

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Introducción a la teoría de Morse

Introduction to Morse Theory

Supervisor: Jesús M. Ruiz

Natalia Avera García

Doble grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2023-24

Convocatoria Ordinaria

Madrid, 30 de junio de 2024

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2024

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MORSE

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

NATALIA AVERNA GARCÍA

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es introducir los fundamentos de la teoría de Morse, desde la definición de las funciones de Morse, su abundancia y su forma local hasta los dos teoremas esenciales de esta teoría, que describen el tipo topológico de una variedad compacta entre valores críticos de su función de Morse y a través de ellos. Estas herramientas nos servirán para describir el tipo topológico de cualquier variedad compacta utilizando funciones de Morse y, en particular, para clasificar las superficies orientables. Finalmente, añadiremos una aplicación, como es el teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse y su utilidad para calcular la característica de Euler de algunas variedades diferenciables.

Palabras clave: función de Morse, valor crítico, índice, lema de Morse, tipo topológico, teorema de Poincaré-Hopf, característica de Euler.

ABSTRACT. The aim of this work is to introduce the fundamentals of Morse theory, from the definition of Morse functions, their abundance, and their local form, to the two essential theorems of this theory, which describe the topological type of a compact manifold between critical values of its Morse function and through them. These tools will help us describe the topological type of any compact manifold using Morse functions and, in particular, to classify orientable surfaces. Finally, we will add an application, such as the Poincaré-Hopf theorem for Morse functions and its utility for calculating the Euler characteristic of some differentiable manifolds.

Keywords: Morse function, critical value, index, Morse lemma, topological type, Poincaré-Hopf theorem, Euler characteristic.

ÍNDICE

Introducción	2
1. Preliminares	3
2. Puntos críticos no degenerados y funciones de Morse	8
3. Forma local de las funciones de Morse	9
4. Construcción y abundancia de las funciones de Morse	11
5. Campos de tipo gradiente asociados a una función de Morse	12
6. Superficies de nivel de funciones de Morse	14
7. Teorema de variación entre valores críticos	15
8. El lema de Reeb	16
9. Teorema de variación a través de valores críticos	19
10. Clasificación de superficies orientables en \mathbb{R}^3	25
11. Teorema de Poincaré Hopf para funciones de Morse	31
12. Cálculo de la característica de Euler mediante teoría de Morse	35
Referencias	38

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una introducción a las funciones de Morse y a su utilidad en el estudio topológico de las variedades compactas sin borde. La teoría de Morse es una rama fundamental de la topología diferencial que estudia las propiedades de las variedades a través del análisis de las funciones diferenciables definidas sobre ellas. Este enfoque, desarrollado por el matemático estadounidense Marston Morse, proporciona una poderosa herramienta para entender la estructura y la geometría de las variedades mediante el estudio de los puntos críticos y los valores de las funciones en estos puntos. Además, esta teoría tiene aplicaciones en diversos campos, no solo de la matemática, sino también de la física. Un caso notable es el estudio de los modelos de campo escalar en la teoría cuántica de campos, donde las funciones de Morse ayudan a entender el comportamiento de las partículas y los campos en torno a los puntos críticos del potencial de energía.

En primer lugar, en la sección 1 se recogen los conceptos básicos y los resultados preliminares necesarios para desarrollar la teoría. A continuación, en la sección 2 definimos el concepto de puntos críticos *no degenerados*, que son la base de la definición de *función de Morse*, para luego definir el *índice* de una función de Morse. En la sección 3 estudiamos la forma local de las funciones de Morse, para en la sección 4 demostrar su existencia y abundancia. En particular, veremos que las funciones *altura* son funciones de Morse en casi toda dirección. Con la sección 5 terminamos la base necesaria para demostrar los teoremas fundamentales de la teoría. En ella describimos los campos de tipo gradiente,

que serán útiles por conservar ciertas propiedades del gradiente, y demostramos que toda función de Morse admite uno.

Una vez sentadas las bases de la teoría, en la sección 6 describimos la manera de descomponer una variedad en subvariedades para estudiarla utilizando funciones de Morse. Así estaremos en disposición de demostrar en la sección 7 el primer teorema fundamental, que describe la transformación de la variedad entre los valores críticos de su función de Morse. De hecho, describe su *no* transformación, ya que veremos que la variedad no cambia entre sus puntos críticos salvo difeomorfismo. Este teorema es suficiente para caracterizar topológicamente las esferas según los puntos críticos de su función de Morse, resultado conocido como *lema de Reeb*. El segundo teorema fundamental, que veremos en la sección 9, describe el comportamiento de la variedad al atravesar un punto crítico. Este comportamiento se conoce como *pegado de asas*. Estos teoremas proporcionan las herramientas necesarias para clasificar las superficies. En la sección 10 ilustramos el procedimiento con las superficies compactas que se pueden sumergir en \mathbb{R}^3 , las superficies orientables.

Para finalizar, en la sección 11 veremos que todas las funciones de Morse sobre la misma variedad conservan una propiedad común: su índice. Veremos que se trata de un invariante topológico de la variedad conocido: su *característica de Euler*. En la sección 12 hacemos el cálculo de la característica de Euler de algunas variedades diferenciables como aplicación del teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse.

1. PRELIMINARES

1.1. Variedades diferenciables. En este trabajo utilizaremos libremente los contenidos estudiados en el curso de *Variedades Diferenciables* del grado en Matemáticas, como por ejemplo los conceptos de variedad diferenciable, parametrización, aplicación diferenciable, campo diferenciable, flujo y forma diferenciable. En esta sección enunciamos algunos resultados básicos cuyos detalles se pueden encontrar en [1, 2]. Utilizaremos algunos resultados conocidos que se derivan del teorema de la función implícita, fundamental en la teoría del cálculo diferencial:

Proposición 1.1 (Teorema de la función implícita). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ abierto, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, y $x_0 = (y_0, z_0) \in U$ tal que $F(x_0) = 0$ y*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces, existen entornos abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^p$ de y_0 y $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de z_0 y una única función $f: V \rightarrow W$ diferenciable tales que $F(y, f(y)) = 0$ para todo $y \in V$.

En particular, en las condiciones del teorema de la función implícita se tiene que $F^{-1}(0) \cap (V \times W)$ es una variedad diferenciable de dimensión p .

Trabajaremos con variedades sumergidas en \mathbb{R}^n , sabiendo que esto no supone una restricción ya que toda variedad diferenciable se puede sumergir en algún espacio \mathbb{R}^n (por el conocido teorema de inmersión de Whitney, véase [2]). Denotamos por $C^\infty(M, N)$ al

conjunto de las aplicaciones diferenciables de una variedad M a otra variedad N , no necesariamente de la misma dimensión. Los conceptos de punto y valor crítico son fundamentales en el desarrollo de la teoría de Morse.

Definiciones 1.2. Sean M y N variedades diferenciables y $f \in C^\infty(M, N)$. Se dice que $p \in M$ es un *punto regular* de f si $d_p f$ es sobreyectiva. Además, $q \in N$ es un *valor regular* de f si todos los puntos de $f^{-1}(q)$ son regulares.

En contraposición, los elementos de M que no son puntos regulares se llaman *puntos críticos* y los elementos de N que no son valores regulares se llaman *valores críticos*. Nos referiremos al conjunto de los puntos críticos de f como $\text{Crit}(f)$.

Por el teorema de la función implícita sabemos que si $p \in M$ es un punto regular de f tal que $f(p) = q$, entonces existe un entorno abierto U de p en M tal que $f^{-1}(q) \cap U$ es una variedad diferenciable. En consecuencia, si $q \in N$ es un valor regular de f , se tiene $f^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable. Un teorema importante en el desarrollo de la teoría de Morse que garantiza la existencia de valores regulares es el teorema de Sard.

Teorema 1.3 (Sard). *El conjunto de los valores regulares de $f \in C^\infty(M, N)$ es residual, por tanto denso, en N .*

Recordemos que un conjunto es *residual* cuando contiene una intersección numerable de abiertos densos. Por tanto, la última conclusión del enunciado viene de que al ser $N \subseteq \mathbb{R}^n$ localmente compacto, se cumple el teorema de Baire: *la intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso*.

Veamos que el teorema de Sard puede reducirse al siguiente enunciado de teoría de la medida.

Proposición 1.4. *El conjunto de los valores críticos de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tiene medida nula en \mathbb{R}^n .*

En primer lugar, el teorema de Sard puede enunciarse equivalentemente diciendo que el conjunto de los valores críticos de f ($\text{Crit}(f)$) está contenido en la unión numerable de cerrados de interior vacío. A continuación, supongamos que para cada $p \in M$ con $q = f(p)$ existen entornos abiertos U de p en M y V de q en N tales que $f(U) \subseteq V$ y $f(U \cap \text{Crit}(f))$ está contenido en la unión numerable de ciertos cerrados F_i de interior vacío en V . Observamos que la adherencia \overline{F}_i de F_i en N es un conjunto cerrado con interior vacío en N . Si recubrimos M con una cantidad numerable de abiertos U_j , tenemos que $f(\text{Crit}(f))$ está contenido en la unión numerable de los cerrados \overline{F}_{i_j} correspondientes a todos los U_j . Es decir, el resultado es de naturaleza local tanto en M como en N . Por ello podemos suponer que $M = U \cap \mathbb{H}^m$ y $N = V \cap \mathbb{H}^n$ con U abierto de \mathbb{R}^m y V abierto de \mathbb{R}^n . También que f es la restricción de una aplicación diferenciable $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, luego $f(\text{Crit}(f)) \subseteq g(\text{Crit}(g)) \cap N$ y el resultado para f se sigue del resultado para g . De esta manera nos reducimos al caso $M = \mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^n$.

Hecha esta reducción, recordemos que un conjunto de medida nula tiene interior vacío y que la unión numerable de conjuntos de medida nula tiene también medida nula. Por tanto, como $\text{Crit}(f)$ es cerrado entonces es unión numerable de compactos, luego $f(\text{Crit}(f))$ también es unión numerable de compactos K_i , que en particular son cerrados. Finalmente,

si $f(\text{Crit}(f))$ tiene medida nula, estos cerrados K_i también tendrán medida nula, luego interior vacío, como queríamos por la proposición 1.4.

1.2. Entornos tubulares. En las secciones finales de este trabajo haremos uso del siguiente teorema, que recoge la existencia y las propiedades de los entornos tubulares de las variedades compactas. Su demostración no es difícil, se basa en la noción de fibrado normal y en el teorema de inversión local, pero sí técnica y ocuparía varias páginas del trabajo, por lo que la referenciamos en [3].

