convergente $\{(t_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1] \times \mathbb{S}^n$ con límite (t_0, x_0). Tomemos $s_0 \in \varphi^{-1}(x_0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $s_n \in \left[s_0 - \frac{1}{2}, s_0 + \frac{1}{2}\right)$ tal que $x_n = \varphi(s_n)$. Como la aplicación $\mathrm{id}_I \times\varphi$ es un homeomorfismo local, la sucesión $\{(t_n, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (t_0, s_0). De esta forma se tiene

$$\overline{H}_{t_n}(x_n) = \overline{H}_{t_n}(\varphi(s_n)) = \varphi(\widehat{H}_{t_n}(s_n)),$$

y por la continuidad de $\widehat{H}$ y de φ, esta sucesión converge a

$$\varphi(\widehat{H}_{t_0}(s_0)) = \overline{H}_{t_0}(\varphi(s_0)) = \overline{H}_{t_0}(x_0).$$

Vista la continuidad, $\overline{H}$ es una homotopía entre $\overline{f}$ y la aplicación $\overline{h}_d$ dada por

$$\overline{h}_d(\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s) = \overline{h}_d(\varphi(s)) = \varphi(\widehat{h}(s)) = (\cos 2\pi ds, \operatorname{sen} 2\pi ds),$$

de forma que $\deg \overline{f} = \deg \overline{h}_d$, y este último grado es precisamente d.

Por otro lado, por la imparidad de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ se tiene que para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(\widehat{f}\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\right) = \overline{f}\left(\varphi\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\right) = \overline{f}(-\varphi(s)) = -\overline{f}(\varphi(s)) = -\varphi(\widehat{f}(s)),$$

de lo que deducimos que $\widehat{f}\left(s + \frac{1}{2}\right) = \widehat{f}(s) + k + \frac{1}{2}$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, y de igual forma $\widehat{g}\left(s + \frac{1}{2}\right) = \widehat{g}(s) + l + \frac{1}{2}$ para cierto $l \in \mathbb{Z}$. Al igual que antes, k y l no dependen del $s \in \mathbb{R}$. Se tiene por tanto

$$\widehat{f}(s) + d = \widehat{f}(s+1) = \widehat{f}\left(s + \tfrac{1}{2}\right) + k + \tfrac{1}{2} = \widehat{f}(s) + 2k + 1,$$

y $\widehat{g}(s) + d = \widehat{g}(s) + 2l + 1$, y concluimos que $k = l = \frac{d-1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Definimos la homotopía $\widehat{F}_t(s) = (1-t)\widehat{f}(s) + t\widehat{g}(s)$, que cumple $\widehat{F}_t(s+1) = \widehat{F}_t(s) + d$ para todo $t \in [0,1]$, por lo que al igual que antes, la aplicación $\overline{F}_t(\varphi(s)) = \varphi(\widehat{F}(s))$ es una homotopía, esta vez entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$. Además, observamos que

$$\widehat{F}_t\left(s+\tfrac{1}{2}\right) = \widehat{F}_t(s) + (1-t)\left(k+\tfrac{1}{2}\right) + t\left(l+\tfrac{1}{2}\right) = \widehat{F}_t(s) + \tfrac{d-1}{2} + \tfrac{1}{2},$$

por lo que

$$\begin{aligned}\overline{F}_t(-\varphi(s)) &= \overline{F}_t\left(\varphi\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\right) = \varphi\left(\widehat{F}_t\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\right)\\ &= \varphi\left(\widehat{F}_t(s) + \tfrac{d-1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = -\varphi(\widehat{F}_t(s)) = -\overline{F}_t(\varphi(s)),\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado que $\frac{d-1}{2} \in \mathbb{Z}$. Por tanto $\overline{F}$ es una homotopía impar.

Esto concluye el caso $n = 1$.

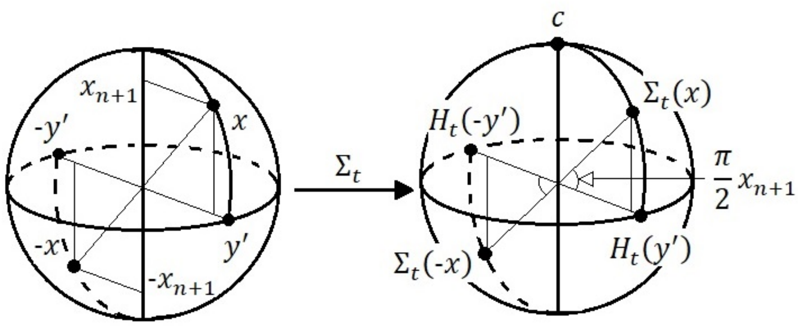
Sea ahora $n \geq 2$ y supongamos que el resultado se cumple en dimensión $n-1$. Veamos que se cumple en dimensión n. Sean pues $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ aplicaciones continuas e impares del mismo grado. Por el Lema 4.2, podemos suponer que tanto $\overline{f}$ como $\overline{g}$ son aplicaciones diferenciables que preservan hemisferios, de forma que la Proposición 4.4 nos asegura que

$$\deg(\overline{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg \overline{f} = \deg \overline{g} = \deg(\overline{g}|_{\mathbb{S}^{n-1}}),$$

y por hipótesis de inducción, existe una homotopía impar $H : I \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ entre $\overline{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ y $\overline{g}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Definimos la *suspensión* de H como

$$\Sigma_t(x) := \begin{cases} c & \text{si} \quad x = c \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x_{n+1}\right)c + \cos\left(\frac{\pi}{2}x_{n+1}\right)H_t(y') & \text{si} \quad x \neq \pm c \\ -c & \text{si} \quad x = -c, \end{cases}$$

donde $y'(x) = \frac{(x',0)}{\|(x',0)\|}$.



