

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

TRABAJO DE FIN DE GRADO



El teorema de Poincaré-Hopf

Supervisor: Jesús María Ruiz Sancho

Víctor Álvarez Martínez

Doble Grado en Matemáticas-Física

Curso académico 2021-2022

Madrid, 5 de julio de 2022

Resumen:

En este trabajo demostramos el *Teorema de Poincaré-Hopf* para el índice de un campo tangente. En primer lugar, presentamos varios resultados relevantes acerca de la aproximación y homotopía de aplicaciones propias. A continuación, definimos el *grado de Brouwer-Kronecker* de una función mediante cohomología de de Rahm y presentamos el importante *teorema del borde*. Así mismo, estudiamos las *singularidades de un campo tangente*, en particular no degeneradas, y llegamos a la noción de *índice de un campo tangente*. Con estas herramientas demostramos el Teorema de Poincaré-Hopf y profundizamos en el estudio de *campos gradientes*, con especial énfasis en los de *funciones de Morse*. Finalmente, lo relacionamos con la *característica de Euler* y el *teorema de Gauss-Bonnet*.

Palabras clave: aproximación, homotopía, aplicación propia, cohomología de de Rahm, grado de Brouwer-Kronecker, índice de un campo tangente, teorema de Poincaré-Hopf, funciones de Morse, característica de Euler, teorema de Gauss-Bonnet.

Abstract:

In this work we study the *Poincaré-Hopf Index Theorem*. Firstly, we present several relevant results regarding the approximation and homotopy of *proper mappings*. Then, we define the *Brouwer-Kronecker degree* using the de Rahm cohomology, and we prove the very significant *Boundary Theorem*. Furthermore, we study the *singularities of vector fields*, in particular non-degenerate, which lead to the notion of *index of a vector field*. We then prove the Poincaré-Hopf Index Theorem and we study in more detail the *gradient fields*, in particular those of *Morse functions*. Finally, we make a link with the *Euler characteristic* and the *Gauss-Bonnet Theorem*.

Keywords: approximation, homotopy, proper mapping, de Rahm cohomology, Brouwer-Kronecker degree, index of a tangent vector field, Poincaré-Hopf theorem, Morse functions, Euler characteristic, Gauss-Bonnet Theorem.

Índice

1	Complementos de variedades diferenciables	1
1.1	Preliminares	1
1.2	Entornos tubulares	4
1.3	Aproximación	7
1.4	Homotopía	9
2	Grado de Brouwer-Kronecker	11
2.1	Integral y cohomología	11
2.2	Definición de grado para aplicaciones diferenciables	15
2.3	Definición de grado para aplicaciones continuas	17
2.4	Teorema del borde	19
3	El teorema de Poincaré-Hopf	19
3.1	Singularidades en campos tangentes	20
3.2	El teorema de Poincaré-Hopf	27
3.3	Campos gradientes	30
3.4	Funciones de Morse	33
4	Teorema de Gauss-Bonnet	34
4.1	Hipersuperficies afines	34
4.2	Elemento de volumen	36
4.3	Característica de Euler	37
4.4	Teorema de Gauss-Bonnet	40
5	Referencias	43

Introducción

El objetivo último de este trabajo es presentar y demostrar el Teorema de Poincaré-Hopf para variedades compactas, que establece que *el índice de un campo tangente a una variedad orientable es el grado de la aplicación de Gauss del borde de un entorno tubular en cualquier espacio afín que contenga a la variedad*. Para ello, todos los resultados necesarios para probar con rigor este teorema están recogidos en secciones anteriores.

En primer lugar, comenzamos fijando la notación a emplear en el trabajo, y presentamos con rigor los conceptos de *punto* y *valor regular*, enunciando también el conocido *Teorema de Sard*. Tras ello, estudiamos los *entornos tubulares* de una variedad, la *aproximación* de funciones continuas por diferenciables y terminamos con la *diferenciabilidad* en homotopías.

A continuación, presentamos la herramienta fundamental para la formulación del teorema: *el grado de Brouwer-Kronecker*. Optamos por definirlo mediante la integral de formas diferenciales. Esta elección nos permitirá formular con sencillez su invariancia bajo homotopías y extender la definición de aplicaciones diferenciables a continuas. Cerramos este estudio con el *Teorema del borde*, que asegura que el grado de una función restringida al borde de la variedad es constantemente nulo.

Comenzamos la tercera sección con una somera presentación acerca de los *campos tangentes* a una variedad. Tras estudiar sus *singularidades*, tanto *degeneradas* como *no degeneradas*, definimos el *índice del campo* en los mismos. Ilustramos estos conceptos con varios ejemplos. Tras particularizar estas nociones a *campos gradientes*, finalmente enunciamos y demostramos el *Teorema de Poincaré-Hopf*.

En la última sección profundizamos en varias aplicaciones del teorema. En primer lugar, exponemos varios resultados útiles en el campo de las hipersuperficies afines, llevamos a cabo una sucinta presentación acerca de la integración en variedades y estudiamos el elemento de volumen de las hipersuperficies. A continuación, generalizamos la noción de *característica de Euler* a hipersuperficies compactas arbitrarias a través de triangulaciones. Finalmente, definimos el concepto de *curvatura íntegra* de una variedad y discutimos de manera rigurosa las ideas detrás de la demostración del *Teorema de Gauss-Bonnet*, cuya fórmula homónima relaciona la curvatura íntegra y la característica de Euler de una variedad.

1 Complementos de variedades diferenciables

1.1 Preliminares

Este primer apartado pretende servir de punto de partida para la lectura del TFG, estableciendo la notación que se utilizará. Así mismo, también dará la oportunidad de presentar algunos resultados necesarios para demostrar el Teorema de Poincaré-Hopf.

(1.1.1) Terminología y notaciones. Son las habituales en cualquier texto de variedades diferenciables o topología.

- Una *variedad \mathcal{C}^r diferenciable de dimensión m* es un espacio localmente \mathcal{C}^r difeomorfo a un abierto del espacio afín \mathbb{R}^m . Se denomina *parametrización* a una aplicación r veces diferenciable $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset M$ (donde W es un abierto de la variedad M) y *sistema de coordenadas* a su inversa $\mathbf{x} = \varphi^{-1} : W \rightarrow U$.

En la práctica, trabajaremos con aplicaciones y variedades suaves, esto es, de clase \mathcal{C}^∞ y sumergidas en un espacio euclídeo, que denotaremos simplemente *diferenciables*.

- Una *variedad diferenciable con borde* tiene una definición análoga, con la única diferencia de que es localmente difeomorfa al semiespacio $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0\}$
- Nos referiremos a las homotopías $H(t, x) : [0, 1] \times X \rightarrow X$ como $H_t(x)$. Claramente $H_0(x)$ y $H_1(x)$ son las funciones que unimos por la homotopía.
- Sean M y N dos variedades de dimensión m , y sean $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ unos sistemas de coordenadas en M y N respectivamente. Entonces, dada una aplicación $f : M \rightarrow N$ podemos definir sus componentes como $f_i = y_i \circ f$. De esta manera, podemos expresar f en coordenadas de la manera usual, $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Así, llamaremos (*matriz*) *jacobiana* de f a

$$d_q f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(q) \end{pmatrix},$$

y *jacobiano* a su determinante. □

Para definir el grado de Brouwer-Kronecker, y posteriormente enunciar el Teorema de Poincaré-Hopf, necesitamos los valores regulares. Estos puntos intervienen en el *Teorema de la Función Implícita*, y el *Teorema de Sard* nos garantiza que son abundantes. Detallemos todo esto.

Definición 1.1.2. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Un *punto crítico* de f es un punto $x \in M$ cuya diferencial $d_x f$ no es suprayectiva. Los puntos que no son críticos se denominan *regulares*.

El conjunto de los puntos críticos de una aplicación diferenciable es cerrado, pues se puede definir como los ceros de ciertos menores de su jacobiana.

Podemos dar la definición poniendo el foco en la variedad N :

Definición 1.1.3. Un punto $a \in N$ se llama *valor crítico* de f si alguna de sus preimágenes es un punto crítico, esto es, si existe $x \in M$ tal que $f(x) = a$ y x es un punto crítico. Si a no es un valor crítico, se dice que es *regular*.

Así, el conjunto de los valores críticos de f es la imagen por f de su conjunto de puntos críticos, pero al contrario que este último, el conjunto de valores críticos no tiene por qué ser cerrado en N . En el caso particular de que f sea cerrada (por ejemplo, si M es compacta), el conjunto de valores críticos será cerrado en N .

Una de las utilidades principales de los valores regulares es definir variedades diferenciables.

Proposición 1.1.4. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable, y sea $a \in N \setminus \partial N$ un valor regular de f y de $f|_{\partial M}$. Entonces:

- (1) $f^{-1}(a)$ es una variedad diferenciable, de dimensión $\dim(M) - \dim(N)$ y con borde $f^{-1}(a) \cap \partial M$.
- (2) $T_x f^{-1}(a) = \ker(d_x f)$ para todo $x \in f^{-1}(a)$

Demostración. Sea $p = \dim(M)$, $q = \dim(N)$. Denotamos por $\varphi : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow M$ y $\theta : W \subset \mathbb{R}^q \rightarrow N$ sendas parametrizaciones de M y N en torno a los puntos $x \in M$ y $f(x) = a \in N$ respectivamente. Localizando la aplicación f a través de estas parametrizaciones (esto es, estudiando $\theta^{-1} \circ f \circ \varphi$)

podemos suponer que $f : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow W \subset \mathbb{R}^q$. La clave ahora es usar el teorema de la función inversa.

Así, como para cada $x \in f^{-1}(a)$ la derivada $d_x f$ es suprayectiva, su núcleo $E \subset \mathbb{R}^p$ es un espacio vectorial de dimensión $p - q$. Como existe un isomorfismo lineal $j : E \rightarrow \mathbb{R}^{p-q}$ que podemos extender a una aplicación lineal suprayectiva $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-q}$, podemos definir la aplicación $h(z) = (f(z), g(z)) : V \rightarrow \mathbb{R}^p$.

La aplicación g es lineal, por lo que se tiene que $d_x h = (d_x f, g) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es suprayectiva y, por tanto, un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, h es un difeomorfismo de un entorno U de x sobre un entorno U' de $h(x) = (a, g(x))$. Escribimos $h(f^{-1}(a)) = (\{a\} \times \mathbb{R}^{p-q}) \cap U'$ y como hemos probado que $f^{-1}(a)$ es localmente difeomorfo (vía h) a \mathbb{R}^{p-q} , hemos terminado.

Usando esta misma h comprobamos que

$$T_x M = (d_x h)^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-q}) = (d_x f)^{-1}(0) = \ker(d_x f),$$

y se cumple (2). □

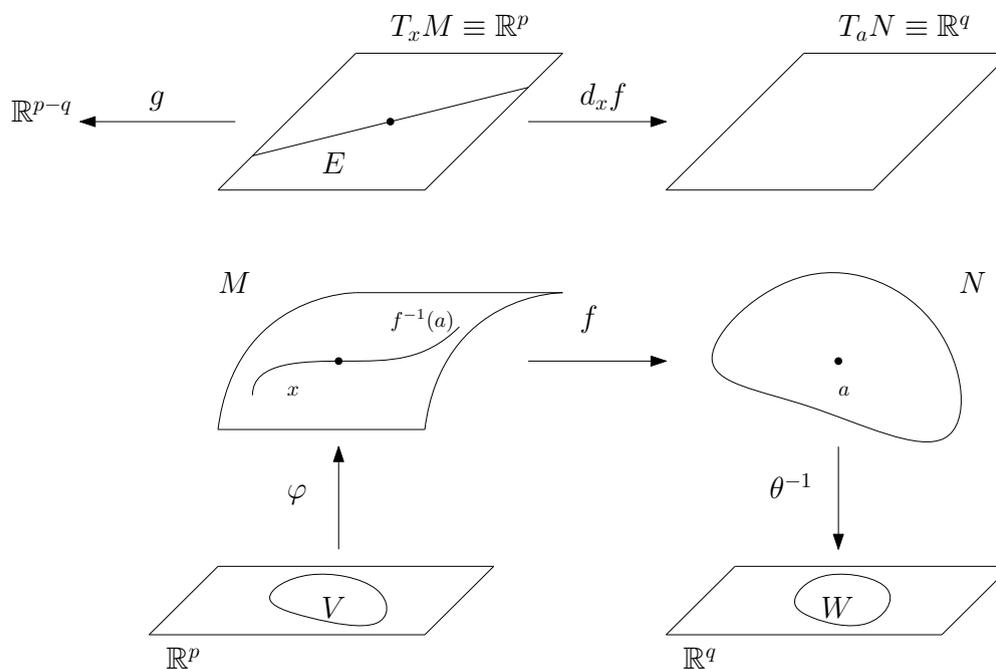


Figura 1: Esquema de la prueba.

Por lo visto anteriormente, resulta clara la importancia de los valores regulares. El teorema siguiente nos permite asegurar que en cualquier abierto de N podremos tomar un valor regular.

Teorema 1.1.5 (Teorema de Sard-Brown). *Sea $f : M \rightarrow N$ una función C^r , con $r > \dim(M) - \dim(N)$. Entonces, el conjunto de valores regulares de f es residual¹ (y en particular, por el teorema de Baire, denso) en N .*

Demostración. Ver [5], págs. 63-66. □

¹Un conjunto se dice residual si contiene una intersección numerable de conjuntos densos abiertos.

1.2 Entornos tubulares

El concepto de entorno tubular es fundamental en el estudio de las variedades, y en particular en la presentación del Teorema de Poincaré-Hopf, pues la demostración del mismo se fundamenta en llevar el estudio del problema a una estructura (el tubo) totalmente independiente del campo.

La manera de construir este entorno será la siguiente: primero sumergiremos la variedad en un espacio euclídeo, y después demostraremos que, con unos pocos requerimientos, se puede definir una retracción de un entorno que la contenga, sobre ella.

La peculiaridad de esta retracción es que “proyecta perpendicularmente” cada punto del entorno sobre el de la variedad que le es más cercano. Esta unión entre lo topológico y lo métrico nos permitirá definir un *entorno tubular* o *tubo* en torno a la variedad como el conjunto de puntos que distan de la misma una distancia suficientemente pequeña.

Dicho esto, para poder construir esta retracción necesitamos cartografiar un entorno de la variedad de una manera que nos permita definir fácilmente la retracción. Esto se conseguirá desplazando el complemento ortogonal al plano tangente en un cierto punto, sobre ese punto.

Proposición 1.2.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ un variedad diferenciable sin borde de dimensión m . Entonces el conjunto*

$$\nu M = \{(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p : x \in M, u \perp T_x M\}$$

es una variedad diferenciable sin borde de dimensión p , y la aplicación diferenciable

$$\theta : \nu M \rightarrow \mathbb{R}^p : (x, u) \rightarrow x + u$$

induce un difeomorfismo desde un abierto Ω contenido en $M \times \{0\}$ a otro U contenido en M .

Demostración. Probaremos cada una de las afirmaciones anteriores por separado:

(a) νM es una variedad diferenciable sin borde de dimensión p .

Toda variedad (en particular M) es localmente una intersección completa ([3], página 10), es decir, pueden encontrarse $f_1, \dots, f_q, q = p - m$ aplicaciones diferenciables definidas en un cierto abierto $V \subset \mathbb{R}^p$ tales que

$$(i) \quad V \cap M = \{x \in V : f_1(x) = 0, \dots, f_q(x) = 0\}$$

(ii) La matriz jacobiana $J_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ tiene rango q en todo punto de $V \cap M$.

Estas dos condiciones permiten asegurar que los q vectores $\text{grad}_x(f_i)$ son perpendiculares a $T_x M$ y además independientes, por lo que forman una base del espacio perpendicular a $T_x M$ (que de ahora en adelante llamaremos $T_x M^\perp$).

Así, podemos definir la siguiente aplicación:

$$g : (V \cap M) \times \mathbb{R}^q \rightarrow (V \times \mathbb{R}^p) \cap \nu M : (x, y) \rightarrow (x, u), u = \sum_{i=1}^q y_i \text{grad}_x(f_i).$$

Recíprocamente, es posible expresar las componentes y_i en términos de las u_j , resolviendo el sistema lineal anterior, lo que prueba que g no es solo biyectiva, sino que es un difeomorfismo.

Esta construcción es local y replicable en todo punto $x \in V \cap M$, por lo que concluimos que νM es localmente difeomorfa a $M \times \mathbb{R}^q$, que es una variedad producto de dimensión $m + q = p$.

(b) θ es un difeomorfismo local en los puntos de la forma $(x, 0)$.

El Teorema de inversión local ([3], pág 6) asegura que (b) es equivalente a que $d_{(x,0)}\theta$ sea un isomorfismo lineal. Ahora bien, θ induce las identificaciones:

$$\theta|_{M \times \{0\}} : M \times \{0\} \cong M,$$

$$\theta|_{\{x\} \times T_x M^\perp} : \{x\} \times T_x M^\perp \cong T_x M^\perp.$$

Por tanto, la imagen de $d_{(x,0)}\theta$ contiene tanto a $T_x M$ como a $T_x M^\perp$, esto es, a todo \mathbb{R}^p . Como su dominio νM también tiene dimensión p , es un isomorfismo.