Teorema 1.5 (Entornos tubulares). *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad compacta de dimensión $m < n$. Entonces, existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a M y una retracción diferenciable $r: V \rightarrow M$ tal que*

1. Para todo $x \in V$ y todo $p \in M$, $\|x - r(x)\| \leq \|x - p\|$. Además, se da la igualdad si y solo si $p = r(x)$.
2. Para todo $p \in M$, la fibra $r^{-1}(p)$ es una bola abierta en el subespacio afín $p + T_p M^\perp$ con centro p y radio $\rho(p) > 0$.
3. Dado ε tal que $0 < \varepsilon < \rho$, entonces

$$N_\varepsilon = \{x \in V \mid \|x - r(x)\| \leq \varepsilon\}$$

se llama entorno tubular cerrado de M de radio ε y su borde

$$\partial N_\varepsilon = \{x \in V \mid \|x - r(x)\| = \varepsilon\}$$

es una subvariedad de codimensión 1 de \mathbb{R}^n .

Llamamos a V entorno tubular de M de radio ρ . Además, en ∂N_ε podemos definir la aplicación de Gauss $\eta: \partial N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ como

$$\eta(x) = \frac{1}{\varepsilon} (x - r(x)).$$

En la figura 1 se muestra un ejemplo de entorno tubular en una variedad compacta de dimensión 1 sumergida en \mathbb{R}^2 .

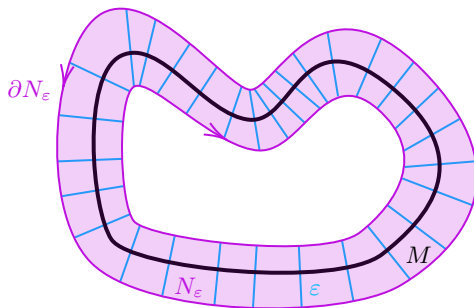


FIGURA 1. Representación de un entorno tubular.

1.3. Cohomología de de Rham. Para la parte final del trabajo nos será útil definir algunos conceptos básicos de cohomología de de Rham. Utilizaremos los resultados que se enuncian a continuación, algunos de ellos sin demostrar, cuyas demostraciones no incluimos porque son propias de trabajos centrados en cohomología de de Rham (véase [4, 5]) y referenciamos en [1, 3].

Consideremos un conjunto de espacios vectoriales $\{E_p\}$ y un conjunto de aplicaciones lineales $\{f_p: E_p \rightarrow E_{p+1}\}$. La sucesión

$$\cdots \rightarrow E_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} E_p \xrightarrow{f_p} E_{p+1} \rightarrow \cdots$$

se llama *complejo de cocadenas* si cumple $f_{p+1} \circ f_p = 0$ para todo p . Además, diremos que es *exacta* si $\ker f_{p+1} = \operatorname{im} f_p$ para todo p . Por otro lado, definimos el *p -ésimo grupo de cohomología* del complejo $E = \{E_p, f_p\}$ como

$$H^p(E) = \frac{\ker f_p}{\operatorname{im} f_{p-1}}.$$

En particular, dada una variedad diferenciable M , podemos considerar los espacios de formas diferenciales de grado p , $\Gamma^p(M)$, y como aplicación entre espacios la derivación d . De esta forma, tenemos un complejo de cocadenas, debido a la conocida propiedad de la derivación $d \circ d = 0$. De esta manera, se define el *p -ésimo grupo de cohomología de de Rham* $H^p(M)$ como el p -ésimo grupo de cohomología de este complejo, es decir,

$$H^p(M) = \frac{\ker (d: \Gamma^p(M) \rightarrow \Gamma^{p+1}(M))}{\operatorname{im} (d: \Gamma^{p-1}(M) \rightarrow \Gamma^p(M))} = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

donde los subespacios $B^p(M) \subseteq Z^p(M) \subseteq \Gamma^p(M)$ son los de las formas exactas y cerradas respectivamente. Verdaderamente, $H^p(M)$ tiene estructura de espacio vectorial real, y su dimensión como tal se denomina *r -ésimo número de Betti de M* y lo denotamos como $\beta_r(M)$. Si M es compacta, los espacios $H^p(M)$ tienen dimensión finita, y definimos su *característica de Euler* como la suma alternada de sus números de Betti, es decir,

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \beta_i(M).$$

Una implicación casi inmediata de estas definiciones es la siguiente.

Proposición 1.6. *Si M es una variedad diferenciable con C componentes conexas, entonces $H^0(M) \cong \mathbb{R}^C$. En particular, $\beta_0(M) = C$.*

En efecto, como ninguna forma de grado 0 es exacta, se tiene $H^0(M) = Z^0(M)$. Por otro lado, las formas cerradas de grado 0 son las funciones localmente constantes, es decir, constantes en cada componente conexa de M , de donde $Z^0(M) \cong \mathbb{R}^C$ y tenemos el resultado. Es más, por las propiedades de la suma directa de espacios es inmediata la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *Si M es una variedad diferenciable de dimensión m que es unión disjunta de sus componentes conexas M_i , entonces para todo $p = 0, \dots, m$*

$$H^p(M) = \bigoplus_i H^p(M_i).$$

Avanzando en el estudio de los grupos de cohomología de de Rham, se obtiene su invarianza homotópica.

Proposición 1.8. $H^r(M)$ solamente depende del tipo de homotopía de M .

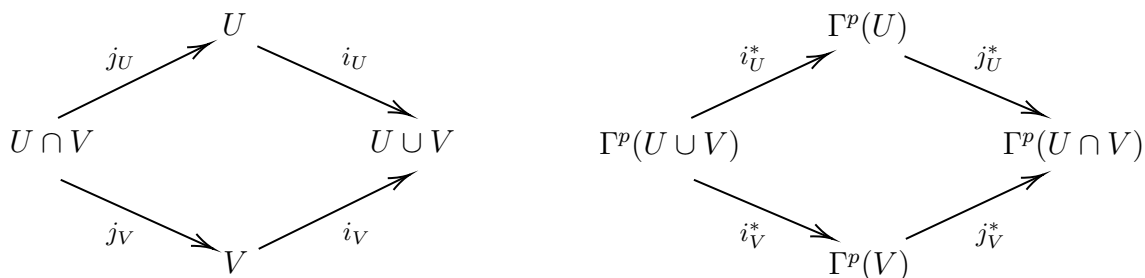
Con esta propiedad, es fácil calcular los grupos de cohomología de de Rham de las variedades diferenciables contráctiles. Si M es una variedad diferenciable contráctil, tiene el mismo tipo de homotopía que un punto, luego por la proposición 1.8 nos reducimos a calcular los grupos de cohomología de un punto x . Un punto es una variedad 0-dimensional, por lo que $\Gamma^p(\{x\}) = \{0\}$ para todo $p > 0$, y en consecuencia:

Proposición 1.9. Si M es una variedad diferenciable contráctil, entonces $H^p(M) = 0$ para todo $p > 0$.

Por otro lado, necesitaremos también el siguiente resultado básico sobre la cohomología de las esferas.

Proposición 1.10. Sea $n \geq 1$. se tiene que $H^r(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ si $r = 0$ o $r = n$ y $H^r(\mathbb{S}^n) = 0$ en otro caso.

Consideremos una variedad diferenciable M y dos abiertos U y V de M . Tenemos las inclusiones que se muestran en el siguiente diagrama, y que inducen *pullbacks* en los espacios de formas diferenciales (obsérvese el cambio de sentido de las flechas).



En estas condiciones, podemos enunciar el conocido teorema de Mayer-Vietoris.

Teorema 1.11 (Mayer-Vietoris). Sean U y V dos abiertos de una variedad diferenciable M . Entonces, la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \rightarrow H^p(U \cup V) \xrightarrow{I^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{J^*} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U \cup V) \rightarrow \dots$$

donde

$$\begin{aligned} I^*([\omega]) &= (i_U^*[\omega], i_V^*[\omega]) = ([\omega|_U], [\omega|_V]) \\ J^*([\omega_U], [\omega_V]) &= j_U^*[\omega_U] - j_V^*[\omega_V] \\ \partial^*([\omega]) &= ((I^*)^{-1} \circ d \circ (J^*)^{-1})([\omega]) \end{aligned}$$

2. PUNTOS CRÍTICOS NO DEGENERADOS Y FUNCIONES DE MORSE

En esta sección vamos a estudiar un tipo especial de puntos críticos, los de las funciones de Morse. Por ello, f denotará una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. En este caso, un punto $p \in M$ es un *punto crítico* de f si $d_p f = 0$, y es un *punto regular* en caso contrario. Además, un número $x \in \mathbb{R}$ es un *valor crítico* si $f^{-1}(x)$ contiene al menos un punto crítico. Veamos que en los puntos críticos se puede definir la hessiana.

Proposición 2.1. *Sea $p \in M$ un punto crítico de $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ una parametrización de M con $\varphi(q) = p$.*

1. *Existe una forma cuadrática $d_p^2 f$ en $T_p M$ dada por la ecuación*

$$d_p^2 f (\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)''(0)$$

donde $\alpha: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ es cualquier curva diferenciable con $\alpha(0) = p$.

2. *La composición*

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{d_q \varphi} T_p M \xrightarrow{d_p^2 f} \mathbb{R}$$

es la forma cuadrática asociada a la hessiana de $f \circ \varphi$

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial^2 (f \circ \varphi)}{\partial x_i \partial x_j} (q) \right).$$

Demostración. Sea $\varphi^{-1} \circ \alpha(t) = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ y $\phi = f \circ \varphi$. Derivando,

$$(f \circ \alpha)'(t) = (\phi \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (\gamma(t)) \gamma_i'(t).$$

Como p es un punto crítico, $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} (\gamma(0)) = 0$. Derivando una vez más y evaluando en $t = 0$,

$$(f \circ \alpha)''(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} (q) \gamma_i'(0) \gamma_j'(0).$$

Este es el valor en $\gamma'(0) = d_p \varphi^{-1} (\alpha'(0)) \in \mathbb{R}^n$ de la forma cuadrática de la ecuación (2.1). □

Esto nos permite dar las siguientes definiciones.

Definiciones 2.2. Un punto crítico $p \in M$ de una función $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ se llama *no degenerado* si la matriz de la ecuación (2.1) es invertible. El *índice* de un punto crítico no degenerado p es la dimensión máxima de un subespacio $V \subseteq T_p M$ tal que la restricción de $d_p f^2$ a V es definida negativa.

Definición 2.3. Se dice que $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ es una función de Morse con un número finito de puntos críticos, definimos el *índice* de f como

$$\text{Ind}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$$

donde c_k denota el número de puntos críticos con índice k .

El ejemplo de función de Morse es naturalmente la forma cuadrática $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = c - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{j=\lambda+1}^n x_j^2$$

donde $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \lambda \leq n$. Se tiene que $d_x(f) = 2(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$, luego el 0 es el único punto crítico de f , y en particular es aislado. Además,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right) = \text{diag}(-2, \dots, -2, 2, \dots, 2)$$

donde hay λ términos -2 y $n - \lambda$ términos 2 . De esto deducimos que el 0 es un punto crítico no degenerado con índice λ .