Observamos que esta aplicación es continua, pues

$$\begin{cases} \lim_{(t,x)\to(t_0,c)} \Sigma_t(x) = c = \Sigma_{t_0}(c) \\ \lim_{(t,x)\to(t_0,-c)} \Sigma_t(x) = -c = \Sigma_{t_0}(-c) \end{cases}$$

para todo $t_0 \in [0,1]$. Además, se tiene que $\Sigma_t(-x) = -\Sigma_t(x)$ para todo $t \in [0,1]$ y todo $s \in \mathbb{S}^n$. Por tanto, Σ es una homotopía impar entre las aplicaciones

$$\Sigma_0(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x_{n+1}\right)c + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_{n+1}\right)\overline{f}(y')$$

y

$$\Sigma_1(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x_{n+1}\right)c + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_{n+1}\right)\overline{g}(y').$$

Además, todas las aplicaciones Σ_t conservan hemisferios, de lo que se deduce que

$$\Sigma_0(x) \neq -\overline{f}(x) \ \text{ y } \ \Sigma_1(x) \neq -\overline{g}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{S}^n$. En efecto, si existiese un $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $\Sigma_0(x) = -\overline{f}(x)$, se tendría $s \in \mathbb{S}^{n-1}$, pero $\Sigma_0|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \overline{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Igualmente ocurre con $\overline{g}$ y Σ_1. Deducimos por tanto que las aplicaciones

$$\overline{F}_t(x) = \frac{(1-t)\overline{f}(x) + t\Sigma_0(x)}{\|(1-t)\overline{f}(x) + t\Sigma_0(x)\|} \quad \text{y} \quad \overline{G}_t(x) = \frac{(1-t)\overline{g}(x) + t\Sigma_1(x)}{\|(1-t)\overline{g}(x) + t\Sigma_0(x)\|}$$

son homotopías impares bien definidas entre $\overline{f}$ y Σ_0 y entre $\overline{g}$ y Σ_1 respectivamente.

En conclusión, concatenando $\overline{F}, \Sigma$ y $\overline{G}$ obtenemos una homotopía impar entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$. □

5. Homotopía de aplicaciones pares

Pasamos ahora a estudiar la existencia de homotopías pares entre aplicaciones pares. La estrategia que vamos a emplear para clasificar el tipo de homotopía par de una aplicación par $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es estudiar el tipo de homotopía de la aplicación $\widetilde{f} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por $\widetilde{f}(\pi(x)) = \overline{f}(x)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \\ \mathbb{P}^n \arrow[ur, "\widetilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

A diferencia de lo que pasa con las aplicaciones impares, no siempre es posible encontrar homotopías pares entre aplicaciones pares del mismo grado. La razón tiene que ver con la no orientabilidad de $\mathbb{P}^n$ cuando n es par. Vamos a verlo con un ejemplo.

Ejemplo 5.1. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par. Consideremos la aplicación

$$\overline{h} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (2x_1^2 - 1, 2x_1x_2, \ldots, 2x_1x_{n+1}).$$

Como $\overline{h}$ es claramente diferenciable, podemos estudiar su grado a través sus valores regulares. Vamos a ver que $c := (0, \ldots, 0, 1)$ es uno de ellos. En efecto, se tiene que $\overline{h}^{-1}(c) = \{a, -a\}$, siendo $a := (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. La matriz Jacobiana de $\overline{h}$ en un punto x es

$$J_x\overline{h} = \left(\begin{array}{c|c} 4x_1 & 2x_2 \ \ldots \ 2x_{n+1} \\ \hline 0 & 2x_1 \operatorname{Id}_n \end{array}\right),$$

de forma que $\det(J_a\overline{h}) = 2^{\frac{n-3}{2}} > 0$ y $\det(J_{-a}\overline{h}) = (-1)^{n+1}2^{\frac{n-3}{2}} = -2^{\frac{n-3}{2}} < 0$, pues n es par. Como

$$J_a\overline{h}(a) = J_{-a}\overline{h}(-a) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es saliente en c, un razonamiento análogo al que hicimos en la demostración del Teorema 3.1 para ver que las aplicaciones $\overline{f}_k$ conservaban la orientación, muestra que $\overline{h}$ conserva la orientación en a y la invierte en $-a$, por lo que $\operatorname{sign}_a \overline{h} = 1$ y $\operatorname{sign}_{-a} \overline{h} = -1$. Así, $\deg \overline{h} = 1 - 1 = 0$, por lo que $\overline{h}$ es nulhomótopa.

Sin embargo, no existe ninguna homotopía par $\overline{H} : I \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ entre $\overline{h}$ y una aplicación constante c_{y_0}. En efecto, si existiese dicha homotopía, la aplicación $\widetilde{H} : I \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por $\widetilde{H}(\pi(x)) = \overline{H}(x)$ estaría bien definida, y por la propiedad universal del cociente, sería continua. Como $\widetilde{H}_0 = \widetilde{h}$ y $\widetilde{H}_1 \equiv c_{y_0}$ la aplicación $\widetilde{h} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$, $\pi(x) \mapsto \overline{h}(x)$ sería nulhomótopa. Pero $\deg_2 \widetilde{h} = 1$, pues $c \in \mathbb{S}^n$ es un valor regular de $\widetilde{h}$ (por serlo de $\overline{h}$ y ser π un difeomorfismo local), y $\pi^{-1}(c) = \{(1 : 0 : \ldots : 0 : 1)\}$. Como $\mathbb{P}^n$ no es orientable, el Teorema de Brouwer-Hopf nos asegura que $\widetilde{h}$ no es nulhomótopa, en contra de lo que acabamos de probar.

Este ejemplo muestra perfectamente cuál es el problema: aunque dos aplicaciones pares $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tengan el mismo grado, puede ocurrir que las aplicaciones $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ a las que dan lugar no tengan el mismo grado módulo 2.

En realidad, el ejemplo anterior describe completamente la situación:

Teorema 5.2. *Sea $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ par. Entonces toda aplicación par $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es homótopa mediante una homotopía par o bien a la aplicación $\overline{h}$ definida en el ejemplo anterior o bien a una aplicación constante.*

Demostración. Como $\overline{f}$ es par, consideramos la aplicación $\widetilde{f}$ dada por $\widetilde{f} \circ \pi = \overline{f}$. Hay dos posibilidades: si $\deg_2 \widetilde{f} = 0$, entonces existe una homotopía $\widetilde{H} : I \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ entre $\widetilde{f}$ y cualquier aplicación constante c_{y_0}, mientras que si $\deg_2 \widetilde{f} = 1$, entonces tenemos una homotopía $\widetilde{H}$ entre $\widetilde{f}$ y $\widetilde{h}$. En cualquier caso, la aplicación $\overline{H} = \widetilde{H} \circ \pi : I \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es una homotopía que es claramente par entre $\overline{f}$ y c_{y_0} en el primer caso y entre $\overline{f}$ y $\overline{h}$ en el segundo. □

Aunque en dimensión par la situación no es tan buena como nos gustaría, en dimensión impar el grado vuelve a ser suficiente para clasificar las aplicaciones pares salvo homotopía par.