(c) θ es inyectiva en un entorno Ω de $M \times \{0\}$

Dado un punto $a \in M$, θ es un difeomorfismo en un entorno abierto de $(a, 0)$, llamémoslo:

$$U^a = \{(z, u) \in \nu M : \|z - a\|, \|u\| < \varepsilon(a)\},$$

con $\varepsilon(a)$ una cantidad positiva.

La unión de estos U^a es un entorno abierto de $M \times \{0\}$, pero puede que θ no sea inyectiva en él. Esto se remedia tomando como abierto el conjunto

$$\Omega = \bigcup_a V^a \quad V^a = \{(z, u) \in \nu M : \|z - a\|, \|u\| < \frac{1}{3}\varepsilon(a)\},$$

pues, si $(z, u), (z', u') \in \Omega$ tienen la misma imagen, entonces están en el mismo U^a y han de ser el mismo punto. En efecto, supongamos que

$$\begin{cases} (z, u) \in V^a & \|z - a\|, \|u\| < \frac{1}{3}\varepsilon(a), \\ (z', u') \in V^{a'} & \|z' - a'\|, \|u'\| < \frac{1}{3}\varepsilon(a'), \\ z + u = z' + u', \end{cases}$$

y, por ejemplo, $\varepsilon(a') \leq \varepsilon(a)$.

Tenemos que $\|u'\| < \frac{1}{3}\varepsilon(a') < \varepsilon(a)$ y

$$\|z' - a\| \leq \|z' - z\| + \|z - a\| = \|u - u'\| + \|z - a\| \leq \|u\| + \|u'\| + \|z - a\| < \frac{2}{3}\varepsilon(a) + \frac{1}{3}\varepsilon(a),$$

con lo que $(z', u') \in U^a$ como se quería, y por la inyectividad de θ en U^a concluimos que $(z', u') = (z, u)$.

Como consecuencia de todo lo anterior, $U = \theta(\Omega)$ es un entorno abierto de M y $\theta : \Omega \rightarrow U$ es un difeomorfismo. \square

Con tanta notación es fácil perder el significado geométrico de la función θ . Al desplazar los vectores tangentes a $T_x M$ y colocarlos con origen en x , podemos obtener un entorno de x saltando “perpendicularmente” desde la superficie M . La idea consiste en definir la retracción tomando el punto desde el que hemos saltado.

Definición 1.2.2. Siguiendo la notación de la proposición 1.2.1, la *retracción tubular* del abierto U sobre la variedad M es la aplicación diferenciable:

$$\begin{aligned} \rho : \quad U &\longrightarrow M \\ y = \theta(x, u) &\longmapsto x \end{aligned}$$

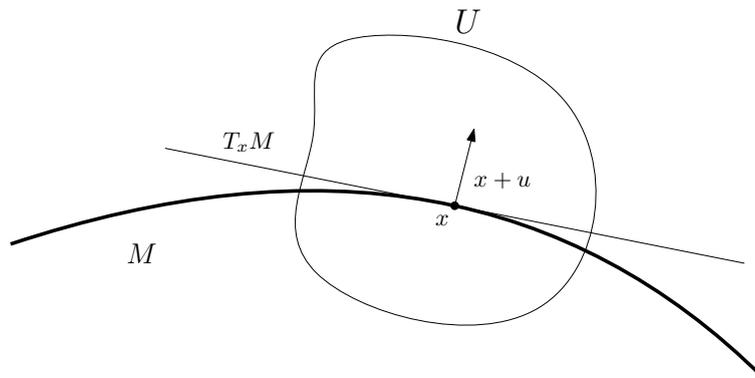


Figura 2: Representación de un entorno U de x en \mathbb{R}^p usando el complemento ortogonal al plano tangente.

Proposición 1.2.3. *Para un abierto U suficientemente pequeño, la retracción tubular cumple las siguientes propiedades:*

- (1) M es cerrado en U
- (2) $y - \rho(y) \perp T_{\rho(y)}M$ para todo $y \in U$
- (3) $\text{dist}(y, M) = \|y - \rho(y)\|$ para todo $y \in U$

De hecho, (3) caracteriza a ρ .

Demostración. Las condiciones (1) y (2) son inmediatas por construcción. Solo queda por demostrar (3). Para ello, vemos primero que:

Cada punto $x \in M$ tiene un entorno $U^x \subset U$ en el que (3) se cumple.

De ser cierto esto, redefiniremos el abierto U como $U = \bigcup_x U^x$. Tomamos un entorno compacto L de x en M cuyo interior en M denotamos W , y tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}\text{dist}(x, M \setminus W)$. Ahora, sea $V = W \cap \{\|z - x\| < \varepsilon\}$ y tomamos $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$ para asegurarnos de que $L \times \{\|u\| \leq \delta\} \subset \Omega$. Entonces, el entorno buscado es

$$U^x = \theta(V \times \{\|u\| < \delta\}) \subset W.$$

En efecto, sea $y \in U^x$, por lo que $\rho(y) \in V$ y $\|y - \rho(y)\| < \delta$. Dado $z \in M \setminus L$, se tiene

$$\begin{aligned} \|z - y\| &\geq \|z - x\| - \|x - y\| \geq 2\varepsilon - (\|x - \rho(y)\| + \|\rho(y) - y\|) \\ &> 2\varepsilon - (\varepsilon + \delta) = \varepsilon - \delta > \delta > \|y - \rho(y)\|, \end{aligned}$$

y, por tanto, se cumple

$$\begin{cases} \|y - z\| > \|y - \rho(y)\| \text{ si } z \in M \setminus L, \\ \delta > \|y - \rho(y)\| \geq \text{dist}(y, M) = \text{dist}(y, L). \end{cases}$$

Como L es compacto, $\text{dist}(y, L)$ se alcanza para algún $z \in L$. Por tanto, la función $h : p \mapsto \|y - p\|^2$ tiene un mínimo *global* en z y su derivada se anula en $T_z M$, esto es, el gradiente $2(y - z)$ es perpendicular a $T_z M$, por lo que si definimos $v = y - z$ se tiene

$$v \perp T_z M$$

Se tiene que $\|v\| = \|y - z\| = \text{dist}(y, L) < \delta$, por lo que $(z, v) \in L \times \{\|u\| \leq \delta\} \subset \Omega$. Como θ es inyectiva en Ω y $z + v = \rho(y) + (y - \rho(y))$ (donde cada sumando es perpendicular al otro) se concluye que $z = \rho(y)$ y

$$\text{dist}(y, M) = \text{dist}(y, L) = \|y - z\| = \|y - \rho(y)\|.$$

Además, como $\rho(y)$ es el único punto de M donde $\text{dist}(y, M) = \|y - \rho(y)\|$ en efecto (3) determina la retracción. \square

1.3 Aproximación

En esta sección demostraremos que toda función continua puede aproximarse por otra función de clase C^r arbitrariamente próxima, resultado que no se limita a variedades compactas. Para ello, necesitamos introducir primero un tipo particular de funciones.

Definición 1.3.1. Una aplicación continua $f : M \rightarrow N$ se denomina *propia* cuando es cerrada y la imagen inversa de cada punto de N es compacta. Trabajando en variedades diferenciables, estas dos condiciones son equivalentes a que la imagen inversa de cada conjunto compacto sea compacta.

Nótese que, si la variedad M es compacta, todas las aplicaciones continuas son propias. Esto nos permitiría enunciar el Teorema de Poincaré-Hopf sin tener en cuenta la definición anterior, pero presentarla nos abrirá la puerta a algunos resultados interesantes más generales.

Que la aplicación continua sea en particular una homotopía da pie a otra definición importante:

Definición 1.3.2. Dos aplicaciones $f, g : M \rightarrow N$ se dicen *propia* si existe una *homotopía propia* entre ellas. Esto es, si existe una homotopía H_t propia como aplicación $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

Una vez presentadas estas definiciones, ya podemos estudiar la aproximación de funciones.

Teorema 1.3.3. Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad diferenciable y $f : X \rightarrow N$ una aplicación continua. Para cada función positiva y continua $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ existe una aplicación diferenciable $g : X \rightarrow N$ tal que

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x) \quad \text{para cada } x \in X.$$

Demostración. Como X es cerrado en un cierto entorno abierto $W \subset \mathbb{R}^p$, por el Teorema de extensión de Tietze (ver [5], página 62), f se puede extender a una aplicación continua (que por simplicidad también denotaremos f). La imagen de la aplicación extendida f no tiene por qué estar contenida en N . De la misma manera, se puede extender $\varepsilon : W \rightarrow \mathbb{R}$ a ese mismo abierto, donde de nuevo la extensión recibe el mismo nombre que la función original. Tomando $\{\varepsilon > 0\}$ por W podemos suponer que ε es positiva en W .

Para demostrar este teorema, en primer lugar aproximaremos la función f y luego la retraeremos a N .

Paso 1: Aproximación de f . Como f es continua, cada punto $x \in W$ tiene un entorno $W^x \subset W$ tal que $\|f(z) - f(x)\| < \varepsilon(z)$ para cada $z \in W^x$. Tomamos ahora una partición diferenciable de la unidad para el recubrimiento $\{W^x\}$ de W y definimos:

$$h = \sum_x f(x)\theta_x : W \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

La aplicación h es diferenciable por la local-finitud de la partición, y para cada $z \in W$ se tiene

$$\begin{aligned} \|h(z) - f(z)\| &= \left\| \sum_x f(x)\theta_x(z) - \left(\sum_x \theta_x(z) \right) f(z) \right\| \\ &\stackrel{*}{\leq} \sum_x \theta_x(z) \|f(x) - f(z)\| < \varepsilon(z), \end{aligned}$$

donde el paso $*$ es cierto por la desigualdad triangular de la norma (pues las sumas son finitas). Además, si $\|f(x) - f(z)\| \geq \varepsilon(z)$, entonces $z \notin W^x$ y se cumple $\theta_x(z) = 0$.

Paso 2: Retracción de la aproximación. Sea $\rho : U \rightarrow N$ una retracción diferenciable sobre N desde un abierto $U \subset \mathbb{R}^q$. La función $\varepsilon'(x) = \text{dist}(f(x), \mathbb{R}^p \setminus U)$ es continua y positiva en X . Así, podemos reemplazar W por $\{\varepsilon' > 0\}$, o simplemente asumir $f(W) \subset U$. Si en el *Paso 1* usamos $\min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ se garantiza $h(W) \subset U$.

Para cada $x \in X$, tomamos K^x un entorno compacto de x en W . Así mismo, definimos $\varepsilon_x = \min\{\varepsilon(x) : x \in K^x\} > 0$, cantidad que está bien definida porque K^x es compacto. El conjunto

$$V^x = \{y \in U : \|\rho(y) - f(x)\| < \frac{1}{2}\varepsilon_x\}$$

es un entorno abierto de $f(x) = \rho(f(x))$ en \mathbb{R}^p y contiene una bola centrada en $f(x)$ de radio $\delta_x < \varepsilon_x$. Sea B_x la bola centrada en $f(x)$ de radio $\frac{1}{2}\delta_x$. Por continuidad, en un entorno abierto $A^x \subset f^{-1}(B_x) \cap K_x$ de x en W se tiene que $\|f - f(x)\| < \frac{1}{2}\delta_x$. Reemplazando W con $\cup_x A^x$, se puede asumir que cubren todo W . Sea ahora $\{\zeta_x\}_x$ una partición diferenciable de la unidad asociada a este recubrimiento, y definimos

$$\varepsilon'' = \sum_x \frac{1}{2}\delta_x \zeta_x : W \rightarrow \mathbb{R}.$$

Esta función es positiva y continua.

Ahora, sustituimos ε por $\min\{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''\}$ en el paso anterior y obtenemos que, como $h(W) \subset U$, $g = \rho \circ h$ está bien definida y es diferenciable. Además, g es la aproximación de f que buscamos. Comprobémoslo:

Sea $z \in X$. Para estimar $\|g - f\|$ utilizamos que $\zeta_x(z) \neq 0$ únicamente en una cantidad finita de puntos (por la local-finitud de la partición diferenciable de la unidad), que llamaremos $x_1, \dots, x_s \in X$. Entonces,

$$\varepsilon''(z) = \sum_{i=1}^s \delta_{x_i} \zeta_{x_i}(z) \leq \frac{1}{2} \max\{\delta_{x_i}\} \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \delta_{x_1}$$

donde $*$ indica que, para aligerar la notación, supondremos que δ_{x_1} es el mayor de todos estos números. Como $z \in A^{x_1}$ se tiene que $f(z) \in B_{x_1}$, y por tanto

$$\|h(z) - f(x_1)\| \leq \|h(z) - f(z)\| + \|f(z) - f(x_1)\| < \varepsilon''(z) + \frac{1}{2}\delta_{x_1} \leq \delta_{x_1},$$

por lo que $h(z) \in V_{x_1}$ y $\|\rho(h(z)) - f(x_1)\| < \frac{1}{2}\varepsilon_{x_1}$. Por otra parte, $z \in A^{x_1}$ también implica $\|f(z) - f(x_1)\| < \frac{1}{2}\varepsilon_{x_1}$, y, por tanto,

$$\|g(z) - f(z)\| \leq \|\rho(h(z)) - f(x_1)\| + \|f(z) - f(x_1)\| < \varepsilon_{x_1}.$$

Para terminar, aseguramos que $\varepsilon_{x_1} \leq \varepsilon(z)$, pues $z \in A^{x_1} \subset K_{x_1}$. □

Este resultado puede refinarse para concluir que, si la aplicación f es propia, puede encontrarse una aproximación suficiente que también sea propia.

Teorema 1.3.4. *Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad diferenciable y $f : X \rightarrow N$ una aplicación propia. Para cada función positiva y continua $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ existe una aplicación diferenciable propia $g : X \rightarrow N$ tal que*

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x) \quad \text{para cada } x \in X.$$

Demostración. El teorema anterior nos garantiza la existencia de una aplicación diferenciable g que cumple la condición de proximidad. Como f es propia, vamos a intentar tomar una función ε suficientemente pequeña como para que g también lo sea. Así, sean $\{V_i\}$ y $\{U_i\}$ recubrimientos localmente finitos de N de manera que $\bar{V}_i \subset U_i$ y \bar{V}_i sea compacto. Entonces, como f es propia los conjuntos compactos $K_i = f^{-1}(\bar{V}_i)$ forman un recubrimiento localmente finito de X . Por tanto, cada punto $x \in X$ posee un entorno W_x que tiene intersección no nula solo con una cantidad finita de K_i 's. Así, podemos definir el número

$$\varepsilon_x = \min_i \text{dist}(\bar{V}_i, N \setminus U_i)$$

para los índices con $W_x \cap K_i \neq \emptyset$. Como el recubrimiento W_x es localmente finito, podemos encontrar una partición de la unidad $\{\eta_x\}$ asociada, y definir la función continua

$$\varepsilon^*(z) = \frac{1}{2} \sum_x \eta_x(z) \varepsilon_x.$$

Se tiene que si la aproximación g es construida tomando $\varepsilon \leq \varepsilon^*$, entonces g es propia.

La clave es que para esa g se cumple $g(K_i) \subset U_i$ para todos los i . En efecto, sea $z \in K_i = f^{-1}(\bar{V}_i)$. Como $\eta_x(z) \neq 0$ implica que $z \in W_x$, entonces i es uno de los índices de la definición de ε_x , por lo que $\varepsilon_x \leq \text{dist}(\bar{V}_i, N \setminus U_i)$. Se sigue por tanto

$$\|f(z) - g(z)\| < \varepsilon^*(z) \leq \frac{1}{2} \left(\sum_x \eta_x(z) \right) \text{dist}(\bar{V}_i, N \setminus U_i) = \frac{1}{2} \text{dist}(\bar{V}_i, N \setminus U_i),$$

y como $f(z) \in \bar{V}_i$, necesariamente $g(z) \in U_i$, como buscamos.

De este último resultado deducimos que g es propia. Sea $L \in N$ un compacto. Como la familia $\{U_i\}$ es localmente finita, L interseca a una cantidad finita de U_i . Pero entonces, por la propiedad descrita, $C = g^{-1}(L)$ interseca solo a una cantidad finita de K_i . Los conjuntos K_i cubren X , por lo que el conjunto cerrado C está contenido en la unión de una cantidad finita de ellos. Esa unión es compacta, y al ser C cerrado en ella, C también lo es. \square

1.4 Homotopía

Como vimos en la sección anterior, toda función continua puede aproximarse por una diferenciable arbitrariamente próxima. Ahora, completaremos este resultado asegurando que dos funciones arbitrariamente próximas son homótopas.

Esto eliminará la diferencia (bajo homotopía) entre aplicaciones continuas y diferenciables, algo que se probará en extremo útil una vez que enunciemos la invariancia del grado bajo homotopía.