En la siguiente sección demostraremos que toda función de Morse se puede desarrollar de la forma anterior en un entorno de cada uno de sus puntos críticos.

3. FORMA LOCAL DE LAS FUNCIONES DE MORSE

En esta sección M denotará una variedad diferenciable de dimensión m y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ será una función diferenciable. Demostraremos que en cualquier punto crítico no degenerado de f existe una parametrización tal que su composición con f es una forma cuadrática. Esto significa que si f es una función de Morse, en cada punto crítico de f la función tiene una localización que es una forma cuadrática.

Proposición 3.1 (Lema de Morse). *Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de f . Entonces, existe una parametrización $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ de M con $\varphi(0) = p$ tal que*

$$(3.1) \quad f \circ \varphi(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{j=\lambda+1}^m x_j^2$$

para todo x en U , donde λ es el índice de p como punto crítico de f .

Demostración. Podemos asumir, cambiando f por $f - f(p)$, que $f(p) = 0$. Mediante una traslación también podemos asumir que $p = 0$. Como es un problema local, consideramos $\phi: W \rightarrow \phi(W)$ una parametrización de M en 0 y denotamos $F = f \circ \phi$, donde W es un entorno abierto y convexo de 0 en \mathbb{R}^m y el 0 es el único punto crítico, con $F(0) = 0$. Entonces

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dF(tx)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(tx)}{\partial x_i} x_i dt = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x)$$

con

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial F(tx)}{\partial x_i} dt.$$

Y como $g_i(0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = 0$, con el mismo desarrollo tenemos

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^m x_j g_{ij}(x) \quad g_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g_i(sx)}{\partial x_j} ds$$

En consecuencia

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j g_{ij}(x) \quad x \in W$$

donde $g_{ij} \in C^\infty(W, \mathbb{R})$. Si definimos $h_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})$ entonces la matriz (h_{ij}) es simétrica y

$$(3.2) \quad F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x) \quad x \in W$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha} x_j h_{ij}(x) + x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_\alpha} h_{ij}(x) + x_i x_j \frac{\partial h_{ij}(x)}{\partial x_\alpha} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m x_j h_{\alpha j}(x) + \sum_{i=1}^m x_i h_{i\alpha}(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j \frac{\partial h_{ij}(x)}{\partial x_\alpha} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}(0) = h_{\alpha\beta}(0) + h_{\beta\alpha}(0) = 2h_{\alpha\beta}(0),$$

de donde se deduce que la matriz $(h_{ij}(0))$ es invertible.

Veamos por inducción sobre k que la parametrización ϕ puede escogerse de forma que $f \circ \phi$ es de la forma (3.2) con

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

donde D es una matriz cuadrada de dimensión $k - 1$ de la forma $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ y E es una matriz cuadrada y simétrica de dimensión $m - k + 1$ de funciones diferenciables. Para $k = 1$ es trivial, luego supongamos que para cierto $k \geq 1$

$$f \circ \phi(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i x_i^2 + \sum_{i=k}^m \sum_{j=k}^m x_i x_j h_{ij}(x) \quad x \in W$$

donde $\delta_i = \pm 1$. En primer lugar, sabemos que E es invertible en 0 y podemos suponer que $h_{kk}(0) \neq 0$ (realizando un cambio de coordenadas lineal en x_k, \dots, x_n si fuera necesario). Por tanto, podemos asumir que el signo de $h_{kk}(x)$ es constante en todo W , reduciéndolo si es necesario. Introducimos el cambio de coordenadas

$$x'_k = \sqrt{|h_{kk}(x)|} \sum_{i=k}^m x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)}$$

manteniendo el resto, $x'_j = x_j$ para todo $j \neq k$. En efecto, se trata de un cambio de coordenadas puesto que su jacobiano en el 0 es no nulo. Por tanto, este cambio de coordenadas

define un difeomorfismo local ψ en un entorno de 0, es decir $x = \psi(x')$. Desarrollando,

$$\begin{aligned}
 f \circ \phi \circ \psi(x') &= f \circ \phi(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i x_i^2 + \sum_{i=k}^m \sum_{j=k}^m x_i x_j h_{ij}(x) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i x_i^2 + h_{kk}(x) x_k^2 + 2x_k \sum_{i=k+1}^m x_i h_{ik}(x) + \sum_{i,j=k+1}^m x_i x_j h_{ij}(x) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i x_i^2 + h_{kk}(x) \left(x_k + \sum_{i=k+1}^m x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)} \right)^2 - h_{kk}(x) \left(\sum_{i=k+1}^m x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)} \right)^2 + \sum_{i,j=k+1}^m x_i x_j h_{ij}(x) \\
 &= \sum_{i=1}^k \delta_i (x'_i)^2 + \sum_{i,j=k+1}^m x_i x_j \tilde{h}_{ij}(x) = \sum_{i=1}^k \delta_i (x'_i)^2 + \sum_{i,j=k+1}^m x'_i x'_j (\tilde{h}_{ij} \circ \psi)(x'),
 \end{aligned}$$

lo que completa el paso de inducción. Para finalizar, basta realizar una reordenación de las coordenadas para que queden de la forma de la ecuación (3.1). \square

Una consecuencia importante del Lema de Morse es la siguiente.

Corolario 3.2. *Los puntos críticos de una función de Morse son aislados.*

En particular, las funciones de Morse sobre variedades compactas tienen una cantidad finita de puntos críticos.

4. CONSTRUCCIÓN Y ABUNDANCIA DE LAS FUNCIONES DE MORSE

En esta sección demostramos la existencia de las funciones de Morse y que, además, son abundantes. Es decir, dada cualquier función diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, podemos encontrar una función de Morse arbitrariamente próxima a f .

Proposición 4.1. *Si $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces*

$$f_a(x) = f(x) + \langle a, x \rangle$$

es una función de Morse para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. La función f_a es de Morse si y solo si

$$\tilde{f}_a(y) = f_a \circ \varphi(y) = f \circ \varphi(y) + \langle a, \varphi(y) \rangle$$

es una función de Morse para una parametrización $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$. Dada la parametrización φ , definamos $F: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F(a, y) = \text{grad}_y \tilde{f}_a$. Si expresamos la función por componentes, $F = (F_1, \dots, F_m)$, tenemos para $1 \leq i \leq m$

$$F_i = \frac{\partial \tilde{f}_a}{\partial y_i} = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i},$$

y por tanto, sus derivadas son

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \qquad \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 \tilde{f}_a}{\partial y_j \partial y_i}$$

Si denotamos por J_F a la matriz jacobiana de F , por J_φ a la matriz jacobiana de φ y por $H_{\tilde{f}_a}$ a la hessiana de \tilde{f}_a , tenemos la siguiente relación

$$J_F = \begin{pmatrix} J_\varphi & H_{\tilde{f}_a} \end{pmatrix}.$$

Ahora, definimos $N = F^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, que es una variedad diferenciable de dimensión n por el teorema de la función implícita, y es el conjunto de pares (a, y) tales que y es valor crítico de \tilde{f}_a .

Sea $g: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección tal que $g(a, y) = a$, y sea a un valor regular de g . Como $T_{(a,y)}N \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tiene dimensión n , que sea sobreyectiva implica que es inyectiva. Sea $(0, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, como g es una proyección, $d_{(a,y)}g(0, u) = 0$. Como $d_{(a,y)}g$ en $T_{(a,y)}N$ es inyectiva, el vector $(0, u)$ pertenece a $T_{(a,y)}N$ si y solo si $u = 0$. Además, como $T_{(a,y)}N = \ker d_{(a,y)}F$, tenemos que $u = 0$ si y solo si $H_{\tilde{f}_a}(u) = 0$.

Por tanto, a es un valor regular de g si y solo si $H_{\tilde{f}_a}$ es no degenerada en los puntos críticos, es decir, si \tilde{f}_a es función de Morse. Por el teorema de Sard (proposición 1.4), los valores críticos de $g: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ tienen medida nula en \mathbb{R}^n , luego \tilde{f}_a es función de Morse para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$. \square

En el caso de que M sea compacta, se deduce que cualquier función diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se puede aproximar a una función de Morse. Entendemos por aproximar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función de Morse f_a tal que $\|f - f_a\| < \varepsilon$. En efecto, si tomamos f_a como en la proposición 4.1, se tiene que $\|f - f_a\| = \sup_{x \in M} |\langle a, x \rangle|$, y por ser M compacta siempre podemos elegir a de manera que $\sup_{x \in M} |\langle a, x \rangle| < \varepsilon$.

En realidad, lo anterior es cierto también para variedades no compactas, pero la demostración es más delicada. Se puede demostrar, adaptando el método de la demostración de la proposición 4.1, que si $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables con λ nunca nula, el conjunto de los puntos $(a_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tales que la función $f(x) + \lambda(x)(a_0 + \langle a, x \rangle)$ es de Morse es residual. Estas son las funciones que se utilizan para aproximar f por una función de Morse cuando M no es compacta (véase [2]).

5. CAMPOS DE TIPO GRADIENTE ASOCIADOS A UNA FUNCIÓN DE MORSE

Recordemos que el gradiente de una función diferenciable $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $\text{grad } f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right).$$

Esta noción se generaliza inmediatamente a variedades de la siguiente manera:

Definición 5.1. El *gradiente* de una función diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se define como aquel campo $X = \text{grad } f$ tangente a $M \subset \mathbb{R}^p$ tal que $d_a f(\bullet) = \langle X(a), \bullet \rangle$ donde $\langle \bullet, \bullet \rangle$ es el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^n .

Nótese que el gradiente de f tiene la propiedad de que f es estrictamente creciente en sus curvas integrales no constantes. Sin embargo, el campo gradiente tiene un comportamiento incómodo: la localización del gradiente no coincide con el gradiente de la localización. Esta dificultad nos lleva a definir los campos de tipo gradiente, que conservan las propiedades interesantes del gradiente.

Definición 5.2. Sea $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ una función de Morse. Un campo tangente X en M es de *tipo gradiente* para f si satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo punto regular $p \in M$ de f se tiene $d_p f(X(p)) > 0$.
2. Si $p \in M$ es un punto crítico de f , entonces existe una parametrización $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ de p en M con $\varphi(0) = p$ tal que

$$f \circ \varphi(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{j=\lambda+1}^m x_j^2$$

para $x \in U$ y $(\varphi^{-1})_* X|_U = \text{grad}(f \circ \varphi)$.

En la definición anterior, la primera condición implica que f es creciente en las curvas integrales de su campo de tipo gradiente.

Proposición 5.3. *Toda función de Morse admite un campo de tipo gradiente.*

Demostración. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Escogemos un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de M con una familia de parametrizaciones $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$, donde los W_i son abiertos de \mathbb{R}^m tales que se cumplan las siguientes condiciones:

- (I) Cada punto crítico de f pertenece a un único abierto U_i .
- (II) Para cada $i \in I$ se tiene que, o bien f no tiene ningún punto crítico en U_i , o bien f tiene un único punto crítico p en U_i con $\varphi(0) = p$ y $f \circ \varphi_i$ es de la forma (3.1).