Teorema 5.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Si $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ son dos aplicaciones pares continuas tales que $\deg \overline{f} = \deg \overline{g}$, entonces existe una homotopía par entre ellos.*

Demostración. Sean $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ las aplicaciones asociadas a $\overline{f}$ y $\overline{g}$ respectivamente. Como ya hemos comentado para el caso de dimensión par, si vemos que existe una homotopía $\widetilde{H}$ entre $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$, se tendrá que la aplicación $\overline{H} = \widetilde{H} \circ \pi$ es una homotopía par entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$. Probemos por tanto la existencia de la homotopía $\widetilde{H}$.

Gracias al Teorema de Brouwer-Hopf, es suficiente con probar que $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ tienen el mismo grado. Para ello, vamos a ver que dada una aplicación continua par cualquiera $\overline{h} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, se tiene $\deg \overline{h} = 2 \deg \widetilde{h}$.

En primer lugar, observamos que podemos suponer que $\overline{h}$ es diferenciable, pues al igual que en el paso 1 de la demostración de 4.2, dado $\varepsilon > 0$, si llamamos $\delta := \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, podemos tomar una aplicación diferenciable $\overline{h}_\delta : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tal que $\|\overline{h}_\delta - \overline{h}\| < \delta$, de forma que la aplicación

$$\overline{\phi}_\varepsilon(x) := \frac{\overline{h}_\delta(x) + \overline{h}_\delta(-x)}{\|\overline{h}_\delta(x) + \overline{h}_\delta(-x)\|}$$

es par y diferenciable y cumple

$$\|\overline{\phi}_\delta(x) - \overline{h}(x)\| \leq \varepsilon.$$

Así pues, tomando ε suficientemente pequeño como para que $\overline{\phi}_\delta(x) \neq \overline{h}(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$, tendremos que $\deg \overline{h} = \deg \overline{\phi}_\varepsilon$. Es más, la aplicación

$$\overline{H}_t(x) = \frac{(1-t)\overline{h}(x) + t\overline{\phi}_\varepsilon(x)}{\|(1-t)\overline{h}(x) + t\overline{\phi}_\varepsilon(x)\|}$$

es una homotopía par entre $\overline{h}$ y $\overline{\phi}_\varepsilon$, luego desciende a una homotopía entre $\widetilde{h}$ y $\widetilde{\phi}_\varepsilon$, de forma que $\deg \widetilde{h} = \deg \widetilde{\phi}_\varepsilon$.

Ya supuesto que $\overline{h}$ es diferenciable, tomemos un valor regular $c \in \mathbb{S}^n$ de $\overline{h}$. Como π es difeomorfismo local, c es también valor regular de $\widetilde{h}$. Se tiene que $\overline{h}^{-1}(c) = \{x_1, \ldots, x_r, -x_1, \ldots, -x_r\}$ para ciertos $x_i \in \mathbb{S}^n$, y $\widetilde{h}^{-1}(c) = \{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)\}$. Así,

$$\deg \overline{h} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{h} + \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{-x_i} \overline{h} = 2 \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{h},$$

donde la última igualdad se sigue de que $-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ conserva la orientación por ser n impar. Como $\overline{h} = \widetilde{h} \circ \pi$ y π conserva la orientación, se tiene $\operatorname{sign}_{\pi(x_i)} \widetilde{h} = \operatorname{sign}_{x_i} \overline{h}$, luego

$$\deg \widetilde{h} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{\pi(x_i)} \widetilde{h} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{h} = \frac{1}{2} \deg \overline{h}.$$

Aplicando esto a $\overline{f}$ y $\overline{g}$ concluimos que

$$\deg \widetilde{f} = \frac{1}{2} \deg \overline{f} = \frac{1}{2} \deg \overline{g} = \deg \widetilde{g},$$

como queríamos. $\square$

6. Aplicaciones $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, caso orientable

Estamos ya en condiciones de probar la clasificación del Teorema 2.7. Comenzamos con el caso orientable.

Lema 6.1. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Sea $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ una aplicación continua y sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un levantamiento suyo. Entonces $\deg \overline{f} = \deg f$.

Demostración. Como siempre, podemos suponer que tanto f como $\overline{f}$ son diferenciables, por lo que podemos calcular su grado a través de sus valores regulares.

Comenzamos observando que dado $x \in \mathbb{S}^n$, como π conserva la orientación en todo punto y $f \circ \pi = \pi \circ \overline{f}$, se tiene

$$\operatorname{sign}_x \overline{f} = \operatorname{sign}_{\overline{f}(x)} \pi \operatorname{sign}_x \overline{f} = \operatorname{sign}_{\pi(x)} f \operatorname{sign}_x \pi = \operatorname{sign}_{\pi(x)} f.$$

Sea $\overline{c} \in \mathbb{P}^n$ un valor regular de f, y sea $\pi^{-1}(\overline{c}) = \{c, -c\}$. Sabemos que al ser π difeomorfismo local, tanto c como $-c$ son valores regulares de $\overline{f}$. Además se tiene $f^{-1}(\overline{c}) = \pi\left(\overline{f}^{-1}(c) \cup \overline{f}^{-1}(-c)\right)$. Distinguimos ahora dos casos.

