UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

El teorema de de Rham

De Rham's theorem

Tutor: Jesús María Ruiz Sancho

Diego Ruiz Cases

Doble Grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2021-2022

Convocatoria de Junio

Madrid, 29 de junio de 2022

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2022

EL TEOREMA DE DE RHAM

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM
DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

DIEGO RUIZ CASES

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es proporcionar una demostración completa y autocontenida del teorema de de Rham, que puede enunciarse de la siguiente manera: *la cohomología de de Rham es equivalente a la cohomología singular con coeficientes reales.* Con este fin, haremos uso de herramientas de áreas diversas como el álgebra homológica, la topología algebraica o la topología diferencial —complejos de cadenas, sucesión de Mayer-Vietoris o grupos de cohomología sobre una variedad— para finalmente establecer el resultado de la forma más directa y explícita posible.

Palabras clave: Cohomología, complejo de cocadenas, inducción en abiertos, Mayer-Vietoris, homología singular, de Rham.

ABSTRACT. The aim of this work is to provide a complete and self-contained proof of de Rham's theorem, which can be stated as follows: *de Rham's cohomology is equivalent to singular cohomology with real coefficients.* To this end, we shall make use of various tools from different areas such as homological algebra, algebraic topology and differential topology —cochain complexes, the Mayer-Vietoris sequence or cohomology groups on a manifold— to finally establish the main result in the most direct and explicit way possible.

Keywords: Cohomology, cochain complexes, induction on open sets, Mayer-Vietoris, singular homology, de Rham.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57R19, 58A05, 58A12.

Índice

Introducción

Históricamente, se considera que el origen de la topología algebraica y diferencial se encuentra en el extenso artículo *Analysis Situ*, publicado por Henri Poincaré en 1895 —si bien sus primeros resultados en estas áreas fueron anunciados por el propio Poincaré en 1892. Pese a que fueron introducidas en trabajos previos de Poincaré, la primera persona en investigar sistemáticamente las propiedades globales de las formas diferenciales sobre variedades fue Élie Cartan, en su libro de 1922 *Integral Invariants*. Fue en este contexto histórico, motivado por unas conjeturas propuestas por Cartan que conoció mientras trabajaba en su tesis doctoral, que Georges de Rham comenzó sus trabajos en lo que hoy en día se conoce como *cohomología de de Rham*. Una de las características más sorprendentes de este objeto, a caballo entre la topología algebraica y la diferencial, es que, pese a definirse a partir de formas diferenciales, *los grupos de cohomología de de Rham resultan ser invariantes topológicos*. En particular, el *teorema de de Rham*, probado por de Rham en 1931, establece un isomorfismo entre la cohomología de de Rham y otro invariante de naturaleza topológica, la cohomología singular con coeficientes reales[1].

El objetivo de esta memoria es proporcionar una prueba completa y lo más autocontenida posible del teorema de de Rham. Con este fin, dividimos nuestro estudio en los siguientes bloques:

[1]En rigor, no fue hasta 1950 que de Rham trató de traducir sus resultados al lenguaje de la cohomología. La prueba original del teorema de de Rham de 1931 utiliza técnicas de la *teoría de distribuciones* introducida por Sergéi Sóbolev y Laurent Schwartz. Para más información sobre la historia de la topología algebraica y diferencial, así como para la referencia de los hechos históricos aquí citados, véase [13].

El primer bloque, que incluye desde la sección 1 a la 5 inclusive, comprende la definición y propiedades básicas de la cohomología de de Rham. En la sección 1 se hace un repaso breve de los conocimientos mínimos de variedades diferenciales —que se presuponen conocidos de otras asignaturas del grado en Matemáticas— necesarios para formular la cohomología de de Rham y algunas de sus propiedades esenciales. Esta sección termina con la demostración del principio de *inducción en abiertos*, que será pivotal para la demostración del teorema de de Rham. La sección 2 introduce las herramientas del álgebra homológica que se utilizarán a lo largo de toda la memoria, mientras que en la sección 3 se definen los grupos de cohomología de de Rham como aplicación particular de la cohomología de cadenas aplicada al complejo de cadenas formado por las formas diferenciales y la diferencial exterior. Por último, las secciones 4 y 5 se dedican a estudiar algunas propiedades fundamentales de la cohomología de de Rham, como son el lema de Poincaré, la invariancia de los grupos de cohomología de de Rham bajo homotopías diferenciables o la existencia de una sucesión exacta larga en cohomología de de Rham o *sucesión de Mayer-Vietoris*. Las referencias principales de este bloque son [1] y [4], suplementadas extensamente por [2] y [3] entre otras.

El segundo bloque está dedicado en exclusiva a desarrollar los conceptos y resultados de topología algebraica —en particular, de homología singular— necesarios para lo que sigue; y comprende las secciones 6, 7 y 8. Estos conocimientos no son habitualmente objeto de estudio en un primer curso de topología algebraica a nivel de grado —o, al menos, no en profundidad—, de tal forma que esta memoria se dedica un espacio considerable a definir los grupos de homología singular y probar en detalle algunas de sus propiedades básicas. La presentación que hacemos aquí de la homología singular tiene, no obstante, la peculiaridad de que la teoría de homología singular se desarrolla de forma paralela para conjuntos afines del espacio euclídeo y aplicaciones diferenciables y para espacios topológicos arbitrarios y aplicaciones continuas. Así, en la sección 6 se introducen los grupos de homología singular, en 7 se introducen los homomorfismos inducidos en ellos por aplicaciones diferenciables o continuas —según el caso— y se prueba la invariancia por homotopía de la homología singular; y por último en 8 se introduce la sucesión de Mayer-Vietoris en homología singular. La referencia básica de este bloque es [10].

Finalmente, el bloque tercero y último de la memoria —compuesto por las secciones 9, 10 y 11— aúna conceptos y resultados de los bloques anteriores, estableciendo conexiones entre ellos. La analogía formal entre las homología singular diferenciable y continua que subyace al bloque anterior conduce a una relación de isomorfismo entre ambas homologías en variedades diferenciables, que se demuestra rigurosamente en 9 empleando inducción en abiertos —junto a otras técnicas de *diagram chasing* o álgebra homológica como el Lema de los cinco o la existencia de sucesiones de Mayer-Vietoris en ambos casos. Esta misma estrategia permite obtener la dualidad de Poincaré y la fórmula de Künneth —véase [5]—, y la usaremos aquí para probar el teorema de de Rham en la última sección. La sección 10 proporciona una primera conexión entre formas diferenciales y cadenas a través de la integración de formas en cadenas. Para ello, se generalizan previamente los conceptos de variedades diferenciables con borde a *variedades diferenciables con borde anguloso*, se introduce la integración de formas para variedades con borde anguloso y se demuestran las correspondientes generalizaciones del teorema de Stokes —tanto a variedades con borde anguloso como para cadenas. Finalmente, en la sección 11 se definen los grupos de cohomología singular a partir de los de homología, se define el *homomorfismo de de Rham* a través de integración en cadenas y se demuestra que el homomorfismo anterior es de hecho un isomorfismo, lo que establece el teorema de de Rham. Esta última prueba reúne conceptos y técnicas de todos los bloques anteriores (inducción en abiertos, integración en cadenas, las sucesiones de Mayer-Vietoris según 5 y 8, etcétera), y supone la síntesis y culmen de todo lo que la precede. Junto con las referencias anteriormente citadas, se ha consultado [11] como referencia principal en este último bloque.

1. Conceptos preliminares

En esta sección recopilamos terminología, notaciones y algunos resultados básicos de asignaturas del grado en Matemáticas, por lo que se omiten las demostraciones. La referencia básica es [1].

Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^p$, diremos que la aplicación $f : U \to \mathbb{R}^p$ es *diferenciable* si tiene derivadas parciales de todos los órdenes y son continuas. De forma más general, diremos que una aplicación $f : X \to Y$, siendo $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ subconjuntos arbitrarios del espacio afín, es *diferenciable* si para todo punto $x \in X$ existe un entorno abierto $U^x \subset \mathbb{R}^p$ del mismo y una aplicación diferenciable $F : U \to \mathbb{R}^q$ que coincide con f en $U \cap X$. Si la aplicación f, además, es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables, se denomina *difeomorfismo*. Así, para subconjuntos arbitarios de $\mathbb{R}^p$ (en adelante, *conjuntos afines*) podemos definir aplicaciones y funciones diferenciables.

Una herramienta fundamental para hacer construcciones en conjuntos afines $X \subset \mathbb{R}^p$ son las *particiones diferenciables de la unidad*:

Definición y Proposición 1.1. *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de un conjunto afín X. Entonces, existe una familia $\{\theta_i\}_{i\in I}$ de funciones diferenciables $\theta_i : X \to [0,1]$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) Local-finitud: cada punto $x \in X$ tiene un entorno W en el que se anulan todas las θ_i salvo una cantidad finita.
(2) Partición de la unidad: la suma $\sum_i \theta_i$ está bien definida en todo punto y vale constantemente 1.
(3) Subordinación al recubrimiento: para cada $i \in I$, la función θ_i se anula fuera de U_i, más aún

$$\overline{\operatorname{sop}\,\theta_i} \subset U_i, \text{ donde } \operatorname{sop}\,\theta_i := \{x \in X : \theta_i(x) \neq 0\}.$$

La familia $\{\theta_i\}_{i\in I}$ recibe el nombre de *partición diferenciable* de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$.

La proposición 1.1 se demuestra a partir de la *paracompacidad* de $\mathbb{R}^p$. Un espacio topológico Hausdorff X se dice *paracompacto* si todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito; el teorema anterior es consecuencia de que todo espacio topológico metrizable es paracompacto. Señalemos asimismo que 1.1 incluye en la condición (1) que todo conjunto afín X es paracompacto: $\{V_i = \operatorname{sop}\,\theta_i\}_{i\in I}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. Además, en la condición (3) incluye una técnica estándar de la manipulación de recubrimientos, denominada *shrinking:* dado $\{U_i\}_{i\in I}$, el recubrimiento abierto $\{V_i\}_{i\in I}$ cumple $\overline{V}_i \subset U_i$.

Una subfamilia de conjuntos afines particularmente importante desde el punto de vista de la geometría es el de las *variedades diferenciables*.

Definición 1.2. Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se denomina *variedad diferenciable (sumergida)*, o simplemente variedad, si cada punto $x \in M$ tiene un entorno $U \subset M$ que es difeomorfo a un abierto W de un espacio afín. Los difeomorfismos anteriores $\varphi : W \to U$ reciben el nombre de *parametrizaciones* y sus inversos el de *sistemas de coordenadas*.

Si cada punto tiene un entorno difeomorfo a un semiespacio cerrado

$$\mathbb{H}^m := \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0\},$$

diremos que M es una *variedad diferenciable con borde*. Un punto de $x \in M$ se dice que está en el borde de la variedad si se corresponde con un punto de $\partial\mathbb{H}^m := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 = 0\}$ a través de una parametrización.

Observación 1.3. Puede demostrarse que esta condición es independiente de la parametrización considerada (véase [1, I.4.2]), luego el borde de una variedad está bien definido.

Se puede dar una definición aparentemente más general de variedad diferenciable, como una variedad topológica (*i.e.*, un espacio topológico Hausdorff, II axioma y localmente homeomorfo a algún $\mathbb{R}^m$ —o $\mathbb{H}^m$ si tiene borde—) dotada de una estructura diferenciable maximal, que omite cualquier referencia a un espacio ambiente externo a la variedad. No obstante, [9, II.7.4] (o bien [1, I.5.8]) afirma que toda variedad diferenciable en este sentido es difeomorfa a una variedad sumergida en un espacio afín; en particular el *teorema de inmersión de Whitney* afirma que se puede sumergir en $\mathbb{R}^p$, con $p = 2 \dim M + 1$ (véase [9, II.6.1]; de hecho puede conseguirse hasta $p = 2 \dim M$, [1, I.5.8]). Por esto, en lo sucesivo consideraremos que todas las variedades están sumergidas en un espacio afín.

Al ser localmente difeomorfas a un espacio afín $\mathbb{R}^m$ (o a un semiespacio $\mathbb{H}^m$), las variedades comparten sus propiedades topológicas locales, a saber, toda variedad es localmente compacta y localmente conexa, y sus componentes conexas son abiertas. Además, como subconjuntos del espacio afín heredan la propiedad de Hausdorff y el II axioma de numerabilidad. Se puede demostrar, aplicando el teorema de la función inversa al difeomorfismo de cambio de coordenadas, que todos las parametrizaciones de una variedad en un punto están definidas en espacios afines de la misma dimensión. Esta observación conduce a definir la *dimensión* de la variedad en un punto como la dimensión del espacio afín donde están definidas sus parametrizaciones. Habitualmente la dimensión es la misma en todos los puntos (por ejemplo cuando la variedad es conexa), por tanto se acostumbra a hablar de dimensión de la variedad sin hacer referencia a ningún punto concreto.

A cada punto $x \in M$ de una variedad diferenciable le podemos asociar un espacio vectorial $T_xM \subset \mathbb{R}^p$ de dimensión igual a la de la variedad M en ese punto. Este espacio vectorial recibe el nombre de *espacio tangente*. En efecto, basta considerar una parametrización $\varphi : W \subset \mathbb{R}^m \to M$ con $\varphi(a) = x$ y definir $T_xM := d_a\varphi(\mathbb{R}^m)$, y se demuestra que la definición de T_xM es independiente de la parametrización. Denotando $\mathrm{x} = \varphi^{-1}$, podemos asignar a T_xM la *base de derivadas parciales* $\{\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_i}|_x\}_{i=1}^m$, esto es

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_i}\Big|_x := d_{\mathrm{x}(x)}\varphi(e_i) \right\}_{1\leq i\leq m}$$

con e_i el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

A partir de los espacios tangentes, se definen otras construcciones fundamentales sobre variedades. En particular:

Definición 1.4. Una *forma diferencial de grado* p (o simplemente p*-forma*) en una variedad M es una asignación ω que a cada punto $x \in M$ de la variedad le asocia una forma multilinear alternada de grado p, ω_x, definida en su espacio tangente T_xM.

Dado un sistema de coordenadas locales $\mathrm{x} : U \to \mathbb{R}^m$, se puede expresar de manera única

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, \mathrm{dx}_{i_1,x} \wedge \ldots \wedge \mathrm{dx}_{i_p,x},$$

o bien, utilizando un multiíndice $I = (i_1, \ldots, i_p)$, $\omega_x = \sum_I \omega_I(x)\, \mathrm{dx}_{I,x}$. Los objetos $\mathrm{dx}_{i,x}$ constituyen, por definición, la base dual a la base de las parciales en el espacio tangente, esto es, son vectores duales en T_xM definidos por la condición

$$\mathrm{dx}_{i,x}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_j}\bigg|_x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Diremos que la p-forma ω es *diferenciable* si y solo si lo son las funciones $\omega_I : U \to \mathbb{R}$ (escogiendo una familia de dominios de coordenadas que recubran la variedad). Denotaremos por $\Gamma^p(M)$ al espacio de las p-formas diferenciales diferenciables de M. En lo sucesivo, se asumirá que todas las formas diferenciales son diferenciables salvo mención expresa.

A toda función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ se le puede hacer corresponder una 1-forma mediante la asignación $x \mapsto \mathrm{d}f_x := d_xf$, que se denomina la *diferencial de* f *en* x. Por motivos que serán evidentes cuando introduzcamos la diferencial exterior, definimos $\Gamma^0(M)$ como el conjunto de funciones diferenciables que van de M a $\mathbb{R}$. Por supuesto, dx_i es la diferencial de la función x_i (la proyección sobre la variable i-ésima del sistema de coordenadas local $\mathrm{x} : U \subset M \to \mathbb{R}^m$).

Dada una aplicación diferenciable entre dos variedades $f : M \to N$, podemos definir una aplicación lineal asociada entre los espacios de p-formas de ambas variedades, el *pullback* de f (denotado f^*), mediante la asignación

$$f^* : \Gamma^p(N) \to \Gamma^p(M),\ \ (f^*\alpha)_x(u_1, .., u_p) := \alpha_{f(x)}(d_xf(u_1), \ldots, d_xf(u_p)).$$

Proposición 1.5. *Dada una aplicación diferenciable entre variedades* $f : M \to N$*, su pullback satisface*

(1) $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$*, para dos* α *y* β *formas diferenciales cualesquiera.*

(2) *Si* $g : N \to P$ *es otra aplicación diferenciable entre variedades, entonces*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(3) *El pullback de la identidad es la identidad, i.e.* $\mathrm{Id}_M^* = \mathrm{Id}_{\Gamma^r(M)}$.

(4) *Si* $\alpha \in \Gamma^r(N)$ *se expresa en coordenadas locales* $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_n)$ *como*

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_r}\, \mathrm{dy}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{dy}_{i_r},$$

entonces la expresión en coordenadas locales $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m)$ *de* $f^*(\alpha)$ *es*

$$f^*(\alpha) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} (\alpha_{i_1,\ldots,i_r} \circ f)\, \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_{i_r},$$

donde $f_i = \mathrm{y}_i \circ f$*.*

Recordamos la noción fundamental de *diferencial exterior*, que será la base para construir la cohomología de de Rham:

Definición y Proposición 1.6. *Dada una variedad diferenciable* M*, existe una única aplicación lineal* $\mathrm{d} : \Gamma^r(M) \to \Gamma^{r+1}(M)$*, denominada diferencial exterior, que cumple*

(1) *Para* $r = 0$*, la aplicación* d *es la diferencial de funciones, i.e.* $(\mathrm{d}f)_x = d_x f$ *para cada* $f : M \to \mathbb{R}$ *diferenciable.*

(2) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$*.*

(3) $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$*, donde* r *es el grado de* α*.*

Además, la diferencial exterior conmuta con el *pullback* de cualquier aplicación diferenciable entre variedades, esto es, $\mathrm{d} \circ f^* = f^* \circ \mathrm{d}$.

En relación a la diferencial exterior, diremos que una forma diferencial es *exacta* cuando es la diferencial de otra, que se dice que es una *primitiva* suya. Asimismo, una forma se dirá *cerrada* si su diferencial exterior es nula.

La integración en variedades diferenciables M se define habitualmente, por conveniencia, para formas con soporte compacto, que son aquellas que se anulan idénticamente fuera de algún compacto $K \subset M$. El conjunto de r-formas con soporte compacto se denota $\Gamma_c^r(M)$.

En concreto, si M es una variedad diferenciable de dimensión m *orientada* —esto es, donde para todo $x \in M$ se ha fijado una *orientación* ζ_x como espacio vectorial en cada espacio tangente T_xM, de tal forma que la asignación $x \mapsto \zeta_x$ sea diferenciable[2]— se demuestra:

Definición y Proposición 1.7. *Existe una única forma lineal*

$$\int_M : \Gamma_c^m(M) \to \mathbb{R};\ \omega \mapsto \int_M \omega$$

tal que si φ^{-1} *es el sistema de coordenadas de* M *correspondiente a una parametrización* φ *y* ω *se anula fuera de un compacto del dominio* U *de* φ^{-1}*, entonces*

$$\int_M \omega = \varepsilon \int_{\varphi^{-1}(U)} \varphi^* \omega, \tag{1.7.1}$$

donde $\varepsilon = +1$ *si* φ *es compatible con la orientación y* $\varepsilon = -1$ *si no lo es.*

La prueba de 1.7 procede extendiendo la fórmula (1.7.1) al caso en que el soporte de ω no está contenido en ningún dominio de coordenadas U a través de particiones diferenciables

[2] La asignación de orientaciones se dice que es *diferenciable* si para todo $x \in M$, existe un dominio de coordenadas $U^x \subset M$ tal que la orientación ζ_y en T_yM para todo $y \in U^x$ es la definida por la base de parciales $[\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\big|_y, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_m}\big|_y]$.

de la unidad. Para cálculos explícitos, no obstante, lo habitual es tratar de buscar un abierto W fuera del cual se anule ω y recubrir W —salvo conjuntos de medida nula— por una colección finita de dominios de coordenadas disjuntos dos a dos.

La generalización del Teorema Fundamental del Cálculo al caso de variedades es el llamado *teorema de Stokes*:

Teorema 1.8 (Teorema de Stokes)**.** *Dada una variedad diferenciable orientada con borde M de dimensión m —donde ∂M tiene la orientación que hereda como borde de M—, se cumple que si $\omega \in \Gamma_c^{m-1}(M)$, entonces $\omega|_{\partial M} \in \Gamma_c^{m-1}(\partial M)$, $\mathrm{d}\omega \in \Gamma_c^m(M)$ y además*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}.$$

Cerramos esta sección con un resultado de naturaleza topológica que será de utilidad para establecer el isomorfismo de de Rham: la *inducción en abiertos*. Al ser un resultado que no se suele estudiar en el grado, se incluye la demostración.

Teorema 1.9 (Inducción en abiertos)**.** *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sea $\mathcal{V} := \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ un recubrimiento abierto suyo. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una colección de abiertos de M que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\varnothing \in \mathcal{U}$.
(b) *Cualquier subconjunto abierto $U \subset V_\beta$ difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ pertenece a $\mathcal{U}$.*
(c) *Si $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ pertenecen a $\mathcal{U}$, entonces $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$.*
(d) *Si $U_1, U_2, \ldots$ es una sucesión de subconjuntos abiertos disjuntos dos a dos con $U_i \in \mathcal{U}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_i U_i \in \mathcal{U}$.*

Entonces $M \in \mathcal{U}$.