Escogemos también una partición de la unidad $\{\theta_i\}_{i \in I}$ subordinada al recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$. Sea X_i el campo tangente a U_i determinado por $X_i = \varphi_* (\text{grad}(f \circ \varphi_i))$, definimos un campo tangente a M de la siguiente forma

$$X = \sum_{i \in I} \theta_i X_i$$

donde cada $\theta_i X_i$ es nulo fuera de U_i .

Sea $p \in M$ un punto regular. Para todo $i \in I$ con $p \in U_i$ y $\varphi_i(q) = p$ se tiene

$$d_p f(X_i(p)) = d_q (f \circ \varphi_i)(\text{grad}_q (f \circ \varphi_i)) > 0.$$

Como existe al menos un $i \in I$ tal que $\theta_i(p) > 0$, se tiene

$$d_p f(X(p)) = \sum_{i \in I} \theta_i(p) d_p f(X_i(p)) > 0,$$

cumpliendo la primera condición de la definición 5.2.

Si $p \in M$ es un punto crítico de f , entonces existe un único $i \in I$ para el cual $p \in U_i$. Entonces, podemos escoger un entorno abierto $V \subseteq U_i$ de p tal que V no interseca con ningún otro U_j . Por la elección del recubrimiento, es inmediato que con $\varphi_i|_V$ se cumple la segunda condición de la definición 5.2. \square

Si $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse y X un campo de tipo gradiente de f , podemos definir el *índice de X* en un punto crítico p de f como

$$\text{ind}_p(X) = \text{sign} \left(\det(d_p X) \right).$$

De esta definición se sigue que si p es un punto crítico de f con índice λ , entonces

$$\text{ind}_p(X) = (-1)^\lambda.$$

Por último, definimos el *índice total de X* como la suma de los índices de X en todos los puntos críticos de f , y lo denotamos $\text{Ind}(X)$, de donde obtenemos que $\text{Ind}(f) = \text{Ind}(X)$.

6. SUPERFICIES DE NIVEL DE FUNCIONES DE MORSE

A continuación explicamos una herramienta fundamental en la teoría de Morse: la descomposición de las variedades diferenciables compactas en subvariedades entre superficies de nivel. En esta sección M denotará una variedad diferenciable compacta y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ una función de Morse.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ definimos el conjunto

$$M_a^b = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}.$$

Extendemos la notación cuando $a = -\infty$ o $b = \infty$, escribiendo $M_a := M_a^\infty$ y $M^b := M_{-\infty}^b$.

Como consecuencia del corolario 3.2, por ser M compacta, el conjunto de puntos críticos de f es un conjunto finito, por lo que el conjunto de sus valores críticos $\{c_1, \dots, c_n\}$ también será finito. Suponiendo que el conjunto de valores críticos está ordenado de menor a mayor, el conjunto $f(M)$ alcanzará un valor mínimo c_1 y un máximo c_n . De esta manera, si consideramos $a < c_1$, tendremos que $M^a = \emptyset$, y si $a > c_n$ entonces $M^a = M$.

En la figura 2 se muestra un esquema ilustrativo de la descomposición de variedades. En este ejemplo se ha tomado como función de Morse la función *altura*, que es esencialmente la proyección de M sobre un eje, algo habitual en el estudio del tipo topológico de las variedades compactas. La proposición 4.1 garantiza la existencia de una función altura que sea función de Morse para M .

El proceso de descomposición se basa en elegir un valor regular entre cada par de valores críticos sucesivos. Así, obtenemos un conjunto $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ tal que $f^{-1}(a_i)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - 1$ para cada a_i del conjunto. Comenzamos con M^{a_1} , que es una subvariedad de M cuyo borde es $f^{-1}(a_1)$. A continuación, $M_{a_1}^{a_2}$ es otra subvariedad de M con bordes $f^{-1}(a_1)$ y $f^{-1}(a_2)$. Así pues, M^{a_2} es la unión de M^{a_1} y $M_{a_1}^{a_2}$, identificando los bordes $f^{-1}(a_1)$ de ambos conjuntos. Podemos continuar este proceso hasta obtener M^{a_n} , recuperando la variedad completa M .

Para que el proceso descrito anteriormente tenga sentido debe cumplirse una propiedad fundamental: el tipo topológico de M^{a_i} no puede depender del valor regular a_i escogido

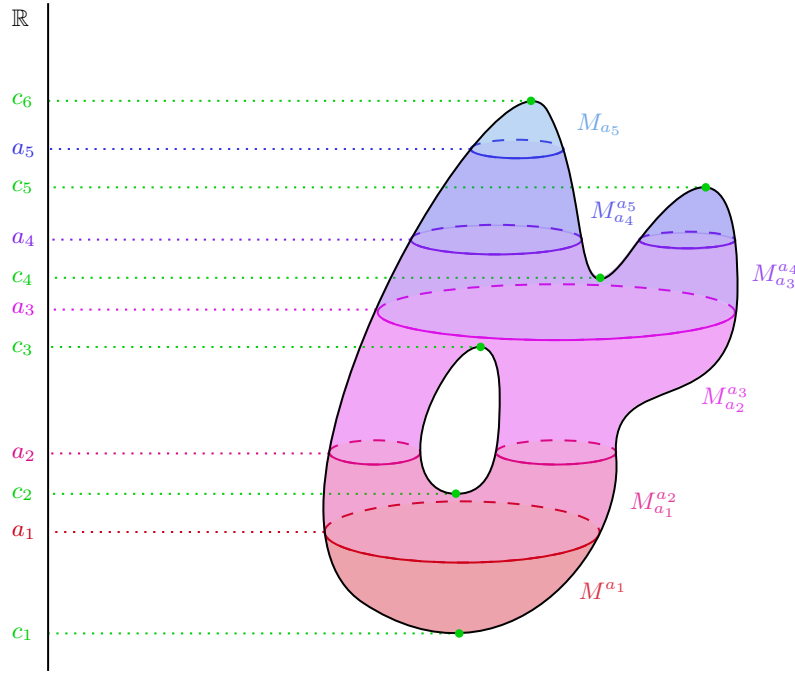


FIGURA 2. Esquema de la descomposición de una variedad compacta M en subvariedades delimitadas por superficies de nivel de la función de Morse.

entre dos puntos críticos consecutivos c_i y c_{i+1} . Es decir, si en el intervalo $[a, b]$ no hay valores críticos, entonces M^a y M^b deben tener el mismo tipo topológico. En la siguiente sección estudiaremos que M^a y M^b son, de hecho, variedades difeomorfas.

Por otro lado, para que este proceso sea útil, necesitamos una herramienta que describa el cambio del tipo topológico de M^{a_i} al añadirle la siguiente subvariedad, $M^{a_{i+1}}$. Es decir, necesitamos estudiar la variación de M^a al atravesar un valor crítico. Esto será precisamente a lo que dedicaremos las secciones posteriores.

7. TEOREMA DE VARIACIÓN ENTRE VALORES CRÍTICOS

En esta sección nos centraremos en estudiar la relación entre M^a y M^b cuando en el intervalo $[a, b]$ no hay puntos críticos, lo que da lugar al primer teorema fundamental de la teoría de Morse.

Teorema 7.1 (Variación entre valores críticos). *Sea M compacta y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ una función de Morse. Si en el intervalo $[a, b]$ no hay valores críticos, entonces M^a y M^b son difeomorfas.*

Demostración. Sea $Y = \text{grad } f$. El conjunto $f^{-1}([a, b])$ es cerrado en M por continuidad de f . Por hipótesis, en $f^{-1}([a, b])$ no hay puntos críticos, luego Y no se anula en $f^{-1}([a, b])$. Además, podemos tomar un entorno abierto U de $f^{-1}([a, b])$ en el que Y tampoco se anule. Consideramos ahora una función meseta $\theta: M \rightarrow \mathbb{R}$, es decir una función diferenciable que toma el valor 1 en $f^{-1}([a, b])$ y se anula fuera de U . Podemos definir el campo tangente

siguiente:

$$X(x) = \theta(x) \frac{Y(x)}{\|Y(x)\|^2}.$$

Como M es compacta, X genera un flujo completo $\varphi_t: M \rightarrow M$. Dado $x \in M$ fijo, consideramos la función $\gamma_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma_x(t) = f(\varphi_t(x))$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}(\gamma_x(t)) = \frac{d}{dt}(f(\varphi_t(x))) = d_{\varphi_t(x)}f \left(\frac{d}{dt}(\varphi_t(x)) \right) = \langle Y(\varphi_t(x)), X(\varphi_t(x)) \rangle = 1$$

de lo que concluimos que $\gamma_x(t) = t + f(x)$.

Para terminar, comprobemos que $\varphi_{b-a}: M^a \rightarrow M^b$ es el difeomorfismo que buscamos.

Si $x \in M^a$, entonces $f(x) \leq a$, luego $f(\varphi_{b-a}(x)) = \gamma_x(b-a) = b-a + f(x) \leq b-a+a = b$, por tanto $\varphi_{b-a}(x) \in M^b$, de donde obtenemos la inclusión $\varphi_{b-a}(M^a) \subseteq M^b$, luego está bien definida.

Por otro lado, como $\varphi_{b-a}^{-1} = \varphi_{a-b}$, si $x \in M^b$, entonces $f(x) \leq b$, luego $f(\varphi_{a-b}(x)) = \gamma_x(a-b) = a-b + f(x) \leq a-b+b = a$, por tanto $\varphi_{a-b}(x) \in M^a$. Tomando $y = \varphi_{a-b}(x)$, podemos afirmar que para cada $x \in M^b$ existe $y \in M^a$ tal que $\varphi_{b-a}(y) = x$, de donde obtenemos la sobreyectividad de φ_{b-a} .

La inyectividad se obtiene de que las órbitas son disjuntas, y además f es estrictamente creciente en ellas, ya que $\frac{d}{dt}\gamma_x(t) > 0$.

Por último, la diferenciabilidad de φ_{b-a} y de φ_{a-b} es inmediata por ser φ_t un flujo completo de X . \square

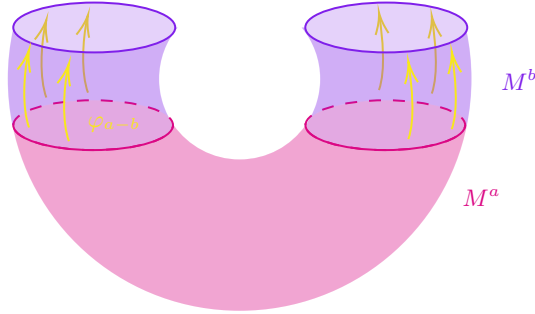


FIGURA 3. Esquema de la variación entre puntos singulares.