Si $\overline{f}$ es impar, sea $\overline{f}^{-1}(c) = \{x_1, \dots, x_r\}$, de forma que $\overline{f}^{-1}(-c) = \{-x_1, \dots, -x_r\}$ y $f^{-1}(\overline{c}) = \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_r)\}$. Se tiene

$$\deg \overline{f} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{\pi(x_i)} f = \deg f.$$

Si ahora $\overline{f}$ es par, será

$$\begin{cases} \overline{f}^{-1}(c) = \{x_1, \dots, x_r\} \cup \{-x_1, \dots, -x_r\}, \\ \overline{f}^{-1}(-c) = \{y_1, \dots, y_s\} \cup \{-y_1, \dots, -y_s\}, \end{cases}$$

de forma que

$$f^{-1}(\overline{c}) = \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_r), \pi(y_1), \dots, \pi(y_s)\}.$$

Como $\overline{f}$ es par, se tiene que $\overline{f} = \overline{f} \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{S}^n})$ y sabemos que la aplicación $-\operatorname{id}_{\mathbb{S}^n}$ conserva la orientación por estar en dimensión impar. Por tanto, tenemos que

$$\operatorname{sign}_{x_i} \overline{f} = \operatorname{sign}_{x_i}(\overline{f} \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{S}^n})) = \operatorname{sign}_{-x_i} \overline{f} \operatorname{sign}_{x_i}(-\operatorname{id}_{\mathbb{S}^n}) = \operatorname{sign}_{-x_i} \overline{f}.$$

En consecuencia, si calculamos el grado de $\overline{f}$ usando el valor regular c obtenemos

$$\deg \overline{f} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f} + \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{-x_i} \overline{f} = 2 \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f},$$

mientras que si lo hacemos usando $-c$, resulta $\deg \overline{f} = 2 \sum_{j=1}^{s} \operatorname{sign}_{y_j} \overline{f}$. Concluimos por tanto que

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f} = \sum_{j=1}^{s} \operatorname{sign}_{y_j} \overline{f},$$

Así

$$\begin{aligned}\deg f &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{\pi(x_i)} f + \sum_{j=1}^{s} \operatorname{sign}_{\pi(y_j)} f = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f} + \sum_{j=1}^{s} \operatorname{sign}_{y_j} \overline{f} \\ &= 2\sum_{i=1}^{r} \operatorname{sign}_{x_i} \overline{f} = \deg \overline{f}.\end{aligned}$$

□

Teorema 6.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ impar, la aplicación*

$$\deg : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \to \mathbb{Z}, \quad [f] \mapsto \deg f$$

es una biyección.

Demostración. En primer lugar observamos que la aplicación está bien definida, pues por la invarianza por homotopía del grado (ver [ORR, 5.3]), este no depende del representante de la clase de homotopía escogido.

Para ver la inyectividad, sean $f, g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ dos aplicaciones continuas con el mismo grado y sean $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ levantamientos suyos. Sabemos que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son aplicaciones impares o pares, y por el lema anterior, que tienen el mismo grado. Por tanto, a la vista del Teorema 2.8 y la Proposición 2.9, $\overline{f}$ y $\overline{g}$ han de ser ambas impares o ambas pares. Así, los Teoremas 4.5 y 5.3 nos aseguran la existencia de una homotopía impar o par (según corresponda) entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$, que por la Proposición 2.6 desciende a una homotopía entre f y g.

Por último vemos la sobreyectividad. Dado $k \in \mathbb{Z}$, sabemos por los Teoremas 3.1 y 3.2 que existe una aplicación continua impar o par (según la paridad de k) $\overline{f}_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grado k. Por la Proposición 2.2, esta aplicación desciende a una aplicación continua $f_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, que por el lema anterior tiene grado k, tal y como queríamos. □

7. Aplicaciones $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, caso no orientable

Acabamos nuestra clasificación con el caso de dimensión par. Recordemos que en este caso debíamos considerar los conjuntos

$$\begin{aligned}[][\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_0 &:= \{[f] \in [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \mid f_* = 0\} \\ [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1 &:= \{[f] \in [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \mid f_* \neq 0\}\end{aligned} \quad ,$$

que cumplen $[\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] = [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n_0] \cup [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1$.

Comenzamos con un lema previo.

Lema 7.1. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par. Sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación diferenciable par. Consideremos la aplicación $\widetilde{f} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ que introdujimos en la Sección 5 y que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \\ \mathbb{P}^n \arrow[ur, "\widetilde{f}"] & \end{tikzcd}.$$

Sea $c \in \mathbb{S}^n$ un valor regular de $\overline{f}$. Se tiene que $\frac{1}{2}\#\overline{f}^{-1}(c) \mod 2 = \deg_2 \widetilde{f}$.

Demostración. Basta observar que al ser π difeomorfismo local, c es un valor regular de $\widetilde{f}$, y si

$$\overline{f}^{-1}(c) = \{x_1, \ldots, x_r, -x_1, \ldots, -x_r\},$$

entonces $\widetilde{f}^{-1}(c) = \{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)\}$, de forma que $\#\widetilde{f}^{-1}(c) = \frac{1}{2}\#\overline{f}^{-1}(c)$. Así,

$$\deg_2 \widetilde{f} = \#\widetilde{f}^{-1}(c) \mod 2 = \frac{1}{2}\#\overline{f}^{-1}(c) \mod 2.$$

□

Ahora podemos probar el teorema de clasificación.

Teorema 7.2. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par. Las aplicaciones siguientes son biyectivas:*

$$\begin{aligned} &\deg_4 : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_0 \to \mathbb{Z}_2, \qquad [f] \mapsto \frac{1}{2}\#\overline{f}^{-1}(c) \mod 2 \\ &|\widetilde{\deg}| : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1 \to 2\mathbb{N}+1, \ [f] \mapsto |\deg \overline{f}| \end{aligned}$$

donde f es un representante diferenciable de $[f]$ y $c \in \mathbb{S}^n$ es un valor regular de su levantamiento $\overline{f}$.

Demostración. Comenzamos con la aplicación $\deg_4 : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_0 \to \mathbb{Z}_2$. Lo primero que observamos es que está bien definida. Para ello, sean $f, g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ dos aplicaciones diferenciables homótopas con $f_* = g_* = 0$. Sabemos por la propiedad de levantamiento de homotopías que existen dos levantamientos $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de f y g que son homótopos. Por la Proposición 2.4, sabemos que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son pares, luego inducen aplicaciones $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$. El Teorema 5.2 nos asegura que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son homótopas mediante una homotopía par a la aplicación $\overline{h}$ del Ejemplo 5.1 o a una aplicación constante c_{y_0}. Como no existe ninguna homotopía par entre $\overline{h}$ y c_{y_0}, $\overline{f}$ y $\overline{g}$ han de ser homótopas mediante una homotopía par ambas a $\overline{h}$ o ambas a c_{y_0}. Esto quiere decir que las aplicaciones $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son ambas homótopas a la aplicación $\widetilde{h}$ inducida por $\overline{h}$ o ambas homótopas a c_{y_0}. En cualquier caso, $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son homótopas entre sí. Así pues, si tomamos un valor regular $c \in \mathbb{S}^n$ de $\overline{f}$ y $\overline{g}$, el lema anterior y la invarianza por homotopías del grado nos aseguran que

$$\frac{1}{2}\#\overline{f}^{-1}(c) \mod 2 = \deg_2 \widetilde{f} = \deg_2 \widetilde{g} = \frac{1}{2}\#\overline{g}^{-1}(c) \mod 2.$$