Demostración. Dividimos la demostración del teorema en cuatro pasos, adaptando la exposición que se hace en [4].

(1) *Uniones finitas.* Demostramos en primer lugar por inducción que dado $U := U_1 \cup \cdots \cup U_n$ unión finita de abiertos con $U_{k_1} \cap \cdots \cap U_{k_s} \in \mathcal{U}$ para cualquier $\{k_1, \ldots, k_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$, entonces $U \in \mathcal{U}$. Para $n = 1$ es trivial y para $n = 2$ es la hipótesis (c) del enunciado.

Para demostrar el caso $n \geq 3$, supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$. Definimos $V := U_2 \cup \ldots \cup U_n$, y observamos que

$$U_1 \cap V = \bigcup_{\nu=2}^{n} U_1 \cap U_\nu.$$

La colección $(U_1 \cap U_\nu)_{\nu=2}^n$ cumple la hipótesis inductiva —sus intersecciones están en $\mathcal{U}$, pues pertenecen a las intersecciones de la familia $\{U_1, \ldots, U_n\}$— luego su unión $\cup_{\nu=2}^n U_1 \cap U_\nu$ está en $\mathcal{U}$. Por la hipótesis (c) del enunciado, concluimos que

$$U_1 \cup V = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu \in \mathcal{U}.$$

(2) *Uniones numerables adecuadas.* Sea $U := \cup_{k=1}^{\infty} U_k$ una unión localmente finita de abiertos relativamente compactos[3] de M cuyas intersecciones $U_{k_1} \cap \cdots \cap U_{k_s} \in \mathcal{U}$ para cualquier $\{k_1, \ldots, k_s\} \subset \mathbb{N}$. Veamos que $U \in \mathcal{U}$.

La familia $(U_i \cap U_j)_{i \in I, j \in J}$ —con I y J subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$— satisface la condición de que sus intersecciones están en $\mathcal{U}$, luego aplicando el paso anterior a esta familia

$$\bigcup_{i \in I, j \in J} U_i \cap U_j \in \mathcal{U}. \tag{1.9.1}$$

A continuación, definimos de forma inductiva una familia de conjuntos de índices I_n y una familia de abiertos $W_n \subset M$. Fijamos $I_1 := \{1\}$ y $W_1 := U_1$, y para $n \geq 2$ definimos

$$I_n := \Big(\{n\} \cup \{i : i > n, U_i \cap W_{n-1} \neq \varnothing\}\Big) \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} I_j, \quad W_n := \bigcup_{i \in I_n} U_i.$$

De nuevo por inducción, se demuestra que cada I_n es finito: en efecto, por definición I_1 lo es, y si asumimos que I_{n-1} lo es, W_{n-1} es relativamente compacto (por ser una unión finita de conjuntos relativamente compactos). Por ser la familia $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ localmente finita y W_{n-1} relativamente compacto, W_{n-1} interseca solo a una cantidad finita de ellos, luego necesariamente I_n es finito para todo valor de $n \in \mathbb{N}$. Observamos, asimismo, directamente de la definición que $I_j \cap I_k = \varnothing$ si $j \neq k$, y además si $n \geq 2$ no pertenece a ningún I_j con $j < n$, entonces pertenece a I_n por definición. De esta forma, concluimos que los $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constituyen una partición de los números naturales, esto es

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{1.9.2}$$

Hemos demostrado que las uniones finitas de U_i están en $\mathcal{U}$, luego $W_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (en el caso $I_n = \varnothing$, $W_n = \varnothing \in \mathcal{U}$ por la hipótesis (a) del enunciado). Más aún, por (1.9.1), tenemos que

$$W_n \cap W_{n+1} = \bigcup_{(i,j) \in I_n \times I_{n+1}} U_i \cap U_j \in \mathcal{U}.$$

También de la definición de $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se sigue que $W_n \cap W_k = \varnothing$ si $k \geq n+2$. En efecto, si la intersección fuese no vacía, entonces existiría algún $i \in I_k$ de tal forma que $W_n \cap U_i \neq \varnothing$, lo que por construcción implica que $i \in I_j$ para algún $j \leq n+1$. Pero esto es imposible por ser I_k e I_j disjuntos, luego necesariamente $W_n \cap W_k = \varnothing$ si $k \geq n+2$.

La condición anterior, junto con la hipótesis (d) del enunciado, garantiza que las tres uniones disjuntas siguientes

$$W^{(0)} := \bigsqcup_{j=1}^{\infty} W_{2j}, \quad W^{(1)} := \bigsqcup_{j=1}^{\infty} W_{2j-1} \quad \& \quad W^{(0)} \cap W^{(1)} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} W_j \cap W_{j+1}$$

[3]Un conjunto es *relativamente compacto* si su adherencia es un compacto.

pertenecen todas a $\mathcal{U}$. Aplicando la hipótesis (c) del enunciado y teniendo en cuenta (1.9.2), concluimos finalmente

$$W^{(0)} \cup W^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \in \mathcal{U}.$$

(3) *Dominios de coordenadas.* Sea U un dominio de coordenadas contenido en V_β para algún $\beta \in B$. Comprobemos que $U \in \mathcal{U}$. Por el paso (2) y las hipótesis (a) y (b) del enunciado, basta demostrar que U es una unión numerable localmente finita de abiertos relativamente compactos con todas sus intersecciones finitas no vacías difeomorfas a $\mathbb{R}^m$. Una tal descomposición se conserva por difeomorfismos, luego podemos suponer que el dominio de coordenadas U es un abierto de $\mathbb{R}^m$.

El abierto U es localmente compacto y paracompacto como $\mathbb{R}^m$, luego existe una familia de abiertos relativamente compactos $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que para todo $i \in I$, $U_i \subset \overline{U}_i \subset U$, de tal modo que

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

La paracompacidad de U nos permite extraer un refinamiento abierto localmente finito $\{W_j\}_{j\in J}$ del recubrimiento anterior, y por ser II axioma basta una cantidad numerable de W_j para recubrir U; esto es

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k.$$

Por la condición (3) de 1.1 (más precisamente, por la observación al final del párrafo siguiente a 1.1) existe un *shrinking* de $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *i.e.* un refinamiento $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $V_k \subset \overline{V}_k \subset W_k$. En particular, $\overline{V}_k$ es compacto para todo k, luego

$$\overline{V}_k \subset \bigcup_{\ell=1}^{r_k} E_{k\ell}, \quad \text{con } \overline{E}_{k\ell} \subset W_k \text{ para todo } k \text{ y } \ell,$$

donde $E_{k\ell}$ es un paralelepípedo abierto $\Pi_{i=1}^n (a_i, b_i)$ cuya adherencia $\overline{E}_{k\ell}$ es el compacto $\Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$. De esta forma

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\ell=1}^{r_k} E_{k\ell} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k = U$$

luego $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\ell=1}^{r_k} E_{k\ell}$. Tenemos así un recubrimiento numerable $\{E_{k\ell}\}$ por abiertos relativamente compactos y afirmamos que es localmente finito.

En efecto, todo $x \in U$ tiene un entorno abierto U^x tal que $I = \{k \in \mathbb{N} : U^x \cap W_k \neq \varnothing\}$ es finito. Entonces, si $U^x \cap E_{k\ell} \neq \varnothing$, $U^x \cap W_k \neq \varnothing$ y $k \in I$; luego hay una cantidad finita de índices k. Como para cada k hay a lo más r_k índices ℓ, el número de paralelepípedos $E_{k\ell}$ que cortan a U^x es finito.

Finalmente, cualquier intersección finita no vacía de $E_{k\ell}$'s es difeomorfa a $\mathbb{R}^m$: tal intersección es otro paralelepípedo abierto, y los paralelepípedos abietos son difeomorfos a $\mathbb{R}^m$.

(4) *La variedad M está en $\mathcal{U}$*: Al igual que en el paso anterior, la estrategia consiste en escribir M como una unión en las condiciones del paso (2) y concluir de ahí que $M \in \mathcal{U}$.

En primer lugar M es unión de dominios de coordenadas relativamente compactos de M contenidos en abiertos de $\mathcal{V}$; advertimos que una intersección no vacía de una cantidad finita de dominios de coordenadas es de nuevo un dominio de coordenadas, luego está en $\mathcal{U}$ por el paso (3). Al ser M II axioma y paracompacta, podemos suponer que la unión es numerable y localmente finita (obsérvese que al refinar cambiamos un dominio de coordenadas relativamente compacto por un abierto dentro de él, luego es otro dominio de coordenadas relativamente compacto). El paso (2) nos permite concluir que la unión de todos estos, que no es otra cosa que M, pertenece a $\mathcal{U}$. $\square$

2. Complejos y cohomología

Introducimos a continuación de manera algebraica los *grupos de cohomología*. En lo sucesivo trabajaremos en la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, no obstante, todas las construcciones son igualmente válidas para grupos abelianos —o, más en general, módulos sobre anillos conmutativos.

Definición 2.1. Una sucesión de espacios vectoriales

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se denomina exacta si $\ker g = \operatorname{im} f$.

Más generalmente, una sucesión $A^* := \{A^p, d^p\}$ de espacios vectoriales y morfismos lineales de la forma

$$\ldots \to A^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} A^{p+2} \to \ldots \tag{2.1.1}$$

recibe el nombre de *complejo de cocadenas* si se cumple que $d^p \circ d^{p-1} = 0$. Se dice que el complejo de cocadenas es *exacto* si además satisface

$$\ker d^p = \operatorname{im} d^{p-1} \quad \text{para todo } p.$$

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{2.1.2}$$

se denomina *exacta corta*. La exactitud de (2.1.2) es equivalente a que f sea inyectiva, g sobreyectiva e $\operatorname{im} f = \ker g$. En este caso, el primer teorema de isomorfía de espacios vectoriales (o de grupos abelianos, etc) nos permite concluir que $B/\operatorname{im} f \cong C$.

Asimismo, toda sucesión exacta larga de la forma (2.1.1) induce sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \to \operatorname{im} d^{p-1} \overset{i}{\hookrightarrow} A^p \xrightarrow{d^p} \operatorname{im} d^p \to 0.$$

Definición 2.2. Dado un complejo de cocadenas $A^* = \{A^p, d^p\}$, definimos el *p-ésimo grupo de cohomología* (en nuestro caso, espacio vectorial) como

$$H^p(A^*) := \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1}.$$

Observamos que, por la condición $d^p \circ d^{p-1} = 0$, $\operatorname{im} d^{p-1} \subset \ker d^p$, luego el cociente está bien definido. Los elementos de $\ker d^p$, $\operatorname{im} d^{p-1}$ y $H^p(A^*)$ reciben el nombre de *cociclos*, *cobordes* y *clases de cohomología*, respectivamente.

Inspirados en el lenguaje de teoría de categorías, definimos los *morfismos de cocadenas* de la manera siguiente:

Definición 2.3. Un *morfismo de cocadenas* es una una familia de aplicaciones $f^p : A^p \to B^p$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{p-1} & \xrightarrow{d^{p-1}} & A^p & \xrightarrow{d^p} & A^{p+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^{p-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^p} & & \downarrow{\scriptstyle f^{p+1}} & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{p-1} & \xrightarrow{d^{p-1}} & B^p & \xrightarrow{d^p} & B^{p+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

es conmutativo, *i.e.*, $d_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_A^p$ para todo p.

Definiendo los morfismos de cocadenas de la forma anterior, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.4. *Los morfismos de cocadenas inducen aplicaciones lineales*

$$f^* : H^p(A^*) \to H^p(B^*) \quad \textit{para todo } p.$$

Demostración. Sea $a \in A^p$ un cociclo, y $[a]$ su correspondiente clase de equivalencia (*i.e.*, $[a] = a + \operatorname{im} d^{p-1}$). Definimos la aplicación f^* que asigna a cada clase de cohomología de $H^p(A^*)$ una clase de cohomología de $H^p(B^*)$ según

$$f^*([a]) := [f^p(a)].$$

Basta demostrar que la asignación anterior está bien definida y es lineal. Si demostramos que la aplicación está bien definida, la linealidad de f^* se sigue inmediatamente de la linealidad de f^p, luego es suficiente comprobar la primera condición.

En primer lugar, si a es un cociclo, por definición tenemos que

$$d_B^p \circ f^p(a) = f^{p+1} \circ d_A^p(a) = f^{p+1}(0) = 0,$$

luego $f^p(a)$ es un cociclo. Análogamente, como $f^p \circ d_A^{p-1} = d_B^{p-1} \circ f^{p-1}$, f^p lleva cobordes a cobordes: supongamos que a_1 y a_2 son cociclos de tal manera que $[a_1] = [a_2]$, o equivalentemente $a_1 - a_2 \in \operatorname{im} d_A^{p-1}$. Por tanto, existe un $x \in A^{p-1}$ tal que

$$f^p(a_1) - f^p(a_2) = f^p(a_1 - a_2) = f^p \circ d_A^{p-1}(x) = d_B^{p-1} \circ f^{p-1}(x) \in \operatorname{im} d_B^{p-1},$$

luego $[f^p(a_1)] = [f^p(a_2)]$, y en consecuencia la asignación es independiente del representante escogido. □

Por analogía con (2.1.2), una *sucesión exacta corta de complejos de cocadenas*

$$0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0 \tag{2.4.1}$$

consiste en complejos de cocadenas A^*, B^* y C^* y morfismos entre ellos f^* y g^* de tal forma que

$$0 \to A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \to 0$$

es exacta corta para todo p.

Definición y Proposición 2.5. *Dada una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas* (2.4.1)*, definimos la aplicación lineal (en rigor, familia de aplicaciones lineales)*

$$\partial^* : H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*) \text{ tal que } \partial^*([c]) := \Big[(f^{p+1})^{-1}\Big(d_B^p\Big((g^p)^{-1}(c)\Big)\Big)\Big].$$

A priori, no es evidente que la definición anterior tenga sentido y sea independiente del representante escogido. Ilustramos la situación con el siguiente diagrama (donde las flechas diagonales indican la definición de ∂^* —para el correspondiente diagrama en cohomología):

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "f^{p-1}"] \arrow[d, "d_A^{p-1}"] & B^{p-1} \arrow[r, "g^{p-1}"] \arrow[d, "d_B^{p-1}"] & C^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{p-1}"] \arrow[dll] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^p \arrow[r, "f^p"] \arrow[d, "d_A^p"] & B^p \arrow[r, "g^p"] \arrow[d, "d_B^p"] & C^p \arrow[r] \arrow[d, "d_C^p"] \arrow[dll] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "f^{p+1}"] \arrow[d] & B^{p+1} \arrow[r, "g^{p+1}"] \arrow[d] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Demostración. En primer lugar, hemos de demostrar que la expresión que aparece entre corchetes define una verdadera función (módulo la relación de equivalencia). Desglosamos la prueba en tres pasos. Las dos primeras indican que la expresión que hay entre corchetes en la definición de ∂^* tiene sentido y nos produce un cociclo, y la última justifica que el resultado es independiente de la elección de la preimagen de c.

(1) Dado un cociclo $c \in C^p$ (*i.e.*, $d_C^p(c) = 0$), y $b \in B^p$ tal que $g^p(b) = c$ (que existe por ser g^p sobreyectiva), entonces $d_B^p(b) \in \operatorname{im} f^{p+1}$.

En efecto, por ser g^* un morfismo de cocadenas, se sigue

$$g^{p+1}(d_B^p(b)) = d_C^p(g^p(b)) = d_C^p(c) = 0, \;\; \textit{ergo } d_B^p(b) \in \ker g^{p+1}.$$

Pero por exactitud, $\ker g^{p+1} = \operatorname{im} f^{p+1}$, y en consecuencia $d_B^p(b) \in \operatorname{im} f^{p+1}$.

(2) Dado $a \in A^{p+1}$ tal que $f^{p+1}(a) = d_B^p(b)$, a es un cociclo.

Nuevamente, por definición de morfismo de cocadenas

$$f^{p+2}(d_A^{p+1}(a)) = d_B^{p+1}(f^{p+1}(a)) = d_B^{p+1}(d_B^p(b)) = 0,$$

al ser un complejo de cocadenas. La inyectividad de f^{p+2} y el hecho de que sea una aplicación lineal garantizan $d_A^{p+1}(a) = 0$.

(3) Dados b_1, b_2 y a_1, a_2 tales que $g^p(b_1) = g^p(b_2) = c$ y $f^{p+1}(a_i) = d_B^p(b_i)$ con $i = 1, 2$; entonces $[a_1] = [a_2] \in H^{p+1}(A^*)$. Dicho de otra manera, la definición de $\partial^*([c])$ es independiente de la preimagen de c elegida.

De las condiciones anteriores, se sigue inmediatamente que $g^p(b_1 - b_2) = c - c = 0$, luego $b_1 - b_2 \in \ker g^p = \operatorname{im} f^p$ por exactitud. Sea $a \in A^p$ tal que $f^p(a) = b_1 - b_2$. Aplicando la definición de morfismo de cocadenas obtenemos

$$d_B^p(b_1 - b_2) = d_B^p(f^p(a)) = f^{p+1}(d_A^p(a)).$$

Ahora bien, la condición $f^{p+1}(a_i) = d_B^p(b_i)$ implica en particular $f^{p+1}(a_1 - a_2) = d_B^p(b_1 - b_2)$, lo que junto al cálculo anterior conduce a $f^{p+1}(a_1 - a_2) = f^{p+1}(d_A^p(a))$. La inyectividad de f^{p+1} garantiza que $a_1 - a_2 = d_A^p(a)$, o equivalentemente $[a_1] = [a_2]$.

Hemos comprobado que la fórmula que aparece entre corchetes en (2.5) está bien definida y es independiente de la preimagen de c elegida. Resta comprobar que la asignación que define es lineal e independiente del representante escogido en $[c]$.

La linealidad se sigue de forma inmediata de (3) y la linealidad de las aplicaciones f^{p+1}, g^p y d^p: en efecto, sea c_i tal que $\partial^*([c_i]) = [a_i]$ y b_i tal que $g^p(b_i) = c_i$, para $i = 1$ y 2. Por linealidad de g^p, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha b_1 + \beta b_2 \in (g^p)^{-1}(\alpha c_1 + \beta c_2)$. La linealidad de f^{p+1} nos permite concluir ahora que $\partial^*([\alpha c_1 + \beta c_2]) = [\alpha a_1 + \beta a_2]$, luego ∂^* es un morfismo lineal.

Sean ahora c_1 y c_2 dos cociclos tales que $[c_1] = [c_2]$. Queremos ver que, si denotamos $[a_i] = \partial^*([c_i])$ para $i = 1$ y 2, entonces $[a_1] = [a_2]$. Dados $c_1, c_2 \in C^p$ dos cociclos tales que $[c_1] = [c_2]$, existe $\tilde{c} \in C^{p-1}$ con $c_1 = c_2 + d_C^{p-1}(\tilde{c})$. Si b_1 y b_2 son tales que $g^p(b_1) = c_1$ y $g^p(b_2) = c_2$, entonces $g^p(b_1 - b_2) = d_C^{p-1}(\tilde{c})$. Por sobreyectividad de g^{p-1}, tenemos que existe $\tilde{b}$ tal que $g^{p-1}(\tilde{b}) = \tilde{c}$. De esta manera

$$d_C^{p-1}(\tilde{c}) = d_C^{p-1}(g^{p-1}(\tilde{b})) = g^p(d_B^{p-1}(\tilde{b})) \implies g^p(b_1 - b_2 - d_B^{p-1}(\tilde{b})) = 0,$$

y en consecuencia $b_1 - b_2 - d_B^{p-1}(\tilde{b}) \in \ker g^p = \operatorname{im} f^p$. Sea $\tilde{a} \in A^p$ tal que $f^p(\tilde{a}) = b_1 - b_2 - d_B^{p-1}(\tilde{b})$. De nuevo por definición de morfismo de cocadenas

$$d_B^p(b_1 - b_2) = d_B^p(b_1 - b_2 - d_B^{p-1}(\tilde{b})) = d_B^p(f^p(\tilde{a})) = f^{p+1}(d_A^p(\tilde{a})),$$

pero, por definición, $f^{p+1}(a_1 - a_2) = d_B^p(b_1 - b_2)$ —salvo, quizás, sumar un elemento de $\operatorname{im} d_A^p$ al argumento de f^{p+1}. La inyectividad de f^{p+1} nos permite concluir que $a_1 - a_2 = d_A^p(\tilde{a}) \in \operatorname{im} d_A^p$. De esta forma, $[a_1] = [a_2]$, y por tanto la asignación ∂^* no depende del representante escogido y está bien definida. □

Tras los preliminares anteriores, enunciamos el resultado central de esta sección, que será pivotal para establecer la sucesión de Mayer-Vietoris.

Teorema 2.6. *(Sucesión exacta larga en cohomología). Sea una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas* (2.4.1)*. Entonces la sucesión*

$$\ldots \to H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \to \ldots$$

es exacta.