8. EL LEMA DE REEB

Las esferas admiten funciones de Morse con solamente dos puntos críticos. Sea $\mathbb{S}^m = \{(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{k=0}^m x_k^2 = 1\}$ y $f: \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la coordenada $f(x_0, \dots, x_m) = x_0$. Veamos que f tiene como únicos puntos críticos a $x_N = (1, 0, \dots, 0)$ y $x_S = (-1, 0, \dots, 0)$.

En primer lugar, podemos parametrizar \mathbb{S}^m con dos proyecciones estereográficas, $\varphi_N: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{x_N\}$ desde x_N y $\varphi_S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{x_S\}$ desde x_S . Explícitamente,

$$\varphi_N(y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \left(\|y\|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_m \right)$$

$$\varphi_S(y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \left(1 - \|y\|^2, 2y_1, \dots, 2y_m \right)$$

Obtenemos que $d_y(f \circ \varphi_N) = 0$ si y solo si $y = 0$, luego $\varphi_N(0) = x_S$ es el único punto crítico en este abierto, y de la misma forma $d_y(f \circ \varphi_S) = 0$ si y solo si $y = 0$, luego $\varphi_S(0) = x_N$ es el único punto crítico en el otro abierto. Falta comprobar que f es una función de Morse, para lo cual hay que ver que los puntos críticos son no degenerados. Las hessianas de $f \circ \varphi_N$ en $\varphi_N^{-1}(x_S) = 0$ y $f \circ \varphi_S$ en $\varphi_S^{-1}(x_N) = 0$ son, respectivamente $\text{Hess}_0(f \circ \varphi_N) = 4\text{id}$ y $\text{Hess}_0(f \circ \varphi_S) = -4\text{id}$, que son invertibles, luego ambos puntos críticos son no degenerados.

El Lema de Reeb es un resultado que se sigue del teorema de variación entre puntos críticos y demuestra que el hecho de admitir una función de Morse con solamente dos puntos críticos caracteriza *topológicamente* a las esferas.

Proposición 8.1 (Lema de Reeb). *Si una variedad diferenciable compacta M de dimensión m admite una función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ con solamente dos puntos críticos, entonces M es homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^m .*

Demostración. Como M es compacta, uno de los puntos críticos es un mínimo, $f(x_{\min}) = a$ y el otro un máximo $f(x_{\max}) = b$. Veamos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $M^{a+\varepsilon}$ es difeomorfo a una bola cerrada de dimensión m . Por el lema de Morse (proposición 3.1), sabemos que existe una parametrización $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ de M con $\varphi(0) = x_{\min}$ tal que

$$f \circ \varphi(x) = a + \sum_{j=1}^m x_j^2$$

para todo x en U , luego $M^{a+\varepsilon} = \{p \in M \mid f(p) \leq a + \varepsilon\}$ es difeomorfo a través de φ al conjunto

$$\tilde{M}^{a+\varepsilon} := \{x \in U \mid f \circ \varphi(x) \leq a + \varepsilon\} = \left\{ x \in U \mid \sum_{j=1}^m x_j^2 \leq \varepsilon \right\}$$

y siempre podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que la bola cerrada de radio ε esté contenida en U , luego $M^{a+\varepsilon}$ será difeomorfa a $\tilde{M}^{a+\varepsilon}$ que será la bola cerrada de radio ε .

Análogamente, existe un $\delta > 0$ tal que $M_{b-\delta}$ es difeomorfo a una bola cerrada de dimensión m . Por el lema de Morse (proposición 3.1), sabemos que existe una parametrización $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ de M con $\varphi(0) = x_{\max}$ tal que

$$f \circ \varphi(x) = b - \sum_{i=1}^m x_i^2$$

para todo x en U , luego $M_{b-\delta} = \{p \in M \mid b - \delta \leq f(p)\}$ es difeomorfo a través de φ al conjunto

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{b-\delta} &:= \{x \in U \mid b - \delta \leq f \circ \varphi(x)\} = \\ &= \left\{ x \in U \mid -\delta \leq -\sum_{i=1}^m x_i^2 \right\} = \left\{ x \in U \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq \delta \right\} \end{aligned}$$

y siempre podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que la bola cerrada de radio δ esté contenida en U , luego $M_{b-\delta}$ será difeomorfa a $\tilde{M}_{b-\delta}$ que será la bola cerrada de radio δ .

Además, como en el intervalo $[a + \varepsilon, b - \delta]$ no hay valores críticos, por el teorema 7.1 $M^{a+\varepsilon}$ es difeomorfo a $M^{b-\delta}$. Por tanto, M es la unión por el borde de dos bolas cerradas de dimensión m , $M^{b-\delta}$ y $M_{b-\delta}$. Veamos que esto implica que M es homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^m .

Sea $\psi: M^{b-\delta} \rightarrow \mathbb{S} \cap \{x_0 \leq 0\}$ un difeomorfismo que induce otro sobre su borde $\psi|_{\partial M^{b-\delta}}: \partial M^{b-\delta} \rightarrow \mathbb{S} \cap \{x_0 = 0\}$. Por otro lado, sea $\varphi: M_{b-\delta} \rightarrow \{\|x\| \leq 1\} \cap \{x_0 = 0\}$ (una bola cerrada de dimensión m sumergida en \mathbb{R}^{m+1}) otro difeomorfismo. Entonces, definimos la aplicación $h: M_{b-\delta} \rightarrow \{\|x\| \leq 1\} \cap \{x_0 = 0\}$ como

$$h(x) = \begin{cases} \|\varphi(x)\| (\psi \circ \varphi^{-1})\left(\frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}\right) & \text{si } \varphi^{-1}(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Esta aplicación extiende continuamente (no siempre diferenciablemente) la aplicación ψ a todo M . Por tanto, tenemos un homeomorfismo entre M y $\mathbb{S}^m \cup \{\{\|x\| \leq 1\} \cap \{x_0 = 0\}\}$. En la figura 4 se ilustra un esquema de los pasos seguidos hasta ahora.

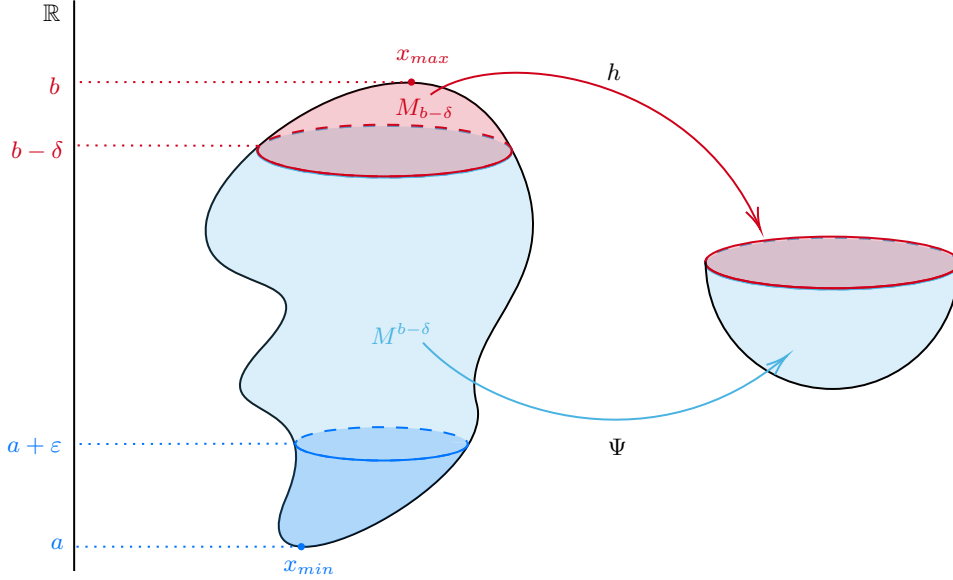


FIGURA 4. Esquema de la demostración del lema de Reeb.

Basta componer con un homeomorfismo entre $\{\|x\| \leq 1\} \cap \{x_0 = 0\}$ y \mathbb{S}_+^m para obtener el homeomorfismo buscado entre M y \mathbb{S}^m . \square

Es importante destacar que esta caracterización es solamente *topológica*, es decir, existen variedades diferenciables compactas que admiten funciones de Morse con solamente dos puntos críticos que no son difeomorfas a esferas. En 1956 el matemático estadounidense John Milnor fue el primero en encontrar una variedad homeomorfa pero no difeomorfa a la esfera, en concreto, la *esfera exótica* de dimensión 7 (véase [6]).

9. TEOREMA DE VARIACIÓN A TRAVÉS DE VALORES CRÍTICOS

En esta sección analizamos la relación entre M^a y M^b cuando entre a y b hay un valor crítico. En la figura 5 se muestra esta situación para un toro bidimensional, y observamos que M^b se puede convertir mediante homeomorfismo a M^a con una 2-celda adherida. En particular, M^b se puede retraer con deformación a M^a con una 1-celda adherida, a la que llamaremos *asa*. Es decir, M^b tiene el mismo tipo de homotopía que M^a con un asa.

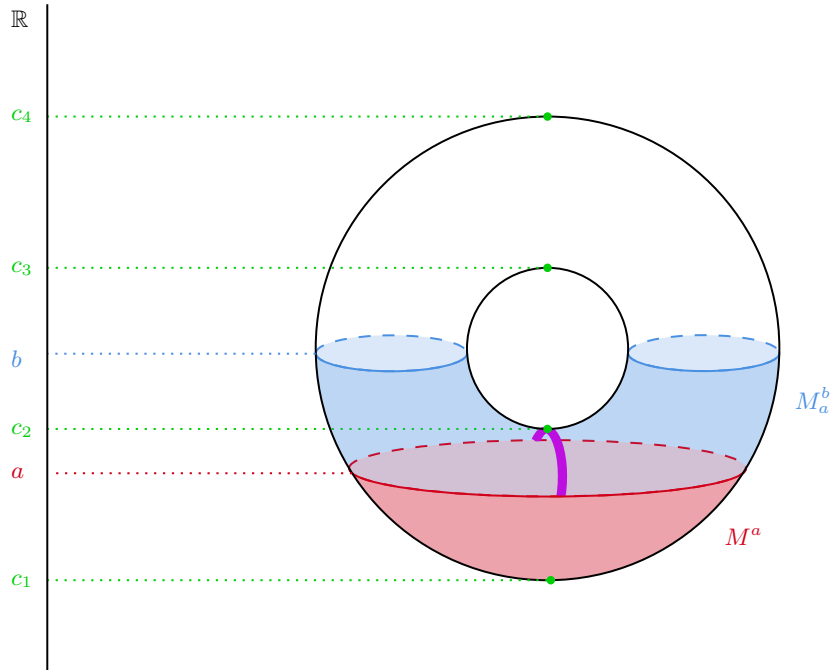


FIGURA 5. Esquema del pegado de asas.

Si acercamos los valores a y b a c_2 , tenemos la situación de la figura 6, que se ha representado desde un punto de vista superior y más cercano al punto crítico que estamos analizando.