Pasemos a la inyectividad. Supongamos que $f, g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ son aplicaciones diferenciables tales que $\deg_4[f] = \deg_4[g]$. Sean $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ levantamientos suyos y sea

$c \in \mathbb{S}^n$ un valor regular de ambos. Sean $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ las aplicaciones asociadas a $\overline{f}$ y $\overline{g}$ respectivamente. Como

$$\deg_2 \widetilde{f} = \frac{1}{2}\#\overline{f}^{-1}(c) \mod 2 = \deg_4[f] = \deg_4[g] = \frac{1}{2}\#\overline{g}^{-1}(c) \mod 2 = \deg_2 \widetilde{g},$$

se tiene que o bien son $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ ambas homótopas a $\widetilde{h}$ o bien son ambas homótopas a c_{y_0}, de forma que existen homotopías pares o bien entre $\overline{f}$ y $\overline{h}$ y entre $\overline{g}$ y $\overline{h}$, o bien entre $\overline{f}$ y c_{y_0} y entre $\overline{g}$ y c_{y_0}. En cualquier caso, concatenando las homotopías, obtenemos una homotopía par entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$, que por la Proposición 2.6, desciende a una homotopía entre f y g.

Por último, para la sobreyectividad basta observar que si $h : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ es la aplicación descendida de $\overline{h}$, entonces $\deg_4[h] = 1$, mientras que para cualquier $\pi(y_0) \in \mathbb{P}^n$, la aplicación constante $c_{\pi(y_0)}$ cumple que $\deg_4[c_{\pi(y_0)}] = 0$.

Pasamos ahora a la aplicación $\widetilde{|\deg|} : [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1 \to 2\mathbb{N} + 1$. De nuevo la aplicación está bien definida, pues si $f, g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ son aplicaciones continuas homótopas entre sí y $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ son levantamientos suyos, entonces existe, por la propiedad de levantamiento de homotopías, una homotopía o bien entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$, o bien entre $\overline{f}$ y $-\overline{g}$ (obsérvese que $\overline{g}$ y $-\overline{g}$ son los únicos levantamientos de g). En el primer caso, la invarianza por homotopía del grado nos asegura que $\deg \overline{f} = \deg \overline{g}$, mientras que en el segundo caso tenemos $\deg \overline{f} = \deg(-\overline{g}) = -\deg \overline{g}$, donde la última igualdad es por estar en dimensión par. En cualquier caso, se tiene $\widetilde{|\deg|}([f]) = |\deg \overline{f}| = |\deg \overline{g}| = \widetilde{|\deg|}([g])$. Por otro lado, la Proposición 2.4 nos asegura que los levantamientos de aplicaciones cuya clase de homotopía está en $[\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]_1$ son impares, y por el Teorema de Borsuk-Ulam 2.8 los grados de estos levantamientos son también impares, de forma que la imagen de $\widetilde{|\deg|}$ está efectivamente contenida en $2\mathbb{N} + 1$.

Para la inyectividad, sean $f, g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ dos aplicaciones continuas tales que $|\deg \overline{f}| = |\deg \overline{g}|$ para dos levantamientos suyos $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Se tiene por tanto que $\deg \overline{f} = \deg \overline{g}$ ó $\deg \overline{f} = -\deg \overline{g} = \deg(-\overline{g})$. Como sabemos que $\overline{f}, \overline{g}$ y $-\overline{g}$ son todas aplicaciones impares por ser levantamientos de aplicaciones en $\mathbb{P}^n$ cuyo homomorfismo inducido en el grupo fundamental es no trivial, el Teorema 4.5 nos asegura la existencia de una homotopía $\overline{H} : [0, 1] \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ entre $\overline{f}$ y $\overline{g}$ o entre $\overline{f}$ y $-\overline{g}$ según corresponda. En ambos casos, la Proposición 2.6 nos da una homotopía $H : [0, 1] \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ entre f y g.

Acabamos con la sobreyectividad. Dado $k \in 2\mathbb{N} + 1$, por el Teorema 3.1 existe una aplicación impar $\overline{f}_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grado k. Sea $f_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ la aplicación descendida de $\overline{f}_k$ que nos da la Proposición 2.2. Claramente $\widetilde{|\deg|}([f_k]) = |\deg \overline{f}_k| = k$. □

8. El functor $[Z, \cdot]$

Estudiamos en esta sección los conjuntos $[Z, \cdot]$ para un espacio topológico Z fijado. El functor covariante $[Z, \cdot]$ entre la categoría de espacios topológicos y la de los conjuntos es el siguiente. Dados dos espacios topológicos X, Y y una aplicación continua $f : X \to Y$, podemos definir la aplicación $f_* : [Z, X] \to [Z, Y]$ por $[g] \mapsto [f \circ g]$ (no confundir con la aplicación inducida entre los grupos fundamentales $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ que ha aperido antes en este trabajo), la cual cumple que $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{[Z,X]}$ y $(h \circ f)_* = h_* \circ f_*$. Es claro también que f_* sólo depende del tipo de homotopía de f.