Abordaremos la demostración del teorema en tres pasos, organizados en forma de lemas. En todos ellos, partimos de la existencia de una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$.

Lema 2.7. *La sucesión* $H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$ *es exacta.*

Demostración. Por ser una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas, se tiene $g^p \circ f^p = 0$ para todo p, luego

$$g^* \circ f^*([a]) = g^*([f^p(a)]) = [g^p(f^p(a))] = 0$$

para toda clase de cohomología $[a] \in H^p(A^*)$; esto prueba $\operatorname{im} f^* \subset \ker g^*$.

Recíprocamente, consideremos $[b] \in \ker g^*$, *i.e.* $g^*([b]) = 0$. De esta forma $g^p(b) = d_C^{p-1}(c)$ para $c \in C^{p-1}$. La aplicación g^{p-1} es sobreyectiva, luego existe $\tilde{b} \in B^{p-1}$ tal que $g^{p-1}(\tilde{b}) = c$. El diagrama que determina una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas es conmutativo, luego $d_C^{p-1}(c) = d_C^{p-1} \circ g^{p-1}(\tilde{b}) = g^p \circ d_B^{p-1}(\tilde{b})$, y en consecuencia

$$g^p(b - d_B^{p-1}(\tilde{b})) = 0 \implies b - d_B^{p-1}(\tilde{b}) \in \ker g^p = \operatorname{im} f^p.$$

Sea $a \in A^p$ tal que $f^p(a) = b - d_B^{p-1}(\tilde{b})$. En primer lugar, veamos que a es un cociclo. En efecto, de nuevo por conmutatividad, observamos

$$f^{p+1}(d_A^p(a)) = d_B^p(f^p(a)) = d_B^p(b - d_B^{p-1}(\tilde{b})) = 0, \text{ pues } b \in \ker d_B^p \text{ y } d_B^p \circ d_B^{p-1} = 0.$$

La inyectividad de f^p nos permite concluir del cálculo anterior que $d_A^p(a) = 0$, luego efectivamente a es un cociclo, y por tanto $[a] \in H^p(A^*)$ define una clase de cohomología. Más aún, $f^*([a]) = [f^p(a)] = [b - d_B^{p-1}(\tilde{b})] = [b]$, luego $\ker g^* \subset \operatorname{im} f^*$ y concluimos la prueba. □

Lema 2.8. *La sucesión* $H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$ *es exacta.*

Demostración. Sea $[b] \in H^p(B^*)$. Tenemos que

$$\partial^*(g^*([b])) = \partial^*([g^p(b)]) = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b))] = 0,$$

luego $\operatorname{im} g^* \subset \ker \partial^*$. Para el otro contenido, consideramos $[c] \in H^p(C^*)$ tal que $\partial^*([c]) = 0$. La aplicación g^p es sobreyectiva, luego existe $b \in B^p$ tal que $g^p(b) = c$. Más aún, la definición 2.5 junto con $[c] \in \ker \partial^*$ implica que existe $a \in A^p$ tal que

$$d_B^p(b) = f^{p+1}(d_A^p(a)) = d_B^p(f^p(a)) \implies d_B^p(b - f^p(a)) = 0.$$

De esta forma, $b - f^p(a)$ es un cociclo, lo que junto a $g^p \circ f^p = 0$ implica que $g^*([b - f^p(a)]) = [g^p(b - f^p(a))] = [g^p(b)] = [c]$ y $\ker \partial^* \subset \operatorname{im} g^*$, lo que concluye la prueba. □

Lema 2.9. *La sucesión* $H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(C^*)$ *es exacta.*

Demostración. Consideremos $[c] \in H^p(C^*)$. Observamos que, por definición, $f^*(\partial^*([c])) = [d_B^p(b)] = 0$, siendo $g^p(b) = c$. Esto demuestra $\operatorname{im} \partial^* \subset \ker f^*$.

Recíprocamente, sea $a \in A^{p+1}$ un cociclo tal que $f^*([a]) = 0$, o equivalentemente $f^{p+1}(a) = d_B^p(b)$ para algún $b \in B^p$. En este caso, $g^p(b)$ es un cociclo, pues

$$d_C^p(g^p(b)) = g^{p+1}(d_B^p(b)) = g^{p+1}(f^{p+1}(a)) = 0,$$

al ser $0 \to A^{p+1} \xrightarrow{f^{p+1}} B^{p+1} \xrightarrow{g^{p+1}} C^{p+1} \to 0$ exacta. Atendiendo a la definición de ∂^*, concluimos que $\partial^*[g^p(b)] = [a]$, luego $\ker f^* \subset \operatorname{im} \partial^*$. □

Juntando los tres lemas anteriores, completamos la demostración del teorema 2.6.

Por su utilidad posterior, incluimos a continuación algunos resultados auxiliares adicionales.

Definición 2.10. Dados dos morfismos de cocadenas $f, g : A^* \to B^*$, decimos que son *homótopos como cocadenas* si existe una familia de aplicaciones lineales $s : A^p \to B^{p-1}$ satisfaciendo

$$d_B \circ s + s \circ d_A = f - g : A^p \to B^p$$

Lema 2.11. *Dos morfismos que son homótopos como cadenas inducen la misma aplicación lineal sobre los grupos de cohomología, i.e., dados $f, g : A^* \to B^*$ homótopos como cocadenas, entonces $f^* = g^* : H^p(A^*) \to H^p(B^*)$.*

Demostración. Sea $[a] \in H^p(A^*)$, siendo a un cociclo. Entonces

$$(f^* - g^*)([a]) = [f^p(a) - g^p(a)] = [d_B^{p-1}(s(a)) + s(d_A^p(a))] = [d_B^{p-1}(s(a))] = 0,$$

donde hemos usado que, al ser un cociclo, $d_A^p(a) = 0$. □

Dados dos complejos de cocadenas A^* y B^*, podemos construir un tercer complejo como su "suma directa", $A^* \oplus B^*$, definido como $\{A^p \oplus B^p, d_{A\oplus B}^p := (d_A^p, d_B^p)\}$ —donde $A^p \oplus B^p$ denota la suma directa usual como espacios vectoriales. La relación entre los grupos de cohomología de los tres complejos es particularmente sencilla:

Lema 2.12. *Dados A^* y B^* complejos de cocadenas, los grupos de cohomología satisfacen*

$$H^p(A^* \oplus B^*) = H^p(A^*) \oplus H^p(B^*)$$

Demostración. De la definición del complejo $A^* \oplus B^*$, se sigue

$$\ker(d_{A\oplus B}^p) = \ker d_A^p \oplus \ker d_B^p \quad \& \quad \mathrm{im}(d_{A\oplus B}^{p-1}) = \mathrm{im}\, d_A^{p-1} \oplus \mathrm{im}\, d_B^{p-1},$$

lo que implica el resultado. □

Concluimos la sección con el siguiente lema técnico, que será de utilidad para construir isomorfismos entre homologías o cohomologías —en particular, para establecer el isomorfismo de de Rham.

Lema 2.13 (Lema de los cinco)**.** *Dado el diagrama conmutativo de espacios vectoriales y aplicaciones lineales*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Si las filas horizontales son exactas y f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, entonces f_3 también es un isomorfismo.

Demostración. Probamos que f_3 es un isomorfismo mostrando la inyectividad y sobreyectividad por separado:

(i) Inyectividad: Sea $a \in A_3$ tal que $f_3(a_3) = 0$. Por conmutatividad del tercer cuadrado del diagrama,

$$0 = \beta_3 \circ f_3(a_3) = f_4 \circ \alpha_3(a_3) \implies \alpha_3(a_3) = 0,$$

donde la implicación se sigue de que f_4 es un isomorfismo —en particular, inyectivo.

Por exactitud de la primera fila, $\operatorname{im}(\alpha_2) = \ker(\alpha_3)$, luego existe un $a_2 \in A_2$ tal que $a_3 = \alpha_2(a_2)$. La conmutatividad del segundo cuadrado del diagrama implica

$$0 = f_3(a_3) = f_3(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)),$$

luego $f_2(a_2) \in \ker \beta_2 = \operatorname{im} \beta_1$. De esta forma, existe $b_1 \in B_1$ tal que $f_2(a_2) = \beta_1(b_1)$. Al ser f_1 un isomorfismo —en particular, sobreyectivo— existe $a_1 \in A_1$ tal que $f_1(a_1) = b_1$, de tal forma que, por la conmutatividad del primer cuadrado del diagrama,

$$f_2(a_2) = \beta_1(b_1) = \beta_1(f_1(a_1)) = f_2(\alpha_1(a_1)) \implies f_2(a_2 - \alpha_1(a_1)) = 0.$$

La inyectividad de f_2 garantiza que $a_2 = \alpha_1(a_1)$, de tal modo que $a_3 = \alpha_2(\alpha_1(a_1)) = 0$ por exactitud de la primera fila del diagrama. Esto demuestra que $\ker f_3 = \{0\}$, o equivalentemente que f_3 es inyectiva.

(ii) Sobreyectividad: Sea $b_3 \in B_3$. Por ser f_4 un isomorfismo —en particular, sobreyectivo— existe $a_4 \in A_4$ tal que $\beta_3(b_3) = f_4(a_4)$. Por exactitud de la segunda fila del diagrama y la conmutatividad del cuarto cuadrado,

$$0 = \beta_4(\beta_3(b_3)) = \beta_4(f_4(a_4)) = f_5(\alpha_4(a_4)) \implies \alpha_4(a_4) = 0;$$

donde la última implicación es consecuencia de la inyectividad de f_5.

Dado que $\ker(\alpha_4) = \operatorname{im}(\alpha_3)$, existe $a_3 \in A_3$ que satisface $a_4 = \alpha_3(a_3)$. La conmutatividad del tercer cuadrado del diagrama implica entonces

$$\beta_3(b_3) = f_4(a_4) = f_4(\alpha_3(a_3)) = \beta_3(f_3(a_3)) \implies b_3 - f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{im} \beta_2.$$

En consecuencia, existe $b_2 \in B_2$ tal que $b_3 - f_3(a_3) = \beta_2(b_2)$. La sobreyectividad de f_2 garantiza que existe $a_2 \in A_2$ tal que $f_2(a_2) = b_2$, y en consecuencia por la conmutatividad del segundo cuadrado,

$$b_3 - f_3(a_3) = \beta_2(f_2(a_2)) = f_3(\alpha_2(a_2)) \implies b_3 = f_3(a_3 + \alpha_2(a_2)).$$

Definiendo $\tilde{a}_3 := a_3 + \alpha_2(a_2)$, hemos probado que dado $b_3 \in B_3$ arbitrario, existe $\tilde{a}_3 \in A_3$ tal que $b_3 = f_3(\tilde{a}_3)$, luego f_3 es sobreyectiva.

□

3. Cohomología de de Rham

Habiendo estudiado las propiedades abstractas de los complejos de cocadenas, podemos aplicar el formalismo de la sección anterior para definir la cohomología de de Rham sobre una variedad diferenciable.

Consideremos una variedad diferenciable M de dimensión m. Las propiedades de la diferencial exterior garantizan que la sucesión de espacios vectoriales

$$\ldots \to \Gamma^{r-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Gamma^{r}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Gamma^{r+1}(M) \to \ldots \tag{3.0.1}$$

es un complejo de cocadenas (pues $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$). La estructura de complejo de cocadenas nos permite definir la cohomología sobre el complejo de cocadenas asociado a las formas diferenciales de una variedad, que recibe el nombre de *cohomología de de Rham*.

Definición 3.1. Sea $Z^r(M) = \ker \mathrm{d}^r$ el espacio de las r-formas diferenciales cerradas o cociclos de (3.0.1), y $B^r(M) = \operatorname{im} \mathrm{d}^{r-1}$ el espacio de las r-formas diferenciales exactas o cobordes de (3.0.1). Se define el *r-ésimo grupo (en rigor, espacio vectorial) de cohomología de de Rham de M* como

$$H^r(M) := Z^r(M)/B^r(M).$$

Observamos que los grupos de cohomología de de Rham se pueden interpretar, de manera informal, como una medida algebraica de cuán lejos están las formas cerradas de una variedad de ser exactas.

Observación 3.2. Recordamos que los espacios de formas diferenciales satisfacen $\Gamma^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $\Gamma^r(M) = \{0\}$ si $r > m$. Podemos, no obstante, interpretar que la sucesión (3.0.1) se extiende indefinidamente a izquierda y derecha (esto es, tiene sentido para todo $r \in \mathbb{Z}$) extendiendo la sucesión por 0 a ambos lados.

Un primer resultado elemental que nos muestra la conexión entre la cohomología de de Rham de una variedad y su topología es el siguiente

Lema 3.3. *Dada una variedad diferenciable M, $H^0(M) \cong \mathbb{R}^c$, donde c denota el número de componentes conexas de M y "$\cong$" indica que existe un isomorfismo lineal.*

Demostración. De la definición general de grupos de cohomología de de Rham, se sigue que las clases de cohomología de

$$H^0(M) = Z^0(M)/\{0\} = Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : df \equiv 0\}$$

son las funciones diferenciables que cuya diferencial se anula en cada punto. Esto solo puede ocurrir si la función en cuestión es localmente constante, y en consecuencia constante sobre cada componenete conexa de M.

Suponiendo que el espacio tiene c componentes conexas, elegir un elemento de $H^0(M)$ se reduce a elegir una c-tupla de números reales —uno por cada componente conexa. Esta asignación define un isomorfismo lineal $H^0(M) \cong \mathbb{R}^c$, como queríamos ver. □

Sean dos variedades diferenciables M y N y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre ellas. El *pullback* de f es una familia de aplicaciones $f^* : \Gamma^r(N) \to \Gamma^r(M)$ que satisface la condición $f^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ f^*$. De acuerdo con 2.3, el *pullback* de una aplicación diferenciable es entonces un *morfismo de cocadenas* para (3.0.1). En consecuencia, por 2.4, la familia de aplicaciones f^* induce una familia de aplicaciones entre los grupos de cohomología (que denotaremos de la misma forma) $f^* : H^r(N) \to H^r(M)$. Hemos demostrado el siguiente resultado.

Corolario 3.4. *Una aplicación diferenciable entre variedades $f : M \to N$ induce una familia de aplicaciones lineales $f^* : H^r(N) \to H^r(M)$ entre sus grupos de cohomología.*

Observamos que las aplicaciones inducidas sobre los grupos de cohomología heredan la propiedad $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ de los respectivos *pullbacks*. De esta propiedad, junto con $(\mathrm{Id}_M)^* = \mathrm{Id}_{H^r(M)}$, se sigue inmediatamente que si dos variedades M y N son difeomorfas, sus grupos de cohomología de de Rham son isomorfos. En otras palabras, la cohomología de de Rham es invariante por difeomorfismos. De hecho, veremos un resultado mucho más fuerte: que es *invariante por homotopías diferenciables.*

Para concluir esta sección, observamos que el producto exterior en formas diferenciales se puede extender de manera natural a un producto en clases de cohomología. En efecto, consideramos

$$\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}(M); ([\omega_1], [\omega_2]) \mapsto [\omega_1 \wedge \omega_2].$$

Para ver que el producto está bien definido sobre clases de cohomología, basta demostrar que es independiente del representante escogido, como se sigue del cálculo

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \mathrm{d}\eta_1) \wedge (\omega_2 + \mathrm{d}\eta_2) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \mathrm{d}\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathrm{d}\eta_2 + \mathrm{d}\eta_1 \wedge \mathrm{d}\eta_2 \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \mathrm{d}(\eta_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \eta_2 + \eta_1 \wedge \mathrm{d}\eta_2);\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la tercera propiedad de 1.6 en conjunción con $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

4. Lema de Poincaré e invariancia por homotopías

Una vez definida la cohomología de de Rham de una variedad diferenciable arbitraria M, estudiamos los grupos de cohomología de $\mathbb{R}^n$.

En particular, la cohomología de $\mathbb{R}^n$ surgirá como consecuencia del siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Sea $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ la proyección usual. La aplicación inducida entre grupos de cohomología, $\pi^* : H^k(M) \to H^k(M \times \mathbb{R})$ es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideramos la familia de aplicaciones $i_s : M \to M \times \mathbb{R}$, $i_s(x) = (x, s)$. Por definición $\pi \circ i_0 = \mathrm{Id}_M$, luego $i_0^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}_{H^k(M)}$ y π^* es inyectiva.

Para probar la sobreyectividad, consideramos la aplicación $i_0 \circ \pi : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$, $i_0 \circ \pi(x, t) = (x, 0)$. El *pullback* de la aplicación anterior genera un morfismo de complejos de cocadenas, formado por una familia de aplicaciones $\pi^* \circ i_0^* : \Gamma^k(M \times \mathbb{R}) \to \Gamma^k(M \times \mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Basta comprobar que el morfismo de cocadenas es homótopo a la identidad, *i.e.*, que existe una familia de aplicaciones $K : \Gamma^k(M \times \mathbb{R}) \to \Gamma^{k-1}(M \times \mathbb{R})$ tal que

$$\mathrm{Id} - \pi^* \circ i_0^* = \mathrm{d} \circ K + K \circ \mathrm{d}, \tag{4.1.1}$$

pues en ese caso por la proposición 2.11 obtendríamos que $\pi^* \circ i_0^* = \mathrm{Id} : H^k(M \times \mathbb{R}) \to H^k(M \times \mathbb{R})$ (teniendo en cuenta el abuso de notación que nos hace denotar de la misma manera el *pullback* con la aplicación que este induce sobre los grupos de cohomología).

Fijamos un abierto coordenado $U \subset M$, y consideramos $U \times \mathbb{R}$. Denotamos por t el valor de la coordenada asociada al factor $\mathbb{R}$ en el producto cartesiano $M \times \mathbb{R}$, y $\mathrm{d}t$ al (*pullback* del) generador global de las 1-formas asociadas al factor $\mathbb{R}$ del producto cartesiano. Toda forma diferenciable $\omega \in \Gamma^k(U \times \mathbb{R})$ se puede escribir como

$$\omega = \sum\nolimits_I f_I(x,t)\,\mathrm{dx}_I + \sum\nolimits_J g_J(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{dx}_J, \tag{4.1.2}$$

donde $I = (i_1, ..., i_k)$ y $J = (j_1, ..., j_{k-1})$ son multiíndices.

Teniendo en cuenta (4.1.2), definimos el operador $K : \Gamma^k(U \times \mathbb{R}) \to \Gamma^{k-1}(U \times \mathbb{R})$ mediante la expresión

$$K(\omega) := \sum\nolimits_J \Big(\int_0^t g_J(x,\xi) d\xi \Big)\,\mathrm{dx}_J. \tag{4.1.3}$$

Una vez hallado un candidato a K, comprobar si se satisface (4.1.1) se reduce a calcular cada sumando y operar. En primer lugar, a partir de la expresión(4.1.2), se tiene

$$\mathrm{d}\omega = \sum\nolimits_{I,i} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}\,\mathrm{dx}_i \wedge \mathrm{dx}_I + \sum\nolimits_I \frac{\partial f_I}{\partial t}\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{dx}_I + \sum\nolimits_{J,i} \frac{\partial g_J}{\partial x_i}\,\mathrm{dx}_i \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{dx}_J,$$

luego en consecuencia

$$\begin{cases} \mathrm{d}K(\omega) = \sum_{J,i} \Big(\int_0^t \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,\xi) d\xi \Big)\,\mathrm{dx}_i \wedge \mathrm{dx}_J + \sum_J g_J(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{dx}_J, \\ K(\mathrm{d}\omega) = \sum_I (f_I(x,t) - f_I(x,0))\,\mathrm{dx}_I - \sum_{J,i} \Big(\int_0^t \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,\xi) d\xi \Big)\,\mathrm{dx}_i \wedge \mathrm{dx}_J, \end{cases}$$

donde el último signo menos se debe a que en la expresión de $\mathrm{d}\omega$ hemos de permutar dx_i y $\mathrm{d}t$ para recuperar una expresión escrita de la forma (4.1.2) a la que podamos aplicar la definición de K. De esta forma

$$\mathrm{d}K(\omega) + K(\mathrm{d}\omega) = \sum\nolimits_I \big(f_I(x,t) - f_I(x,0)\big)\,\mathrm{dx}_I + \sum\nolimits_J g_J(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{dx}_J.$$

Calculamos a continuación el otro lado de la igualdad en (4.1.1). Si consideramos cada x_i y t como las correspondientes funciones proyección, tenemos que

$$x_i \circ (i_0 \circ \pi)(x,t) = x_i(x,0) = x_i \quad \& \quad t \circ (i_0 \circ \pi)(x,t) = t(x,0) = 0.$$

Aplicando el cuarto apartado de 1.5 para calcular el pullback de una forma en coordenadas locales, tenemos que

$$\pi^* \circ i_0^*(\omega) = (i_0 \circ \pi)^*(\omega) = \sum\nolimits_I f_I(x,0)\,\mathrm{dx}_I,$$

y en consecuencia

$$\mathrm{Id}(\omega) - \pi^* \circ i_0^*(\omega) = \sum\nolimits_I \big(f_I(x,t) - f_I(x,0)\big)\,\mathrm{dx}_I + \sum\nolimits_J g_J(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{dx}_J.$$

Comparando las expresiones anteriores, obtenemos que se cumple (4.1.1) para $U \times \mathbb{R}$. Para extender el resultado a $M \times \mathbb{R}$, observamos que todos los operadores de (4.1.1) tienen carácter local, esto es, tienen una expresión en coordenadas para cualquier abierto coordenado. En consecuencia, si podemos extender la definición de K a todo $M \times \mathbb{R}$, la igualdad (4.1.1) quedará demostrada.