Proposición 1.4.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad diferenciable y $f : X \rightarrow N$ una aplicación continua. Entonces, existe una función continua positiva $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cualquier aplicación $g : X \rightarrow N$ con $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in X$ es homótopa a f .*

Demostración. En principio, cualquier función continua $g : X \rightarrow N \subset \mathbb{R}^q$ es homótopa a f vía la homotopía $H_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Sin embargo, esta homotopía puede que no tenga la imagen en N . En ese caso, consideramos una retracción tubular diferenciable, $\rho : U \rightarrow N$ y definimos $\varepsilon(x) = \text{dist}(f(x), \mathbb{R} \setminus U) > 0$. Si $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in X$, deducimos que

$$\|f(x) - H_t(x)\| = \|f(x) - (tf(x) + (1-t)g(x))\| = |1-t| \cdot \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x),$$

por lo que $H_t(x) \in U$. Por tanto, podemos definir una homotopía en N como $\rho \circ H_t$. \square

Tal y como ocurría en la aproximación de funciones, el resultado anterior puede refinarse para demostrar que, si f es propia, g es propiamente homótopa a ella.

Proposición 1.4.2. *Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad diferenciable y $f : X \rightarrow N$ una aplicación propia. Entonces, existe una función continua positiva $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cualquier aplicación continua $g : X \rightarrow N$ con $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in X$ es propiamente homótopa a f .*

Demostración. Si f es propia es, en particular, continua. El teorema anterior nos asegura por tanto que existe una aplicación diferenciable g homótopa a ella. Repitiendo el Paso 3 de la demostración del teorema 1.3.4 para la aplicación $[0, 1] \times X \rightarrow N : (t, x) \rightarrow f(x)$ se prueba que, si f es una aplicación propia, $\rho \circ H_t$ también lo es. \square

En esta última prueba, si f y g son diferenciables, también lo es la homotopía construida. Este resultado se puede generalizar como sigue:

Proposición 1.4.3. *Sea $X \in \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado y sea $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad diferenciable sin borde. Si dos aplicaciones diferenciables $f, g : X \rightarrow N$ son homótopas, entonces lo son vía una homotopía diferenciable.*

Demostración. Sea $H : [0, 1] \times X \rightarrow N$ una homotopía de niveles $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Por aproximación, existe una aplicación diferenciable $H' : [0, 1] \times X \rightarrow N$ con $\|H - H'\|$ arbitrariamente pequeña. Por tanto, tenemos una homotopía diferenciable H'_t pero no necesariamente entre f y g , simplemente sabemos que $\|f - H'_0\|$ y $\|g - H'_1\|$ son arbitrariamente pequeños.

Por la proposición 1.4.2 sabemos que podemos unir con sendas homotopías F_t y G_t tanto f a H'_0 como H'_1 con g . Por el teorema 1.3.4 de aproximación, podemos suponer F_t y G_t diferenciables. Así, solo faltaría comprobar que estas aplicaciones pueden pegarse de manera diferenciable.

Esto se consigue cambiando el argumento t por una función meseta diferenciable que se aplane en 0 y 1, por ejemplo:

$$\begin{cases} \theta(t) = 0 & \text{si } t \leq \frac{1}{3}, \\ \theta(t) = 1 & \text{si } t \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Así, definimos la homotopía resultante como

$$H''_t(x) = \begin{cases} F_{\theta(3t)}(x) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ H'_{\theta(3t-1)}(x) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ G_{\theta(3t-2)}(x) & \text{si } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Esta modificación permite pegar $F_{\theta(t)}$, $H'_{\theta(t)}$ y $G_{\theta(t)}$ de manera que la homotopía resultante $H''_t(x)$ es diferenciable, pues las funciones son localmente constantes en las juntas y diferenciables en el resto. \square

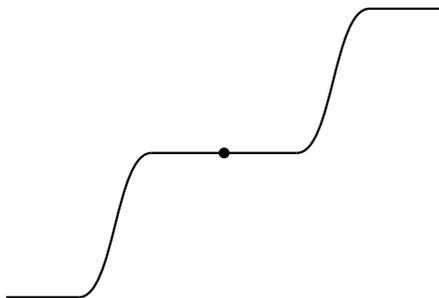


Figura 3: Detalle del pegado de dos funciones meseta.

De nuevo, este resultado se puede particularizar para funciones propias.

Proposición 1.4.4. *Sea $X \in \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado y sea $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad diferenciable sin borde. Si dos aplicaciones diferenciables $f, g : X \rightarrow N$ son propiamente homótopas, entonces lo son vía una homotopía propia diferenciable.*

Demostración. La versión para aplicaciones propias de los teoremas utilizados nos garantizan que, si f y g son propias, las homotopías diferenciables F_t , H'_t y G_t de la demostración anterior son propias, por lo que la homotopía H''_t resultante también lo es. \square

2 Grado de Brouwer-Kronecker

En esta sección construimos el grado de Brouwer-Kronecker. Para ello, comenzaremos con un sucinto comentario sobre formas diferenciales que nos permitirá entender la definición de de Rahm, y estableceremos algunas propiedades interesantes del mismo, principalmente su invariancia por homotopía y el *teorema del borde*.

2.1 Integral y cohomología

Una forma diferencial de grado r en una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\alpha : x \in M \mapsto \alpha_x \in \Lambda^r(T_x M),$$

donde Λ^r denota las aplicaciones multilineales alternadas de grado r . Si dados r campos tangentes cualesquiera $\{X^{(i)}\}$ la aplicación

$$\alpha(X^{(1)}, \dots, X^{(r)}) : M \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \alpha_x(X_x^{(1)}, \dots, X_x^{(r)}),$$

es diferenciable, se dice que α es una *forma diferenciable*.

El conjunto de todas las formas diferenciales de grado r se denota $\Gamma^r(M)$. En general es útil limitar este espacio a las formas lineales de soporte compacto, conjunto que escribimos como $\Gamma_c^r(M)$. Sin embargo, como ya comentamos en el apartado 1.3, el Teorema de Poincaré-Hopf se enuncia sobre variedades compactas, en las que $\Gamma_c^r(M) = \Gamma^r(M)$, y a la hora de estudiar el teorema esta apreciación será irrelevante.

Sobre el conjunto de las formas diferenciables puede definirse el operador *diferencial exterior*, que es la única aplicación lineal $d : \Gamma^{k-1}(M) \rightarrow \Gamma^k(M)$ que cumple:

1. Si $r = 0$, d es la diferencial de funciones.
2. $d \circ d = 0$.
3. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$, donde $\alpha \in \Gamma^r(M)$.

Una k -forma ω con soporte compacto se llama *cerrada* cuando su diferencial exterior es cero, y *exacta* cuando existe otra $(k-1)$ -forma α con soporte compacto tal que $\omega = d\alpha$. Las k -formas diferenciales cerradas son un subespacio lineal de $\Gamma_c^k(M)$, y como toda forma exacta es cerrada, las formas diferenciales exactas forman un subespacio de las cerradas.

Con todo ello, tenemos:

Definición 2.1.1. El k -ésimo grupo de cohomología de de Rahm de M es el siguiente espacio cociente:

$$H_c^k(M, \mathbb{R}) = \frac{\{k\text{-formas cerradas con soporte compacto}\}}{\{k\text{-formas exactas con soporte compacto}\}}.$$

Para estudiar el grupo de grado máximo $m = \dim(M)$ hay que integrar formas y eso requiere orientar la variedad. Recordamos muy brevemente que M es *orientable* si tiene un atlas cuyos cambios de coordenadas tienen todos determinante jacobiano positivo, y entonces cada espacio tangente de la variedad se orienta consistentemente con la base de derivadas parciales de cualquier sistema de coordenadas del atlas. El atlas y las bases de cada tangente con esa orientación se llaman *positivos*. Se dice que la variedad está orientada y que las coordenadas del atlas son compatibles con la orientación. Entonces se define en el conjunto $\Gamma_c^m(M)$ una forma lineal

$$\int_M : \Gamma_c^m(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \int_M \omega,$$

que recibe el nombre de *integral de la forma* ω . Brevemente, se toman coordenadas \mathbf{x} compatibles con la orientación y la parametrización $\varphi = \mathbf{x}^{-1}$ de modo que $\varphi^*\omega = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ y se calcula $\int_{\mathbb{R}^m} f$. Luego estos valores se pegan con una partición de la unidad.

Un resultado básico es el célebre Teorema de Stokes, que relaciona integrales en una variedad y en su borde. Eso requiere orientar el borde de una determinada manera. De nuevo recordamos esto brevemente. Si $x \in \partial M$, entonces $T_x \partial M$ es un hiperplano de $T_x M$ y una base de $T_x \partial M$ es positiva si precedida de un vector tangente *saliente* es una base positiva de $T_x M$. Un vector $u \in T_x M \setminus T_x \partial M$ se llama saliente si en coordenadas locales $M : \mathbf{x}_1 \geq 0$ su primera coordenada es negativa.

Tras esta preparación:

Teorema 2.1.2. Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión m , posiblemente con borde. Sea ω una $(m-1)$ -forma diferenciable con soporte compacto, de manera que $d\omega$ es una m -forma diferenciable. Entonces,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}.$$

Demostración. Ver [3], V.4.1. □

En particular, este resultado afirma que si la variedad M no tiene borde (como es hipótesis, por ejemplo, en el teorema de Poincaré-Hopf), se tiene $\int_M d\omega = 0$ para toda $(m-1)$ -forma diferenciable ω . Este hecho nos permite extender de manera consistente la definición de integral a *clases de formas* en el m -ésimo grupo de cohomología de de Rahm.

Así, si $[\alpha] = [\beta]$, se tiene que $\alpha - \beta = d\omega$ para una cierta $(m - 1)$ -forma diferencial ω . Usando la linealidad de la integral, se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\int_M \alpha - \int_M \beta = \int_M (\alpha - \beta) = \int_M d\omega = 0$$

y, por tanto,

$$\int_M [\alpha] := \int_M \alpha = \int_M \beta.$$

Más aún:

Proposición 2.1.3. *Si M es una variedad conexa y sin borde de dimensión m , la integral*

$$\int_M : H_c^m(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

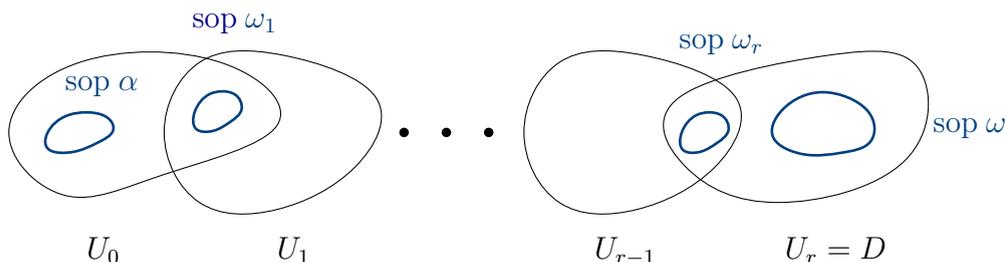
es un isomorfismo lineal.

Demostración. Los comentarios precedentes nos permiten asegurar que la integral está bien definida para clases de formas. Vamos a demostrar que es un isomorfismo lineal o, equivalentemente, que la dimensión de $H_c^m(M)$ es 1.

Para ello, elegimos una m -forma diferenciable ω con integral no nula y con soporte contenido en un abierto D difeomorfo a \mathbb{R}^m . Queremos ver que la integral de la clase de cohomología de cualquier m -forma α con soporte compacto es proporcional a la de $[\omega]$.

En primer lugar, podemos suponer que el soporte de α también está contenido en un abierto difeomorfo a \mathbb{R}^m . Para ello, recubrimos M con abiertos de ese tipo, y mediante una partición diferenciable de la unidad podemos reescribir $\alpha = \sum_{i=1}^r \theta_i \alpha$ de manera que el soporte de cada sumando esté contenido por completo en uno de estos abiertos del recubrimiento. Como la clase de equivalencia cumple $[\alpha] = \sum_{i=1}^r [\theta_i \alpha]$, basta probar que cada $[\theta_i \alpha]$ es proporcional a $[\omega]$.

Para ello también podemos suponer que el soporte de α está contenido en D . Así, como M es conexa, existe una cadena $U_0, U_1, \dots, U_r = D$ de abiertos difeomorfos a \mathbb{R}^m , con $\text{sop}(\alpha) \subset U_0$ y $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Para cada $i = 1, \dots, r$, sea ω_i una forma diferencial con integral no nula y con soporte contenido en $U_{i-1} \cap U_i$. Si la proporcionalidad se cumple para formas con soportes en el mismo abierto difeomorfo a \mathbb{R}^m , resulta que $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega_1]$, que cada $[\omega_i]$ es proporcional a ω_{i+1} y que $[\omega_r]$ es proporcional a $[\omega]$.



En definitiva, supondremos que α tiene soporte contenido en D . Extendiendo por cero, podemos suponer que D es toda la variedad M , y, por último, que es todo \mathbb{R}^m . Esta generalización es útil, porque nuestra búsqueda del escalar c tal que $\alpha - c\omega$ tenga una primitiva con soporte compacto se formula en \mathbb{R}^m como un problema de integración.

En efecto, si elegimos c para que la forma $\alpha - c\omega$ tenga integral nula, se escribirá

$$\alpha - c\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

donde f es una función diferenciable con soporte compacto e integral nula. Así, decir que $\alpha - c\omega$ es exacta es decir que f es la divergencia de un campo $X = (X_1, \dots, X_m)$ ² y su primitiva es

$$\sum_{i=1}^m X_i (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Por tanto, debemos demostrar que como f tiene soporte compacto e integral nula, se puede encontrar el campo X también con soporte compacto.

Para ello, probaremos por inducción sobre $n \leq m$ la propiedad siguiente:

Sea $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ una función diferenciable con soporte compacto. Separamos las coordenadas en $x = (y, z)$ con $y = (x_1, \dots, x_n)$ y $z = (x_{n+1}, \dots, x_m)$ y suponemos que $\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy = 0$. Entonces:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$$

para n funciones con soporte compacto $X_1(x), \dots, X_n(x)$.

Veámoslo. Para $n = 1$ basta tomar

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^x f(t, z) dt,$$

que tiene soporte compacto, pues si x es suficientemente pequeño (y sale del soporte compacto de f), el integrando es 0, y si x es suficientemente grande, el intervalo $(-\infty, x)$ contiene a todo el soporte compacto de f y, por hipótesis,

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^x f(t, z) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) dt = 0.$$

En el caso $n \geq 2$, supongamos que la propiedad se cumple para $n-1$. Denotamos $y' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, de manera que $x = (y', x_n, z)$. Sea $\varphi(y')$ una función diferenciable con soporte compacto e integral $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y') dy' = 1$, y definimos

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad h(x) = \varphi(y') \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, x_n, z) du.$$

La función g tiene soporte compacto, por tenerlo f y φ , y la construcción implica $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y', x_n, z) dy' = 0$. Así, por hipótesis de inducción, existen $n-1$ funciones con soporte compacto $X_1(x), \dots, X_{n-1}(x)$ tales que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x).$$

Por otra parte, podemos escribir $h(x) = \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x)$ donde

$$X_n(x) = X_n(y', x_n, z) = \varphi(y') \int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt,$$

función que tiene soporte compacto. En efecto, de tenerlo f y φ deducimos:

²Esto es, que se cumple la igualdad $f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$.

1. Si $\|y'\|$ es suficientemente grande, se sale del soporte compacto de φ y $\varphi(y') = 0$.
2. Si $\|z\|$ es suficientemente grande o x_n suficientemente pequeño, pasa lo mismo con el soporte de f y $f(u, t, z) = 0$
3. Si x_n es suficientemente grande

$$\int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy = 0.$$

En definitiva, las funciones X_1, \dots, X_{n-1}, X_n tienen soporte compacto. Derivando bajo el signo integral, se ve que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x).$$

Así, hemos probado la propiedad auxiliar, lo que completa la demostración. \square

2.2 Definición de grado para aplicaciones diferenciables

En la sección anterior demostramos que la integral de formas diferenciales está bien definida y que, además, es un isomorfismo entre el grupo de cohomología de de Rahm de grado máximo y los números reales. Para conectar este resultado con el grado de Brouwer-Kronecker de una función, necesitamos una construcción auxiliar:

Definición 2.2.1. Sean M y N dos variedades diferenciables conexas, orientadas y sin borde de dimensión m . Una aplicación diferenciable propia $f : M \rightarrow N$ induce una aplicación lineal

$$f^* : \Gamma_c^k(N) \longrightarrow \Gamma_c^k(M) \\ \omega \longmapsto f^*\omega,$$

que recibe el nombre de *pull-back de f* . Nótese que, como f es propia, f^* transforma formas con soporte compacto en formas con soporte compacto.

Se demuestra que los *pull-back* inducen homomorfismos en el grupo de cohomología (por sencillez los denotaremos también f^*). En particular, si nos restringimos al grupo de cohomología de de Rahm de grado máximo, el teorema 2.1.3 nos permite construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(N, \mathbb{R}) & \xrightarrow{f^*} & H_c^m(M, \mathbb{R}) \\ \int_N \downarrow \cong & & \cong \downarrow \int_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{R} \end{array}$$

Que f^* arrastre las formas de N a M hace que, comparando sus integrales, podamos definir una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Gracias a esto, podemos enunciar el siguiente:

Teorema 2.2.2. Sean M y N dos variedades diferenciables conexas, orientadas y sin borde de dimensión m , y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable propia entre ellas. Entonces, existe un número entero d tal que

$$\int_M f^*\omega = d \cdot \int_N \omega$$

para cada m -forma ω con soporte compacto en N . Además, para cualquier valor regular $a \in N$ de f tenemos que

$$d = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x f, \quad 0 \text{ si } f^{-1}(a) = \emptyset.$$

Demostración. La aplicación λ en el diagrama 2.2 es una aplicación lineal de \mathbb{R} a \mathbb{R} , luego debe ser la multiplicación por un escalar real, que llamaremos δ . La conmutatividad se escribe:

$$\int_M f^* \omega = \delta \cdot \int_N \omega$$

para cada m -forma ω con soporte compacto en N . Gracias al teorema de Sard podemos tomar un valor regular a de f , y el resultado es cierto si mostramos que

$$\delta = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x f,$$

para una cierta m -forma ω que construiremos explícitamente.