Ejemplo 8.1. Un caso en el que es sencillo calcular f_* explícitamente es cuando $X = Y = Z = \mathbb{S}^n$. Sabemos por Brouwer-Hopf que $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] = \mathbb{Z}$, identificando la clase de homotopía de una aplicación con el grado de dicha aplicación. Así pues, lo que nos proponemos es calcular la aplicación $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, leftrightarrow, "\deg"] & {[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]} \arrow[d, leftrightarrow, "\deg"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "f_*"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Sea por tanto $k \in \mathbb{Z}$ y calculemos $f_*(k)$. Sea $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación de grado k. Se tiene

$$f_*(k) = f_*(\deg(g)) = \deg(f \circ g) = \deg f \deg g = k \deg f.$$

□

Al igual que en el ejemplo anterior, la aplicación f_* se puede calcular explícitamente en todos los casos de la siguiente tabla:

f_*	n impar	n par
$[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
$[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$	$2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$	$2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$[\mathbb{P}^n, \mathbb{S}^n] \to [\mathbb{P}^n, \mathbb{S}^n]$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$
$[\mathbb{P}^n, \mathbb{S}^n] \to [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \cup (2\mathbb{N}+1)$
$[\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \to [\mathbb{P}^n, \mathbb{S}^n]$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \cup (2\mathbb{N}+1) \to \mathbb{Z}$
$[\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n] \to [\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n]$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \cup (2\mathbb{N}+1) \to \mathbb{Z}_2 \cup (2\mathbb{N}+1)$

Por ejemplo, todas las aplicaciones de la segunda columna vienen dadas por $k \mapsto k \deg f$, lo que se ve en todos los casos como en el ejemplo anterior. Las aplicaciones de la tercera columna requieren algo más de trabajo, pero siguen siendo fáciles de calcular. Hagamos un par de casos para mostrar el procedimiento.

Ejemplo 8.2. Comencemos con el caso $[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$ (n par). Dada una aplicación $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ debemos calcular la aplicación inducida $f_* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Recordemos que la identificación de $[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$ provenía de asociar a la clase de homotopía de una aplicación continua $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ el valor absoluto del grado de un levantamiento $\overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de g. Así pues, dado $k \in \mathbb{N}$, $f_*(k)$ vendrá dado por el valor absoluto del grado de un levantamiento $\overline{f \circ g}$ de $f \circ g$, donde $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ es una aplicación continua tal que $|\deg \overline{g}| = k$.

Sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un levantamiento de f. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}^n \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{S}^n \arrow[ur, "\overline{g}"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd},$$

del que junto con la unicidad de los levantamientos (una vez se ha fijado la imagen de un punto) deducimos que $\overline{f\circ g}=\pm\overline{f}\circ\overline{g}$.

Así,

$$f_*(k)=|\deg\overline{f\circ g}|=|\deg(\overline{f}\circ\overline{g})|=|\deg\overline{f}||\deg\overline{g}|=k|\deg\overline{f}|.$$

Obsérvese que $|\deg\overline{f}|$ caracteriza la clase de homotopía de f en $[\mathbb{P}^n,\mathbb{P}^n]$, lo que confirma que f_* sólo depende de ese tipo de homotopía.

Ejemplo 8.3. Vamos ahora con el caso más complicado de la tabla, que es el último: $[\mathbb{P}^n,\mathbb{P}^n]\to[\mathbb{P}^n,\mathbb{P}^n]$ (n par). En este caso la clase de homotopía de una aplicación $g:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ en $[\mathbb{P}^n,\mathbb{P}^n]$ viene dada por el valor absoluto del grado de un levantamiento suyo $\overline{g}:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ si $\overline{g}$ es impar y por $\deg_4[g]$ si $\overline{g}$ es par, y lo mismo pasa con la clase de $f\circ g$.

Distinguimos dos casos según la paridad de los levantamientos $\overline{f}:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ de f:

Caso 1: $\overline{f}$ es impar.

Distinguimos dos subcasos:

(i) Un elemento $k\in 2\mathbb{N}+1$ representa la clase de homotopía de una aplicación $g:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ tal que su levantamiento $\overline{g}:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ es impar y cumple que $|\deg\overline{g}|=k$. Al igual que en el ejemplo anterior, tenemos que $\overline{f\circ g}=\pm\overline{f}\circ\overline{g}$, que es una aplicación impar, por lo que en este caso tenemos

$$f_*(k)=|\deg\overline{f\circ g}|=|\deg(\pm\overline{f}\circ\overline{g})|=k|\deg\overline{f}|\in 2\mathbb{N}+1.$$

(ii) Un elemento $k\in\mathbb{Z}_2$ representa la clase de una aplicación $g:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ cuyo levantamiento $\overline{g}$ es par, y tal que $\deg_4[g]=k$. En este caso tenemos que $\overline{f\circ g}=\pm\overline{f}\circ\overline{g}$ es par, por lo que la imagen por f_* de k vendrá dada por $\deg_4[f\circ g]$. Vamos a calcular este valor en función de $\deg_4[g]$.

Sea $c\in\mathbb{S}^n$ un valor regular de $\overline{f\circ g}=\pm\overline{f}\circ\overline{g}$. Se tiene que c es un valor regular de $\overline{f}$, y si $\overline{f}^{-1}(c)=\{y_1,\dots,y_r\}$, entonces cada y_i es valor regular de $\overline{g}$. Nótese que como $\overline{f}$ es impar, r lo es también. Para cada $i=1,\dots,r$ será $\overline{g}^{-1}(y_i)=\{x_1^i,\dots,x_{s_i}^i\}$, y se tiene

$$\deg_4[g]=\tfrac{1}{2}s_i \mod 2$$

para cada $i=1,\dots,r$. Así pues,

$$\begin{aligned}\deg_4[f\circ g]&=\tfrac{1}{2}\#(\overline{f\circ g})^{-1}(c) \mod 2 =\tfrac{1}{2}\#\overline{g}^{-1}\big(\overline{f}^{-1}(c)\big) \mod 2,\\ &=\tfrac{1}{2}(s_1+\dots+s_r) \mod 2 =r\deg_4 g \mod 2,\\ &=\deg_2\overline{f}\deg_4[g]=\deg_4[g]\in\mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

Concluimos por tanto que

$$f_*(k)=\begin{cases}k|\deg\overline{f}| & \text{si } k\in 2\mathbb{N}+1,\\ k & \text{si } k\in\mathbb{Z}_2.\end{cases}$$

Caso 2: $\overline{f}$ es par.