Sea $\omega \in \Gamma^k(M \times \mathbb{R})$. Supongamos que hay dos dominios de coordenadas U y V (con sistemas de coordendadas x e y respectivamente) tales que la forma ω tiene en cada uno de ellos la expresión

$$\begin{cases} \omega|_U &= \sum_I f_I(x,t)\,\mathrm{d}x_I + \sum_J g_J(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_J, \\ \omega|_V &= \sum_I \tilde{f}_I(y,t)\,\mathrm{d}y_I + \sum_J \tilde{g}_J(y,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y_J. \end{cases}$$

En la intersección $U \cap V$, ambas expresiones han de coincidir, y por independencia lineal, se debe cumplir

$$\sum_J g_J(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_J = \sum_J \tilde{g}_J(y,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y_J.$$

Como t y $\mathrm{d}t$ no cambian a ambos lados de la igualdad, sustituyendo el producto por $\mathrm{d}t$ por una integral, hallamos que el valor de $K(\omega)|_{U\cap V}$ es el mismo independientemente del sistema de coordenadas utilizado. De esta forma, podemos definir el operador $K : \Gamma^k(M \times \mathbb{R}) \to \Gamma^k(M \times \mathbb{R})$ sin más que recubrir la variedad M por abiertos que sean dominios de coordenadas y definir sobre cada unos de estos abiertos el operador K como en (4.1.3). □

Con el resultado anterior, ya estamos en disposición de calcular todos los grupos de cohomología del espacio afín $\mathbb{R}^n$ para n arbitrario. Este resultado se conoce como *lema de Poincaré*[4].

Corolario 4.2 (Lema de Poincaré)**.** *La cohomología de $\mathbb{R}^n$ viene dada por*

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si } k = 0, \\ \{0\} & \textit{si } k > 0. \end{cases}$$

Demostración. Empezamos calculando la cohomología de $\mathbb{R}$. Por el lema 3.3, sabemos que $H^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Más aún, como la dimensión de $\mathbb{R}$ es 1, $H^k(\mathbb{R}) = \{0\}$ para $k > 1$. Resta considerar el caso $k = 1$.

Dada una forma $\omega \in \Gamma^1(\mathbb{R})$, como $\mathbb{R}$ tiene una parametrización global como variedad diferenciable (la identidad), podemos afirmar que $\omega = f\,\mathrm{d}x$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de clase infinito. Definiendo

$$g(x) := \int_0^x f(t)dt$$

hallamos que $\mathrm{d}g = \omega$, luego $H^1(\mathbb{R}) = \{0\}$. En suma, hemos obtenido que

$$H^k(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \{0\} & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Por el teorema 4.1, se sigue que $H^k(\mathbb{R}^l) \cong H^k(\mathbb{R}^{l+1})$ para cualesquiera enteros positivos k y l, luego razonando por inducción sobre n concluimos que

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong H^k(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \{0\} & \text{si } k > 0, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

[4]Hay autores que denominan *lema de Poincaré* al resultado anterior, véase [2].

El teorema 4.1 nos permite demostrar otros resultados de gran interés; en particular, que la cohomología de de Rham es un *invariante por homotopías diferenciables.*

Definición 4.3. Dos aplicaciones diferenciables entre variedades $f, g : M \to N$ se dicen *diferenciablemente homótopas* (denotado $f \sim_\infty g$) si existe una aplicación diferenciable $H : M \times [0,1] \to N$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in M$.

Corolario 4.4. *Dos aplicaciones diferenciables entre variedades $f_0, f_1 : M \to N$ diferenciablemente homótopas inducen en cohomología las mismas aplicaciones lineales, i.e. $f_0^* = f_1^* : H^k(N) \to H^k(M)$.*

Demostración. Sea $H : M \times [0,1] \to N$ una homotopía con $H(x,0) = f_0(x)$ y $H(x,1) = f_1(x)$ para todo $x \in M$. En la notación del teorema 4.1, tenemos $f_0 = H \circ i_0$ y $f_1 = H \circ i_1$. Consideremos una función diferenciable $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $\rho(s) = 0$ para $s \leq 0$ y $\rho(s) = 1$ para $s \geq 1$; por ejemplo

$$\rho(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0, \\ \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{e^{-\frac{1}{s}} + e^{-\frac{1}{1-s}}} & \text{si } 0 < s < 1, \\ 1 & \text{si } s \geq 1. \end{cases} \tag{4.4.4}$$

La aplicación $K : M \times \mathbb{R} \to N$, $K(x,s) := H(x, \rho(s))$ es diferenciable por composición y satisface $f_0 = K \circ i_0$ y $f_1 = K \circ i_1$. Por definición de la familia i_s, $\pi \circ i_s = \mathrm{Id}_M$, luego $i_s^* \circ \pi^* = (\mathrm{Id}_M)^* = \mathrm{Id}_{H^k(M)}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Dado que π^* es un isomorfismo por 4.1, $i_0^* = i_1^* = (\pi^*)^{-1}$, y en consecuencia $f_0^* = f_1^* = (\pi^*)^{-1} \circ K^*$. ☐

Definición 4.5. Una aplicación diferenciable $f : M \to N$ es una *equivalencia homotópica diferenciable* si existe otra aplicación $g : N \to M$ tal que $f \circ g \sim_\infty \mathrm{Id}_N$ y $g \circ f \sim_\infty \mathrm{Id}_M$.

En particular, por la definición de *pullback* y 4.4, $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{Id}_{H^k(M)}$ y $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \mathrm{Id}_{H^k(N)}$, luego tenemos:

Corolario 4.6. *Las aplicaciones lineales inducidas $f^* : H^k(N) \to H^k(M)$ por una equivalencia homotópica diferenciable $f : M \to N$ son isomorfismos.*

Observación 4.7. Consideremos el conjunto $\{0\} \subset \mathbb{R}^p$ para algún $p > 0$. Este conjunto tiene trivialmente estructura de variedad diferenciable 0-dimensional, luego por 3.2 $\Gamma^k(\{0\}) = \{0\}$ para $k > 0$. Esta observación, junto con 3.3, nos permite concluir

$$H^k(\{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \{0\} & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Por 4.6, cualquier variedad diferenciable diferenciablemente contráctil —*i.e.*, tal que la identidad es diferenciablemente homótopa a una aplicación constante; o equivalentemente que sea homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual por una homotopía diferenciable— tendrá grupos de cohomología de de Rham isomorfos a los anteriores. En particular, el espacio afín $\mathbb{R}^m$ es diferenciablemente contráctil; basta tomar como equivalencias de homotopía diferenciables las aplicaciones inclusión $j : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^m \to \{0\}$, con $f \circ j = \mathrm{Id}_{\{0\}}$ y $j \circ f \sim_\infty \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$ a través de la homotopía $H(x,t) = (1-t)x$. De esta forma, obtenemos de nuevo 4.2 a partir de 4.6.

5. La sucesión de Mayer-Vietoris

Comenzamos con el siguiente resultado previo:

Teorema 5.1. *Sea M una variedad diferenciable y $\{U_1, U_2\}$ un recubrimiento abierto de M. Para $\nu = 1, 2$, consideramos las correspondientes inclusiones $i_\nu : U_\nu \hookrightarrow M$ y $j_\nu : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_\nu$. La sucesión*

$$0 \to \Gamma^k(M) \xrightarrow{I^k} \Gamma^k(U_1) \oplus \Gamma^k(U_2) \xrightarrow{J^k} \Gamma^k(U_1 \cap U_2) \to 0 \tag{5.1.1}$$

es exacta, donde $I^k(\omega) := (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$ y $J^k(\omega_1, \omega_2) := j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$.

Demostración. Dado un abierto $N \subset M$, la inclusión $\phi : N \hookrightarrow M$ induce, por el *pullback* $\phi^* : \Gamma^k(M) \to \Gamma^k(N)$, la restricción de las formas diferenciales de M a N. En efecto, fijando un sistema de coordenadas locales, al ser ϕ una inclusión se verifica que $\phi^*(\mathrm{d}x_I) = \mathrm{d}x_I$, luego por 1.5 tenemos que

$$\text{si} \ \ \omega = \sum\nolimits_I f_I(x)\, \mathrm{d}x_I \ \ \text{entonces} \ \ \phi^*(\omega) = \sum\nolimits_I (f_I \circ \phi)\, \mathrm{d}x_I.$$

Recubriendo N por dominios de coordenadas, la fórmula anterior demuestra que $\phi^*(\omega) = \omega|_N$. Hecha esta observación, se sigue la inyectividad de I^k: consideremos una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_1, \theta_2\}$ subordinada al recubrimiento $\{U_1, U_2\}$, de tal forma que sop $\theta_\nu \subset U_\nu$. Las propiedades de las particiones diferenciables de la unidad nos permiten escribir

$$\omega = \theta_1 \omega|_{U_1} + \theta_2 \omega|_{U_2} = \theta_1 i_1^*(\omega) + \theta_2 i_2^*(\omega). \tag{5.1.2}$$

Si $I^k(\omega) = 0$, entonces por definición $i_1^*(\omega) = i_2^*(\omega) = 0$. Por (5.1.2), esto implica $\omega \equiv 0$, y en consecuencia I^k es inyectiva.

Buscamos ahora establecer $\ker J^k = \operatorname{im} I^k$. En primer lugar, observamos que $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2 \equiv j : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow M$, donde j es la inclusión. La igualdad de las aplicaciones $i_\nu \circ j_\nu$ implica la igualdad de los *pullbacks*, luego

$$J^k \circ I^k(\omega) = j_1^* \circ i_1^*(\omega) - j_2^* \circ i_2^*(\omega) = j^*(\omega) - j^*(\omega) = 0,$$

lo que demuestra $\operatorname{im} I^k \subset \ker J^k$. Para el otro contenido, observamos que dados $\omega_\nu \in \Gamma^k(U_\nu)$ para $\nu = 1, 2$, $J^k(\omega_1, \omega_2) = 0$ implica que $j_1^*(\omega_1) = j_2^*(\omega_2)$. A su vez, esto implica que $\omega_1|_{U_1 \cap U_2} = \omega_2|_{U_1 \cap U_2}$. Análogamente a (5.1.2), esto nos permite definir $\omega \in \Gamma^k(M)$ mediante

$$\omega := \theta_1 \omega_1 + \theta_2 \omega_2,$$

de tal modo que $i_1^*(\omega) = \omega_1$ y $i_2^*(\omega) = \omega_2$. De esta forma, $I^k(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ y se sigue que $\ker J^k \subset \operatorname{im} I^k$.

Resta demostrar que J^k es sobreyectiva. Para ello, consideramos $\omega \in \Gamma^k(U_1 \cap U_2)$. Apelando nuevamente a la partición diferenciable de la unidad $\{\theta_1, \theta_2\}$, definimos

$$\omega_1 := \begin{cases} \theta_2 \omega & \text{en } U_1 \cap U_2, \\ 0 & \text{en } U_1 \setminus \text{sop } \theta_2, \end{cases} \qquad \omega_2 := \begin{cases} -\theta_1 \omega & \text{en } U_1 \cap U_2, \\ 0 & \text{en } U_2 \setminus \text{sop } \theta_1. \end{cases}$$

Como sop $\theta_\nu \subset U_\nu$, se sigue que $U_1 \setminus U_2 \subset U_1 \setminus \text{sop } \theta_2$ y $U_2 \setminus U_1 \subset U_2 \setminus \text{sop } \theta_1$. Por tanto, los ω_ν están bien definidos, son diferenciables y constituyen una extensión por cero (salvo signo) de ω a U_1 y U_2 respectivamente. De esta forma, $\omega_1 \in \Gamma^k(U_1)$ y $\omega_2 \in \Gamma^k(U_2)$. Por último, comprobamos

$$J^k(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2) = \omega_1|_{U_1 \cap U_2} - \omega_2|_{U_1 \cap U_2} = (\theta_2 \omega) - (-\theta_1 \omega) = \omega,$$

pues $\theta_1(x) + \theta_2(x) = 1$ para todo $x \in M$. De esta forma, comprobamos que J^k es sobreyectiva, y por tanto la sucesión de (5.1) es exacta. □

El teorema 5.1 garantiza que esa sucesión es exacta corta para todo valor de k entero positivo o cero, así que de hecho el teorema anterior define una *sucesión exacta corta de complejos de cocadenas*. Más aún, el teorema 2.6 nos permite extender la sucesión anterior a una sucesión exacta larga en grupos de cohomología. Finalmente, el lema 2.12 nos permite escribir

$$H^k(\Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2)) \cong H^k(U_1) \oplus H^k(U_2).$$

Reuniendo los resultados anteriores, hemos obtenido la *sucesión exacta larga en cohomología* o *sucesión de Mayer-Vietoris*:

Teorema 5.2. *Sea $\{U_1, U_2\}$ un recubrimiento abierto de una variedad diferenciable M. La sucesión de grupos de cohomología de de Rham*

$$\dots \to H^k(M) \xrightarrow{I^*} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{J^*} H^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{k+1}(M) \to \dots$$

es exacta larga, donde $I^*([\omega]) := (i_1^*([\omega]), i_2^*([\omega]))$ y $J^*([\omega_1], [\omega_2]) = j_1^*([\omega_1]) - j_2^*([\omega_2])$.

En los casos en que podamos particionar la variedad M en dos abiertos disjuntos U_1 y U_2, el resultado anterior se simplifica todavía más.

Corolario 5.3. *Sea $\{U_1, U_2\}$ un recubrimiento por abiertos disjuntos de M. La aplicación*

$$I^* : H^k(U_1 \cup U_2) \to H^k(U_1) \oplus H^k(U_2)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Si $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, entonces $\Gamma^k(U_1 \cap U_2) = 0$. Por el teorema 5.1, la sucesión

$$0 \to \Gamma^k(M) \xrightarrow{I^k} \Gamma^k(U_1) \oplus \Gamma^k(U_2) \to 0$$

es exacta, luego I^k es un isomorfismo entre complejos de cocadenas. Aplicando de nuevo 2.12 para escribir $H^k(\Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2)) \cong H^k(U_1) \oplus H^k(U_2)$, concluimos que la correspondiente aplicación inducida I^* entre grupos de cohomología es también un isomorfismo, como queríamos demostrar. □

Observación 5.4. El resultado anterior se puede generalizar a una familia numerable de abiertos disjuntos dos a dos, incluso sin utilizar 5.2; de tal modo que se satisface

$$H^n(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k) \cong \prod_{k \in \mathbb{N}} H^n(U_k).$$

En efecto, los *pullbacks* de las inclusiones $i_\ell : U_\ell \hookrightarrow \cup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ inducen el isomorfismo en n-formas diferenciales a través de la aplicación

$$S^* : \omega \mapsto (i_1^* \omega, i_2^* \omega, \dots) \equiv (\omega|_{U_1}, \omega|_{U_2}, \dots). \tag{5.4.3}$$

La asignación anterior define un isomorfismo de $\Gamma^n(\cup_{k\in\mathbb{N}}U_k)$ en $\prod_{k\in\mathbb{N}}\Gamma^n(U_k;\mathbb{R})$: basta tomar una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ subordinada a $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ —visto como recubrimiento por abiertos de sí mismo— y observar que

$$\omega = \sum_{k\in\mathbb{N}} \theta_k\omega|_{U_k} = \theta_1\omega|_{U_1} + \theta_2\omega|_{U_2} + \dots,$$

—que está bien definido por la local-finitud de las particiones diferenciables, (1) en 1.1.

La igualdad anterior muestra que el núcleo de (5.4.3) es trivial y que una colección de n-formas en cada uno de los U_ℓ determina una n-forma en la unión que se relaciona con las anteriores por restricción. De esta forma, (5.4.3) es un isomorfismo, y por tanto promociona a un isomorfismo a nivel de cohomología.

6. Homología singular

En el espacio afín $\mathbb{R}^m$, el concepto de n-símplice es la generalización natural de los triángulos en dos dimensiones. Consideremos $n+1$ puntos $v_0,...,v_n\in\mathbb{R}^m$ tales que el conjunto $\{v_1-v_0,...,v_n-v_0\}$ es linealmente independiente. El *n-símplice de vértices* $v_0,...,v_n$; que denotamos $[v_0,...,v_n]$, es por definición el menor conjunto convexo que contiene a los puntos $v_0,...,v_n$. El n-símplice estándar se define como

$$\Delta^n := \{(t_0,...,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i\geq 0, \forall i=0,1,...n\} \equiv [e_0,e_1,\dots,e_n], \tag{6.0.1}$$

denotando por $e_0,e_1,\dots,e_n$ a los vectores de la base estándar de $\mathbb{R}^{n+1}$.

El homeomorfismo afín canónico

$$\Delta^n \to [v_0,\dots,v_n]; (t_0,\dots,t_n)\mapsto \sum_{i=0}^n t_iv_i, \tag{6.0.2}$$

que manda $e_i\mapsto v_i$ para $i\in\{0,1,\dots,n\}$, nos permite identificar cualquier n-símplice con Δ^n. Nótese, además, que el homeomorfismo anterior es de hecho un difeomorfismo.

Una vez definido el concepto de n-símplice en el espacio afín, extendemos el concepto a variedades diferenciables:

Definición 6.1. Un *n-símplice singular diferenciable* definido en conjunto afín X es una aplicación diferenciable $\sigma:\Delta^n\to X$.

Cuando no haya lugar a confusión, llamaremos simplemente n-símplices diferenciables a los n-símplices singulares diferenciables. Por conveniencia llamaremos también n-símplice diferenciable a cualquier aplicación diferenciable $\sigma:[v_0,\dots,v_n]\to X$, que se puede convertir en un n-símplice según 6.1 componiendo con (6.0.2) y viceversa.

Definimos el conjunto de *n-cadenas* diferenciables $C_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por los n-símplices diferenciables, esto es, el grupo cuyos elementos son las sumas formales finitas

$$\sum_i k_i\sigma_i, \quad \text{con } k_i\in\mathbb{Z} \text{ y } \sigma_i \text{ un } n\text{-símplice diferenciable.} \tag{6.1.3}$$

Observación 6.2. Es habitual denotar el conjunto de n-cadenas diferenciables como $C_n(X;\mathbb{Z})$, indicando explícitamente la elección de $\mathbb{Z}$ para los coeficientes. Tal como sugiere la notación, es posible desarrollar la teoría imponiendo la condición $k_i \in G$ para todo i en (6.1.3), siendo G un grupo abeliano cualquiera —en el caso de que G tenga estructura de anillo conmutativo, $C_n(X;G)$ tiene estructura de G-módulo. La teoría de homología que surge en este caso recibe el nombre de *homología con coeficientes en* G. En este texto únicamente consideramos el caso de cadenas con coeficientes enteros, así que en lo sucesivo denotaremos por simplicidad $C_n(X)$ —y análogamente para grupos homología—, entendiéndose por defecto que los coeficientes siempre están definidos en $\mathbb{Z}$.

Definición 6.3. El operador borde $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ se define sobre n-símplices diferenciables como

$$\partial(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]},$$

donde identificamos $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ con Δ^{n-1} vía (6.0.2), y se extiende a cadenas por linealidad.

Proposición 6.4. *El operador borde satisface* $\partial \circ \partial \equiv 0$.

Demostración. Por linealidad, es suficiente demostrar que $\partial(\partial(\sigma)) = 0$ para todo n-símplice singular diferenciable.

Por definición, $\partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$, aplicando de nuevo el operador borde se sigue

$$\partial(\partial(\sigma)) = \sum_{j<i} (-1)^j (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_n]}.$$

Observando que $(-1)^{j-1} = (-1)(-1)^j$, e intercambiando i y j en el segundo sumando, concluimos que la suma anterior se anula, como queríamos demostrar. □

La proposición anterior pone de manifiesto la dualidad entre los conceptos anteriores y los correspondientes a la cohomología. Según esta dualidad, la sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\ldots \to C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \to \ldots \to C_0(X) \xrightarrow{\partial} 0 \tag{6.4.1}$$

es un *complejo de cadenas*, pues satisface $\partial \circ \partial \equiv 0$. El resto de terminología se adapta de forma similar.

En particular, la condición $\partial \circ \partial \equiv 0$ es equivalente a $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$. De esta forma, podemos definir el *n-ésimo grupo de homología singular diferenciable de* X como

$$H_n(X) := \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1} \tag{6.4.2}$$

—siguiendo el criterio de notación establecido en 6.2.

Una vez definidos los grupos de homología, pasamos a demostrar algunas propiedades básicas de los mismos.

Proposición 6.5. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ la familia de componentes conexas por caminos*[5] *diferenciables del conjunto afín X. Hay un isomorfismo*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} H_n(X_\alpha).$$

Observación 6.6. Para variedades diferenciables —que es el caso que más nos va a interesar en secciones sucesivas— las componentes conexas por caminos diferenciables coinciden con las componentes conexas usuales, pues al ser localmente difeomorfas al espacio afín son en particular localmente conexas por caminos diferenciables.