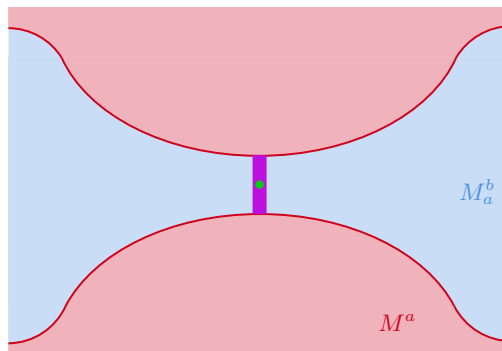


FIGURA 6. Esquema del pegado de asas ampliado.

El objetivo de esta sección es generalizar esta situación a dimensión arbitraria. Empezamos con el siguiente lema técnico.

Lema 9.1. Sean $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un entorno abierto del origen de \mathbb{R}^n y $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = a - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq \lambda \leq n$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que W contenga al conjunto

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + 2 \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2 \leq 2\varepsilon \right\}.$$

Entonces existe una función de Morse $F: W \rightarrow \mathbb{R}$ y dos abiertos contráctiles $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^{n-\lambda+1}$ que cumplen

1. $F(x) = f(x)$ si $x \in W \setminus E$.
2. El único punto crítico de F en W es 0 y $F(0) < a - \varepsilon$.
3. $F^{-1}((-\infty, a + \varepsilon)) = f^{-1}((-\infty, a + \varepsilon))$.
4. $F^{-1}((-\infty, a - \varepsilon)) = f^{-1}((-\infty, a - \varepsilon)) \cup U$.
5. $f^{-1}((-\infty, a - \varepsilon)) \cap U$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{\lambda-1} \times V$.

Demostración. Introducimos la notación $\xi = \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2$ y $\eta = \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$, de manera que

$$(9.1) \quad f(x) = a - \xi + \eta$$

y definimos $F \in C^\infty(W, \mathbb{R})$ tal que

$$(9.2) \quad F(x) = a - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$$

donde $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se escoge cumpliendo las siguientes propiedades:

- (I) $-1 < \mu'(t) \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (II) $\mu(t) = 0$ si $t \geq 2\varepsilon$.
- (III) μ es constante en un intervalo abierto conteniendo al 0 con valor $\mu(0) > \varepsilon$.

Si $x \in W \setminus E$, entonces $\xi + 2\eta > 2\varepsilon$ y (II) implica que $\mu(\xi + 2\eta) = 0$. De esto se sigue que $F(x) = f(x)$ si $x \in W \setminus E$, la primera propiedad a demostrar.

Por otro lado, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$(9.3) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \begin{cases} 2x_i(-1 - \mu'(\xi + 2\eta)) & \text{si } 1 \leq i \leq \lambda, \\ 2x_i(1 - 2\mu'(\xi + 2\eta)) & \text{si } \lambda + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

y la propiedad (I) de μ se tiene que

$$(9.4) \quad (-1 - \mu'(\xi + 2\eta)) < 0 \quad \text{y} \quad (1 - 2\mu'(\xi + 2\eta)) > 0$$

De esto se sigue que el único punto crítico de F es el 0. Además, por (III) F coincide con $f - \mu(0)$ en un entorno de 0 en el que $\mu(0) > \varepsilon$. Esto implica que F es una función de Morse y que se cumple la segunda propiedad del enunciado.

Por (I) y (II), $\mu(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, las ecuaciones (9.1) y (9.2) implican que $F(x) \leq f(x)$ para todo $x \in W$. Entonces

$$(9.5) \quad \begin{aligned} f^{-1}((-\infty, a + \varepsilon)) &\subseteq F^{-1}((-\infty, a + \varepsilon)) \\ f^{-1}((-\infty, a - \varepsilon)) &\subseteq F^{-1}((-\infty, a - \varepsilon)) \end{aligned}$$

Si la tercera condición del enunciado fuera falsa, existiría $x \in W$ tal que $F(x) < a + \varepsilon$ y $f(x) \geq a + \varepsilon$. Entonces por (II), $\xi + 2\eta < 2\varepsilon$, para que $F(x) < f(x)$. Pero esto implica que $\eta < \varepsilon$, luego $f(x) \leq a + \eta < a + \varepsilon$, en contradicción con lo anterior.

Análogamente se comprueba que la cuarta condición del enunciado se cumple con el abierto $U = \{x \in W \mid \xi + 2\eta < 2\varepsilon, F(x) < a - \varepsilon\}$. Veamos que U es contráctil. Ya hemos visto que se cumple la segunda propiedad del enunciado, luego $0 \in U$. Consideramos un punto de la forma $z = (z_1, \dots, z_\lambda, 0, \dots, 0)$ en $W = U \cap (\mathbb{R}^\lambda \times \{0\})$ y sea $\varphi_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_1(t) = F(tz)$. Por (9.3) y (9.4),

$$\varphi_1'(t) = \sum_{i=1}^{\lambda} z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(tz) \leq 0,$$

luego φ_1 es decreciente. Entonces, para $t \in [0, 1]$ $F(tz) = \varphi_1(t) \leq \varphi_1(0) = F(0) < a - \varepsilon$, lo que implica que U , luego W , contiene el segmento de extremos 0 y z . Así $W \subset \mathbb{R}^\lambda \times \{0\}$ es un abierto estrellado de centro el origen, luego contráctil. Ahora, sea $y = (y_1, \dots, y_n) \in U$ arbitrario, $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_\lambda, 0, \dots, 0)$ y $\varphi_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_2(t) = F(ty + (1-t)\tilde{y}) = F(y_1, \dots, y_\lambda, ty_{\lambda+1}, \dots, ty_n)$. Por (9.3) y (9.4), entonces

$$\varphi_2'(t) = \sum_{i=\lambda+1}^n y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(ty + (1-t)\tilde{y}) \geq 0,$$

luego φ_2 es creciente. Entonces, para $t \in [0, 1]$ tenemos $F(ty + (1-t)\tilde{y}) = \varphi_2(t) \leq \varphi_2(1) = F(y) < a - \varepsilon$. Por tanto, U contiene al segmento de extremos y e \tilde{y} . Por tanto $W = \pi(U)$, siendo $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\lambda \times \{0\}$ la proyección lineal. Además el conjunto U se puede retraer sobre W con deformación mediante interpolaciones lineales, luego U es contráctil como W .

Por último, probemos la quinta condición del enunciado. Sea $B = f^{-1}((-\infty, a - \varepsilon)) \cap U$. Por (9.1), (9.5) y la definición de U tenemos

$$\begin{aligned} B &= \{x \in W \mid \xi + 2\eta < 2\varepsilon, f(x) < a - \varepsilon\} \\ &= \{x \in W \mid \varepsilon < \xi < 2\xi, \eta < \min(\xi - \varepsilon, \varepsilon - \xi/2)\}. \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, entonces $B = \emptyset$ y el enunciado es cierto para todo V . En caso contrario, definimos

$$V = \left\{ (s, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-\lambda+1} \mid \sqrt{\varepsilon} < s < \sqrt{2\varepsilon}, \eta < \min(s^2 - \varepsilon, \varepsilon - s^2/2) \right\}.$$

Para ver que V es contráctil, observamos que si $q = (s, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) \in V$, entonces V contiene al segmento de extremos q y $\tilde{q} = (s, 0, \dots, 0)$ y también al segmento de extremos \tilde{q} y $\tilde{q}_0 = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{2\varepsilon}), 0, \dots, 0\right)$, y procedemos como con U . Finalmente, definimos el difeomorfismo $\Psi: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times V \rightarrow B$ tal que $\Psi(y, s, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) = (sy, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$. □

Ahora ya podemos establecer el resultado principal de esta sección:

Teorema 9.2 (Variación a través de valores críticos). *Sea M una variedad compacta de dimensión n y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ una función de Morse. Supongamos que $a \in \mathbb{R}$ es un valor*

crítico tal que p_1, \dots, p_r son los puntos críticos de $f^{-1}(a)$ y λ_i es el índice de cada p_i . Entonces existe $\varepsilon > 0$ y entornos abiertos disjuntos U_i de cada p_i tales que

1. p_1, \dots, p_r son los únicos puntos críticos en $f^{-1}([a - \varepsilon, a + \varepsilon])$.
2. Cada U_i es difeomorfo a un abierto contráctil de \mathbb{R}^n .
3. Para cada i , $U_i \cap M^{a-\varepsilon}$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{\lambda_i-1} \times V_i$, donde V_i es un abierto contráctil de $\mathbb{R}^{n-\lambda_i+1}$ (en particular, $U_i \cap M^{a-\varepsilon} = \emptyset$ si $\lambda_i = 0$).
4. $M^{a+\varepsilon}$ es difeomorfo a $U_1 \cup \dots \cup U_r \cup M^{a-\varepsilon}$.

Demostración. Por el teorema 3.1, para $1 \leq i \leq r$ podemos escoger parametrizaciones $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$ con $p_i \in U_i$, $W_i \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\varphi_i(0) = p_i$ tales que

$$f \circ \varphi_i(x) = a - \sum_{j=1}^{\lambda_i} x_j^2 + \sum_{j=\lambda_i+1}^n x_j^2 \quad \forall x \in W_i$$

Podemos suponer que los abiertos U_i son disjuntos dos a dos. Escogemos $\varepsilon > 0$ tal que a sea el único valor crítico en el intervalo $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ y tal que W_i contenga a la bola cerrada $\sqrt{2\varepsilon}D^n$.

Aplicamos el lema 9.1 a $f \circ \varphi_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}$ con dicho ε . De este modo, obtenemos para $1 \leq i \leq r$ las funciones de Morse $F_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}$ y los abiertos $\tilde{U}_i \subseteq U_i$ tales que $\varphi_i^{-1}(\tilde{U}_i)$ es el abierto contráctil de \mathbb{R}^n dado por el lema 9.1. Con esto ya tenemos las condiciones 1 y 2 del enunciado, y la condición 3 se sigue del lema 9.1.5. Por último, por la el lema 9.1.1, tenemos una función de Morse $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(q) = \begin{cases} F_i \circ \varphi_i^{-1}(q) & \text{si } q \in U_i, \\ f(q) & \text{si } q \notin \bigcup_{i=1}^r U_i. \end{cases}$$

y por el lema 9.1.3 y 9.1.4 se cumple

$$\begin{aligned} F^{-1}((-\infty, a + \varepsilon)) &= M(a + \varepsilon) \\ F^{-1}((-\infty, a - \varepsilon)) &= M(a - \varepsilon) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r \end{aligned}$$

Sabemos por el lema 9.1.2 que F tiene los mismos puntos críticos que f y además $F(p_i) < a - \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq r$. Si p un punto crítico diferente, entonces $F(p) = f(p) \notin [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, luego $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ no contiene ningún punto crítico de F . La última afirmación del teorema se sigue de aplicar el teorema 7.1 a F . \square

Es más, si analizamos cuidadosamente las demostraciones del lema 9.1 y del teorema 9.2, podemos concluir que los conjuntos U_i y V_i son homeomorfos a bolas abiertas. Para demostrarlo, necesitamos primero el siguiente lema, cuya demostración se inspira en [7].