En primer lugar, puesto que a es un valor regular, su imagen inversa (que supondremos no vacía) es finita. En efecto, por ser a un valor regular, $f^{-1}(a)$ es una subvariedad de M , y su codimensión será la dimensión de N . Como M y N tienen la misma dimensión, $\dim f^{-1}(a) = 0$, y $f^{-1}(a)$ ha de ser un conjunto de puntos aislados. Como f es propia, $f^{-1}(a)$ es compacto y es por tanto una cantidad finita de puntos. Escribiremos $f^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_r\}$.

Por el Teorema de la Función Inversa, existen entornos disjuntos U_k de x_k tales que cada una de las restricciones $f|_{U_k}$ es difeomorfa a un entorno V de a en N , y $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_r$.

Para evitar problemas con puntos arbitrariamente próximos a a pero con más preimágenes fuera de los abiertos $\{U_i\}$, reducimos V al abierto $V \setminus f(M \setminus U_1 \cup \dots \cup U_r)$ y reducimos también sus U_i asociados (por sencillez, seguiremos llamando V y U_i a los abiertos reducidos). Que el nuevo abierto V es, efectivamente, abierto es consecuencia directa de que f sea cerrada (por ser propia) y la imagen del cerrado $M \setminus U_1 \cup \dots \cup U_r$ sea cerrada. Podemos hacer difeomorfo este abierto a \mathbb{R}^m mediante un cambio de coordenadas que conserva la orientación.

Así, usando cualquiera de estos cambios de coordenadas, llevamos a V la m -forma

$$\varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ es una función meseta diferenciable tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

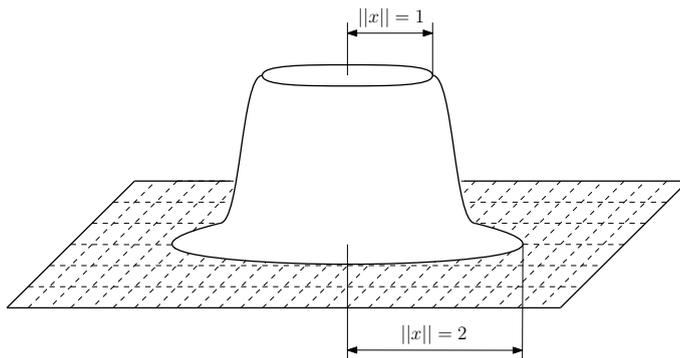


Figura 4: Función meseta $\varphi(x)$.

Esta construcción garantiza que el *pull-back* puede ser extendido por cero a toda la variedad N y que tiene soporte compacto. Denotamos esta extensión ω , y vamos a comprobar que cumple los requisitos que necesitamos.

Por un lado, como el soporte de ω está contenido en V , tenemos

$$\int_N \omega = \int_V \omega \stackrel{*}{=} \pm \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx_1 \dots dx_m \neq 0,$$

donde en la igualdad $*$ el signo aparece por la orientación de N , y viene dado por el cambio de variable de las coordenadas de V . Por otra parte, el soporte de la forma $f^*\omega$ está contenido en $f^{-1}(V) = \bigcup U_k$, y como los U_k son disjuntos, tenemos la siguiente igualdad:

$$\int_M f^*\omega = \sum_k \int_{U_k} f^*\omega$$

Podemos calcular cada sumando usando el difeomorfismo $f|_{U_k} : U_k \rightarrow V$. De nuevo aparece un signo inducido por el cambio de variable de las coordenadas en U_k

$$\int_{U_k} f^*\omega = \sigma_k \int_V \omega,$$

donde $\sigma_k = \pm 1$ dependiendo de si $f|_{U_k}$ preserva o no la orientación³. Para conocer este signo solo tenemos que comprobar el signo del determinante de la matriz jacobiana de las coordenadas que, como $x_k \in U_k$, es

$$\sigma_k = \text{sign}_{x_k}(f)$$

y concluimos que

$$\int_M f^*\omega = \sum_k \sigma_k \int_V \omega = \sum_k \text{sign}_{x_k}(f) \int_N \omega,$$

como estábamos buscando. De hecho, y puesto que $\int_N \omega \neq 0$ (como vimos al comienzo de la demostración), el entero $\sum_k \text{sign}_{x_k}(f)$ está perfectamente determinado. En el caso de que $f^{-1}(a) = \emptyset$, podemos tomar V de manera que $V \cap f(M) = \emptyset$ (pues $f(M)$ es cerrado). Así, $f^*\omega = 0$, la integral $\int_M f^*\omega = 0$ y, en efecto, $\delta = 0$. \square

2.3 Definición de grado para aplicaciones continuas

La sección anterior nos ha permitido definir el grado de Brouwer-Kronecker de una aplicación diferenciable. A continuación demostraremos que el grado es invariante por homotopía y así, utilizando los resultados del apartado 1.3.4, podremos definir el grado de una aplicación cualquiera como el de una aproximación diferenciable suya.

Proposición 2.3.1. Sean M y N dos variedades diferenciables conexas, orientadas y sin borde, de dimensión m , y sea $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$ una homotopía propia diferenciable. Entonces,

$$\deg(H_0) = \deg(H_1).$$

Demostración. Sea ω una m -forma diferenciable en N con integral no nula. Consideramos el *pull-back* $H^*\omega$. Se demuestra (ver [3], pág. 117) que el *pull-back* conmuta con la diferencial exterior, de manera que se cumple la igualdad

$$d(H^*\omega) = H^*(d\omega).$$

³Como cada U_k es conexo, esta es una propiedad global en U_k .

Sin embargo, $d\omega = 0$, pues ω es una forma diferencial de grado máximo, y:

$$0 = \int_{[0,1] \times M} H^*(d\omega) = \int_{[0,1] \times M} d(H^*\omega).$$

Esta última integral puede calcularse usando el Teorema de Stokes. Para ello, nótese que $[0, 1] \times M$ es una variedad diferenciable de dimensión $m + 1$ y frontera $(\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M)$.

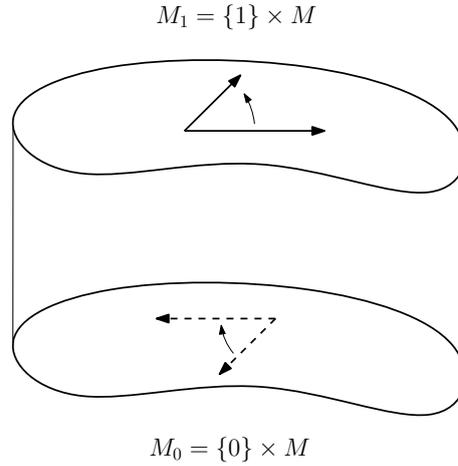


Figura 5: Ejemplo de un cilindro $[0, 1] \times M$. Nótese como la orientación inducida en cada una de las caras es opuesta.

La orientación en cada una de las dos componentes conexas del borde $\partial([0, 1] \times M) = M_0 \sqcup M_1$ es opuesta, por lo que la integral anterior se escribe de la siguiente manera:

$$0 = \int_{[0,1] \times M} d(H^*\omega) = \int_M H_1^*\omega - \int_M H_0^*\omega.$$

Por tanto, haciendo uso del teorema 2.2.2 podemos calcular

$$\deg(H_0) \int_N \omega = \int_M H_0^*\omega = \int_M H_1^*\omega = \deg(H_1) \int_N \omega,$$

y, puesto que $\int_N \omega \neq 0$, concluimos:

$$\deg(H_0) = \deg(H_1).$$

□

Acabamos de demostrar que el grado de una aplicación es invariante por homotopía diferenciable. Si unimos esta información a la que ya conocemos de la aproximación y homotopía de funciones, podemos enunciar al fin el resultado buscado:

Proposición 2.3.2. *Sean M y N dos variedades diferenciables compactas, orientadas y sin borde de dimensión m , y en el caso de N también conexa. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación propia. Entonces, todas las aplicaciones diferenciables propias $g : M \rightarrow N$ propiamente homótopas a f tienen el mismo grado, y definimos el grado de f , $\deg(f)$ como el de cualquiera de ellas.*

Demostración. El teorema 1.3.4 y la proposición 1.4.2 nos permiten asegurar que existe una aplicación g diferenciable propia propiamente homótopa a f . Ahora bien, para comprobar que esta definición es consistente hemos de verificar que no depende de la aplicación g escogida.

En efecto, si dos aplicaciones $g, g' : M \rightarrow N$ son propiamente homótopas a f , son propiamente homótopas entre sí. La proposición 1.4.4 nos asegura que existe una homotopía H diferenciable propia tal que $H_0 = g$ y $H_1 = g'$. Por el resultado anterior se concluye que $\deg(g) = \deg(g')$, y la definición es correcta. \square

2.4 Teorema del borde

Terminamos el estudio del grado de Brouwer-Kronecker con el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1. *Sea M una variedad diferenciable orientada y de dimensión $m + 1$, con borde ∂M . Sea N una variedad diferenciable orientada y sin borde, de dimensión m . Sea $H : M \rightarrow N$ una aplicación propia. Entonces,*

$$\deg(H|_{\partial M}) = 0.$$

Demostración. Por la proposición 1.4.2 existe una función positiva $\varepsilon : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que toda función $G|_{\partial M}$ tal que $\|G|_{\partial M} - H|_{\partial M}\| < \varepsilon$ es propiamente homótopa a $H|_{\partial M}$. Como \mathbb{R}^+ es difeomorfo a \mathbb{R} el teorema de extensión de Tietze nos permite extender esta aplicación ε a otra $M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

El teorema 1.3.4 garantiza que para toda función positiva y continua $\bar{\varepsilon} : M \rightarrow \mathbb{R}$ existe una aplicación diferenciable $G : M \rightarrow N$ tal que $\|H(x) - G(x)\| < \bar{\varepsilon}(x)$. En particular, es cierto que $\|H|_{\partial M} - G|_{\partial M}\| < \bar{\varepsilon}|_{\partial M} = \varepsilon$, luego $H|_{\partial M} \cong G|_{\partial M}$ y $\deg(H|_{\partial M}) = \deg(G|_{\partial M})$.

Por simplicidad, escribiremos $f := G|_{\partial M}$. Como M es una variedad de dimensión $m + 1$, ∂M es una variedad de dimensión m , y como f es diferenciable, el grado de f es el escalar d que cumple

$$\int_{\partial M} f^* \omega = d \cdot \int_N \omega$$

para toda ω forma diferencial de grado máximo en N . Como siempre puede tomarse una forma de grado máximo con integral no nula en N , vamos a demostrar que el lado izquierdo de la igualdad siempre es cero, lo que probará el resultado.

En efecto, es cierta la siguiente cadena de igualdades

$$\int_{\partial M} f^* \omega = \int_{\partial M} G^* \omega|_{\partial M} \stackrel{1}{=} \int_M d(G^* \omega) \stackrel{2}{=} \int_M G^*(d\omega) \stackrel{3}{=} 0,$$

pues

- (1) es cierto por el Teorema de Stokes.
- (2) es cierto por la conmutatividad entre la diferencial exterior y el *pull-back* (ver [3], IV.4.4.3).
- (3) es cierto por ser ω una forma diferencial de grado máximo en N , por lo que $d\omega = 0$.

y queda probada la nulidad del grado. \square

3 El teorema de Poincaré-Hopf

En esta sección estudiaremos las singularidades de campos tangentes sobre una variedad y definiremos el índice de un campo en las mismas. Tras particularizar estos conceptos a los campos gradientes, podremos enunciar el Teorema de Poincaré-Hopf.

3.1 Singularidades en campos tangentes

Comenzaremos este apartado con una breve introducción a los campos tangentes a una variedad, estudiaremos sus ceros y definiremos el índice de un campo en uno de ellos. En todo el apartado, M hará referencia a una variedad diferenciable orientada, sin borde, de dimensión m y sumergida en \mathbb{R}^p .

(3.1.1) Ceros de un campo tangente tangente. Un *campo tangente tangente* en M es una aplicación diferenciable $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $\xi(z) \in T_z M$ para todo $z \in M$. Podemos representar ξ en coordenadas locales como sigue:

Sea $\varphi : U \rightarrow M$ una parametrización de M . Para cada $x \in U$ nombramos $z = \varphi(x)$. El espacio tangente $T_z M$ está generado por la base de derivadas parciales

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_z = d_x \varphi(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \quad 1 \leq i \leq m$$

Por tanto, podemos escribir

$$\xi(z) = \xi(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_z = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \quad (*)$$

donde las funciones $\xi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ están unívocamente determinadas y son diferenciables. Así, consideraremos también la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \bar{\xi} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto (\xi_1(x), \dots, \xi_m(x)) \end{aligned}$$

Diremos que $z = \varphi(x)$ es un *cero o singularidad* del campo ξ si $\xi_i(x) = 0$ para todo i . En ese caso se cumple:

$$\begin{aligned} d_z \xi \left(\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \right|_z \right) &= d_x(\xi \circ \varphi)(e_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi \circ \varphi)(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_z. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos una aplicación lineal $d_z \xi : T_z M \rightarrow T_z M \subset \mathbb{R}^p$, cuya matriz respecto de la base de derivadas parciales es la matriz jacobiana $J_x \bar{\xi}$ de la localización $\bar{\xi}$.

Por otra parte, el determinante de la aplicación es un invariante de ξ :

$$\det(d_z \xi) = \det(J_x \bar{\xi}), \quad J_x \bar{\xi} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}.$$

Después de esta preparación tenemos:

Definición 3.1.2. Decimos que z es un *cero no degenerado* de ξ cuando el determinante $\det(d_z \xi)$ es no nulo. Si z es un cero no degenerado, el signo ± 1 de $\det(d_z \xi) \neq 0$ recibe el nombre de *índice de ξ en z* y se denota

$$\text{ind}_z(\xi) = \text{sign} \det(d_z \xi) = \text{sign}_x(\bar{\xi}).$$

Que z sea no degenerado es equivalente a decir que la localización $\bar{\xi} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo local en x , y por tanto localmente inyectivo, de manera que z es un *cero aislado*.

Para estudiar con la máxima generalidad los ceros de un campo tangente, es necesario considerar el caso de los *ceros degenerados*, aquellos en los que $\det(d_z \xi) = 0$.

Proposición 3.1.3 (Escisión de ceros aislados). *Sea $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ un campo tangente diferenciable. Sea Ω un abierto de M donde ξ tiene un único cero z . Entonces hay un entorno abierto U de z , con $\bar{U} \subset \Omega$, y un campo tangente diferenciable $\zeta : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que se cumple lo siguiente:*

1. \bar{U} es una variedad diferenciable compacta con borde $Z = \bar{U} \setminus U$.
2. $\zeta \equiv \xi$ fuera de U
3. ζ tiene una cantidad finita de ceros en Ω , todos ellos en U y todos ellos no degenerados.

Diremos que ζ es una *escisión* de ξ en z .

Demostración. Puesto que las propiedades a demostrar son locales, podemos suponer $\Omega = \mathbb{R}^m$, $\xi = \bar{\xi}$ y $z = 0$. Entonces, tomamos un valor regular a de ξ que cumpla $\|a\| < \|\xi(x)\|$ para $1 \leq \|x\| \leq 2$. Así mismo, sea θ una función meseta diferenciable con $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta \equiv 1$ en $\|x\| \leq 1$ y $\theta \equiv 0$ en $\|x\| \geq 2$. Entonces, tomamos $\zeta = \xi - a\theta$ y $U = \{x : \|x\| < 2\}$. Esta elección cumple:

1. $\xi \equiv \zeta$ fuera de U y por tanto no tiene ceros fuera de U .
2. $\|\xi\| > \|a\| \geq \|a\theta\|$ en $1 \leq \|x\| \leq 2$, y por tanto ζ no tiene ceros fuera de $V := \{x : \|x\| < 1\}$.
3. $\zeta = \xi - a$ en V , luego los ceros de ζ en V son los puntos $V \cap \xi^{-1}(a)$. Como a es un valor regular de ξ , estos ceros son finitos y no degenerados.