Demostración. Para cada símplice singular diferenciable $\sigma : \Delta^n \to X$ existe un único $\alpha \in \Lambda$ tal que $\sigma(\Delta^n) \subset X_\alpha$, por tanto $\sigma \in C_n(X_\alpha)$. De esta forma, para cada cadena $c \in C_n(X)$ existe una única forma de escribirla $c = \sum_\alpha c_\alpha$, con $c_\alpha \in C_n(X_\alpha)$, esto es

$$C_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} C_n(X_\alpha).$$

El operador borde, por definición, respeta esta división, *i.e.* $\partial(C_n(X_\alpha)) \subset C_{n-1}(X_\alpha)$. En particular, $\ker\partial_n$ e $\operatorname{im}\partial_{n+1}$ tienen descomposiciones similares como suma directa, luego

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} H_n(X_\alpha).$$

□

Observación 6.7. Los caminos diferenciables introducen alguna sutileza adicional a la hora de concatenar caminos:

Supongamos que σ es un camino diferenciable que conecta a con b y τ otro camino diferenciable que conecta b con c —donde ambos caminos tienen imagen contenida en un cierto conjunto afín X. La concatenación $\sigma * \tau$ no tiene por qué ser diferenciable en la juntura o punto de unión de ambos caminos. Esta dificultad puede resolverse, no obstante, reparametrizando σ y τ por funciones meseta adecuadas —construidas de forma análoga a como se contruyó (4.4.4)—, de tal forma que obtengamos caminos reparametrizados σ' y τ' (respectivamente) con misma imagen pero localmente constantes en los extremos. En este caso, $\sigma' * \tau'$ es localmente constante en la juntura, luego diferenciable.

Proposición 6.8. *Si X es un conjunto afín no vacío y conexo por caminos diferenciables, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. En (6.4.1), hemos definido $C_n(X) = 0$ para $n < 0$. De esta forma, $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{im}\partial_1$. Consideremos el homomorfismo

$$\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}\,;\ \sum_i k_i\sigma_i \mapsto \sum_i k_i.$$

La aplicación anterior es sobreyectiva (basta considerar todas las cadenas generadas por un único símplice), luego por el primer teorema de isomorfía de grupos basta probar $\ker\varepsilon = \operatorname{im}\partial_1$.

[5] El requisito de conexión por caminos es natural en este contexto: los 1-símplices no son otra cosa que caminos diferenciables.

Observamos en primer lugar que para un 1-símplice σ, $\partial(\sigma) = \sigma|_{[e_1]} - \sigma|_{[e_0]}$, luego $\varepsilon\partial(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{[e_1]} - \sigma|_{[e_0]}) = 1 - 1 = 0$. Se sigue pues que $\operatorname{im}\partial_1 \subset \ker\varepsilon$. Para probar $\ker\varepsilon \subset \operatorname{im}\partial_1$, tomamos una cadena cualquiera del núcleo de ε, de modo que $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = \sum_i k_i = 0$. Cada uno de los σ_i en la igualdad anterior son 0-símplices, esto es, puntos en X. Sea $\tau_i : [0,1] \to X$ un camino diferenciable que va desde un punto cualquiera $x_0 \in X$ a $\sigma_i(e_0)$, y sea σ_0 el 0-símplice de imagen x_0. Recordando que $e_0 = (1,0)$, $e_1 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ y precomponiendo con la inversa del difeomorfismo lineal $t \mapsto (1-t)e_0 + te_1$ (que va desde $[0,1]$ a $[e_0, e_1]$), observamos que $\tau_i : [e_0, e_1] \to X$ es un 1-símplice. De esta forma, $\partial\tau_i = \tau_i|_{[e_1]} - \tau_i|_{[e_0]} = \sigma_i - \sigma_0$, luego

$$\partial\Big(\sum\nolimits_i k_i\tau_i\Big) = \sum\nolimits_i k_i\sigma_i - \sum\nolimits_i k_i\sigma_0 = \sum\nolimits_i k_i\sigma_i,$$

pues $\sum_i k_i = 0$. De la construcción de los τ_i y la igualdad anterior se sigue $\ker\varepsilon \subset \operatorname{im}\partial_1$. $\square$

Ejemplo 6.9. Consideremos el espacio formado por un solo punto, que identificamos con $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$ para algún $m > 0$ entero.

Para cada $n \geq 0$, existe un único n-símplice diferenciable $\sigma_n : \Delta^n \to \{0\}$ —el idénticamente nulo— luego $C_n(\{0\}) \cong \mathbb{Z}$ y

$$\partial(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

El operador ∂ va alternando entre ser un isomorfismo o la aplicación idénticamente nula en el complejo de cadenas asociado a $\{0\}$,

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

de tal forma que $H_n(\{0\}) = \{0\}$ para $n > 0$ y $H_0(\{0\}) \cong \mathbb{Z}$ directamente de la definición (6.4.2). Este cálculo se extiende inmediatamente, aplicando 6.5, al caso del espacio formado por una cantidad finita de puntos.

La definición de grupos de homología y los resultados anteriores son igualmente válidos, con las mismas demostraciones, en la categoría topológica sin más que sustituir la diferenciabilidad por continuidad. Así, tenemos los *grupos de homología singular* (sin el epíteto "diferenciable").

7. Invariancia homotópica de la homología singular

Al igual que en el caso de la cohomología de de Rham, los grupos de homología singular diferenciable son invariantes por homotopías diferenciables.

Definición 7.1. Dada una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ entre conjuntos afines X e Y, el *homomorfismo inducido en cadenas* $f_\# : C_n(X) \to C_n(Y)$ asigna a cada n-símplice diferenciable $\sigma : \Delta^n \to X$ la composición $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$, y se extiendiende por linealidad a cadenas diferenciables arbitrarias.

El homomorfismo inducido en cadenas conmuta con el operador borde; basta observar que para un n-símplice diferenciable arbitrario σ

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#\Big(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}\Big) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f\circ\sigma)|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]} = \partial f_\#(\sigma), \tag{7.1.1}$$

y como los n-símplices diferenciables son base de las cadenas, tenemos $f_\#\circ\partial = \partial\circ f_\#$.

Podemos reformular el resultado anterior diciendo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por la condición $f_\#\circ\partial = \partial\circ f_\#$, al igual que en el caso de la cohomología diremos que $f_\#$ (entendida ahora como la colección de todas las aplicaciones $f_\# : C_n(X)\to C_n(Y)$ para $n\in\mathbb{N}$) es un *morfismo de cadenas*. La prueba del lema 2.4 sigue siendo válida en este contexto sin más que cambiar d por ∂ e identificar A^{p-i} y B^{p-i} con $C_{n+i}(X)$ y $C_{n+i}(Y)$, respectivamente (para $i=-1,0,1$). Concluimos pues:

Proposición 7.2. *El morfismo de cadenas $f_\#$ induce homomorfismos entre los grupos de homología $f_* : H_n(X)\to H_n(Y)$, con $f_*([c]) := [f_\#(c)]$.*

Los homomorfismos inducidos en los grupos de homología satisfacen las siguientes propiedades inmediatas:

- $(f\circ g)_* = f_*\circ g_*$ para aplicaciones entre conjuntos afines $g : X\to Y$ y $f : Y\to Z$.

  Basta observar que es indistinto escribir $f\circ(g\circ\sigma) = (f\circ g)\circ\sigma$ por asociatividad de la composición.

- $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{H_n(X)}$, con $\mathrm{Id}_X : X\to X$ la identidad en el conjunto X.

Las dos propiedades anteriores implican que dos conjuntos afines difeomorfos tienen grupos de homología isomorfos. Más aún, las definiciones 4.3 y 4.5 se generalizan de forma inmediata para conjuntos afines generales, y como dijimos antes, se tiene un resultado mejor para homotopía diferenciable.

Teorema 7.3. *Dos aplicaciones diferenciables $f, g : X\to Y$ diferenciablemente homótopas inducen en homología los mismos homomorfismos, i.e. $f_* = g_* : H_n(X)\to H_n(Y)$.*

Demostración. La idea de la prueba es explotar el análogo en homología singular del lema 2.11; esto es, buscar un operador $P : C_n(X)\to C_{n+1}(Y)$ (llamado *operador prisma*) que satisfaga la relación

$$\partial\circ P + P\circ\partial = g_\# - f_\#, \tag{7.3.1}$$

y de aquí se seguirá el resultado.

Para definir el operador prisma, que necesariamente estará relacionado con la homotopía entre f y g, debemos en primer lugar determinar como subdividir $\Delta^n\times[0,1]$ en símplices, pues P es un operador que actúa entre cadenas. Sea $\Delta^n\times\{0\} := [v_0,\dots,v_n]$ y $\Delta^n\times\{1\} := [w_0,\dots,w_n]$. Afirmamos que se puede subdividir $\Delta^n\times[0,1]$ en $(n+1)$-símplices como

$$\Delta^n\times[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n}[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]. \tag{7.3.2}$$

Para demostrar la inclusión "$\supset$" en (7.3.2), observamos que $\Delta^n\times[0,1]$ es un conjunto convexo (por ser producto de convexos) que contiene a todos los puntos v's y w's. Al ser los símplices los mínimos conjuntos convexos que contienen a sus vértices, se sigue $[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]\subset\Delta^n\times[0,1]$ para todo $i\in\{0,1,\dots,n\}$. Para probar "$\subset$", sea $(p,t)\in\Delta^n\times[0,1]$. Supongamos que (p,t) no está ni en $\Delta^n\times\{0\}$ ni en $\Delta^n\times\{1\}$ (pues en tal caso estaría en $[v_0,\dots,v_n,w_n]$ o $[v_0,w_0,\dots,w_n]$, respectivamente). Podemos pasar de $[v_0,\dots,v_n]$ a $[w_0,\dots,w_n]$ considerando la sucesión de n-símplices que sustituye el último vértice v por su correspondiente w: de $[v_0,\dots,v_n]$, pasamos a $[v_0,\dots,v_{n-1},w_n]$; de $[v_0,\dots,v_{n-1},w_n]$ a $[v_0,\dots,v_{n-2},w_{n-1},w_n]$; etcétera. El segmento

$$\{(p,\lambda):\lambda\in[0,1]\} \tag{7.3.3}$$

pertenece a $\Delta^n\times[0,1]$ por convexidad y corta a $[v_0,\dots,v_n]$ y $[w_0,\dots,w_n]$ en 0 y 1 respectivamente. Por la condición $0<t<1$, existe un valor de i tal que (7.3.3) corta a $[v_0,\dots,v_i,w_{i+1},\dots,w_n]$ para $\lambda_1<t$ y a $[v_0,\dots,v_{i-1},w_i,\dots,w_n]$ para $\lambda_2>t$ (el caso $\lambda_1=t$ o $\lambda_2=t$ implica que (p,t) está en alguno de los n-símplices intermedios, luego en particular en el lado derecho de (7.3.2) y hemos terminado). El $(n+1)$-símplice $[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]$ es el menor convexo que contiene a $[v_0,\dots,v_i,w_{i+1},\dots,w_n]$ y $[v_0,\dots,v_{i-1},w_i,\dots,w_n]$, en particular contiene al segmento $\{(p,\lambda):\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2\}$. En consecuencia existe un i tal que $(p,t)\in[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]$ y por tanto se satisface (7.3.2).

Sea una homotopía diferenciable $H:X\times[0,1]\to Y$ entre f y g. Dado un símplice diferenciable $\sigma:\Delta^n\to X$, consideramos la composición

$$\Delta^n\times[0,1]\xrightarrow{\sigma\times\mathrm{Id}}X\times[0,1]\xrightarrow{H}Y.$$

Definimos los operadores prisma como

$$P(\sigma)=\sum\nolimits_i(-1)^iH\circ(\sigma\times\mathrm{Id})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]}, \tag{7.3.4}$$

lo que es admisible, pues $H\circ(\sigma\times\mathrm{Id})$ es diferenciable.

Componiendo con el operador borde, se sigue

$$\begin{aligned}\partial\circ P(\sigma)=&\sum_{j\le i}(-1)^j(-1)^iH\circ(\sigma\times\mathrm{Id})|_{[v_0,\dots,\hat v_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]}\\&+\sum_{j\ge i}(-1)^{j+1}(-1)^iH\circ(\sigma\times\mathrm{Id})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat w_j,\dots,w_n]},\end{aligned}$$

y en el orden inverso

$$\begin{aligned}P\circ\partial(\sigma)=\sum_j(-1)^jP(\sigma|_{[v_0,\dots,\hat v_j,\dots,v_n]})=&\sum_{i<j}(-1)^i(-1)^jH\circ(\sigma\times\mathrm{Id})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat w_j,\dots,w_n]}\\&+\sum_{i>j}(-1)^{i-1}(-1)^jH\circ(\sigma\times\mathrm{Id})|_{[v_0,\dots,\hat v_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]}.\end{aligned}$$

Sumando las expresiones anteriores, los términos con $j \neq i$ se anulan, luego

$$\begin{aligned}\partial \circ P(\sigma) + P \circ \partial(\sigma) &= \sum\nolimits_i H \circ (\sigma \times \mathrm{Id})|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,w_i,\ldots,w_n]} - \sum\nolimits_i H \circ (\sigma \times \mathrm{Id})|_{[v_0,\ldots,v_i,\hat{w}_i,\ldots,w_n]} \\ &= H \circ (\sigma \times \mathrm{Id})|_{[w_0,\ldots,w_n]} - H \circ (\sigma \times \mathrm{Id})|_{[v_0,\ldots,v_n]} \\ &= g \circ \sigma - f \circ \sigma = g_\#(\sigma) - f_\#(\sigma),\end{aligned}$$

lo que demuestra (7.3.1).

Para concluir la demostración, basta imitar la prueba del lema 2.11: si $\alpha \in C_n(X)$ es un ciclo (*i.e.*, pertenece a $\ker \partial$), entonces $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha) = \partial(P(\alpha)) + P(\partial(\alpha)) = \partial(P(\alpha))$. Por tanto, $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha)$ es un borde, lo que significa que $0 \equiv [g_\# - f_\#] = g_* - f_*$, y en consecuencia ambas aplicaciones inducidas son la misma. □

Por el teorema 7.3, si f es una equivalencia homotópica según 4.5, $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \mathrm{Id}_{H_n(Y)}$ y $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \mathrm{Id}_{H_n(X)}$, luego tenemos:

Corolario 7.4. *Los homomorfismos inducidos $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ por una equivalencia homotópica diferenciable $f : X \to Y$ son isomorfismos.*

El corolario anterior, junto con el ejemplo 6.9, proporciona el siguiente resultado:

Corolario 7.5. *Si X es diferenciablemente contráctil, se tiene que*

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \{0\} & \textit{para } n \geq 1 \\ \mathbb{Z} & \textit{para } n = 0. \end{cases}$$

En particular, el grupo cíclico $H_0(X)$ está generado por cualquier 0-símplice.

Demostración. Únicamente resta demostrar el último aserto. Esto último es consecuencia de que dos 0-símplices cualesquiera son iguales en $H_0(X)$, pues dados $a, b \in X$ existe un camino diferenciable que los conecta.

En efecto, dada $F_t : X \to X$ una homotopía diferenciable tal que $F_0 = \mathrm{Id}_X$ y $F_1 \equiv x_0$ —donde x_0 denota aquí el camino constantemente $x_0 \in X$—, entonces $F_t(a)$ y $F_t(b)$ son caminos diferenciables que conectan a con x_0 y b con x_0 respectivamente. Concatenando el primer camino con el inverso del segundo —reparametrizando si es preciso como se indica en 6.7— hallamos un camino diferenciable que conecta a con b, $\tau := F_t(a) * \overline{F_t(b)}$. Denotando por σ_a y σ_b los 0-símplices diferenciables de X que se identifican con los puntos a y b, el argumento anterior muestra que $\partial\tau = \sigma_b - \sigma_a$; en consecuencia dos 0-símplices diferenciables en X cualesquiera son iguales en homología, y por tanto cualquier 0-símplice da lugar al generador de $H_0(X)$. □

Ejemplo 7.6. Como se muestra en 4.7, el espacio afín $\mathbb{R}^m$ es diferenciablemente contráctil para cualquier m. De esta forma, la homología singular diferenciable del espacio afín es la dada por 7.5.

Al igual que en la sección anterior, si bien hemos enunciado los resultados y las construcciones para conjuntos afines y aplicaciones diferenciables, solo hemos hecho uso en las demostraciones de propiedades que cumplen tanto las funciones continuas como las diferenciables. De este modo, todos los enunciados y construcciones son válidos (y con las mismas demostraciones) para homología singular.

8. La sucesión de Mayer-Vietoris en homología

Tal como se sugiere en (6.4.1), definimos un *complejo de cadenas* como una sucesión $A_* := \{A_n, \partial\}$ de grupos abelianos y homomorfismos

$$\ldots \to A_{n+1} \xrightarrow{\partial} A_n \xrightarrow{\partial} A_{n-1} \to \ldots$$

tal que $\partial \circ \partial \equiv 0$.

Todos los conceptos y resultados de la sección 2 son de naturaleza puramente algebraica, y con el cambio adecuado de notación se cumplen para los grupos de homología. En particular, el teorema 2.6 da lugar a la *sucesión exacta larga en homología*:

Teorema 8.1. *Dada una sucesión exacta corta de complejos de cadenas* $0 \to A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \to 0$*, la sucesión*

$$\ldots \to H_n(A_*) \xrightarrow{i_*} H_n(B_*) \xrightarrow{j_*} H_n(C_*) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B_*) \to \ldots \tag{8.1.1}$$

es exacta.

El operador δ_* que aparece en (8.1.1) se define por analogía con el operarador ∂^* de 2.5, esto es, como

$$\delta_* : H_n(C_*) \to H_{n-1}(A_*) \text{ tal que } \delta_*([c]) := \left[i^{-1}(\partial(j^{-1}(c))\right]. \tag{8.1.2}$$

De nuevo, la prueba de que (8.1.2) está bien definida y es independiente del representante es la misma que en 2.5.

Sea un recubrimiento abierto $\mathcal{U} := \{U_j\}_{j\in J}$ de X, y sea $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ el subgrupo de $C_n(X)$ formado por cadenas de la forma $\sum_i k_i\sigma_i$, de tal forma que cada σ_i tiene su imagen contenida en un abierto de $\mathcal{U}$. El operador borde respeta esta relación de pertenencia, luego lleva $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ a $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$. En consecuencia, los grupos $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ forman un complejo de cadenas, que da lugar a unos grupos de homología $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Proposición 8.2. *La inclusión* $i : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ *es una equivalencia homotópica de cadenas; esto es, existe un morfismo de cadenas* $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ *tal que* $i \circ \rho$ *y* $\rho \circ i$ *son homótopos como cadenas a la identidad. En consecuencia, la inclusión induce isomorfismos* $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La prueba de este resultado es larga y técnica. Desarrollaremos la prueba en cuatro etapas, siguiendo la demostración que se hace en [10].

(1) *Subdivisión baricéntrica de símplices afines.* Esta primera parte es estrictamente geométrica. El *baricentro* de un símplice $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ de $\mathbb{R}^m$ es el punto

$$b := \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{n+1} v_i. \tag{8.2.1}$$

Definimos la *subdivisión baricéntrica* del n-símplice $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ en n-símplices de la forma $[b, w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}]$ inductivamente a partir de las condiciones siguientes: (i) los $[w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}]$ son todos los posibles $(n-1)$-símplices definidos por subdivisión baricéntrica de la "caras" $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ y (ii) en el caso $n = 0$, se tiene por definición que la subdivisión baricéntrica de $[v_0]$ es el propio $[v_0]$. De esta definición, se sigue que los vértices de los n-símplices que forman la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \ldots, v_n]$ son (además de los propios v_i) los baricentros de todos los posibles sub-símplices $[v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$.

El objetivo de la subdivisión baricéntrica para símplices del espacio afín es obtener n-símplices de tamaño arbitrariamente pequeño. Al estar en el espacio euclídeo, utilizamos como medida el *diámetro*, *i.e.*, el máximo de la distancia entre dos puntos cualesquiera de su interior. Para dos puntos arbitrarios v y $\sum_i t_i v_i$ de $[v_0, \ldots, v_n]$, utilizando que $\sum_i t_i = 1$ y $t_i \geq 0$ para todo i,

$$\left\| v - \sum_i t_i v_i \right\| = \left\| \sum_i t_i (v - v_i) \right\| \leq \sum_i t_i \|v - v_i\| \leq \max_j \left\| v - v_j \right\| . \tag{8.2.2}$$

Por tanto, dado un punto arbitario del símplice v, el punto más alejado de él en el símplice es uno de los vértices. Concluimos entonces que el diámetro se alcanza para la distancia entre dos de los vértices del símplice.