Lema 9.3. *Todo subconjunto no vacío, abierto y estrellado de \mathbb{R}^n es difeomorfo a la bola unidad abierta de dimensión n .*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el conjunto U que cumple las condiciones del enunciado es estrellado con respecto al origen y que contiene la bola cerrada unidad de centro el origen. Se sabe que existe una función diferenciable $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow$

$[0, \infty)$ tal que $\phi^{-1}(0) = \mathbb{R}^n \setminus U$. Sea $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\lambda(x) = 1 + \left(\int_0^1 \frac{dv}{\phi(vx)} \right)^2 \|x\|^2.$$

Esta función es diferenciable en U por el teorema de derivación bajo el signo integral. Definimos $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $f(x) = \lambda(x)x$, también diferenciable en U . Para $x \neq 0$, realizamos el cambio de variable $v = \frac{t}{\|x\|}$, resultando

$$f(x) = \left[1 + \left(\int_0^{\|x\|} \frac{dt}{\phi\left(\frac{x}{\|x\|}t\right)} \right)^2 \right] x.$$

Calculemos la imagen de f . En primer lugar, $f(0) = 0$. Por otro lado, sea $A(x) = \sup \left\{ t > 0 \mid \frac{x}{\|x\|}t \in U \right\}$. Este valor será un número real positivo o ∞ , según si el conjunto U está acotado o no en la dirección de x . La función f envía inyectivamente el conjunto $A_x = \left\{ \frac{x}{\|x\|}t \mid t \in [0, A(x)] \right\}$ al rayo $R_x = \left\{ \frac{x}{\|x\|}t \mid t \in [0, \infty) \right\}$. En efecto,

$$(9.6) \quad \lim_{r \rightarrow A(x)} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}r\right) \right\| = \lim_{r \rightarrow A(x)} \left[1 + \left(\int_0^r \frac{dt}{\phi\left(\frac{x}{\|x\|}t\right)} \right)^2 \right] r \\ = \left[1 + \left(\int_0^{A(x)} \frac{dt}{\phi\left(\frac{x}{\|x\|}t\right)} \right)^2 \right] A(x) = \infty$$

donde la última igualdad es trivial si $A(x) = \infty$. Para $A(x) < \infty$, tenemos que $\phi\left(\frac{x}{\|x\|}A(x)\right) = 0$ por definición, luego el teorema del valor medio asegura que

$$\phi\left(\frac{x}{\|x\|}r\right) \leq k(A(x) - r)$$

para cierta constante k y todo r . En consecuencia, la integral

$$\int_0^{A(x)} \frac{dt}{\phi\left(\frac{x}{\|x\|}t\right)} \geq \int_0^{A(x)} \frac{dt}{k(A(x) - t)}$$

diverge, y el límite (9.6) también es ∞ . Por tanto, $f(U) = \mathbb{R}^n$.

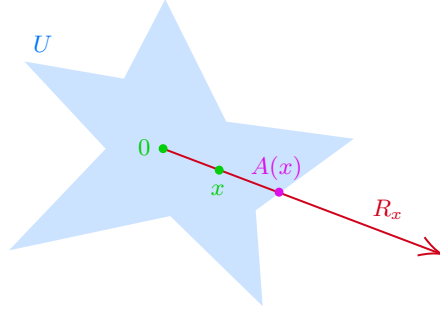


FIGURA 7. Esquema del conjunto estrellado.

Veamos ahora que la inversa de f es diferenciable. Por el teorema de la función inversa basta comprobar que df es inyectiva. Supongamos que $d_x f(v) = 0$ para ciertos $x \in U$ y $v \neq 0$. Por la definición de f ,

$$d_x f(v) = \lambda(x)v + d_x \lambda(v)x,$$

luego $v = \mu x$ con $\mu \neq 0$, de donde $x \neq 0$ y $\lambda(x) + d_x \lambda(x) = 0$. Pero tenemos que $\lambda(x) \geq 1$ y la función $g_x(s) = \lambda(sx)$ es creciente, luego $g'(1) = d_x \lambda(x) > 0$, lo que nos lleva a contradicción. Para comprobar que $g_x(s)$ es creciente, de la definición de $\lambda(x)$ obtenemos

$$g_x(s) = 1 + \left(\int_0^1 \frac{dv}{\phi(vsx)} \right)^2 \|sx\|^2 = 1 + \left(\int_0^s \frac{d\sigma}{\phi(\sigma x)} \right)^2 \|x\|^2$$

donde hemos hecho el cambio $\sigma = vs$. En esta expresión es claro que si $s_1 < s_2$, entonces $g_x(s_1) < g_x(s_2)$. Hemos probado que U es difeomorfo a \mathbb{R}^n . Como \mathbb{R}^n es difeomorfo a la bola unidad de dimensión n , se tiene el resultado. \square

Observación 9.4. *En las condiciones del teorema 9.2, los conjuntos U_i son homeomorfos a productos $B^{\lambda_i} \times B^{n-\lambda_i}$ de bolas abiertas de las dimensiones indicadas y los conjuntos V_i son homeomorfos a bolas abiertas $B^{n-\lambda_i+1}$.*

En efecto, según la demostración del lema 9.1, la proyección W_i de U_i sobre las λ_i primeras coordenadas es estrellado respecto al origen. Y no solo eso, sino que los segmentos que unen cada punto con su proyección están contenidos en el conjunto. Se comprueba que los abiertos estrellados son homeomorfos a una bola mediante el lema 9.3, luego tenemos que W_i es homeomorfo a una bola abierta B^{λ_i} de dimensión λ_i . Con un razonamiento similar, obtenemos que para todo $(z, 0) \in W_i$, el conjunto $U_i \cap (\{z\} \times \mathbb{R}^{n-\lambda_i})$ es estrellado respecto de $(z, 0)$, luego homeomorfo a una bola $B^{n-\lambda_i}$. Este homeomorfismo varía continuamente con z , pues depende de una función $\varphi_z: \{z\} \times \mathbb{R}^{n-\lambda_i} \rightarrow \mathbb{R}$ que se puede definir por restricción de otra global $\varphi: \mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{R}^{n-\lambda_i} \rightarrow \mathbb{R}$ cuyos ceros son exactamente $\mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{R}^{n-\lambda_i} \setminus U$. Por ello, se sigue que U_i es homeomorfo a $W_i \times B^{n-\lambda_i}$, luego homeomorfo a $B^{\lambda_i} \times B^{n-\lambda_i}$. El razonamiento para V_i es completamente análogo, pues vemos en la demostración del lema 9.1 que los pasos para demostrar la contractibilidad de V_i son los mismos que para U_i .

Este es el umbral inicial de la teoría de asas, una extensión significativa y compleja de la teoría de Morse que no abordamos en detalle en esta memoria.

10. CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES ORIENTABLES EN \mathbb{R}^3

Con propósito de ilustrar cómo se utiliza toda la teoría desarrollada en las secciones precedentes para analizar el tipo topológico de una variedad compacta, lo mostraremos con un ejemplo clásico: el toro bidimensional T sumergido en \mathbb{R}^3 .

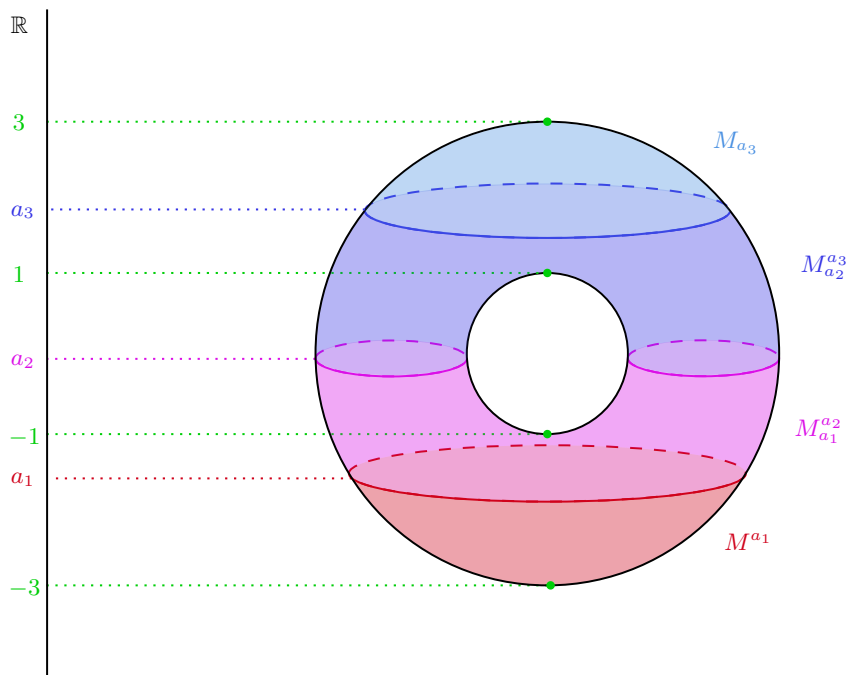


FIGURA 8. Esquema de la descomposición del toro según sus puntos críticos.

Vamos a considerar el toro parametrizado por el difeomorfismo local $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ habitual

$$\varphi(s, t) = ((2 + \cos s) \cos t, (2 + \cos s) \sin t, \sin s).$$

El dominio de la parametrización dependerá del punto del toro que estemos considerando. La función de Morse asociada será su altura en el eje x , es decir, $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = x$. Calculamos $d_p f$ como la matriz jacobiana de la localización, $(f \circ \varphi)(s, t) = (2 + \cos s) \cos t$, obteniendo:

$$d_p(f) = (-\sin s_p \cos t_p, -\sin t_p(2 + \cos s_p))$$

donde s_p e t_p son las coordenadas de $\varphi^{-1}(p)$. Ahora, buscamos los puntos críticos de f , que en este caso son aquellos que anulan simultáneamente ambos términos de la matriz. Obtenemos $(s_p, t_p) = (k\pi, l\pi)$ con $k, l \in \mathbb{Z}$, lo que se corresponde con solo cuatro opciones distintas para $p = \varphi(s_p, t_p)$, los cuatro puntos críticos:

$$p_1 = (-3, 0, 0) \quad p_2 = (-1, 0, 0) \quad p_3 = (1, 0, 0) \quad p_4 = (3, 0, 0)$$

Es decir, f tiene cuatro valores críticos: $-3, -1, 1$ y 3 .