Distinguimos de nuevo dos subcasos:

(i) Un elemento $k \in 2\mathbb{N}+1$ representa la clase de homotopía de una aplicación $g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ tal que su levantamiento $\overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es impar y cumple que $|\deg \overline{g}| = k$. En este caso $\overline{f \circ g} = \pm \overline{f} \circ \overline{g}$ es par. Por ello, podemos considerar los levantamientos $\widetilde{f}, \widetilde{f \circ g} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^n$ de f y $f \circ g$ respectivamente que introdujimos en la Sección 5. Por la unicidad de levantamientos, se ha de tener que $\widetilde{f \circ g} = \pm \widetilde{f} \circ g$, de forma que
$$\deg_2 \widetilde{f \circ g} = \deg_2(\widetilde{f} \circ g) = \deg_2 \widetilde{f} \deg_2 g.$$
Sabemos por el Lema 7.1 que
$$\deg_4[f \circ g] = \deg_2 \widetilde{f \circ g} = \deg_2 \widetilde{f} \deg_2 g = \deg_4[f] \deg_2 g.$$
Observamos que $\deg_2 g = \deg_2 \overline{g}$, ya que dado un valor regular $c \in \mathbb{S}^n$ de $\overline{g}$, se tiene que $\pi(c)$ es un valor regular de g, y si $\overline{g}^{-1}(c) = \{x_1, \dots, x_r\}$, entonces $g^{-1}(\pi(c)) = \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_r)\}$. Como $x_i \neq \pm x_j$ si $i \neq j$ por ser $\overline{g}$ impar, $\pi(x_i) \neq \pi(x_j)$ si $i \neq j$, luego $\#\overline{g}^{-1}(c) = \#g^{-1}(\pi(c))$. Además, es inmediato que
$$\deg_2 \overline{g} = \deg \overline{g} \mod 2,$$
por lo que concluimos que
$$f_*(k) = (k \mod 2) \deg_4[f] = \deg_4[f],$$
la última igualdad porque k es impar por serlo $\overline{g}$.

(ii) Un elemento $k \in \mathbb{Z}_2$ representa la clase de una aplicación $g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ cuyo levantamiento $\overline{g}$ es par, y tal que $\deg_4[g] = k$. De nuevo, la aplicación $\overline{f \circ g} = \pm \overline{f} \circ \overline{g}$ es par, por lo que $f_*(k)$ vendrá dada por $\deg_4[f \circ g]$. Los mismos cálculos que hemos hecho en el caso 1(ii) nos dan que $f_*(k) = k \deg_2 \overline{f} = 0$, donde en este caso $\deg_2 \overline{f} = 0$ por ser $\overline{f}$ par.

En conclusión,
$$f_*(k) = \begin{cases} \deg_4[f] \in \mathbb{Z}_2 & \text{si } k \in 2\mathbb{N}+1, \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z}_2. \end{cases}$$

Recordemos para apreciar mejor esta fórmula que la aplicación f es nulhomótopa si y sólo si $\deg_4[f] = 0$.

9. $[\mathbb{S}^n, X]$ y el grupo de homotopía $\pi_n(X)$.

Pasamos ahora a estudiar una cuestión que surge de manera natural al comparar el conjunto $[Z, X]$ con el el grupo de homotopía $\pi_n(X)$ (ver el capítulo 4 de [Ha]). Estos conjuntos no coinciden, pues aunque ambos están formados por clases de homotopía de aplicaciones $g : \mathbb{S}^n \to X$, en el grupo fundamental son homotopías de espacios con punto base. Nuestras cuentas ya lo ponen de manifiesto: si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces $[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n] = \mathbb{N}$ es un semigrupo, mientras que $\pi_n(\mathbb{P}^n)$ es el grupo $\mathbb{Z}$.

Pero aún obviando la estructura de grupo de $\pi_n(X)$, sigue sin ser cierta la igualdad, pues como decimos, no son lo mismo las clases de homotopía $\mathbb{S}^n \to X$ que clases de homotopía de pares $(\mathbb{S}^n, z_0) \to (X, x_0)$. De nuevo, un contraejemplo es $X = \mathbb{P}^n$ para n par.

En efecto, dado $\pi(\overline{x}_0) = x_0 \in \mathbb{P}^n$, se tiene por [Ha, 4.1] que $\pi_n(\mathbb{P}^n, x_0)$ es isomorfo a $\pi_n(\mathbb{S}^n, \widetilde{x}_0)$ mediante $\pi_* : \pi_n(\mathbb{S}^n, \overline{x}_0) \to \pi_n(\mathbb{P}^n, x_0)$. Por tanto, dada una aplicación continua

$g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ con $g(z_0) = x_0$, podemos identificar su clase de homotopía relativa a z_0, $[g]_{z_0} \in \pi_n(\mathbb{P}^n, x_0)$ con $\pi_*^{-1}([g]_{z_0}) \in \pi_n(\mathbb{S}^n, \overline{x}_0)$, que es la clase de homotopía relativa a z_0 del único levantamiento $\overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de g con $\overline{g}(z_0) = \overline{x}_0$. Además, por [Ha, 4.25], $[\overline{g}]_{z_0} \in \pi_n(\mathbb{S}^n, \overline{x}_0)$ está identificado con $\deg \overline{g} \in \mathbb{Z}$. Así, tenemos identificado $\pi_n(\mathbb{P}^n, x_0)$ con $\mathbb{Z}$ mediante la asignación $[g]_{z_0} \mapsto \deg \overline{g}$.

En resumen, dos aplicaciones $g, h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ con $g(z_0) = h(z_0) = x_0$ tienen la misma clase en $\pi_n(\mathbb{P}^n)$ si y solo si $\deg \overline{g} = \deg \overline{h}$. Sin embargo, a la vista de la Proposición 1.3, las aplicaciones g y h son homótopas si y solo si $|\deg \overline{g}| = |\deg \overline{h}|$. Por tanto, tomando dos aplicaciones g y h con $\deg \overline{g} = -\deg \overline{h} \neq 0$, tendremos que $[g] = [h] \in [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$, pero $[g]_{z_0} \neq [h]_{z_0} \in \pi_n(\mathbb{P}^n)$.

Sin embargo, aún podemos decir algunas cosas sobre la relación entre $[\mathbb{S}^n, X]$ y $\pi_n(X)$. Tenemos el sisguiente resultado:

Proposición 9.1. Sea X una variedad diferenciable conexa y sea $x_0 \in X$. La aplicación

$$\Phi : \pi_n(X, x_0) \to [\mathbb{S}^n, X], \ \ [g]_{z_0} \mapsto [g]$$

es sobreyectiva.