Fijados dos vértices w_j y w_k de la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \ldots, v_n]$, afirmamos que su distancia es a lo sumo $n/(n+1)$ veces el diámetro de $[v_0, \ldots, v_n]$. Los casos $n = 0$ y $n = 1$ se cumplen de forma inmediata. Para el caso general, distinguimos dos posibilidades: si ni w_j ni w_k son el baricentro de $[v_0, \ldots, v_n]$, podemos suponer que ambos son vértices v_ℓ del símplice original (pues hemos visto en (8.2.2) que la distancia entre puntos de un símplice es máxima para un par de vértices). Entonces, existirá un i tal que $w_j, w_k \in [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$, luego se sigue el resultado por la hipótesis de inducción. En caso contrario, podemos suponer sin perder generalidad que $w_j = b$, y por (8.2.2) podemos tomar $w_k = v_i$. Sea b_i el baricentro de $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$, haciendo uso de (8.2.1) (aplicada a b y b_i) tenemos que

$$b = \tfrac{1}{n+1} v_i + \tfrac{n}{n+1} b_i.$$

La igualdad anterior prueba que b está en el segmento de extremos v_i y b_i, y además

$$\|b - v_i\| = \left\| \tfrac{1}{n+1} v_i - v_i + \tfrac{n}{n+1} b_i \right\| = \tfrac{n}{n+1} \|b_i - v_i\| \leq \tfrac{n}{n+1} \max_j (v_j - v_i)$$

y en consecuencia la distancia entre w_j y w_k esta acotada superiormente por $n/(n+1)$ veces el diámetro de $[v_0, \ldots, v_n]$.

Observamos finalmente que

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^r = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{8.2.3}$$

luego la acotación anterior garantiza que podemos dividir el símplice original en símplices arbitrariamente pequeños aplicando sucesivamente la división baricéntrica.

(2) *División baricéntrica de cadenas afines.* A continuación, buscamos definir un operador $S : C_n(X) \to C_n(X)$ de división tal que S y la identidad sean homótopos como cadenas.

Consideramos en primer lugar un caso restringido: dado un conjunto convexo Y en un espacio euclídeo, las aplicaciones afines (luego diferenciables) $\Delta^n \to Y$ forman un subgrupo propio del grupo de cadenas $C_n(Y)$, que denotamos $LC_n(Y)$. El operador borde manda cadenas afines a cadenas afines, luego los $LC_n(Y)$ son un subcomplejo del complejo de cadenas de Y.

Podemos identificar de manera unívoca una aplicación afín $\lambda : \Delta^n \to Y$ por $[w_0, \ldots, w_n]$, donde $w_i := \lambda(e_i)$. Para evitar tener que hacer distinciones para el caso $n = 0$, definimos $LC_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ el grupo cíclico generado por el símplice vacío $[\varnothing]$ (entendiéndose que $\partial[w_0] = [\varnothing]$ para todo 0-símplice).

Dado un punto $b \in Y$, definimos el homomorfismo $b : LC_n(Y) \to LC_{n+1}(Y)$ que actúa sobre elementos de la base como $b([w_0, \ldots, w_n]) = [b, w_0, \ldots, w_n]$. Aplicando el operador borde (identificando $w_{-1} \equiv b$)

$$\begin{aligned}
\partial b([w_0, \ldots, w_n]) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i [b, w_0, \ldots, \hat{w}_{i-1}, \ldots, w_n] \\
&= [w_0, \ldots, w_n] - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j [b, w_0, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_n] \\
&= [w_0, \ldots, w_n] - b(\partial[w_0, \ldots, w_n]),
\end{aligned}$$

luego extendiendo por linealidad a todo $LC_n(Y)$ se sigue que $\partial \circ b + b \circ \partial = \mathrm{Id}$.

Definimos $S : LC_n(Y) \to LC_n(Y)$ por inducción en n. Para el caso inicial $n = -1$, imponemos $S([\varnothing]) = [\varnothing]$ (*i.e.*, actúa como la identidad en $LC_{-1}(Y)$). Para el caso general, dado un generador $\lambda : \Delta^n \to Y$ de $LC_n(Y)$, denotamos por b_λ a la imagen del baricentro de Δ^n y al correspondiente homomorfismo asociado. El operador S queda definido inductivamente por la condición $S(\lambda) = b_\lambda(S\partial\lambda)$ sobre generadores λ de $LC_n(Y)$, que (atendiendo a la definición original de subdivisión baricéntrica del apartado anterior) no es otra cosa que la suma de los n-símplices diferenciables de la subdivisión baricéntrica de λ con signos alternados. El operador S satisface además la condición $\partial \circ S = S \circ \partial$: en $LC_{-1}(Y)$ el operador S actúa como la identidad, luego se satisface trivialmente; y supuesto probado para $n - 1$, tenemos (utilizando la hipótesis de inducción y las propiedades de b_λ)

$$\partial S(\lambda) = \partial b_\lambda(S\partial\lambda) = S(\partial\lambda) - b_\lambda \partial(S\partial\lambda) = S(\partial\lambda) - b_\lambda S\partial(\partial\lambda) = S(\partial\lambda),$$

y en consecuencia S es un morfismo de cadenas.

Finalmente, construimos un operador $T : LC_n(Y) \to LC_{n+1}(Y)$ como una homotopía de cadenas entre S e Id, representada en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & LC_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{Id} - S"] & LC_n(Y) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{Id} - S"] \arrow[dl, "T"] & LC_{n-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id} - S"] \arrow[dl, "T"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & LC_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & LC_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & LC_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Análogamente a S, definimos T de modo inductivo. Para $n = -1$, fijamos $T = 0$; y para $n \geq 0$ lo definimos por la condición $T(\lambda) = b_\lambda(\lambda - T\partial(\lambda))$ (para λ generador de $LC_n(Y)$). La condición de homotopía de cadenas $\partial \circ T + T \circ \partial = \mathrm{Id} - S$ se satisface trivialmente para $n = -1$, y para $n \geq 0$ se sigue (utilizando la hipótesis de inducción y las propiedades de S y b_λ)

$$\partial T(\lambda) = \partial b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial\lambda - \partial T(\partial\lambda))$$

$$= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S(\partial\lambda) + T\partial(\partial\lambda)) = \lambda - T\partial\lambda - S(\lambda);$$

que extendido por linealidad a toda cadena de $LC_n(Y)$ demuestra que T es una homotopía de cadenas. Nótese, en particular, que el diagrama anterior no es conmutativo, pues eso implicaría $\partial \circ T = \mathrm{Id} - S$.

(3) *División baricéntrica de cadenas arbitrarias.* Como hemos visto en el punto anterior, $S\Delta^n$ es la suma de los n-símplices diferenciables que forman la subdivisión baricéntrica de Δ^n con signos alternados. Definimos en general el operador de división $S : C_n(X) \to C_n(X)$ por su actuación sobre símplices singulares diferenciables σ

$$S(\sigma) = \sigma_\# S\Delta^n. \tag{8.2.4}$$

Por ser σ diferenciable, lo es $S(\sigma)$.

El operador S es un morfismo de cadenas, pues

$$\begin{aligned}\partial S(\sigma) &= \partial\sigma_\# S\Delta^n = \sigma_\#\partial S\Delta^n = \sigma_\# S\partial\Delta^n = \sigma_\# S\Big(\sum_i (-1)^i \Delta_i^n\Big)\\ &= \sum\nolimits_i (-1)^i \sigma_\# S\Delta_i^n = \sum\nolimits_i (-1)^i S(\sigma|_{\Delta_i^n}) = S\Big(\sum\nolimits_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_i^n}\Big) = S(\partial\sigma).\end{aligned}$$

Similarmente, definimos el operador $T : C_n(X) \to C_n(X)$ que actúa sobre símplices diferenciables por la fórmula $T(\sigma) = \sigma_\# T\Delta^n$. Este operador T, al igual que su análogo en el punto anterior, define una homotopía de cadenas entre la identidad y S, pues

$$\begin{aligned}\partial T(\sigma) &= \partial\sigma_\# T\Delta^n = \sigma_\#\partial T\Delta^n\\ &= \sigma_\#(\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) = \sigma - S(\sigma) - \sigma_\# T\partial\Delta^n = \sigma - S(\sigma) - T(\partial(\sigma)),\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos desarrollado $\sigma_\# T\partial\Delta^n$ como en el caso de S.

(4) *División baricéntrica iterada.* Podemos construir una homotopía de cadenas entre Id y S^m definida por $D_m := \sum_{i=0}^{m-1} TS^i$, pues

$$\begin{aligned}\partial D_m + D_m\partial &= \sum_{i=0}^{m-1}(\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{i=0}^{m-1}(\partial TS^i + T\partial S^i) = \sum_{i=0}^{m-1}(\partial T + T\partial)S^i\\ &= \sum_{i=0}^{m-1}(\mathrm{Id} - S)S^i = \sum_{i=0}^{m-1}(S^i - S^{i+1}) = \mathrm{Id} - S^m.\end{aligned}$$

Como hemos visto anteriormente, el operador S actúa sobre símplices diferenciables σ sumando con signos alternados los sub-símplices que forman la subdivisión baricéntrica de σ. Por (8.2.3), iterando el operador se sigue que $S^m\Delta^n$ da lugar símplices de diámetro arbitrariamente pequeño al tomar valores cada vez mayores de m. En particular, si $\varepsilon > 0$ es el número de Lebesgue del recubrimiento abierto $\{\sigma^{-1}(U_j)\}_{j\in J}$ de Δ^n, existe un m tal que $S^m(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Este valor depende de ε, y en consecuencia de σ, luego definimos $m(\sigma)$ como el mínimo valor de m tal que se cumple la condición anterior.

Definimos $D : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ por $D(\sigma) := D_{m(\sigma)}(\sigma)$ para todo n-símplice diferenciable $\sigma : \Delta^n \to X$. Como indica el enunciado, buscamos un morfismo de cadenas $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ que sea inverso en homotopía de la inclusión $i : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$. Por 2.10, para que ρ sea inverso homotópico de i por la derecha, es suficiente demostrar

$$\partial \circ D + D \circ \partial = \mathrm{Id} - i \circ \rho. \tag{8.2.5}$$

Para que se cumpla (8.2.5), basta definir $\rho : C_n(X) \to C_n(X)$ por la fórmula $\rho := \mathrm{Id} - \partial \circ D - D \circ \partial$ (omitiendo en lo sucesivo el signo de composición para aligerar notación) y comprobar que ρ es un morfismo de cadenas y que manda cadenas de $C_n(X)$ en cadenas de $C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

La condición de ser morfismo de cadenas se comprueba fácilmente, pues

$$\left.\begin{array}{l} \partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial^2 D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma \\ \rho(\partial\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial^2\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma \end{array}\right\} \implies \partial \circ \rho = \rho \circ \partial.$$

Para comprobar que ρ manda cadenas de $C_n(X)$ en cadenas de $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, observamos que

$$\rho(\sigma) = \sigma - \partial D\sigma - D(\partial\sigma) = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D(\partial\sigma) = S^m(\sigma) + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma),$$

donde hemos utilizado que $\partial D_m + D_m\partial = \mathrm{Id} - S^m$.

Por definición de $m(\sigma)$, $S^{m(\sigma)}(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. El término $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ se puede escribir como combinación lineal de términos de la forma $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$ con $\sigma_j := \sigma|_{[e_0,\ldots,\hat{e}_j,\ldots,e_n]}$, luego $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$. De la definición de D_m, se sigue que estas diferencias son sumas de términos $TS^i(\sigma_j)$ con $i \geq m(\sigma_j)$ y en consecuencia su imagen está en $C_n^{\mathcal{U}}(X)$; pues $S^i(\sigma_j) \in C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ y T manda cadenas de $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ en cadenas de $C_n^{\mathcal{U}}$.

Restringiendo el codominio de ρ a $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, hemos demostrado (8.2.5). Más aún, $\rho \circ i = \mathrm{Id}$, pues $m(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ (y en consecuencia D es idénticamente nulo al ser D_0 una suma sobre un conjunto de índices vacío). De esta forma, ρ es también inversa homotópica de la inclusión por la izquierda, y por tanto i y ρ son inversas homotópicas una de la otra. El último aserto de la proposición es consecuencia inmediata de lo anterior y 2.11. □

Sea X un conjunto afín y $A, B \subset X$ tales que $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$. Denotando como $C_n(A+B) := C_n^{\mathcal{U}}(X)$, con $\mathcal{U} = \{\mathring{A}, \mathring{B}\}$, el análogo al teorema 5.1 para el caso de homología es inmediato:

Lema 8.3. *En las hipótesis anteriores, la sucesión*

$$0 \to C_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A+B) \to 0$$

es exacta corta, donde $\phi(x) = (x, -x)$ *y* $\psi(x, y) = x + y$.

Aplicando el teorema 8.1 a la sucesión exacta corta del lema 8.3, y utilizando que la proposición 8.2 implica que la inclusión $i : C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$ induce un isomorfismo sobre los grupos de homología, obtenemos la *sucesión de Mayer-Vietoris en homología*:

Teorema 8.4. *La sucesión*

$$\ldots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots$$

es exacta.

Observación 8.5. Al igual que en las secciones anteriores, los resultados y demostraciones son válidos sin modificaciones para homología singular continua.

9. Isomorfismo natural entre las homologías singulares

Hasta ahora, hemos desarrollado paralelamente dos teorías de homología singular para conjuntos afines $X \subset \mathbb{R}^m$: por un lado, la diferenciable, cuyos grupos en adelante denotamos por $H_n^\infty(X)$ para evitar confusión; y por otro la continua, con grupos de homología $H_n(X)$. Para variedades diferenciables, ambas homologías son la misma. Lo demostramos aquí utilizando la inducción en abiertos, que consideramos la estrategia más natural, aunque en la literatura consultada solo aparece sugerida en [2].

Todo símplice singular diferenciable definido en una variedad diferenciable M es, en particular, un símplice singular (continuo), luego la inclusión $i : C_n^\infty(M) \hookrightarrow C_n(M)$ está bien definida para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. La demostración (7.1.1) y la discusión que sigue hasta la proposición 7.2 inclusive se adaptan de forma inmediata a la inclusión anterior; en consecuencia, la inclusión define un homomorfismo en grupos de homología

$$i_* : H_n^\infty(M) \to H_n(M); [c] \mapsto [i(c)] \equiv [c].$$

El homomorfismo anterior nos da, de hecho, la equivalencia que buscamos:

Teorema 9.1. *La aplicación $i_* : H_n^\infty(M) \to H_n(M)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Procedemos por inducción en abiertos (teorema 1.9). Fijamos un recubrimiento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ de M por dominios de coordenadas y definimos $\mathcal{U}$ como la colección de abiertos $W \subset M$ tales que $i_* : H_n^\infty(W) \to H_n(W)$ es un isomorfismo (junto con la condición $\varnothing \in \mathcal{U}$).

La condición (a) de 1.9 se tiene por definición. Para (b), dado que un abierto U difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ es contráctil, estamos en las condiciones de 7.5. Se sigue que $H_n^\infty(U) = \{0\}$ y $H_n(U) = \{0\}$ para $n \geq 1$, luego $i_* : H_n^\infty(U) \to H_n(U)$ es trivialmente un isomorfismo. En el caso $n = 0$ sabemos que tanto $H_0^\infty(U)$ como $H_0(U)$ están generados por la clase de cualquier 0-símplice. Como $i_* : H_0^\infty(U) \to H_0(U)$ manda (clases de) 0-símplices en 0-símplices, necesariamente ha de ser un isomorfismo. En ambos casos se satisface (b).

Para demostrar (c), sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, y queremos probar que $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$. Consideremos simultáneamente las sucesiones de Mayer-Vietoris para la homología singular diferenciable y la homología singular continua —según 8.4—, como se muestra en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n^\infty(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "i_*"] & H_n^\infty(U_1) \oplus H_n^\infty(U_2) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "i_* \oplus i_*"] & H_n^\infty(U_1 \cup U_2) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "i_*"] & {} \\
H_n(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\phi_*"] & H_n(U_1) \oplus H_n(U_2) \arrow[r, "\psi_*"] & H_n(U_1 \cup U_2) \arrow[r, "\delta_*"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}^\infty(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "i_*"] & H_{n-1}^\infty(U_1) \oplus H_{n-1}^\infty(U_2) \arrow[d, "i_* \oplus i_*"] \\
H_{n-1}(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\phi_*"] & H_{n-1}(U_1) \oplus H_{n-1}(U_2).
\end{tikzcd}$$

Por el Lema de los cinco 2.13, dado que i_* es un isomorfismo cuando se toma por variedad U_1, U_2 o $U_1 \cap U_2$ —y por tanto también lo es $i_* \oplus i_*$, que se define como $(i_* \oplus$

$i_*)([u_1],[u_2]) := (i_*[u_1], i_*[u_2])$, para todo $[u_1] \in H_n^\infty(U_1)$ y $[u_2] \in H_n^\infty(U_2)$— basta probar que el diagrama anterior es conmutativo para demostrar que $i_* : H_n^\infty(U_1 \cup U_2) \to H_n(U_1 \cup U_2)$ es un isomorfismo.

Antes de proceder a probar la conmutatividad del diagrama, observamos que, dadas dos variedades M y N y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre ellas, se sigue que

$$i_*(f_*[\sigma]) = i_*[f \circ \sigma] = [f \circ \sigma] = f_*[\sigma] = f_*(i_*[\sigma]) \tag{9.1.1}$$

para cualquier n-símplice diferenciable σ. Extendiendo por linealidad, (9.1.1) prueba que i_* conmuta con el morfismo inducido en homología por cualquier aplicación diferenciable.

Dado $[c] \in H_n^\infty(U_1 \cap U_2)$, al ser $\phi_*([c]) = (j_{1*}[c], -j_{2*}[c])$ —denotando por $j_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ y $j_2 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ a las inclusiones— se sigue que

$$\begin{aligned}(i_* \oplus i_*)(\phi_*[c]) = (i_* \oplus i_*)(j_{1*}[c], -j_{2*}[c]) &= (i_* j_{1*}[c], -i_* j_{2*}[c]) \\ &= (j_{1*} i_*[c], -j_{2*} i_*[c]) = \phi_*(i_*[c]),\end{aligned}$$

lo que prueba la conmutatividad del primer cuadrado (por la izquierda) del diagrama.

Similarmente, se prueba la conmutatividad del último cuadrado; y recordando que $\psi_*([c],[d]) = i_{1*}[c] + i_{2*}[d]$ para cualesquiera $[c] \in H_n^\infty(U_1)$ y $[d] \in H_n^\infty(U_2)$ —donde se han introducido las inclusiones $i_1 : U_1 \hookrightarrow U_1 \cup U_2$ e $i_2 : U_2 \hookrightarrow U_1 \cup U_2$—,

$$\begin{aligned}i_*(\psi_*([c],[d])) = i_* i_{1*}[c] + i_* i_{2*}[d] &= i_{1*}(i_*[c]) + i_{2*}(i_*[d]) \\ &= \psi_*(i_*[c], i_*[d]) = \psi_*(i_* \oplus i_*)([c],[d]),\end{aligned}$$

lo que prueba la conmutatividad del segundo cuadrado del diagrama. La conmutatividad del tercer cuadrado es consecuencia de (9.1.1) —a pesar de que δ_* solo está bien definido en homología, al ser independiente de representantes y preimágenes podemos utilizar la expresión entre corchetes en (8.1.2) y razonar como en (9.1.1)—, y por tanto concluimos que el diagrama completo es conmutativo.

Por el Lema de los cinco 2.13, concluimos a partir del diagrama anterior que $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$, luego se satisface la hipótesis (c) de 1.9.

Finalmente, la hipótesis (d) en 1.9 es consecuencia de la proposición 6.5: dada una sucesión de abiertos $U_1, U_2, \ldots$ disjuntos dos a dos tales que todos pertenecen a $\mathcal{U}$, consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_n^\infty(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k) \arrow[r, "S_*"] \arrow[d, "i_*"] & \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_n^\infty(U_k) \arrow[d, "\oplus i_*"] \\ H_n(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k) \arrow[r, "S_*"] & \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_n(U_k), \end{tikzcd}$$

donde S_* denotan los isomorfismos definidos en 6.5, y la conmutatividad del diagrama se sigue de (9.1.1) y de que $\oplus i_*$ está definida por la actuación componente a componente del correpondiente homomorfismo i_*.

Por hipótesis, $i_* : H_n^\infty(U_k) \to H_n(U_k)$ es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{N}$, luego $\oplus i_*$ es también un isomorfismo. De esta forma, leyendo el diagrama anterior en sentido contrario a las agujas del reloj, hallamos explícitamente una inversa para $i_* : H_n^\infty(\cup_{k\in\mathbb{N}} U_k) \to H_n(\cup_{k\in\mathbb{N}} U_k)$; en consecuencia el homomorfismo anterior es un isomorfismo y $\cup_{k\in\mathbb{N}} U_k \in \mathcal{U}$.

Al estar la colección $\mathcal{U}$ en las hipótesis del teorema 1.9, concluimos que $M \in \mathcal{U}$; esto es,

$$i_* : H_n^\infty(M) \to H_n(M)$$

es un isomorfismo, como queríamos demostrar. □

10. Integración en cadenas

Los n-símplices singulares diferenciables que hemos utilizado hasta ahora tienen por dominio el n-símplice estándar del espacio afín Δ^n. No obstante, el conjunto Δ^n no tiene estructura de variedad diferenciable, ni siquiera de variedad diferenciable con borde. Para poder definir la integración en cadenas —que será pivotal para establecer el isomorfismo de de Rham— hemos de generalizar el concepto de variedad diferenciable para incluir a este tipo de conjuntos.