Finalmente, \bar{U} es una bola cerrada en \mathbb{R}^m , y por tanto es una variedad compacta con borde $Z = \bar{U} \setminus U = \{x : \|x\| = 2\}$. \square

Esta escisión es la clave para definir el índice en ceros aislados degenerados. Sin embargo, antes necesitamos un resultado auxiliar:

Proposición 3.1.4. *Sean W una variedad diferenciable compacta y orientada de dimensión m y $X = \partial W$. Sea $\bar{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una aplicación diferenciable y sea $a \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \bar{f}(X)$ un valor regular de \bar{f} . Consideramos la aplicación diferenciable:*

$$\begin{aligned} g &: X \longrightarrow \mathbb{S}^m \\ x &\longmapsto \frac{\bar{f}(x) - a}{\|\bar{f}(x) - a\|} \end{aligned}$$

Entonces, $\bar{f}^{-1}(a)$ es finito, y el grado de Brower-Kronecker de g es:

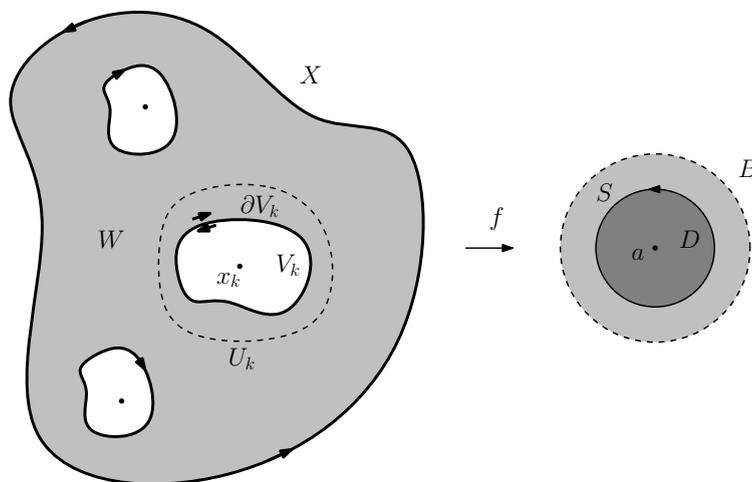
$$\deg(g) = \sum_{x \in \bar{f}^{-1}(a)} \text{sign}_x(\bar{f}).$$

Demostración. Como a es un valor regular de \bar{f} y W es una variedad compacta, el conjunto $\bar{f}^{-1}(a)$ es finito, y de la forma $\bar{f}^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_r\}$. Podemos tomar r entornos disjuntos U_k de los puntos x_k , de manera que las restricciones $\bar{f}|_{U_k} : U_k \rightarrow B$ son difeomorfismos sobre una bola abierta B centrada en a .

Tomamos ahora una bola cerrada D más pequeña y contenida en B , y denotamos por S su frontera. De nuevo, podemos restringir la función \bar{f} para obtener difeomorfismos

$$\bar{f}|_{V_k} : V_k = \bar{f}^{-1}(D) \cap U_k \rightarrow D, \quad \bar{f}(\partial V_k) = S.$$

Sea $V = W \setminus \bigcup_k V_k$. Esta es una variedad diferenciable con frontera $Y = X \cup \bigcup_k \partial V_k$, donde X y los ∂V_k tienen la orientación inducida por V , que es la opuesta a la inducida como frontera de sus respectivos V_k .



Como $a \notin \bar{f}(V)$, g está bien definido en V . Por el teorema del borde, $\deg(g|_{\partial V}) = 0$ y, por tanto,

$$\deg(g|_X) - \sum_k \deg(g|_{\partial V_k}) = 0$$

donde el signo negativo se corresponde con la orientación opuesta de los bordes ∂V_k . Además, si ε es el radio de la bola cerrada D , se tiene

$$g|_{\partial V_k} = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{f}|_{\partial V_k} - a)$$

y por tanto $\deg(g|_{\partial V_k}) = \deg(\bar{f}|_{\partial V_k})$. Ahora bien

- (1) Si $\text{sign}_{x_k}(\bar{f}) = +1$, el difeomorfismo $\bar{f}|_{V_k} : V_k \rightarrow D$ conserva la orientación. Por tanto, $\bar{f}|_{\partial V_k} : \partial V_k \rightarrow S$ también preserva la orientación y tiene grado de Brouwer-Kronecker $+1$.
- (2) Si $\text{sign}_{x_k}(\bar{f}) = -1$, el difeomorfismo $\bar{f}|_{V_k} : V_k \rightarrow D$ invierte la orientación. Por tanto, $\bar{f}|_{\partial V_k} : \partial V_k \rightarrow S$ también invierte la orientación y tiene grado de Brouwer-Kronecker -1 .

Por tanto,

$$\deg(g|_X) = \sum_k \deg(g|_{\partial V_k}) = \sum_k \deg(\bar{f}|_{\partial V_k}) = \sum_k \text{sign}_{x_k}(\bar{f}).$$

□

Ya estamos en disposición de definir el índice de un campo en un cero degenerado. Para ello, comenzaremos por estudiar una escisión del mismo.

Proposición 3.1.5. Sea $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ un campo tangente diferenciable, y sea $z \in M$ un cero aislado de ξ . Sea ζ una escisión de ξ en z , definida en el abierto $\Omega \subset M$ asociado a una parametrización φ de M en z . Entonces

$$\sum_{z^*} \text{ind}_{z^*}(\zeta) = \deg \left(\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \Big|_S \right),$$

donde la suma abarca todos los ceros no degenerados z^* de ζ y S es una esfera centrada en $x = \varphi^{-1}(z)$. Así, esta suma no depende de la escisión ni de la parametrización.

Denotamos esta suma como el *índice de ξ en z* , y escribimos

$$\text{ind}_z(\xi) = \sum_{z^*} \text{ind}_{z^*}(\zeta).$$

Si ξ tiene una cantidad finita de ceros, y todos ellos son aislados, definimos el *índice total de ξ* como la suma

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_z \text{ind}_z(\xi).$$

Si no hay ceros, el índice es cero.

Demostración. Sean $U \subset \Omega$ el abierto asociado a la escisión, y su frontera $Z = \bar{U} \setminus U$. Sean $X = \varphi^{-1}(Z)$ y $x^* = \varphi^{-1}(z^*)$, de manera que

$$\sum_{z^*} \text{ind}_{z^*}(\zeta) \stackrel{1}{=} \sum_{x^*} \text{sign}_{x^*}(\bar{\zeta}) \stackrel{2}{=} \deg \left(\left. \frac{\bar{\zeta}}{\|\bar{\zeta}\|} \right|_X \right) \stackrel{3}{=} \deg \left(\left. \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \right|_X \right) \stackrel{4}{=} \deg \left(\left. \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \right|_S \right),$$

donde

- (1) es cierto por la definición de índice en un cero no degenerado.
- (2) es cierto por la proposición auxiliar 3.1.4.
- (3) es cierto porque $\zeta \equiv \xi$ en Z .
- (4) es cierto por el teorema del borde. En efecto, $X \cup S$ es la frontera de $\bar{U} \setminus B$, donde B es la bola cerrada de frontera S . Como la orientación inducida en X es opuesta a la de S , se cumple

$$0 = \deg \left(\left. \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \right|_{\partial(\bar{U} \setminus B)} \right) = \deg \left(\left. \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \right|_X \right) - \deg \left(\left. \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \right|_S \right).$$

Así, el primero de los términos de la cadena de igualdades no depende de φ y el último no depende de ζ , por lo que ninguno depende de ζ ni de φ . \square

Ejemplo 3.1.6. Parametrizamos la circunferencia \mathbb{S}^1 mediante

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

donde U es un intervalo abierto de longitud 2π . De esta manera, el espacio tangente estará generado por el vector $\frac{\partial}{\partial \theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ y podemos definir los campos tangentes

$$\xi_1 = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

- El campo ξ_1 tiene dos ceros, en los puntos $z_1 = (1, 0) = \varphi(0)$ y $z_2 = (-1, 0) = \varphi(\pi)$. El jacobiano de la localización $\bar{\xi} = \sin \theta$ es muy sencillo, pues es el escalar $J_x \bar{\xi} = \cos \theta$.

Así, vemos que ambos ceros son no degenerados, y que se cumple

$$\text{ind}_{z_1}(\xi) = \text{sign}_0(\bar{\xi}) = 1, \quad \text{ind}_{z_2}(\xi) = \text{sign}_\pi(\bar{\xi}) = -1.$$

- Por otra parte, el campo ξ_2 nunca se anula.

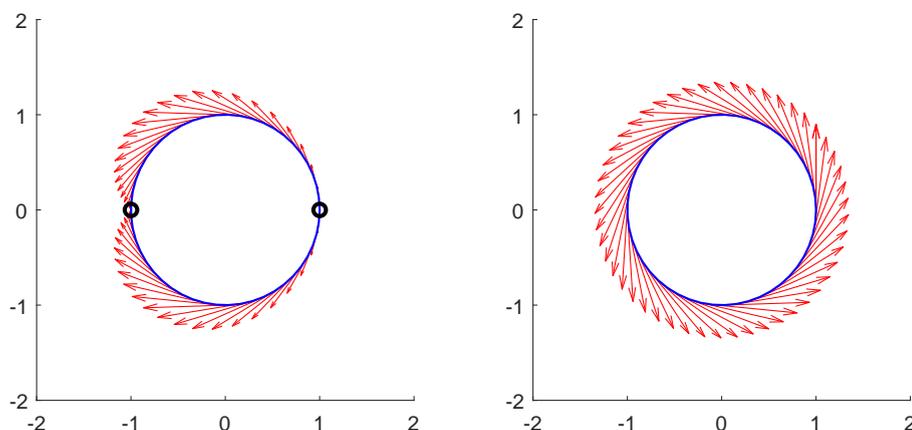


Figura 6: Campos tangentes a \mathbb{S}^1 . A la izquierda, el campo ξ_1 . A la derecha, el campo ξ_2 . Marcados en negro están los ceros del primero.

Si estudiamos el índice total de ambos campos vemos que se cumple:

$$\text{Ind}(\xi_1) = 1 + (-1) = 0, \quad \text{Ind}(\xi_2) = 0.$$

Que estas cantidades sean iguales no es casualidad. El teorema de Poincaré-Hopf demuestra que el índice total de un campo tangente a una superficie depende solo de esta última. En el caso de la circunferencia, el índice es 0, por lo que la cantidad de ceros del mismo ha de ser par.

La propiedad siguiente nos permitirá estudiar los ceros de campos más generales como producto de otros más sencillos.

Proposición 3.1.7. Sean ξ y ζ sendos campos tangentes vectoriales sobre las variedades M y N respectivamente, y sean $x \in M$ e $y \in N$ dos ceros aislados. Entonces, $\xi \times \zeta$ es un campo de $M \times N$, $z = (x, y)$ es un cero aislado de $\xi \times \zeta$ e

$$\text{ind}_z(\xi \times \zeta) = \text{ind}_x(\xi) \cdot \text{ind}_y(\zeta).$$

Demostración. Dado $p \in M \times N$ arbitrario, existen $a \in M$ y $b \in N$ tales que $p = (a, b)$. Como M y N son variedades diferenciables (de dimensión m y n respectivamente), existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ y parametrizaciones $\varphi : U \rightarrow W \subset M$ y $\psi : V \rightarrow Y \subset N$ sobre entornos abiertos de a en M y b en N . Claramente, $U \times V$ es un abierto de \mathbb{R}^{m+n} . $W \times Y$ es un entorno abierto de p en $M \times N$ y $\omega = \varphi \times \psi : U \times V \rightarrow W \times Y$ es una parametrización de $M \times N$ en p .

El espacio tangente a $M \times N$ en p es la imagen de la aplicación $d_{\omega^{-1}(p)}\omega = d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi \times d_{\psi^{-1}(b)}\psi$, y $T_p(M \times N) = T_aM \times T_bN$. Así, si ξ y ζ son campos tangentes sobre M y N , claramente $\xi \times \zeta$ es un campo tangente sobre $M \times N$.

Si x (resp. y) es el único cero de ξ (resp. ζ) en un entorno V^x (resp. V^y), entonces (x, y) es el único cero de $\xi \times \zeta$ en $V^x \times V^y$. Nótese que el recíproco no es cierto.

Para calcular su índice, consideramos una localización $\bar{\xi}$ de ξ y otra $\bar{\zeta}$ de ζ , de modo que $(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$ es una localización de $\xi \times \zeta$. $\bar{\xi}$ solo depende de las m coordenadas que parametrizan M (ídem para $\bar{\zeta}$ con las n coordenadas restantes), por lo que la matriz jacobiana de $\xi \times \zeta$ será diagonal por cajas y de la forma

$$J_z(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) = \begin{pmatrix} J_x(\bar{\xi}) & 0 \\ 0 & J_y(\bar{\zeta}) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, observamos que

$$\text{ind}_z(\xi \times \zeta) = \text{sign det}(J_z(\bar{\xi}, \bar{\zeta})) = \text{sign det}(J_x(\bar{\xi})) \cdot \text{sign det}(J_y(\bar{\zeta})) = \text{ind}_x(\xi) \cdot \text{ind}_y(\zeta). \quad \square$$

Ejemplo 3.1.8. La parametrización usual del toro de revolución \mathbb{T}^2 es

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto (\cos \theta \cdot (R + r \cos \phi), \sin \theta \cdot (R + r \cos \phi), r \sin \theta) \end{aligned}$$

sabemos que una base de su espacio tangente son los vectores

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} = (-\sin \theta (R + r \cos \phi), \cos \theta (R + r \cos \phi), 0), \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = (-r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \end{cases}$$

Pero $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y si ξ_1 es el campo sobre la circunferencia del ejemplo anterior,

$$\xi = \xi_1 \times \xi_1 = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

es un campo sobre el toro. Puesto que los campos $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial \phi}$ son perpendiculares entre sí observamos que, de acuerdo con 3.1.7, los ceros de ξ son pares de ceros de cada uno de los ξ_1 con índices:

$\theta \backslash \phi$	0	π
0	+1	-1
π	-1	+1

Tabla 1: Índice del campo ξ en los ceros (θ, ϕ) .

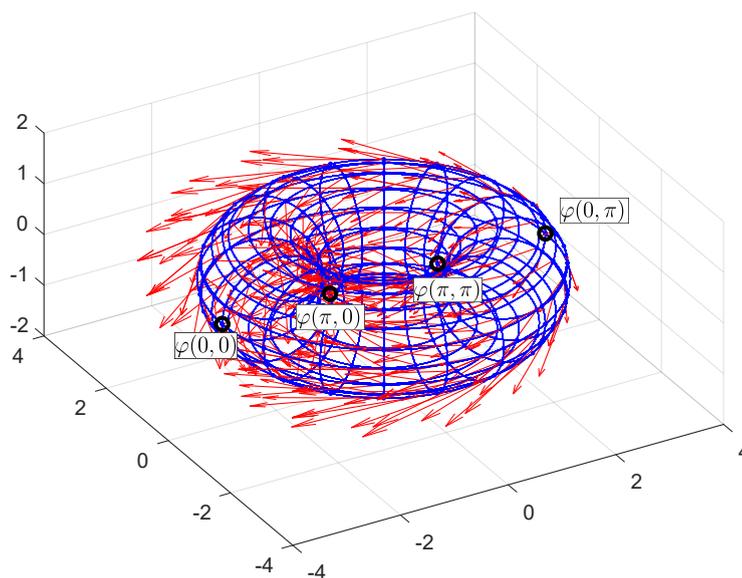


Figura 7: Campo ξ tangente a \mathbb{T}^2 , con $R = 2$, $r = 1$. Los ceros del campo están marcados en negro.

Estudiamos con un poco más de detalle la elevación del campo a \mathbb{R}^2 vía φ .

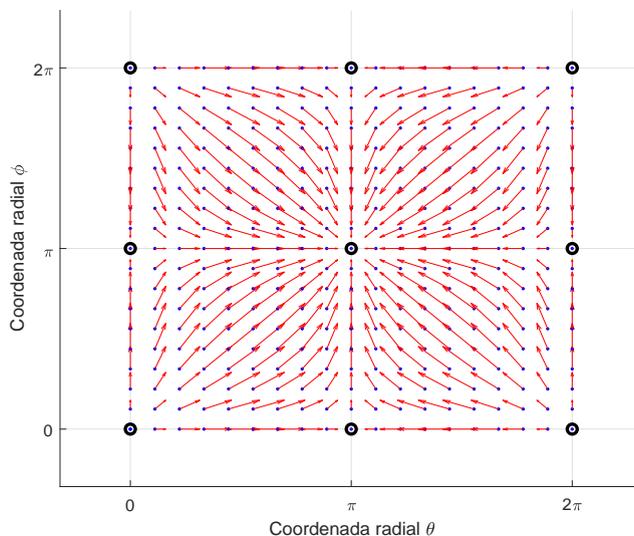


Figura 8: Elevación del campo ξ al plano. Nótese que el toro \mathbb{T}^2 se define con el cociente de los lados de este cuadrado, por lo que solo hay cuatro ceros diferentes.