Demostración. Sea $g : \mathbb{S}^n \to X$ una aplicación continua. Tomemos una difeotopía $F : [0, 1] \times X \to X$ con $F_0 = \mathrm{id}_X$ y $F_1(g(z_0)) = x_0$. Se tiene que $F_1 \circ g$ es homótopa a g y $[F_1 \circ g]_{z_0} \in \pi_n(X, x_0)$, por lo que

$$\Phi([F_1 \circ g]_{z_0}) = [F_1 \circ g] = [g] \in [\mathbb{S}^n, X].$$

□

En ocasiones, la aplicación Φ de la proposición anterior es fácil de calcular explícitamente. Por ejemplo, de los cálculos que hemos hecho en esta sección se deduce que la aplicación $\Phi : \pi_n(\mathbb{S}^n) \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ se identifica con la aplicación

$$\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ \ k \mapsto k,$$

y si n es par, la aplicación $\Phi : \pi_n(\mathbb{P}^n) \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$ se identifica con

$$\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \ \ k \mapsto |k|.$$

En tales casos, esta aplicación puede ser muy útil para calcular la aplicación inducida $f_* : [\mathbb{S}^n, X] \to [\mathbb{S}^n, Y]$ por una aplicación continua $f : X \to Y$. Vamos a verlo con un ejemplo.

Ejemplo 9.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ par. Tomemos dos puntos $x_0 = \pi(\overline{x}_0), y_0 = \pi(\overline{y}_0) \in \mathbb{P}^n$, y sea $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ una aplicación continua con $f(x_0) = y_0$. Sea $\widetilde{f} := \pi \circ f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \pi_n(\mathbb{P}^n, y_0) \arrow[rr, "\Phi"] & & {[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]} \\
\pi_n(\mathbb{S}^n, \overline{x}_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_*"'] & & {[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]} \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \\
\pi_n(\mathbb{P}^n, x_0) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[uur, "f_*"] & & {[\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]} \arrow[uur, "f_*"] &
\end{tikzcd} ,$$

del que conocemos todas las aplicaciones Φ y $\pi_* : \pi_n(\mathbb{S}^n, \overline{x}_0) \to \pi_n(\mathbb{P}^n, x_0)$, que ya hemos comentado que es un isomorfismo. Además, es fácil ver que $\pi_* : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$ se identifica con la aplicación

$$\pi_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \; k \mapsto |k|,$$

pues dada $\overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ continua, su clase de homotopía viene dada por $\deg \overline{g} \in \mathbb{Z}$, mientras que la clase $[\pi \circ \overline{g}]_{z_0} = \pi_*([\overline{g}]_{z_0}) \in [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$ está representada por $|\deg \overline{g}|$.

Haciendo las identificaciones correspondientes, el diagrama anterior se convierte en

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z} \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathbb{N} \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_*"'] & & \mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \\
\mathbb{Z} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[uur, "f_*"] & & \mathbb{N} \arrow[uur, "f_*"] &
\end{tikzcd} .$$

Si calculamos $\widetilde{f}_* : \pi_n(\mathbb{S}^n, \overline{x}_0) \to \pi_n(\mathbb{P}^n, y_0)$ tendremos automáticamente las dos aplicaciones f_* y la aplicación $\widetilde{f}_* : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$. Vamos por tanto a calcularla.

Sea $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ el único levantamiento de $\widetilde{f}$ con $\overline{f}(\overline{x}_0) = \overline{y}_0$. Dada una aplicación continua $\overline{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ con $\overline{g}(z_0) = \overline{x}_0$, se tiene que su clase $[\overline{g}]_{z_0} \in \pi_n(\mathbb{S}^n, x_0)$ viene dada por su grado $\deg \overline{g} \in \mathbb{Z}$, mientras que $[\widetilde{f} \circ \overline{g}]_{z_0} \in \pi_n(\mathbb{P}^n, \pi(y_0))$ se identifica, como ya hemos visto, con el grado del único levantamiento de $\widetilde{f} \circ \overline{g}$ que manda z_0 a $\overline{y}_0$, y este no es otro que $\overline{f} \circ \overline{g}$. Por tanto tenemos que

$$\widetilde{f}_*(\deg \overline{g}) = \deg(\overline{f} \circ \overline{g}) = \deg \overline{g} \deg \overline{f},$$

de lo que concluimos que nuestra aplicación es

$$\widetilde{f}_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; k \mapsto k \deg \overline{f}.$$

Las aplicaciones del diagrama anterior vienen por tanto dadas por

$$\begin{tikzcd}
 & k\deg\overline{f} \arrow[rr, mapsto, "\Phi"] & & {|k||\deg\overline{f}|}\ . \\
k \arrow[ur, mapsto, "\widetilde{f}_*"] \arrow[rr, mapsto, "\Phi"] \arrow[d, mapsto, "\pi_*"'] & & k \arrow[ur, mapsto, "\widetilde{f}_*"] \arrow[d, mapsto, "\pi_*"'] & \\
k \arrow[uur, mapsto, "f_*"] \arrow[rr, mapsto, "\Phi"] & & {|k|} \arrow[uur, mapsto, "f_*"] &
\end{tikzcd}$$

Observamos que la aplicación $f_* : [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n] \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n]$ coincide con la calculada en el Ejemplo 8.2.

Este es un método alternativo para calcular las aplicaciones inducidas $f_* : [\mathbb{S}^n, X] \to [\mathbb{S}^n, Y]$, pero sobre todo, para mostrar la diferente naturaleza de $[\mathbb{S}^n, X]$ y $\pi_n(X)$.

Referencias

[GR] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables.* 2
Sanz y Torres, Madrid 2016.

[Ha] A. Hatcher: *Algebraic Topology.* 2, 3, 4, 29, 30
Cambridge University Press, Nueva York 2001.

[OR] E. Outerelo, J.M. Ruiz: *Mapping Degree Theory.* 2, 15
Sanz y Torres, Madrid 2014.

[ORR] E. Outerelo, J.A. Rojo, J.M. Ruiz: *Topología Diferencial.* 2, 4, 8, 16, 24
American Mathematical Society, Rhode Island 2009.

[MSE] T. Rot: *Homotopy classes of maps from projective plane to projective plane.* 3
MathStackExchange, 2015.
`https://math.stackexchange.com/questions/1503738/homotopy-classes-of-maps-from-projective-plane-to-projective-plane`