La característica que distingue a los conjuntos como el símplice afín estándar Δ^n de las variedades diferenciables con borde usuales es la presencia de "esquinas" o picos no diferenciables en el borde de la variedad.

Definición 10.1. Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se denomina *variedad diferenciable con borde anguloso* (o simplemente variedad con borde anguloso) de dimensión m si cada punto $x \in M$ tiene un entorno $U \subset M$ que es difeomorfo a un abierto relativo $W \subset \overline{\mathbb{R}}^m_+$, donde

$$\overline{\mathbb{R}}^m_+ := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}.$$

Los puntos *angulosos* de $\overline{\mathbb{R}}^m_+$ son, por definición, aquellos para los que se anulan dos o más de sus coordenadas; los del *borde* son aquellos para los que solo se anula una de las coordenadas y los *interiores* son aquellos para los que no se anula ninguna coordenadada. Esta clasificación puede extenderse a variedades diferenciables con borde anguloso arbitrarias, como mostramos a continuación.

Lema 10.2. *Sea $W \subset \mathbb{R}^p$ un subconjunto abierto, $\lambda : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y $f : W \to \{x \in \mathbb{R}^q : \lambda(x) \geq 0\} \subset \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable. Dado $x \in W$ tal que $(\lambda \circ f)(x) = 0$, entonces $\lambda|_{d_x f(\mathbb{R}^m)} \equiv 0$.*

Demostración. Sea $x \in W$ tal que $(\lambda \circ f)(x) = 0$. Utilizando la continuidad de la aplicación lineal λ, tenemos que, para $u \in \mathbb{R}^m$ arbitrario,

$$\lambda(d_x f(u)) = \lambda\Big(\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda(f(x+tu))}{t}.$$

Al ser f una aplicación diferenciable, el límite anterior ha de existir. Utilizando asimismo que $\lambda(f(x+tu)) \geq 0$ por definición de f —para t suficientemente pequeño—, evaluando el límite a izquierda y derecha

$$\lim_{t\to 0} \frac{\lambda(f(x+tu))}{t} = \begin{cases} \lim_{t\to 0^-} \frac{\lambda(f(x+tu))}{t} \leq 0 \\ \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(f(x+tu))}{t} \geq 0, \end{cases} \tag{10.2.1}$$

luego $\lambda(d_x f(u)) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$, como queríamos demostrar.

□

Corolario 10.3. *Sea M una variedad diferenciable con borde anguloso de dimensión $m \geq 2$, y sea $x \in M$. Si existe un sistema de coordenadas definido en un entorno de x $\psi : U^x \to \overline{\mathbb{R}}^m_+$ tal que $\psi(x)$ es un punto anguloso de $\overline{\mathbb{R}}^m_+$, entonces para cualquier otro sistema de coordenadas χ, $\chi(x)$ es un punto anguloso de $\overline{\mathbb{R}}^m_+$.*

Demostración. La composición $h := \psi \circ \chi^{-1}$ es un difeomorfismo por definición. Denotamos $a := \chi(x)$, y definimos

$$\#a := \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : a_i = 0\}.$$

Denotamos $s := \#a \geq 0$, de tal modo que —siendo $i_1, i_2, \dots, i_m$ una cierta permutación de los índices $1, 2, \dots, m$—

$$a \in \{x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_s} = 0, x_{i_{s+1}} > 0, \dots, x_{i_m} > 0\} \subset \{x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 0, \dots, x_{i_s} = 0\}.$$

El subespacio vectorial $E := \{x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 0, \dots, x_{i_s} = 0\}$ es trivialmente isomorfo a $\mathbb{R}^{m-s}$. Por el lema 10.2, si $h(a)_j := (\pi_j \circ h)(a) = 0$, entonces $d_a h(E) \subset \{x \in \mathbb{R}^m : x_j = 0\}$; en particular —observando que E y $d_a h(E)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^m$—

$$\operatorname{codim}(d_a h(E)) \geq \#h(a) \implies \operatorname{codim}(E) \geq \#h(a), \tag{10.3.2}$$

donde la implicación es consecuencia de que $d_a h$ es un isomorfismo lineal.

Por definición $\operatorname{codim}(E) = \#a$, luego $\#a \geq \#h(a)$. Al ser $h(a) = \psi(x)$, el resultado anterior se reescribe como $\#\chi(x) \geq \#\psi(x)$; en consecuencia $\chi(x)$ es un punto anguloso. La misma prueba anterior para $\tilde{h} := \chi \circ \psi^{-1} \equiv h^{-1}$ —tomando en este caso $a = \psi(x)$— nos permite concluir $\#\chi(x) \leq \#\psi(x)$, de tal modo que $\#\chi(x) = \#\psi(x)$. □

El resultado anterior nos permite definir borde y puntos angulosos en variedades con borde anguloso arbitrarias, de forma análoga a como se define el borde en variedades diferenciables con borde.

Definición 10.4. Un punto $x \in M$ se dice que está en el *borde* de la variedad si se corresponde a través de una parametrización —luego, por 10.3, de cualquier parametrización— con un punto de algún $H_i := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \overline{\mathbb{R}}^m_+ : x_i = 0\}$. Si se corresponde con algún punto de $H_i \cap H_j$ (para $i \neq j$), se dice que x es un *punto anguloso de* la variedad; y si x no está ni en el borde ni es un punto anguloso se dice que es un *punto interior* de la variedad con borde anguloso.

Observación 10.5. En la prueba del corolario 10.3 se demuestra, de hecho, no solo que los puntos angulosos están bien definidos, sino que también lo está la cantidad

$$\#x := \#\psi(x) \in \{0, 1, 2, \dots, m\}, \tag{10.5.3}$$

para cualquier $x \in M$ y cualquier sistema de coordenadas ψ definido en un entorno de x. Esto permite definir el conjunto $\partial_r M := \{x \in M : \#x = r\}$, que al ser localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^{m-r}$ —basta tomar una familia de parametrizaciones que recubra $\partial_r M$ y restringir sus dominios— tiene estructura de variedad diferenciable sin borde de dimensión $m - r$. Por construcción, además, se satisface $M = \cup_{r\geq 0}\partial_r M$.

Con la notación anterior, $\partial_1 M$ se corresponde con el borde de M y $\partial_0 M \equiv \mathrm{Int}(M)$ con su interior. De nuevo por restricción de una familia de parametrizaciones, se comprueba que $\partial_0 M \cup \partial_1 M$ tiene estructura de variedad diferenciable con borde. Nótese también que toda variedad diferenciable con borde (y en consecuencia toda variedad diferenciable usual) es una variedad diferenciable con borde anguloso.

Las construcciones habituales en variedades diferenciables —como la derivación de aplicaciones diferenciables, orientación, espacios tangentes o formas diferenciales— se trasladan inmediatamente a variedades diferenciables con borde anguloso.

Obsérvese, no obstante, que el borde de $\overline{\mathbb{R}}^m_+$ no es una variedad diferenciable con borde anguloso, sino que $\partial\overline{\mathbb{R}}^m_+ = \cup_{i=1}^m H_i$, donde H_i sí que tiene estructura de variedad diferenciable con borde anguloso de dimensión $m-1$ (basta identificar el subespacio $x_i = 0$ con $\overline{\mathbb{R}}^{m-1}_+$).

Sea M una variedad diferenciable m-dimensional con borde anguloso orientada —esto es, con una orientación fijada para la variedad con borde $N := M \setminus \cup_{r=2}^m \partial_r M$, donde el borde $\partial N \equiv \partial_1 M$ tiene la orientación canónica que hereda de N—, y η y ω formas diferenciales de grados m y $m-1$ (respectivamente) ambas con soporte compacto contenido dentro de dominios de coordenadas $U_1 \subset M$ y $U_2 \subset \partial M$, con parametrizaciones asociadas φ_1 y φ_2 compatibles con la orientación de M y ∂M —esto es, de N y ∂N. La integral de η sobre M se define como

$$\int_M \eta := \int_{\varphi_1^{-1}(U_1)} \varphi_1^* \eta, \tag{10.5.4}$$

que está bien definida al ser $\overline{\mathbb{R}}^m_+$ un subconjunto de $\mathbb{R}^m$; mientras que la integral de ω sobre ∂M se define —atendiendo a la discusión sobre el borde de $\overline{\mathbb{R}}^m_+$— como

$$\int_{\partial M} \omega := \sum_{i=1}^m \int_{H_i} \varphi_2^* \omega, \tag{10.5.5}$$

donde cada H_i recibe la orientación inducida como borde del conjunto $\{x_i \geq 0\}$.

En particular, si escogemos la orientación estándar para el borde de $\{x_i \geq 0\}$ —esto es, la definida por la base $\{e_1, e_2, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n\}$—, un vector saliente de $T_x M \setminus T_a(\partial M)$ viene dado por $-e_i$. Dado que

$$\det(-e_i, e_1, e_2, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_m) = (-1)^i, \tag{10.5.6}$$

la orientación estándar en el borde de $\{x_i \geq 0\}$ es compatible con la heredada como borde si y solo si i es par.

Para formas diferenciales con soporte compacto arbitrarias se procede como en el caso con borde usual: basta recubrir su soporte con una cantidad finita de dominios de coordenadas, emplear las fórmulas anteriores para cada dominio de coordenadas y utilizar una partición diferenciable de la unidad para extender el resultado a todo el borde.

Las definiciones (10.5.4) y (10.5.5) permiten demostrar el teorema de Stokes para variedades con borde anguloso:

Teorema 10.6 (Teorema de Stokes para variedades con borde anguloso)**.** *Sea M una variedad diferenciable con borde anguloso orientada de dimensión m y con ∂M con la orientación heredada como borde. Sea ω una forma diferencial de grado $m-1$ con soporte compacto en M. Entonces, se cumple que*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$$

Demostración. La prueba procede de forma similar a la prueba del teorema de Stokes en el caso de variedades diferenciables con borde, según se lleva a cabo en [1, V.4.1].

Usando sistemas de coordenadas compatibles con la orientación y particiones diferenciables subordinadas a los dominios de coordenadas de las aplicaciones anteriores como en la demostración del caso usual, basta demostrar el siguiente aserto:

Sea α una forma con soporte compacto de grado $m-1$ de un abierto W de $\overline{\mathbb{R}}^m_+$. Entonces $\int_W \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial W} \alpha|_{\partial W}$ (que es cero si el soporte de α no corta a $\partial\overline{\mathbb{R}}^m_+$).

Extendiendo por cero a todo $\overline{\mathbb{R}}^m_+$ y escribiendo la forma en coordenadas, tenemos

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m} a_k \,\mathrm{dx}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{dx}_k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{dx}_m, \tag{10.6.7}$$

donde el acento circunflejo indica que ese término se excluye.

La diferencial de la forma (10.6.7) se expresa, tras reordenar las diferenciales, como

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \,\mathrm{dx}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{dx}_m.$$

Como la forma tiene soporte compacto, existe un $R > 0$ tal que fuera del paralelepípedo $[0,R]^m \subset \overline{\mathbb{R}}^m_+$ la forma α se anule idénticamente. Calculando como en la prueba usual, se sigue

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}^m_+} \mathrm{d}\alpha = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \int_0^R \cdots \int_0^R \frac{\partial a_k}{\partial x_k}(x) dx_1 \dots dx_m.$$

Observando que

$$\int_0^R \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_k = a_k(x_1, \dots, R, \dots, x_m) - a_k(x_1, \dots, 0, \dots, x_m)$$

y que la forma α es nula en las caras $x_k = R$ —cogiendo $R > 0$ suficientemente grande—, podemos escribir finalmente, tras reordenar las integrales utilizando el teorema de Fubini,

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}^n_+} \mathrm{d}\alpha = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \int_0^R \cdots \int_0^R a_k(x_1, \dots, 0, \dots, x_m) dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_m.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{H_k} \alpha|_{H_k} = (-1)^k \int_0^R \cdots \int_0^R a_k(x_1, \dots, 0, \dots, x_m) dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_m,$$

donde el factor $(-1)^k$ aparece porque la orientación inducida en H_k es compatible con la estándar si y solo si k es par, como se muestra en (10.5.6).

Juntando los resultados anteriores y utilizando la definición (10.5.5), tenemos finalmente que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \mathrm{d}\alpha = \sum_{k=1}^{m} \int_{H_k} \alpha|_{H_k} = \int_{\mathbb{R}^m_+} \alpha|_{\partial\overline{\mathbb{R}}^m_+},$$

como queríamos demostrar.

□

La integración en variedades con borde anguloso proporciona una manera natural de definir la integral de una forma diferencial en n-símplices diferenciables.

Definición 10.7. Sea M una variedad diferenciable (usual), ω una n-forma en M y σ un n-símplice singular diferenciable en M. La integral de ω en σ se define como

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^n} \sigma^*\omega. \tag{10.7.8}$$

La definición anterior se sustenta en el hecho de que Δ^n tiene estructura de variedad diferenciable con borde anguloso orientada (con la orientación que hereda $\mathrm{Int}(\Delta^n)$ al considerarlo como abierto del espacio afín $\mathbb{R}^n$), luego la integral sobre Δ^n está bien definida. Para cadenas diferenciables arbitrarias $c = \sum_{i=1}^{k} c_i\sigma_i$, la integral se define como

$$\int_{c} \omega := \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{\sigma_i} \omega. \tag{10.7.9}$$

Un corolario del teorema de Stokes para variedades con borde anguloso es la siguiente versión del teorema de Stokes para cadenas diferenciables.

Teorema 10.8 (Teorema de Stokes para cadenas diferenciables)**.** *Sea c una n-cadena diferenciable definida en una variedad diferenciable M y ω una $(n-1)$-forma diferenciable en M. Entonces*

$$\int_{c} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Demostración. Basta demostrar el teorema cuando c es un símplice singular diferenciable σ, el caso general se seguirá por linealidad en (10.7.9).

Utilizando que el n-símplice afín estándar tiene estructura de variedad diferenciable con borde anguloso, podemos emplear el teorema 10.6. Esto, junto al hecho de que el *pullback* de cualquier aplicación diferenciable conmuta con la diferencial exterior, nos permite escribir

$$\int_{\sigma} \mathrm{d}\omega = \int_{\Delta^n} \sigma^* \,\mathrm{d}\omega = \int_{\Delta^n} \mathrm{d}(\sigma^*\omega) = \int_{\partial\Delta^n} \sigma^*\omega.$$

Sean $\{\varphi_i : i = 0, 1, \dots, n\}$ parametrizaciones de las caras del borde del símplice Δ^n —o bien aristas en dimensión 2— donde cada cara se identifica con Δ^{n-1} mediante el difeomorfismo afín canónico (6.0.2), que envía el símplice $[e_0, e_1, \dots, e_{n-1}]$ a $[e_0, e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]$.

Estas parametrizaciones cubren $\partial\Delta^n$ salvo conjuntos de medida cero, así que únicamente resta comprobar si las parametrizaciones preservan o invierten la orientación. Para ello, observamos que cada una de las parametrizaciones anteriores se pueden entender como la restricción de la afinidad —definida en (6.0.2)— $F : [e_0, e_1, \ldots, e_n] \mapsto [e_0, e_1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n, e_i]$, cuyo determinante jacobiano es

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial t_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial t_n}\right) = \det(e_0, e_1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n, e_i) = (-1)^{n-i}.$$

La orientación de $[e_0, \ldots, e_{n-1}]$ inducida como borde de $[e_0, e_1, \ldots, e_n]$ es la orientación positiva si y solo si n es par, luego φ_i preserva la orientación si y solo si i es par (pues $(-1)^{n-i} \cdot (-1)^n = (-1)^i$).

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta^n} \sigma^*\omega &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \int_{\Delta^{n-1}} \varphi_i^*\sigma^*\omega = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \int_{\Delta^{n-1}} (\sigma\circ\varphi_i)^*\omega \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \int_{\sigma\circ\varphi_i} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la definición (10.7.8) junto con la definición del borde de un símplice diferenciable. □

11. El isomorfismo de de Rham

El teorema de Stokes 10.8 proporciona una primera conexión entre homología y cohomología de de Rham en variedades diferenciables, relacionando formas y cadenas a través de la integral. No obstante, la relación entre la homología singular y la cohomología de de Rham es mucho más estrecha.

Para formular rigurosamente esta relación, hay que introducir los llamados *grupos de cohomología singular diferenciable con coeficientes reales*. Proporcionaremos una definición simplificada, pero suficiente para nuestros propósitos, siguiendo [8]:

Definición 11.1. Sea M una variedad diferenciable. El n-ésimo grupo de *cohomología singular diferenciable con coeficientes reales*, denotado $H^n(M; \mathbb{R})$, se define como

$$H^n(M; \mathbb{R}) := \operatorname{Hom}(H_n(M), \mathbb{R}),$$

donde $\operatorname{Hom}(H_n(M), \mathbb{R})$ denota el conjunto de homomorfismos de grupos de $H_n(M)$ en $\mathbb{R}$.

Los grupos de cohomología singular diferenciable con coeficientes reales —que en realidad son espacios vectoriales— heredan sus propiedades de los grupos de homología singular. En particular, toda aplicación diferenciable $F : M \to N$ induce una *aplicación lineal* $F^* : H^n(N; \mathbb{R}) \to H^n(M; \mathbb{R})$ definida por

$$F^*(\gamma) := \gamma \circ F_*, \tag{11.1.1}$$

con F_* el homomorfismo inducido en grupos de homología.

Con la definición anterior, las aplicaciones inducidas satisfacen las siguientes propiedades:

- $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.
- $(\mathrm{Id}_X)^* = \mathrm{Id}_{H^n(X;\mathbb{R})}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La cohomología singular diferenciable hereda asimismo la invariancia por homotopías diferenciables y la propiedad de Mayer-Vietoris, de tal modo que satisface un resultado análogo a 5.2[6]. Análogamente se define la cohomología singular continua, que por 9.1 es isomorfa a la anterior.

Ejemplo 11.2. Si M es una variedad diferenciable diferenciablemente contráctil, entonces

$$H^n(M;\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \{0\} & \text{si } n \geq 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En efecto, por 7.5 se tiene que $H_n(M) = \{0\}$ para $n \geq 1$, de tal modo que el único homomorfismo de grupos a $\mathbb{R}$ es el idénticamente nulo. Asimismo, $H_0(M)$ está generado por cualquier (clase cociente de) 0-símplice, digamos $[\sigma]$. De esta forma, cualquier elemento $\gamma \in H^0(M;\mathbb{R})$ queda completamente definido sin más que fijar el valor $\gamma([\sigma]) \in \mathbb{R}$, luego

$$H^0(M;\mathbb{R}) \ni \gamma \mapsto \gamma([\sigma]) \in \mathbb{R}$$

define un isomorfismo $H^0(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Una vez introducidos los grupos de cohomología singular con coeficientes reales, estamos en condiciones de definir el *homomorfismo de de Rham*. Para evitar confusiones, en adelante denotaremos por $H^n_{dR}(M)$ a los grupos de cohomología de de Rham asociados a una variedad diferenciable.

Definición y Proposición 11.3. *Dada una variedad diferenciable M el homomorfismo de de Rham, $\mathcal{I} : H^n_{dR}(M) \to H^n(M;\mathbb{R})$, se define por*

$$\mathcal{I}[\omega]([c]) := \int_{\tilde{c}} \omega,$$

donde $[\omega] \in H^n_{dR}(M)$ y $\tilde{c}$ es cualquier n-ciclo diferenciable en la clase de homología $[c] \in H_n(M)$ —que existe por el isomorfismo $H_n(M) \cong H_n^\infty(M)$.

Demostración. En primer lugar, demostremos que la definición anterior es independiente del representante escogido.

Sea $\tilde{c}'$ otro n-ciclo de $[c] \in H_n(M)$, de tal forma que $\tilde{c} - \tilde{c}' = \partial\tilde{b}$ para alguna $(n+1)$-cadena diferenciable $\tilde{b}$ (donde la diferenciabilidad se sigue del teorema 9.1). Por linealidad en (10.7.9) y el teorema 10.8, se sigue

$$\int_{\tilde{c}} \omega - \int_{\tilde{c}'} \omega = \int_{\partial\tilde{b}} \omega = \int_{\tilde{b}} \mathrm{d}\omega = 0,$$

[6]Este resultado, así como las propiedades anteriormente citadas de la cohomología singular diferenciable con coeficientes reales, es una consecuencia inmediata de que Hom(—,$\mathbb{R}$) es un *funtor contravariante exacto* en la categoría de grupos abelianos (véase [12, 2.9]). Dado que las las combinaciones lineales con coeficientes reales de aplicaciones de $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{R})$ siguen siendo elementos de $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{R})$ para cualquier grupo abeliano A, las sucesiones exactas y los morfismos de la categoría de grupos abelianos que surgen al aplicar el funtor Hom(—,$\mathbb{R}$) promocionan a sucesiones exactas y morfismos en la categoría de espacios vectoriales con las mismas definiciones.

pues ω, al ser un representante de $[\omega]$, es una forma cerrada.