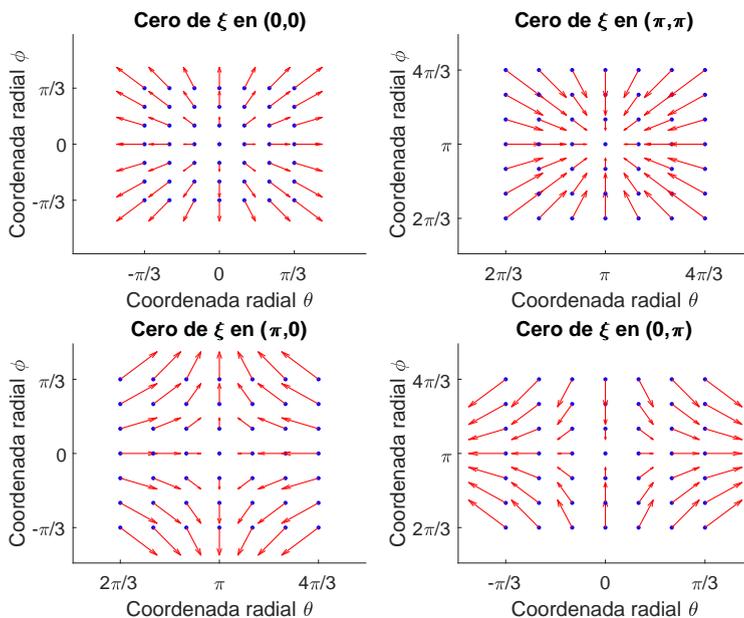


Figura 9: Detalle de los ceros de la elevación del campo ξ al plano.

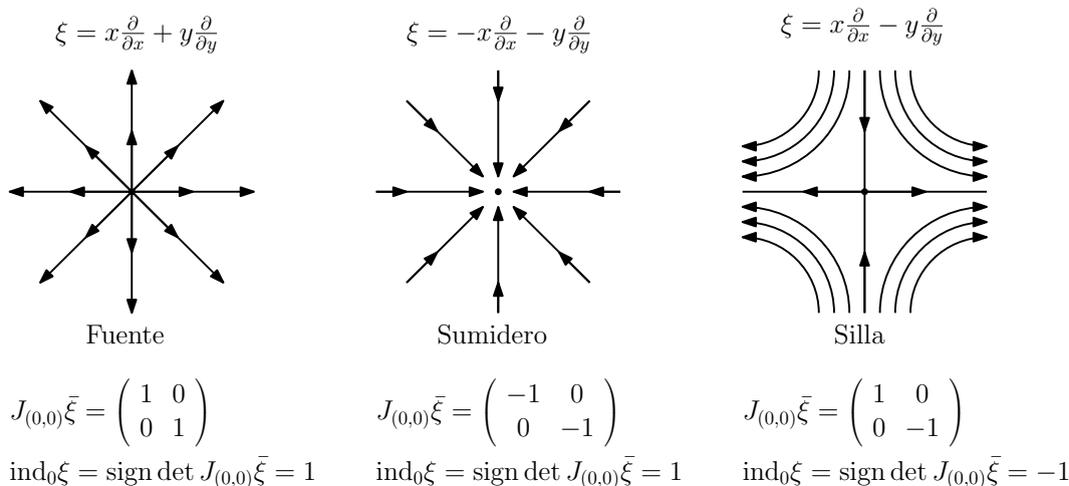
En esta figura los dos ceros superiores tienen índice 1 y los inferiores tienen índice -1 . Estos campos son muy comunes, hasta el punto que este tipo de ceros tienen nombres propios. Así, en $(0, 0)$ tenemos una *fuerza*, en (π, π) un *sumidero* y en $(\pi, 0)$ y $(0, \pi)$ los llamados *puntos de silla*.

Por último, nótese que en un entorno suficientemente pequeño de estos ceros es posible hacer los

desarrollos de Taylor

$$\sin t \approx t \text{ si } x \approx 0, \quad \sin t \approx \pi - t \text{ si } t \approx \pi,$$

por lo que el campo ξ en las inmediaciones de sus ceros es, esencialmente, alguno de los siguientes:



3.2 El teorema de Poincaré-Hopf

Una vez que hemos definido la noción de índice de un campo, podemos demostrar el resultado principal de este trabajo: el índice es un invariante de la variedad, independiente del campo empleado para calcularlo.

Antes de demostrar este resultado, necesitamos hacer unos comentarios acerca de entornos tubulares.

(3.2.1) Vectores normales en tubos. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable compacta y sin borde de dimensión m . Entonces, tal y como demuestran las proposiciones 1.2.1 y 1.2.3, M tiene una retracción tubular $\rho : U \rightarrow M$ tal que $x - \rho(x)$ es perpendicular a $T_{\rho(x)}M$. Consideremos la función diferenciable

$$\begin{aligned} \tau : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x - \rho(x)\|^2 \end{aligned}$$

Como $x - \rho(x)$ es perpendicular a $d_x\rho(\mathbb{R}^p) \subset T_{\rho(x)}M$, se sigue fácilmente que

$$\text{grad}_x(\tau) = 2(x - \rho(x)).$$

El gradiente se anula exactamente para $x = \rho(x)$, por lo que $x \in M$ y $\tau(x) = 0$. Por tanto, cualquier $\varepsilon > 0$ es un valor regular de τ y el conjunto $N = \{x : \tau(x) \leq \varepsilon\}$ es una variedad diferenciable con borde $\partial N = \{x : \tau(x) = \varepsilon\}$. También sabemos que $\text{grad}_x(\tau)$ es perpendicular a ∂N en x , por lo que

$$\eta(x) = \frac{\text{grad}_x(\tau)}{\|\text{grad}_x(\tau)\|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(x - \rho(x))$$

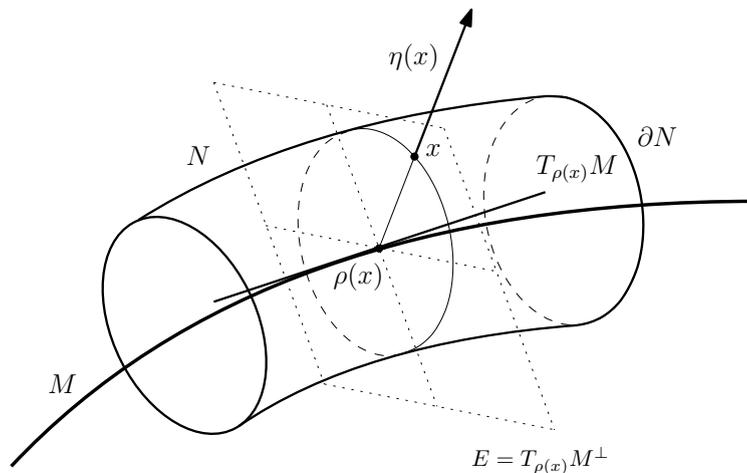
es un campo normal unitario de ∂N .

Finalmente, teniendo en cuenta que

- (i) $\|x - \rho(x)\| = \text{dist}(x, M)$ para todo $x \in U$,
- (ii) $\text{dist}(M, \mathbb{R} \setminus U) > 0$,

podemos concluir que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño

$$N = \{x \in \mathbb{R}^p : \text{dist}(x, M) \leq \sqrt{\varepsilon}\}, \quad \partial N = \{x \in \mathbb{R}^p : \text{dist}(x, M) = \sqrt{\varepsilon}\}.$$



En resumen, N es una variedad diferenciable compacta y llamamos a η *campo normal en un tubo en torno a M* . Observamos que $\eta(x)$ es un vector tangente saliente que sirve para definir la orientación de ∂N como borde de N , que es lo que suponemos siempre. \square

Así, ya contamos con todas las herramientas para obtener el resultado central de este trabajo:

Teorema 3.2.2 (Teorema del índice de Poincaré-Hopf). *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable compacta, orientada y sin borde, y sea ξ un campo tangente diferenciable con ceros aislados. Sea $\eta : \partial N \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ un campo normal en un tubo en torno a M . Entonces,*

$$\text{Ind}(\xi) = \text{deg}(\eta).$$

Demostración. La proposición 3.1.3 nos garantiza que podemos separar los ceros de ξ y asumir que son no degenerados. Así, con la notación del texto anterior, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} f : N &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longmapsto x - \rho(x) + \xi(\rho(x)) \end{aligned}$$

Aseguramos que 0 es un valor regular de f . En efecto, como $x - \rho(x)$ y $\xi(\rho(x))$ son perpendiculares, $f(x) = 0$ si y solo si $x = \rho(x)$ y $\xi(\rho(x)) = 0$. La primera condición implica $x \in M$ y la segunda, que x es un cero de ξ , que llamaremos a . Así, dado este cero a , se cumple

$$(1) \quad f \equiv \xi \text{ en } M, \text{ por tanto } d_a f|_{T_a M} = d_a \xi,$$

$$(2) \quad \rho \equiv a \text{ en el complemento ortogonal } a + E \text{ de } T_a M, \text{ por lo que } d_a f|_E \equiv \text{Id}_E.$$

Esto significa que $d_a f = \text{Id}_E \oplus d_a \xi$, por lo que $\det(d_a f) = \det(d_a \xi) \neq 0$, ya que a es un cero no degenerado de ξ . Esto muestra que 0 es un valor regular de f , sus preimágenes son los ceros de ξ y

$$\sum_a \text{sign}_a(f) = \sum_a \text{sign}_a(\xi) = \text{Ind}(\xi).$$

Por otra parte, la proposición 3.1.4 nos permite asegurar

$$\deg \left(\frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial N} \right) = \sum_a \text{sign}_a(f),$$

por lo que bastaría con probar que $\deg(\eta) = \deg \left(\frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial N} \right)$. Esto es cierto porque estas dos aplicaciones de ∂N a \mathbb{S}^{p-1} son homótopas, y tienen por tanto el mismo grado.

Para comprobar que estas aplicaciones efectivamente son homótopas, veremos que no tienen imágenes antipodales. En efecto, si η y $\frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial N}$ tuvieran imagen antipodal en algún $x \in \partial N$, se cumpliría

$$-\lambda(x) \cdot (x - \rho(x)) = x - \rho(x) + \xi(\rho(x)) \longrightarrow \lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|f(x)\| > 0.$$

Sin embargo, entonces ocurriría $\xi(\rho(x)) = -(1 + \lambda(x))(x - \rho(x))$, lo que es imposible para $x \notin M$, pues $\xi(\rho(x)) \in T_{\rho(x)}M$ y $0 \neq -(1 + \lambda(x))(x - \rho(x)) \perp T_{\rho(x)}M$. Por tanto, η y $\frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial N}$ no tienen imágenes antipodales y la homotopía

$$H_t(x) = \frac{t \cdot \eta(x) + (1-t) \cdot \frac{f}{\|f\|}}{\left\| t \cdot \eta(x) + (1-t) \cdot \frac{f}{\|f\|} \right\|}$$

está bien definida porque el denominador nunca se anula. □

Observación 3.2.3. El lado derecho de la ecuación $\text{Ind}(\xi) = \deg(\eta)$ no depende del campo tangente ξ , es decir, todos los campos de M tienen el mismo índice, que podemos llamar *índice de M* (aunque más adelante veremos que tiene un nombre más conocido). Simétricamente, el lado izquierdo no depende del tubo, por lo que todas las aplicaciones de Gauss, independientemente del tubo y de la inmersión, tienen el mismo grado.

Corolario 3.2.4. *Todo campo tangente a una variedad diferenciable compacta, orientada y sin borde de dimensión impar tiene índice total nulo.*

Demostración. Sea M una variedad diferenciable que cumple las hipótesis anteriores y sea m su dimensión. Tomemos un campo ξ definido sobre ella con la propiedad de que todos sus ceros sean no degenerados, y estudiemos el campo $-\xi$.

Por la definición de índice en un cero no degenerado, se tiene que

$$\text{ind}_z(-\xi) = \text{sign} \det(d_z(-\xi)) = \text{sign} \left((-1)^m \det(d_z \xi) \right) = (-1)^m \text{sign} \left(\det(d_z \xi) \right) = (-1)^m \text{ind}_z(\xi).$$

Como los ceros de ξ y $-\xi$ son los mismos, sumando ambos extremos de la cadena de igualdades a todos los ceros z de ξ llegamos a que

$$\text{Ind}(-\xi) = (-1)^m \text{Ind}(\xi).$$

Por el Teorema de Poincaré-Hopf, el índice no depende del campo, por lo que si m es impar la ecuación anterior solo se cumple cuando

$$\text{Ind}(-\xi) = \text{Ind}(\xi) = 0.$$

□

3.3 Campos gradientes

En esta sección vamos a estudiar un tipo particular de campos tangentes y calcularemos sus índices. Estos son los *campos gradientes*:

Proposición 3.3.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ un variedad diferenciable sin borde de dimensión m , y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, existe un único campo tangente diferenciable ξ tal que*

$$d_z f(u) = \langle u, \xi_z \rangle \quad \text{para todo } u \in T_z M, z \in M$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual en \mathbb{R}^p .

Este campo tangente ξ recibe el nombre de gradiente de f y se denota $\text{grad}(f)$.

Nótese que si M es un conjunto abierto de \mathbb{R}^p , entonces $\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$.

Demostración. En primer lugar, hacemos notar que para cada $z \in M$ la aplicación $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$ es un isomorfismo lineal de $T_z M$ a su espacio dual $\mathcal{L}(T_z M, \mathbb{R})$ (*Teorema de Representación de Riesz*). Por tanto, ξ está unívocamente determinado por la condición del enunciado, y solo falta comprobar que este campo es, en efecto, diferenciable. Como esta es una propiedad local, lo demostraremos localizando el campo con una parametrización.

Así, sea φ una parametrización de un entorno U de z en M , y \mathbf{x} su sistema de coordenadas asociado. Podemos escribir por tanto

$$\xi|_U = \sum_{k=1}^m \xi_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m),$$

y demostraremos que $\{\xi_k\}$ son funciones diferenciables. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(x) &= d_{\varphi(x)} f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \xi_{\varphi(x)} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right\rangle \xi_k(x). \end{aligned}$$

Obtenemos por tanto un sistema lineal donde las incógnitas son los valores $\xi_k(x)$. La matriz del sistema, que llamaremos $G_x \varphi$, es la *matriz de Gram* euclidiana de la base de derivadas parciales, que es la matriz del producto escalar respecto de esa base. Al ser la matriz asociada a un producto escalar es definida positiva, y en particular su determinante es estrictamente positivo. Por tanto, podemos resolver de manera unívoca el sistema y encontrar expresiones diferenciables para los ξ_k . \square

Nótese cómo los puntos críticos de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ son exactamente los ceros de su gradiente (por esto los ceros de campos tangentes se denominan singularidades). Queremos determinar cuáles de estos ceros son no degenerados. Llamaremos a estos ceros *puntos críticos no degenerados* de f .

(3.3.2) El jacobiano de un campo gradiente en un cero. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\xi = \text{grad}(f)$. Sea z un punto crítico de f , esto es, un cero de ξ . Consideremos ahora una parametrización φ de un abierto U de z y denotamos por x el punto tal que $z = \varphi(x)$. Al igual que en la prueba anterior escribimos

$$(*) = \begin{cases} \xi|_U = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m), \\ \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i} = \sum_k \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle \xi_k. \end{cases}$$

Estamos interesados en el siguiente jacobiano:

$$\det(d_z \xi) = \det(J_x \bar{\xi}), \quad J_x \bar{\xi} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}.$$

Para ello, vamos a derivar las expresiones (*):

$$\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_k \frac{\partial \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle}{\partial x_j} \xi_k + \sum_k \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$$

Como $z = \varphi(x)$ es un cero del campo ξ , la primera suma se anula en x y obtenemos

$$\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_k \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right\rangle \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}.$$

De nuevo encontramos la matriz de Gram $G_x \varphi$, y definiendo la *matriz hessiana de $f \circ \varphi$*

$$H_x(f \circ \varphi) = \left(\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right)_{i,j},$$

podemos escribir la suma anterior en forma matricial como sigue:

$$H_x(f \circ \varphi) = G_x \varphi \cdot J_x \bar{\xi}.$$

Como el determinante de $G_x \varphi$ es estrictamente positivo, la igualdad anterior determina unívocamente la matriz $J_x \bar{\xi}$ y por tanto la aplicación lineal $d_z \xi$. Por tanto, tenemos

$$\text{ind}_z(\xi) = \text{sign}(J_z \bar{\xi}) = \text{sign} \det H_x(f \circ \varphi).$$

Aquí incluimos el caso $\text{ind} = \text{sign} = 0$, que significa que z es un cero degenerado de ξ o, lo que es lo mismo, un punto crítico degenerado de f . \square

Veamos ahora que la definición de matriz hessiana es intrínseca:

Proposición 3.3.3. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\xi = \text{grad}(f)$. Sea z un punto crítico de f , esto es, un cero de ξ . Consideremos ahora una parametrización φ de un abierto U de z y denotamos por x el punto tal que $z = \varphi(x)$. Consideramos en $T_z M$ la forma cuadrática $Q_z f$ cuya matriz respecto a la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_z \right\}$ es $H_x(f \circ \varphi)$. Sea $u \in T_z M$ un vector tangente definido por la curva $\gamma(t)$ en M , esto es, $\gamma(0) = z$, $\gamma'(0) = u$. Entonces,

$$Q_z(f)(u) = (f \circ \varphi)''(0).$$

En particular, $Q_z(f)$ no depende de la parametrización φ .

Esta forma cuadrática es el *Hessiano de f en z* .

Demostración. La demostración es un cálculo explícito de la forma. Sean (u_1, \dots, u_m) las coordenadas de u en la base de derivadas parciales. Entonces

$$Q_z(f)(u) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i}(x) u_i u_j.$$

Por otra parte, expresamos la curva γ en coordenadas mediante el cambio $\bar{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ de manera que las coordenadas de u son $u_i = \gamma'_i(0)$. Ahora, calcularemos $(f \circ \gamma)''(0)$ y veremos que ambas expresiones coinciden.

En primer lugar,

$$(f \circ \gamma)'(t) = ((f \circ \varphi) \circ \bar{\gamma})'(t) = \sum_i \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(\bar{\gamma}(t)) \gamma'_i(t),$$

y, por tanto,

$$(f \circ \gamma)''(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\gamma}(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) + \sum_i \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(\bar{\gamma}(t)) \gamma''_i(t).$$

Como $x = \bar{\gamma}(0)$ es un cero de las derivadas parciales $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}$, cuando $t = 0$ obtenemos

$$(f \circ \gamma)''(0) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\gamma}(0)) \gamma'_i(0) \gamma'_j(0) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i u_j$$

y, en efecto, $Q_z(f)(u) = (f \circ \gamma)''(0)$. □

El Hessiano se utiliza para definir el índice en un punto crítico:

Definición 3.3.4. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $z \in M$ un punto crítico no degenerado de f . Se llama *índice de f en z* al índice del Hessiano $Q_z(f)$, esto es, el número de autovalores negativos de $Q_z(f)$. El índice de f en z se denota por $\text{ind}_z(f)$.

Ya estamos en disposición de calcular el índice de campos tangentes gradientes:

Proposición 3.3.5. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, y sea $\xi = \text{grad}(f)$. Sea $z \in M$ un punto crítico no degenerado de f . Entonces,

$$\text{ind}_z(\xi) = (-1)^{\text{ind}_z(f)}.$$

Demostración. Siguiendo la notación anterior, sabemos que

$$\text{ind}_z(\xi) = \text{sign det}(H_x(f \circ \varphi)),$$

donde $H_x(f \circ \varphi)$ es la matriz simétrica de $Q_z(f)$ respecto a la base adecuada. El determinante de una matriz es el producto de sus autovalores, y como el índice $\text{ind}_z(f)$ es precisamente el número de ellos que son negativos, se sigue el resultado. □

3.4 Funciones de Morse

Una vez estudiados los campos gradientes, vamos a presentar otra manera de hallar el índice de una variedad, esta vez haciendo uso de las *funciones de Morse*.

Definición 3.4.1. Una *función de Morse* $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable cuyos puntos críticos son todos no degenerados, esto es, todos los ceros de su gradiente $\xi = \text{grad}(f)$ son no degenerados.

Como los ceros de una función de Morse son no degenerados, son aislados. Ahora bien, si además la variedad M es compacta, entonces la cantidad de puntos críticos es finita y definimos $\text{Ind}(f) = \sum_k (-1)^k \alpha_k$, donde α_k es el número de puntos críticos con índice k .

Por la proposición 3.3.5, el índice total del gradiente ξ de f es

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_z (-1)^{\text{ind}_z(f)},$$

donde los z son los puntos críticos de f . Esto puede ser reescrito como

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_k (-1)^k \alpha_k.$$

Denominaremos índice de f al índice de su gradiente y lo denotaremos $\text{Ind}(f)$.

Si nos restringimos a variedades diferenciables que cumplan las hipótesis del Teorema de Poincaré-Hopf, resulta que $\text{Ind}(\xi)$ solo depende de la variedad M , luego $\text{Ind}(f)$ también. Es decir, concluimos que los índices de todas las funciones de Morse en M coinciden y ese valor es un invariante de la variedad. Por tanto, para calcular el índice de una variedad nos basta con conocer una función de Morse sobre ella.

Las funciones de Morse no solo tienen buenas propiedades, sino que son muy abundantes. Para ver que esto es así, vamos a estudiar un tipo particular de ellas.

Definición 3.4.2. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable sin borde de dimensión m . Para cada $a \in \mathbb{R}^p$ consideramos la función diferenciable

$$\begin{aligned} f & : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \langle x, a \rangle \end{aligned},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual. Esta función recibe el nombre de *función altura respecto al hiperplano perpendicular a a* .

Sea \mathcal{M} el conjunto de los puntos a tales que f_a es una función de Morse. Veremos que este conjunto es denso.

Proposición 3.4.3. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie diferenciable conexa, cerrada y sin borde, y sea $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ un campo normal global. Sea $a \in \mathbb{R}^{m+1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} f_a & : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \langle x, a \rangle \end{aligned}$$

es una función de Morse si y solo si $\frac{1}{\|a\|}a \in \mathbb{S}^m$ es un valor regular de ν y $-\nu$.

En particular, el conjunto \mathcal{M} de valores para los que f_a es una función de Morse es denso en \mathbb{R}^{m+1} .

Demostración. Como comentamos en el apartado anterior, M tiene una ecuación global que permite definir ν haciendo uso de su gradiente. Por otra parte, como

$$f_{\lambda a}(x) = \langle x, \lambda a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle = \lambda f_a(x),$$

podemos suponer que $\|a\| = 1$. Busquemos los puntos críticos z de $f := f_a$.

La diferencial $d_z f = \langle \cdot, a \rangle|_{T_z M}$ se anula si y solo si a es perpendicular a $T_z M$, esto es, si y solo si $a = \pm \nu(z)$. Supongamos que esto es cierto, y veamos cuándo el punto crítico z es no degenerado.

En primer lugar, aseguramos que el Hessiano de f es

$$Q_z(f)(u) = \langle u, \mp d_z \nu(u) \rangle.$$

En efecto, sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva con $\gamma(0) = z$, $\gamma'(0) = u$. Entonces, podemos derivar la función

$$(f \circ \gamma)(t) = \langle \gamma(t), a \rangle$$

dos veces para obtener

$$Q_z(f)(u) = (f \circ \gamma)''(0) = \langle \gamma''(0), a \rangle.$$

Por otra parte, derivando la identidad $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$, vemos que

$$0 = \langle \gamma''(t), \nu(\gamma(t)) \rangle + \langle \gamma'(t), d_z \nu(\gamma'(t)) \rangle,$$

que en $t = 0$ arroja el resultado

$$\langle \gamma''(0), \nu(z) \rangle = \langle u, -d_z \nu(u) \rangle.$$

Como $\nu(z) = \pm a$, entonces $\langle \gamma''(0), a \rangle = \langle u, \mp d_z \nu(u) \rangle$ y la asunción se cumple.

Ahora bien, esta asunción implica que la forma cuadrática $Q_z(f)$ tiene, respecto a cualquier base ortonormal de $T_z M$, la misma matriz que el endomorfismo autoadjunto $\mp d_z \nu$, y por tanto el mismo determinante. Así, hemos visto que z es no degenerado si y solo si no es un punto crítico de $\pm \nu$. Esto demuestra la primera parte de la proposición.

Por último, que el conjunto \mathcal{M} es denso es consecuencia del teorema de Sard-Brown. \square

4 Teorema de Gauss-Bonnet

En esta última sección vamos a estudiar algunos resultados importantes en cuya demostración participa el teorema de Poincaré-Hopf. En particular, nos restringiremos a hipersuperficies compactas, donde definiremos los conceptos de *curvatura* y *característica de Gauss*.

4.1 Hipersuperficies afines

Una *hipersuperficie afín* es una variedad diferenciable M de dimensión m sumergida en el espacio \mathbb{R}^{m+1} . Las hipersuperficies se orientan como cualquier variedad, pero también utilizando el concepto de campo normal que ha aparecido en el teorema de Poincaré-Hopf. Lo recordamos a continuación.

Definición 4.1.1. Una aplicación diferenciable $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $\theta(x)$ es ortogonal a $T_x M$ para todo $x \in M$ se denomina *campo normal a M* . Si además $\|\theta(x)\| = 1$ para todo $x \in M$, el campo se denomina *unitario* y se denota ν .

Es claro que si θ no tiene ceros, se puede definir el campo unitario $\theta/\|\theta\|$.

La obtención de un campo normal sin ceros es sencilla localmente. Se toman los campos de derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Big|_x = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}(x)), \dots, \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_i}(\mathbf{x}(x)) \right)$$

de cualquier parametrización φ con coordenadas \mathbf{x} y se define $\theta(x)$ como su producto vectorial. Este $\theta(x)$ es un vector ortogonal a todas las derivadas parciales, y no nulo por ser las derivadas parciales independientes. Además, por la regla del sacacorchos,

$$\left\{ \theta, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \Big|_x \right\}$$

es una base positiva de \mathbb{R}^{m+1} .

La obstrucción para poder pegar estos campos normales y obtener uno sin ceros en toda la variedad se concentra en la orientabilidad. En efecto, haciendo los $\theta(x)$ anteriores unitarios, solo hay dos, $\pm\theta(x)$, y los de coordenadas diferentes se podrán pegar si los signos coinciden adecuadamente. Esto ocurre si y solo si se toman coordenadas de un atlas positivo. Enunciamos sin más detalles, pues son bien conocidos:

Proposición 4.1.2. *Una hipersuperficie es orientable si y solo si admite un campo normal global.*

Pero los campos normales y la orientabilidad también tienen una relación estrecha con la existencia de ecuaciones y la forma en que M desconecta o no el espacio afín:

Proposición 4.1.3. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie diferenciable. Entonces, existe un campo normal sin ceros si y solo si M tiene una ecuación global en algún entorno abierto suyo.*

Demostración. La condición necesaria es inmediata. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una ecuación de M en U y $\theta(x) = \text{grad}(f)$. Como $f|_M \equiv 0$, es $d_x f|_{T_x M} \equiv 0$ luego θ es normal, y como $d_x f \neq 0$ en cada $x \in M$, $\theta(x) \neq 0$.

Para la condición suficiente, tomemos una retracción normal diferenciable $\rho : U \rightarrow M$ sobre M . Por hipótesis, existe un campo normal global sin ceros ν , que podemos suponer unitario.

Como el vector $x - \rho(x)$ es perpendicular a $T_x M$, se cumple la relación de proporcionalidad $x - \rho(x) = t \cdot \nu(\rho(x))$, donde el escalar t puede calcularse como $t = \langle x - \rho(x), \nu(\rho(x)) \rangle$.

Aseguramos que la función $f : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto t$ es una ecuación de M en U , pues se cumple:

1. $f(x) = 0$ si y solo si $x = \rho(x)$, esto es, $x \in M$.
2. $d_x f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ no es nula (y por tanto es suprayectiva). En efecto:

$$d_x f(u) = \langle u - d_x \rho(u), \nu(\rho(x)) \rangle + \langle x - \rho(x), d_{\rho(x)} \nu(d_x \rho(u)) \rangle \quad u \in \mathbb{R}^{m+1}$$

y si $x \in M$, $x = \rho(x)$ y $d_x \rho(\mathbb{R}^{m+1}) \subset T_x M$, luego $d_x \rho(u) \perp \nu(x)$ y $x - \rho(x) = 0$. Por lo tanto, como $\langle \theta(x), \cdot \rangle$, resulta $d_x f(u) = \langle u, \nu(x) \rangle$, que es no nulo para $u = \nu(x)$.

□

Resulta de lo anterior que M desconecta el entorno U , pues una ecuación f debe cambiar de signo y $U \setminus M = \{f > 0\} \cup \{f < 0\}$ es una descomposición en abiertos disjuntos no vacíos. El recíproco también es cierto, pero no lo demostramos, pues requiere otras técnicas. Digamos también que en realidad las hipersuperficies siempre desconectan, según el resultado clásico siguiente:

Teorema 4.1.4. (Teorema de separación de Jordan) Toda hipersuperficie diferenciable cerrada y sin borde del espacio afín lo desconecta.

Este resultado tiene diversas pruebas que apelan a una u otra técnica de Topología Algebraica. En [4] y [5] se utiliza la teoría del grado que estamos considerando aquí.

Según hemos dicho, la desconexión permite obtener una ecuación global, luego *toda hipersuperficie cerrada del espacio afín la tiene y es orientable.*

4.2 Elemento de volumen

En este apartado vamos a estudiar la integración en hipersuperficies. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie orientada, compacta, sin borde y conexa de dimensión m .

(4.2.1) Forma de volumen. Como comentamos en el apartado anterior, que una hipersuperficie sea orientable es equivalente a que posea un campo normal unitario global ν . En principio existe una cierta ambigüedad en la definición del campo, pues ν y $-\nu$ son opciones igualmente válidas. Sin embargo, como M es orientada solo una de ellas es compatible con la orientación.

Consideremos ahora la forma diferencial de grado máximo

$$\Omega_M = \det(\nu, \cdot),$$

que se denomina *elemento de volumen de M* . Esta forma Ω_M es nunca nula, positiva y mide volúmenes en M .

En efecto, dado un punto $x \in M$, sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base positiva de $T_x M$. Como $u_1, \dots, u_m \in T_x M$ son independientes, entonces $\nu(x), u_1, \dots, u_m$ también lo son. Aún más, como $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base positivamente orientada de $T_x M$ y ν es compatible con la orientación, $\{\nu(x), u_1, \dots, u_m\}$ es una base positivamente orientada de \mathbb{R}^{m+1} y se cumple

$$\Omega_M(u_1, \dots, u_m) = \det(\nu, u_1, \dots, u_m) > 0$$

Por otra parte, los vectores $\{\nu(x), u_1, \dots, u_m\}$ determinan un paralelepípedo P en el espacio \mathbb{R}^{m+1} . Es un resultado muy conocido el hecho de que el volumen de P viene dado por el determinante de estos vectores:

$$\text{vol}_{m+1} P = \det(\nu(x), u_1, \dots, u_m).$$

Ahora bien, el vector $\nu(x)$ es perpendicular a $T_x M$, y en particular a todos los vectores u_i . Por tanto, podemos escribir

$$\text{vol}_{m+1} P = \|\nu(x)\| \cdot \text{vol}_m P(u_1, \dots, u_m),$$

y, como el vector $\nu(x)$ es unitario, obtenemos finalmente que

$$\Omega_M(u_1, \dots, u_m) = \text{vol}_m P(u_1, \dots, u_m).$$

Con esta preparación, podemos introducir la siguiente definición:

Definición 4.2.2. El *volumen* de la hipersuperficie M es $\text{vol}(M) = \int_M \Omega_M$.

Por ejemplo, parametrizando la esfera \mathbb{S}^2 de la manera usual tenemos:

$$\text{vol}_2(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_{\mathbb{S}^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi.$$

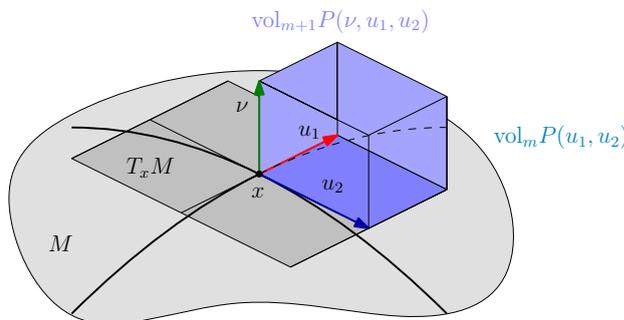


Figura 10: Representación del paralelepípedo $P(\nu, u_1, \dots, u_m)$.

4.3 Característica de Euler

En este apartado vamos a estudiar la relación que existe entre la *característica de Euler* y el índice de una variedad. Si bien justificaremos con detalle las ideas detrás de los resultados principales, sustituiremos la mayoría de demostraciones por referencias a bibliografía adecuada.

La característica de Euler es un invariante topológico definido originalmente para poliedros. Para definirlo en variedades arbitrarias se utiliza el concepto de *triangulación*.

(4.3.1) Símplices y complejos simpliciales. Sean a_0, a_1, \dots, a_k $k + 1$ puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^n , esto es, que generan un subespacio de dimensión k . Llamaremos *k-símplice* al conjunto

$$[a_0, \dots, a_k] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

donde los números $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ reciben el nombre de *coordenadas baricéntricas de x* .

Si $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_l}\}$ es un subconjunto no vacío de puntos de $\{a_0, \dots, a_k\}$, entonces el *l-símplice* $[a_{i_0}, \dots, a_{i_l}]$ recibe el nombre de *l-cara* de $[a_0, \dots, a_k]$. Si σ es un símplex, se denomina *símplice abierto* y se denota por σ^0 al conjunto de los puntos de σ cuyas coordenadas baricéntricas son todas positivas. Esto es equivalente a que estos puntos no pertenezcan a ninguna *l-cara* de σ con $l < k$. Un *complejo simplicial finito de \mathbb{R}^n* es una colección finita de símplexes $K = (\sigma_i)_{i=1}^p$ tal que las caras de cada $\sigma_i \in K$ pertenecen también a K y, para todo i, j , $\sigma_i \cap \sigma_j$ es vacío o una cara común de σ_i y σ_j . La *realización geométrica* del símplex es el poliedro $|K| = \bigcup_{i=1}^p \sigma_i$ unión de todos los símplexes. Los símplexes abiertos σ_i^0 forman una partición de $|K|$. \square

El resultado fundamental es que toda variedad diferenciable compacta $M \subset \mathbb{R}^n$ tiene una triangulación *diferenciable*:

Teorema 4.3.2. *Sea M una variedad diferenciable compacta. Existe un complejo simplicial finito $K = (\sigma)_{i=1}^p$ y un homeomorfismo $\Phi : |K| \rightarrow M$ tal que todas las restricciones $\Phi|_{\sigma_i} : \sigma_i \rightarrow \Phi(\sigma_i)$ son difeomorfismos.*

El homeomorfismo Φ se llama *triangulación*.