Asimismo, dadas $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}' \in [\omega]$, existe una $(n-1)$-forma α tal que $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}' + \mathrm{d}\alpha$, luego aplicando de nuevo 10.8

$$\int_{\tilde{c}} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{c}} \tilde{\omega}' + \int_{\tilde{c}} \mathrm{d}\alpha = \int_{\tilde{c}} \tilde{\omega}' + \int_{\partial \tilde{c}} \alpha = \int_{\tilde{c}} \tilde{\omega}',$$

pues al ser $\tilde{c}$ un n-ciclo, se tiene que $\partial \tilde{c} = 0$.

La linealidad $\mathcal{I}[\omega][c+c'] = \mathcal{I}[\omega][c] + \mathcal{I}[\omega][c']$ es una consecuencia inmediata de la definición (10.7.9), y la linealidad en $[\omega]$ es una consecuencia de la linealidad en la integral de formas en general. Concluimos que la aplicación $\mathcal{I}$ está bien definida y es un homomorfismo lineal. □

El homomorfismo de de Rham propociona una conexión profunda entre la cohomología de de Rham de una variedad diferenciable y su topología: pese a que en su definición se utiliza explícitamente la estructura diferenciable de la variedad, resulta que la cohomología de de Rham es un invariante topológico. Este es, sucintamente, el contenido del teorema central de esta memoria, que enunciamos y probamos a continuación.

Teorema 11.4 (Teorema de de Rham)**.** *Dada una variedad diferenciable M de dimensión m y un entero no negativo n, el homomorfismo de de Rham $\mathcal{I} : H^n_{dR}(M) \to H^n(M;\mathbb{R})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Al igual que en la demostración 9.1, establecemos el isomorfismo por inducción en abiertos (teorema 1.9).

Fijamos un recubrimiento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ de la variedad M por dominios de coordenadas y definimos $\mathcal{U}$ como la familia de abiertos de $W \subset M$ tales que el homomorfismo de de Rham $\mathcal{I} : H^n_{dR}(W) \to H^n(W;\mathbb{R})$ es un isomorfismo —con la condición adicional de que $\varnothing \in \mathcal{U}$. Basta comprobar que la familia $\mathcal{U}$ satisface las hipótesis de 1.9 para probar el teorema.

La condición (a) de 1.9 se tiene por definición. Para probar la condición (b), como la cohomología de de Rham es invariante por difeomorfismos y la cohomología singular con coeficientes reales también —pues la homología singular lo es y $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{R})$ es un funtor contravariante— basta probar que $\mathcal{I} : H^n_{dR}(\mathbb{R}^m) \to H^n(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ es un isomorfismo. Para el caso $n > 0$, por el Lema de Poincaré 4.2 $H^n_{dR}(\mathbb{R}^m) = \{0\}$; y por 11.2 $H^n(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}) = \{0\}$, luego $\mathcal{I}$ es trivialmente un isomorfismo. Para $n = 0$, observamos que tanto $H^0_{dR}(\mathbb{R}^m)$ como $H^0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ son linealmente isomorfos a $\mathbb{R}$ (respectivamente, de nuevo, por 4.2 y 11.2). Por otra parte, $\Gamma^0(\mathbb{R}^m) = C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$, y en consecuencia $H^0_{dR}(\mathbb{R}^m)$ es el espacio vectorial de funciones constantes de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$. Denotando $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a la función idénticamente 1 y por $\sigma : \Delta^0 \to \mathbb{R}^m$ a un generador de $H_0(\mathbb{R}^m)$, tenemos que

$$\mathcal{I}[f][\sigma] = \int_{\Delta^0} \sigma^* f = (f \circ \sigma)(0) = 1,$$

luego $\mathcal{I} : H^0_{dR}(\mathbb{R}^m) \to H^0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ es no nulo, y por tanto isomorfismo.

Para probar que se satisface la hipótesis (c) de 1.9, consideremos $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, basta probar que $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$. La prueba se sigue, análogamente a

9.1, del Lema de los cinco 2.13, si bien en este caso establecer la conmutatividad del diagrama requiere más cuidado. Escribimos las respectivas sucesiones de Mayer-Vietoris en cohomología de de Rham y cohomología singular y las relacionamos como se muestra en el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
H^{n-1}_{dR}(U_1)\oplus H^{n-1}_{dR}(U_2) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, "\mathcal{I}\oplus\mathcal{I}"] & H^{n-1}_{dR}(U_1\cap U_2) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "\mathcal{I}"] & H^{n}_{dR}(U_1\cup U_2) \arrow[r, "I^*"] \arrow[d, "\mathcal{I}"] & {} \\
H^{n-1}(U_1;\mathbb{R})\oplus H^{n-1}(U_2;\mathbb{R}) \arrow[r, "\phi^*"] & H^{n-1}(U_1\cap U_2;\mathbb{R}) \arrow[r, "\delta^*"] & H^{n}(U_1\cup U_2;\mathbb{R}) \arrow[r, "\psi^*"] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H^{n}_{dR}(U_1)\oplus H^{n}_{dR}(U_2) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, "\mathcal{I}\oplus\mathcal{I}"] & H^{n}_{dR}(U_1\cap U_2) \arrow[d, "\mathcal{I}"] \\
H^{n}(U_1;\mathbb{R})\oplus H^{n}(U_2;\mathbb{R}) \arrow[r, "\phi^*"] & H^{n}(U_1\cap U_2;\mathbb{R})
\end{tikzcd}
$$

donde las aplicaciones verticales son homomorfismos de de Rham y las filas —al ser sucesiones de Mayer-Vietoris— son exactas.

El diagrama anterior requiere algunas aclaraciones previas: en primer lugar, al escribir la sucesión de Mayer-Vietoris en cohomología singular se ha asumido tácitamente que existe un isomorfismo

$$H^r(U_1;\mathbb{R})\oplus H^r(U_2;\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_r(U_1)\oplus H_r(U_2);\mathbb{R}). \tag{11.4.2}$$

Más en general, dados dos grupos abelianos A y B —denotando en ambos la operación interna por "+"—, se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(A;\mathbb{R})\oplus\mathrm{Hom}(B;\mathbb{R})\cong\mathrm{Hom}(A\oplus B;\mathbb{R}).$$

En efecto, dados $g_1\in\mathrm{Hom}(A;\mathbb{R})$ y $g_2\in\mathrm{Hom}(B;\mathbb{R})$, podemos definir el homomorfismo $g_1\oplus g_2 : A\oplus B\to\mathbb{R}$ asociado al par (g_1,g_2) como

$$(g_1\oplus g_2)(a,b) := g_1(a)+g_2(b),$$

para todo $a\in A$ y $b\in B$. Recíprocamente, dado $g\in\mathrm{Hom}(A\oplus B;\mathbb{R})$, definimos $g_1 : A\to\mathbb{R}$ por $g_1(a) := g(a,0)$ y $g_2 : B\to\mathbb{R}$ por $g_2(b) := g(0,b)$ para cualesquiera $a\in A$ y $b\in B$, de tal modo que al homomorfismo g le asignamos el par (g_1,g_2) y se satisface $g=g_1\oplus g_2$, lo que prueba el isomorfismo anterior y en particular (11.4.2).

Una vez explicado el diagrama, probamos que es conmutativo. Comenzando por el primer cuadrado por la izquierda —que es idéntico al último—, recordamos de 8.3 que para $[c]\in H_n(U_1\cap U_2)$ se tiene que $\phi_*[c]=(j_{1*}[c],-j_{2*}[c])$ (donde $j_1 : U_1\cap U_2\hookrightarrow U_1$ y $j_2 : U_1\cap U_2\hookrightarrow U_2$ son las inclusiones). En consecuencia, para $g_1\oplus g_2\in H^{n-1}(U_1;\mathbb{R})\oplus H^{n-1}(U_2;\mathbb{R})\cong\mathrm{Hom}(H_{n-1}(U_1)\oplus H_{n-1}(U_2);\mathbb{R})$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(\phi^*(g_1\oplus g_2))[c] &= (g_1\oplus g_2)(\phi_*[c]) = (g_1\oplus g_2)(j_{1*}[c],-j_{2*}[c]) \\
&= g_1(j_{1*}[c]) - g_2(j_{2*}[c]) = j_1^*[g_1][c]-j_2^*[g_2][c].
\end{aligned}
$$

De esta forma, recordando la definición de J^* como $J^*([\omega_1],[\omega_2]) = j_1^*[\omega_1] - j_2^*[\omega_2]$ (con $[\omega_1] \in H_{dR}^{n-1}(U_1)$ y $[\omega_2] \in H_{dR}^{n-1}(U_2)$), para el primer cuadrado del diagrama se satisface

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(J^*([\omega_1],[\omega_2]))[c] &= \mathcal{I}(j_1^*[\omega_1] - j_2^*[\omega_2])[c] = \mathcal{I}(j_1^*[\omega_1])[c] - \mathcal{I}(j_2^*[\omega_2])[c] \\ &= \mathcal{I}[\omega_1][j_1 \circ c] - \mathcal{I}[\omega_2][j_2 \circ c] = \mathcal{I}[\omega_1](j_{1*}[c]) - \mathcal{I}[\omega_2](j_{2*}[c]) \\ &= j_1^*(\mathcal{I}[\omega_1])[c] - j_2^*(\mathcal{I}[\omega_2])[c] = \phi^*(\mathcal{I} \oplus \mathcal{I})([\omega_1],[\omega_2])[c],\end{aligned}$$

donde se ha utilizado implícitamente que, dado $F : M \to N$ una aplicación diferenciable, σ un p-símplice diferenciable en M y ω una p-forma diferenciable en N, se tiene que

$$\int_\sigma F^*\omega = \int_{\Delta^p} \sigma^* F^*\omega = \int_{\Delta^p} (F \circ \sigma)^*\omega = \int_{F\circ\sigma} \omega,$$

luego

$$\mathcal{I}(F^*(\omega))[\sigma] = \mathcal{I}(\omega)[F \circ \sigma] = \mathcal{I}(\omega)(F_*[\sigma]) = F^*(\mathcal{I}(\omega))[\sigma], \tag{11.4.3}$$

siendo el último paso consecuencia de (11.1.1).

Hemos demostrado en consecuencia que el primer y último cuadrados —numerados desde la izquierda— del diagrama son conmutativos.

Para el tercer cuadrado por la izquierda, similarmente al caso anterior, fijamos $([\sigma_1],[\sigma_2]) \in H_n(U_1) \oplus H_n(U_2)$ y $[\omega] \in H_{dR}^n(U_1 \cup U_2)$. Recordando que $\psi_*([\sigma_1],[\sigma_2]) = i_{1*}[\sigma_1] + i_{2*}[\sigma_2]$ —donde $i_1 : U_1 \hookrightarrow U_1 \cup U_2$ e $i_2 : U_2 \hookrightarrow U_1 \cup U_2$ son las inclusiones—, dado $g \in H^n(U_1 \cup U_2; \mathbb{R})$ se sigue que

$$(\psi^* g)([\sigma_1],[\sigma_2]) = g(\psi_*([\sigma_1],[\sigma_2])) = g(i_{1*}[\sigma_1] + i_{2*}[\sigma_2]) = (i_1^* g)[\sigma_1] + (i_2^* g)[\sigma_2].$$

De la definición $I^*[\omega] = (i_1^*[\omega], i_2^*[\omega])$ dada en 5.1, se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}(I^*[\omega])([\sigma_1],[\sigma_2]) &= \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}(i_1^*[\omega], i_2^*[\omega])([\sigma_1],[\sigma_2]) = (\mathcal{I}(i_1^*[\omega]) \oplus \mathcal{I}(i_2^*[\omega]))([\sigma_1],[\sigma_2]) \\ &= \mathcal{I}(i_1^*[\omega])[\sigma_1] + \mathcal{I}(i_2^*[\omega])[\sigma_2] = \mathcal{I}[\omega][i_1 \circ \sigma_1] + \mathcal{I}[\omega][i_2 \circ \sigma_2] \\ &= \mathcal{I}[\omega](i_{1_*}[\sigma_1]) + \mathcal{I}[\omega](i_{2*}[\sigma_2]) = i_1^*(\mathcal{I}[\omega])[\sigma_1] + i_2^*(\mathcal{I}[\omega])[\sigma_2] \\ &= (\psi^* \circ \mathcal{I})[\omega]([\sigma_1],[\sigma_2]),\end{aligned}$$

lo que establece la conmutatividad del tercer diagrama por la izquierda (nuevamente, se ha empleado implícitamente la igualdad (11.4.3)).

Para establecer la conmutatividad del segundo cuadrado del diagrama, recordamos las definiciones

$$\begin{aligned}\partial^*[\omega] &= [(I^*)^{-1}(\mathrm{d}((J^*)^{-1}(\omega))] \\ \delta_*[e] &= [(\phi)^{-1}(\partial((\psi)^{-1}(e)))].\end{aligned} \tag{11.4.4}$$

La conmutatividad del cuadrado se expresa por la condición

$$\mathcal{I}(\partial^*[\omega])[e] = (\delta^*\mathcal{I}[\omega])[e] = \mathcal{I}[\omega](\delta_*[e]), \tag{11.4.5}$$

para todo $[\omega] \in H_{dR}^{n-1}(U_1 \cap U_2)$ y $[e] \in H_n(U_1 \cup U_2)$

Sea σ un representante de $\partial^*[\omega]$ y c un representante de $\delta_*[e]$. Con esta notación, la condición (11.4.5) se expresa

$$\int_e \sigma = \int_c \omega. \tag{11.4.6}$$

Atendiendo a las definiciones (11.4.4) —en particular, a su buena definición e independencia de representantes y preimágenes escogidas como se muestra en 2.5— y a la definición de los morfismos concretos, podemos asegurar que existen f y f' cadenas en U_1 y U_2 tales que (omitiendo las inclusiones para relajar la notación) $[f + f'] = [e]$ y $c = \partial f = -\partial f'$; del mismo modo, existen $(n-1)$-formas η_1 y η_2 en $H^{n-1}_{dR}(U_1)$ y $H^{n-1}_{dR}(U_2)$ respectivamente tales que $\omega = \eta_1|_{U_1\cap U_2} - \eta_2|_{U_1\cap U_2}$ y $i_1^*(\sigma) = \mathrm{d}\eta_1$ y $i_2^*(\sigma) = \mathrm{d}\eta_2$.

De esta forma, aplicando el teorema de Stokes para cadenas (10.8) y las relaciones anteriores,

$$\begin{aligned}\int_c \omega = \int_{\partial f} \omega = \int_{\partial f} \eta_1 - \int_{\partial f} \eta_2 &= \int_{\partial f} \eta_1 + \int_{\partial f'} \eta_2 \\ &= \int_f \mathrm{d}\eta_1 + \int_{f'} \mathrm{d}\eta_2 = \int_f \sigma + \int_{f'} \sigma = \int_e \sigma,\end{aligned}$$

luego se verifica (11.4.6), y por tanto el segundo cuadrado del diagrama es conmutativo.

Una vez establecida la conmutatividad del diagrama, por hipótesis la primera, segunda, cuarta y quinta de las aplicaciones de de Rham verticales son isomorfismos. Por el Lema de los cinco 2.13, concluimos que el homomorfismo de de Rham $\mathcal{I} : H^n_{dR}(U_1 \cup U_2) \to H^n(U_1 \cup U_2; \mathbb{R})$ es un isomorfismo.

Finalmente, para probar la hipótesis (d) de 1.9, sea $\{U_1, U_2, \dots\} \subset \mathcal{U}$ una sucesión de abiertos disjuntos dos a dos. La hipótesis (d) de 1.9 exige que $\cup_{k\in\mathbb{N}} U_k \subset \mathcal{U}$, o equivalentemente que $\mathcal{I} : H^n_{dR}(\cup_{k\in\mathbb{N}} U_k) \to H^n(\cup_{k\in\mathbb{N}} U_k; \mathbb{R})$ sea un isomorfismo.

Recordamos que por 5.4, se tiene que

$$H^n_{dR}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k) \cong \prod_{k\in\mathbb{N}} H^n_{dR}(U_k)$$

a través del isomorfismo S^*.

Para el caso de la cohomología singular, 6.5 muestra que existe un isomorfismo

$$H_n(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k) \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_n(U_k), \tag{11.4.7}$$

que viene dado —a nivel de cadenas— por la asignación $S_* : \sigma \mapsto (i_{1*}\sigma, i_{2*}\sigma, \dots)$. Más aún, se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_n(U_k); \mathbb{R}) \cong \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(H_n(U_k); \mathbb{R}) \tag{11.4.8}$$

sin más que asignar a cada $\gamma \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_n(U_k); \mathbb{R})$ la colección de aplicaciones γ_j definida como

$$\gamma_j[\sigma_j] := \gamma(0, 0, \dots, 0, \sigma_j, 0, \dots),$$

esto es, $\gamma \mapsto (\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}}$. La inversa del homomorfismo lineal anterior es aquella que a cada $(\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ le asigna la aplicación

$$\gamma := \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \gamma_j;\ \textit{i.e.}, \text{ por definición } \gamma([\sigma_1], [\sigma_2], \dots) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \gamma_j[\sigma_j]$$

—donde, dado que los argumentos toman valores en una suma directa (y por tanto, solo una cantidad finita de los $[\sigma_j]$ pueden ser distintos de cero), la suma está bien definida.

Componiendo (11.4.7) y (11.4.8), se sigue que el isomorfismo

$$H^n(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k;\mathbb{R}) \cong \prod_{k\in\mathbb{N}} H^n(U_k;\mathbb{R})$$

está definido por la asignación $S^* : \gamma \mapsto (i_1^* \circ \gamma_1, \dots, i_j^* \circ \gamma_j, \dots)$, que es formalmente idéntica a la aplicación definida en n-formas en 5.4.

De nuevo por 11.4.3 —operando coordenada a coordenada—, se tiene que

$$\Pi\mathcal{I}(S^*[\omega])[\sigma] = S^*(\mathcal{I}[\omega])[\sigma],$$

esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^n_{dR}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k) \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, "\mathcal{I}"] & \prod_{k\in\mathbb{N}} H^n_{dR}(U_k) \arrow[d, "\Pi\mathcal{I}"] \\
H^n(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k;\mathbb{R}) \arrow[r, "S^*"] & \prod_{k\in\mathbb{N}} H^n(U_k;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Dado que $\Pi\mathcal{I}$ —que se define actuando sobre cada coordenada como el correspondiente homomofismo de de Rham $\mathcal{I}$— es un isomorfismo por hipótesis, leyendo el diagrama anterior en sentido contrario a las agujas del reloj hallamos una expresión explícita para la inversa de $\mathcal{I} : H^n_{dR}(\cup_{k\in\mathbb{N}}U_k) \to H^n(\cup_{k\in\mathbb{N}}U_k;\mathbb{R})$. Esto prueba que $\cup_{k\in\mathbb{N}}U_k \in \mathcal{U}$, y por tanto se satisface (d) en 1.9.

Puesto que la colección $\mathcal{U}$ satisface todas las hipótesis de 1.9, concluimos que $M \in \mathcal{U}$; esto es,

$$\mathcal{I} : H^n_{dR}(M) \to H^n(M;\mathbb{R})$$

es un isomorfismo, como queríamos demostrar. □

Nótese que el resultado anterior no solo prueba que la cohomología de de Rham de una variedad es un invariante topológico, sino que además permite identificarla explícitamente con otro invariante topológico, su cohomología singular —esto es, con el conjunto de sus homomorfismos de la homología singular a $\mathbb{R}$.

Referencias

[1] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables.* 2, 3, 4, 41
Sanz y Torres, Madrid 2016.

[2] V. Muñoz, A. González-Prieto, J.A. Rojo: *Geometry and Topology of Manifolds: Surfaces and Beyond.* 2, 20, 36
American Mathematical Society, 2020.

[3] M. Abate, F. Tovena: *Geometria Differenziale.* 2
Springer-Verlag Italia, 2011.

[4] I.Madsen, J. Tornehave: *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characterisric classes.* 2, 7
Cambridge Univesity Press 1997.

[5] P. Cordero Encinar: *Cohomología de de Rham en variedades.* 2
Trabajo de fin de grado, Universidad Complutense de Madrid, 2021.
Disponible en `http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/dfps/`.

[6] R. Casado Noguerales: *Cohomología de de Rham y fibraciones de esferas.*
Trabajo de fin de grado, Universidad Complutense de Madrid, 2021.
Disponible en `http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/dfps/`.

[7] M. Pulido Monroy: *Topología Algebraica: Homología singular.*
Trabajo de fin de grado, Universidad Complutense de Madrid, 2015.
Disponible en `http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/dfps/`.

[8] J.M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds, Second Edition.* 43
Springer Science+Business Media New York, 2013.

[9] E. Outerelo, J. Á. Rojo y J. M. Ruiz: *Topología diferencial, un curso de iniciación.* Segunda edición. 4
Sanz y Torres, 2020.

[10] A. Hatcher: *Algebraic Topology* 2, 31
Cambridge University Press, 2001.

[11] J.M. Lee: *Introduction to Topological Manifolds, Second Edition.* 3
Springer Science+Business Media New York, 2011.

[12] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald: *Introduction to Commutative Algebra* 44
Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1969.

[13] J. Dieudonné: *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960.* 1
Birkhäuser Boston, 1989.