Una triangulación es, pues, un homeomorfismo entre la variedad y un poliedro, con cierta diferenciable en las caras. Obsérvese que las imágenes $\Phi(\sigma_i^0)$ forman una partición por variedades difeomorfas a símplexes abiertos. Para hipersuperficies del espacio \mathbb{R}^3 las de dimensión máxima 2 son “triangulares”, de ahí el nombre. La construcción de triangulaciones puede hacerse de varias maneras. Una referencia excelente es [7, IV.B], y otra muy diferente es [1, 14.1,9.2]; para superficies puede verse una demostración con todo detalle en [6, Lección 18].

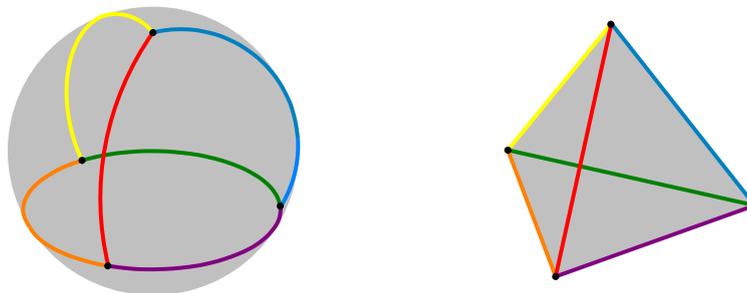


Figura 11: Triangulaciones de una esfera y un tetraedro. Ambas tienen cuatro 2-símplices, seis 1-símplices y cuatro 0-símplices.

Definición 4.3.3. Sea Φ una triangulación de la variedad M . La *característica de Euler* de la variedad M es el entero:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \#\{k\text{-símplices}\}.$$

En el ejemplo anterior, vemos que tanto la esfera como el tetraedro tienen una característica de Euler de 2, pues

$$\chi(\mathbb{S}^2) = \chi(T) = 4 \cdot (+1) + 6 \cdot (-1) + 4 \cdot (+1) = 2.$$

A continuación, vamos a mostrar que la característica de Euler de una variedad puede calcularse como el índice de un campo tangente a ella.

(4.3.4) La característica de Euler como el índice de un campo. Dada una triangulación Φ de M , fijamos un punto a_k en cada k -símplice. Por simplicidad, podemos tomar el baricentro (es decir, el punto con todas sus coordenadas baricéntricas no nulas iguales).

Definimos un campo que tenga por únicos ceros los puntos a_k , que serán todos no degenerados. En cada cara el campo será un sumidero y como explicamos a continuación esto puede hacerse con un pegado consistente de los símplices.

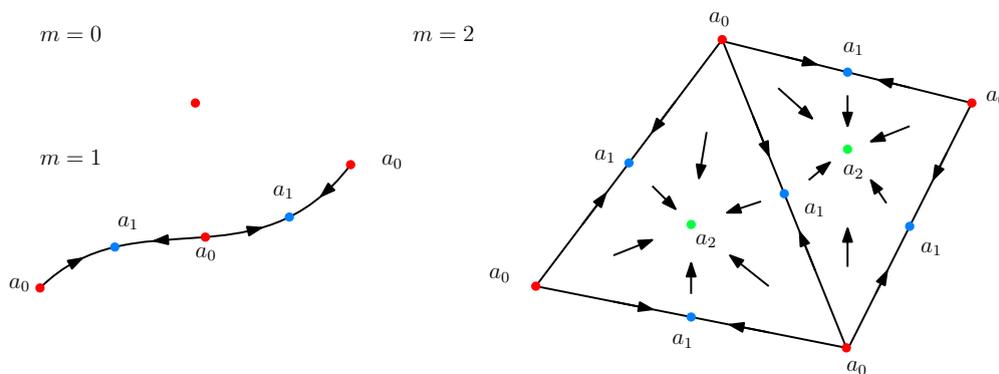


Figura 12: Índice de los ceros del campo en símplices de dimensión 0, 1 y 2.

Observamos el siguiente patrón:

1. En un 0-símplice a_0 el campo $\bar{\xi} = x$ tiene una fuente, con índice 1.
2. En un 1-símplice hay dos tipos de ceros, las fuentes a_0 (en torno a las que el campo es aproximadamente $\bar{\xi} = x$, con índice 1) y los sumideros a_1 (donde $\bar{\xi} = -x$, de índice -1).

3. En un 2-símplice el campo en las inmediaciones de los ceros es una fuente (en a_0), una silla (en a_1) y un sumidero (en a_2), de índices 1, -1 y 1 respectivamente.

En la figura anterior se observa que el índice del campo en un cero viene determinado por la dimensión del símple en que se encuentra. Así, un cero en un símple de dimensión d sumergido en un espacio de dimensión m recibe flujo de las d caras de dimensión inferior, y lo envía a las $m - d$ caras de dimensión superior.

Podemos escribir este campo localmente en la forma

$$\xi = - \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=d+1}^m x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

por lo que la matriz jacobiana de su localización toma una forma muy sencilla:

$$J_z \bar{\xi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } \det(J_z \bar{\xi}) = (-1)^d.$$

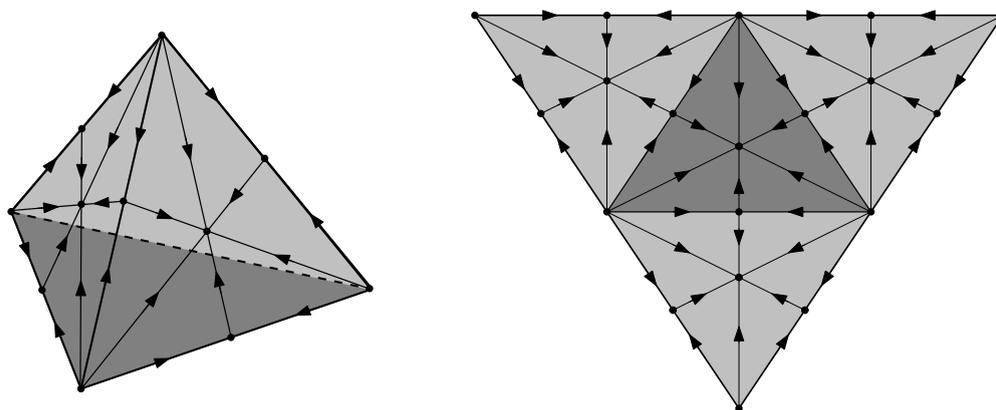
En consecuencia, hemos descrito un campo cuyo índice es

$$\sum_{d=0}^m (-1)^d \# \{a_k : k = d\} = \chi(M).$$

Calculado así el índice total de este campo, del teorema de Poincaré-Hopf deducimos:

Proposición 4.3.5. *La característica de Euler es el índice total de cualquier campo tangente a M .*

Por ejemplo, volvamos al caso del tetraedro $T \subset \mathbb{R}^3$. Como observamos al comienzo del apartado, $\chi(T) = 2$. Si ahora definimos sobre T un campo siguiendo los pasos anteriores obtenemos el resultado siguiente:



En la figura anterior se observa cómo el campo tiene un sumidero en cada una de las cuatro caras, una silla en cada una de las seis aristas y una fuente en cada uno de los cuatro vértices. Como se

comprueba en el ejemplo 3.1.8, el índice de estos ceros es +1, -1 y +1 respectivamente, por lo que

$$\chi(T) = \text{Ind}(\xi) = 4 \cdot (+1) + 6 \cdot (-1) + 4 \cdot (+1) = 2,$$

y en efecto $\chi(T) = 2$.

(4.3.6) La característica de Euler como el índice de una función de Morse. Por lo anterior podemos calcular la característica de Euler de una variedad mediante el campo gradiente de una función de Morse. Así, si en la variedad M tenemos una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sabemos que el índice total del campo gradiente $\xi = \text{grad}(f)$ es:

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_k (-1)^k \alpha_k,$$

donde α_k es el número de puntos críticos de f con índice k . Por tanto, obtenemos

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k \alpha_k.$$

Esta fórmula para la característica de Euler en función de los puntos críticos de una función de Morse es parte de las llamadas *desigualdades de Morse*.

4.4 Teorema de Gauss-Bonnet

El *teorema de Gauss-Bonnet* relaciona la geometría y la topología de una variedad a través de su *curvatura* y su característica de Euler. En este último apartado veremos que este teorema puede enunciarse en términos de un grado y cómo se deduce del teorema de Poincaré-Hopf en su formulación mediante la característica de Euler.

(4.4.1) Curvatura de Gauss de una variedad. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie orientada. Por lo comentado en el apartado 4.1, M tiene un único campo normal unitario ν compatible con la orientación. Esta aplicación recibe el nombre de *aplicación de Gauss*.

Observamos que los planos tangentes a M en un punto a y a \mathbb{S}^m en el punto $\nu(a)$ coinciden: ambos son el hiperplano $H \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ortogonal a $\nu(a)$, orientado por ese mismo vector normal. Así, la diferencial de ν en el punto a es una aplicación lineal

$$L_a = d_a \nu : H \rightarrow H,$$

que recibe el nombre de *endomorfismo de Weingarten*. El determinante de L_a se denota $K(a)$ y se denomina *curvatura de Gauss de M en a* . Podemos decir que $K(a)$ es una medida de cuánto varía el plano tangente en las proximidades de a y, por tanto, de cuánto *se curva* M en esas proximidades.

Se observa que si $K(a) \neq 0$, entonces L_a es un isomorfismo lineal, y por el teorema de inversión local, la aplicación de Gauss ν es un difeomorfismo local en a . En particular, la imagen de ν es un entorno de $\nu(a)$. Es claro también que, con las orientaciones elegidas, ν conserva la orientación en a si $K(a) > 0$ y la invierte si $K(a) < 0$. \square

Para medir la curvatura de toda la variedad, integramos la curvatura puntual:

Definición 4.4.2. Suongamos M compacta. La integral

$$\kappa = \int_M K \Omega_M$$

recibe el nombre de *curvatura íntegra de M* .

Como los elementos de volumen $\Omega_{M,a}$ y $\Omega_{\mathbb{S}^m, \nu(a)}$ coinciden ambos con la forma $\det(\nu(a), \dots)$, resulta

$$\begin{aligned} (\nu^* \Omega_{\mathbb{S}^m})_a(u_1, \dots, u_m) &= \Omega_{\mathbb{S}^m, \nu(a)}(d_a \nu(u_1), \dots, d_a \nu(u_m)) = \det(\nu(a), d_a \nu(u_1), \dots, d_a \nu(u_m)) \\ &\stackrel{*}{=} \Omega_{M,a}(d_a \nu(u_1), \dots, d_a \nu(u_m)) = \det(d_a \nu) \Omega_{M,a}(u_1, \dots, u_m) \\ &= K(a) \Omega_{M,a}(u_1, \dots, u_m), \end{aligned}$$

donde $*$ tiene sentido porque $d_a \nu(u_i) \in T_{\nu(a)} \mathbb{S}^m = T_a M$.

Así, podemos aplicar el teorema del cambio de variable de la integral:

$$\kappa = \int_M K \Omega_M = \int_M \nu^* \Omega_{\mathbb{S}^m} = \deg(\nu) \int_{\mathbb{S}^m} \Omega_{\mathbb{S}^m} = \text{vol}(\mathbb{S}^m) \deg(\nu).$$

Esta fórmula de la curvatura íntegra es la antesala de la denominada *fórmula de Gauss Bonnet*:

Teorema 4.4.3. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie diferenciable compacta sin borde de dimensión m par. Se tiene*

$$\kappa = \frac{1}{2} \text{vol}(\mathbb{S}^m) \chi(M).$$

Demostración. En base a la última igualdad enunciada, la fórmula de Gauss-Bonnet será cierta si se cumple $\deg(\nu) = \frac{1}{2} \chi(M)$, y esto es consecuencia del teorema de Poincaré-Hopf.

Vamos a argumentar sin suponer m par para evidenciar el papel de la paridad al llegar al final de la demostración.

En primer lugar, hacemos notar que, puesto que M es una hipersuperficie de dimensión m , la frontera ∂N de un tubo N en torno a ella estará formada por dos copias disjuntas M_+ y M_- : para cada $x \in M$ hay exactamente dos puntos x_+ y x_- a una distancia $\sqrt{\varepsilon}$ de x , y sus signos pueden tomarse por las condiciones

$$\begin{cases} x_+ = x + \sqrt{\varepsilon} \nu(x) & \eta(x_+) = \nu(x), \\ x_- = x - \sqrt{\varepsilon} \nu(x) & \eta(x_-) = -\nu(x). \end{cases}$$

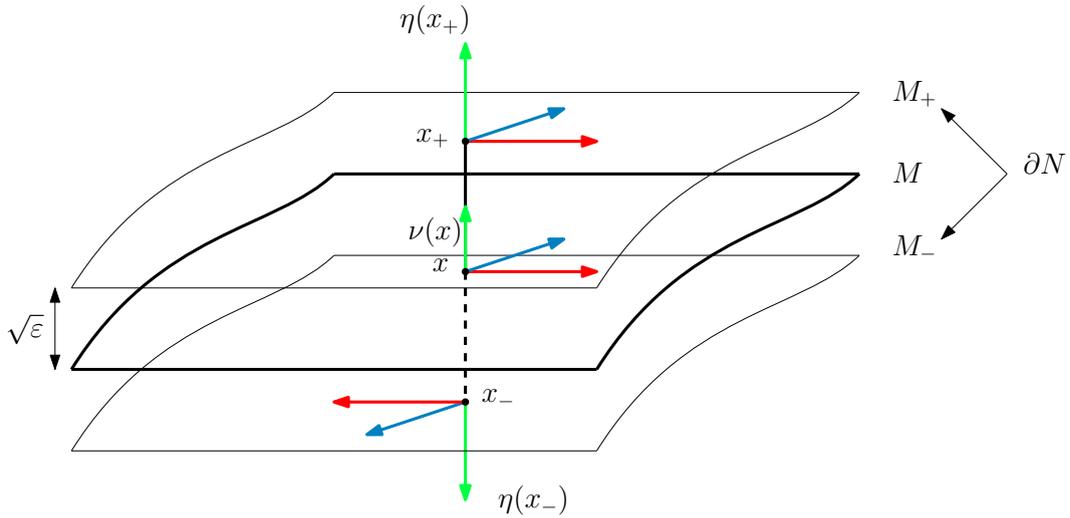
Así, la proyección ρ induce dos difeomorfismos $M_+, M_- \rightarrow M$ cuyas inversas son las funciones anteriores. En particular, las diferenciales de estas inversas son

$$\text{Id} + \sqrt{\varepsilon} d_x \nu, \quad \text{Id} - \sqrt{\varepsilon} d_x \nu.$$

arbitrariamente cerca de la identidad para ε suficientemente pequeño. Todo esto implica que ρ preserva las orientaciones en M_+ , y no lo hace en M_- .

Finalmente, definimos un campo normal η sobre ∂N de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \eta|_{M_+} = \nu \circ \rho|_{M_+}, \\ \eta|_{M_-} = \sigma \circ \nu \circ \rho|_{M_-}, \end{cases}$$



donde σ es el difeomorfismo antipodal en \mathbb{S}^m . Como el difeomorfismo σ tiene grado $+1$ si m es par y -1 si m es impar, se cumple

$$\begin{aligned} \deg(\eta) &= \deg(\eta|_{M_+}) + \deg(\eta|_{M_-}) = \deg(\nu \circ \rho|_{M_+}) + \deg(\sigma \circ \nu \circ \rho|_{M_-}) \\ &= \deg(\nu)(+1) + (\pm 1)\deg(\nu)(-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar,} \\ 2 \deg(\nu) & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así, para m impar obtenemos $\chi(M) = 0$ y ninguna información sobre $\deg(\nu)$. En cambio, para m par obtenemos la fórmula de Gauss-Bonnet, pues por el teorema de Poincaré-Hopf $\chi(M) = \deg(\eta)$. \square

5 Referencias

- [1] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M-F.: *Real Algebraic Geometry*. Berlín-New York: Springer 1998. [37](#)
- [2] Muñoz, V., Madrigal, J.J.: *Topología Algebraica*. Madrid: Sanz y Torres 2015.
- [3] Gamboa, J.M., Ruiz, J.M.: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*. Madrid: Sanz y Torres 2020. [4](#), [5](#), [12](#), [17](#), [19](#)
- [4] Outerelo, E., Rojo, J.A., Ruiz, J.M.: *Topología diferencial*. Madrid: Sanz y Torres 2020. [36](#)
- [5] Outerelo, E., Ruiz, J.M.: *Mapping Degree Theory*. GTM 108, Providence: AMS-RSME 2009. [3](#), [7](#), [36](#)
- [6] Ruiz, J.M., Rodríguez-Sanjurjo, J.M.: *Introducción a la Geometría Diferencial II. Superficies.*. Madrid: Sanz y Torres 2019. [37](#)
- [7] Whitney, H.: *Geometric integration theory*. Mineola-New York: Dover 2005. [37](#)