Calculamos la hessiana en los puntos críticos. En general,

$$\text{Hess}_p(f \circ \varphi) = \begin{pmatrix} -\cos s_p \cos t_p & \sin s_p \sin t_p \\ \sin s_p \sin t_p & -\cos t_p(2 + \cos s_p) \end{pmatrix}$$

y particularizando en cada punto crítico,

$$\text{Hess}_{p_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Hess}_{p_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Hess}_{p_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Hess}_{p_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los índices de sus puntos críticos son, respectivamente, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 2$. Tomando valores regulares a_1, a_2 y a_3 tales que $-3 < a_1 < -1 < a_2 < 1 < a_3 < 3$, la figura 8 representa la descomposición del toro que queremos seguir.

Ahora, el objetivo de esta sección será obtener toda la información topológica del toro conociendo únicamente los datos sobre la función de Morse: sus valores críticos, los puntos críticos correspondientes a cada uno de ellos y sus respectivos índices.

Analicemos primeramente la información que nos proporciona el teorema 9.2:

- Sabemos que existe $\varepsilon_1 > 0$ y un entorno abierto U_1 de p_1 en T tal que U_1 es difeomorfo a un abierto contráctil de \mathbb{R}^2 , $U_1 \cap M^{-3-\varepsilon_1} = \emptyset$ y $M^{-3+\varepsilon_1}$ es difeomorfo a U_1 . Con todo esto, concluimos que $M^{-3+\varepsilon_1}$ es homeomorfo a un disco abierto de \mathbb{R}^2 .
- En segundo lugar, sabemos que existe otro $\varepsilon_2 > 0$ y un entorno abierto U_2 de p_2 en T tal que U_2 es difeomorfo un abierto contráctil de \mathbb{R}^2 , $U_2 \cap M^{-1-\varepsilon_2}$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^0 \times V_2$, donde V_2 es un abierto contráctil de \mathbb{R}^2 , y $M^{-1+\varepsilon_2}$ es difeomorfo a $U_2 \cup M^{-1-\varepsilon_2}$. Analicemos con cuidado cada parte. Como U_2 y V_2 son difeomorfos a abiertos contráctiles de \mathbb{R}^2 , son homeomorfos a discos abiertos de \mathbb{R}^2 , luego $M^{-1+\varepsilon_2}$ es homeomorfo a la unión de $M^{-1-\varepsilon_2}$ con un disco abierto. Pero conocemos más detalles sobre esta unión: \mathbb{S}^0 son dos puntos disjuntos, luego $U_2 \cap M^{-1-\varepsilon_2}$ es homeomorfo a dos discos abiertos de \mathbb{R}^2 disjuntos. En conclusión, sabemos que $M^{-1+\varepsilon_2}$ es homeomorfo a la unión de $M^{-1-\varepsilon_2}$ con un disco abierto tal que la intersección del disco con $M^{-1-\varepsilon_2}$ es dos discos abiertos disjuntos.
- El siguiente paso es similar al anterior, ya que el siguiente valor crítico también se corresponde con un único punto crítico de índice 1. En consecuencia, para otro $\varepsilon_3 > 0$, $M^{1+\varepsilon_3}$ es homeomorfo a la unión de $M^{1-\varepsilon_3}$ con un disco abierto tal la intersección del disco con $M^{1-\varepsilon_3}$ es dos discos abiertos disjuntos.
- Por último, existe $\varepsilon_4 > 0$ y un entorno abierto U_4 de p_4 en T tal que U_4 es difeomorfo a un abierto contráctil de \mathbb{R}^2 , $U_4 \cap M^{3-\varepsilon_4}$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times V_4$, donde V_4 es un abierto contráctil de \mathbb{R}^1 , y $M^{3+\varepsilon_4}$ es difeomorfo a $U_4 \cup M^{3-\varepsilon_4}$. En este caso, lo que sabemos es que $M^{3+\varepsilon_4}$ es homeomorfo a la unión de $M^{3-\varepsilon_4}$ con un disco abierto de \mathbb{R}^2 tal que la intersección de $M^{3-\varepsilon_4}$ con el disco sea un cilindro.

Ahora, comencemos con la *reconstrucción* de nuestra variedad. Como entre $-3 + \varepsilon_1$ y $-1 - \varepsilon_2$ no hay valores críticos, el teorema 7.1 nos dice que $M^{-3+\varepsilon_1}$ y $M^{-1-\varepsilon_2}$ son difeomorfas, por lo que esta última también es homeomorfa a un disco abierto de \mathbb{R}^2 . Por tanto, $M^{-1+\varepsilon_2}$ es homeomorfo a la unión de dos discos abiertos cuya intersección son dos discos disjuntos, es decir, homeomorfo a un cilindro ($\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$). Además, aplicando de nuevo el teorema 7.1 obtenemos que $M^{1-\varepsilon_3}$ también es homeomorfo a un cilindro. En la figura 9 se representa toda la información obtenida hasta ahora.

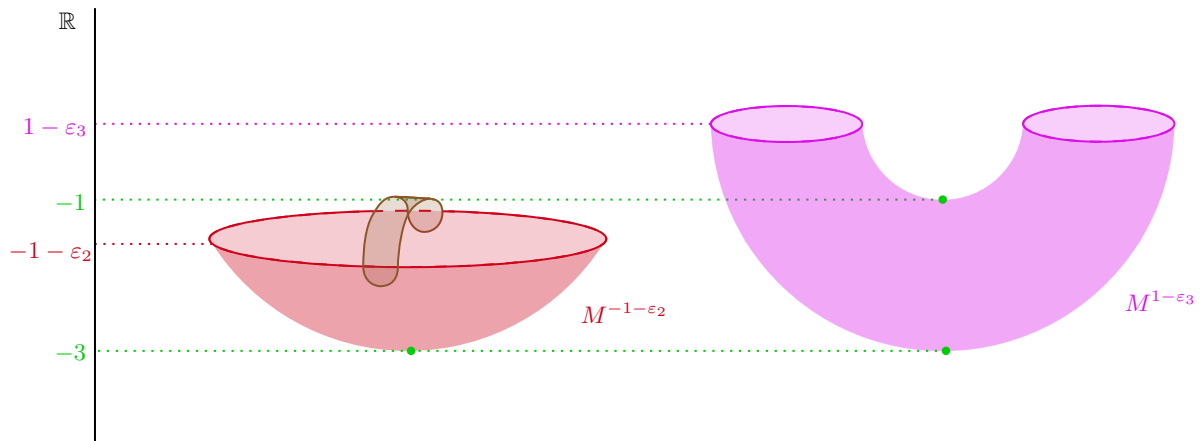


FIGURA 9. Esquema de la adjunción de la primera celda en la reconstrucción del toro.

En realidad, esta no es la única manera posible para el pegado del asa, ya que podríamos haberla adjuntado “doblada” como se muestra en la figura 10. Sin embargo, esto daría lugar a una superficie no orientable, ya que *una superficie que contiene un subespacio homeomorfo al interior de la banda de Möbius no es orientable*. En efecto, si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable, entonces admite un campo normal global. Si S contiene un conjunto B homeomorfo a una banda de Möbius, la restricción del campo a B definiría un campo normal global en B , lo cual implicaría que la banda de Möbius es orientable, llegando a una contradicción.

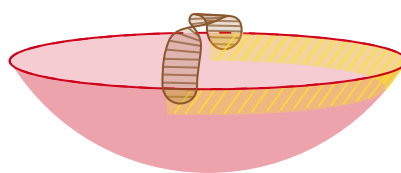


FIGURA 10. Pegado de celda de manera no orientable.

Ahora, para obtener $M^{1+\varepsilon_3}$ tenemos que añadir a $M^{1-\varepsilon_3}$ un disco abierto tal que su intersección sean dos discos disjuntos. En este caso podría parecer que hay cuatro maneras distintas de hacerlo (ver figura 11), pero los casos 3 y 4 quedan descartados por contener una banda de Möbius (conjuntos rayados). Veremos que con el segundo caso llegaríamos a una contradicción en el siguiente paso.

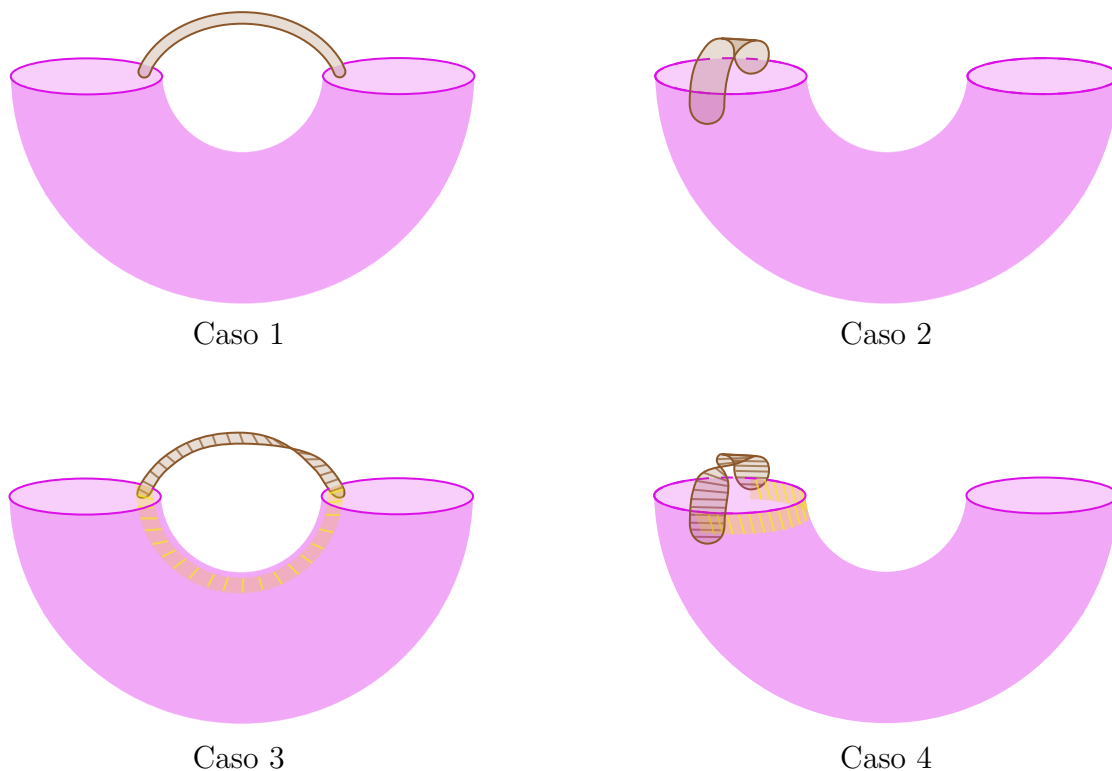


FIGURA 11. Esquema de todos los casos posibles para la adjunción de la segunda celda en la reconstrucción del toro.

Nos quedamos de momento con el caso 1. Una vez más, el teorema 7.1 nos dice que $M^{1+\varepsilon_3}$ y $M^{3-\varepsilon_4}$ son difeomorfos.

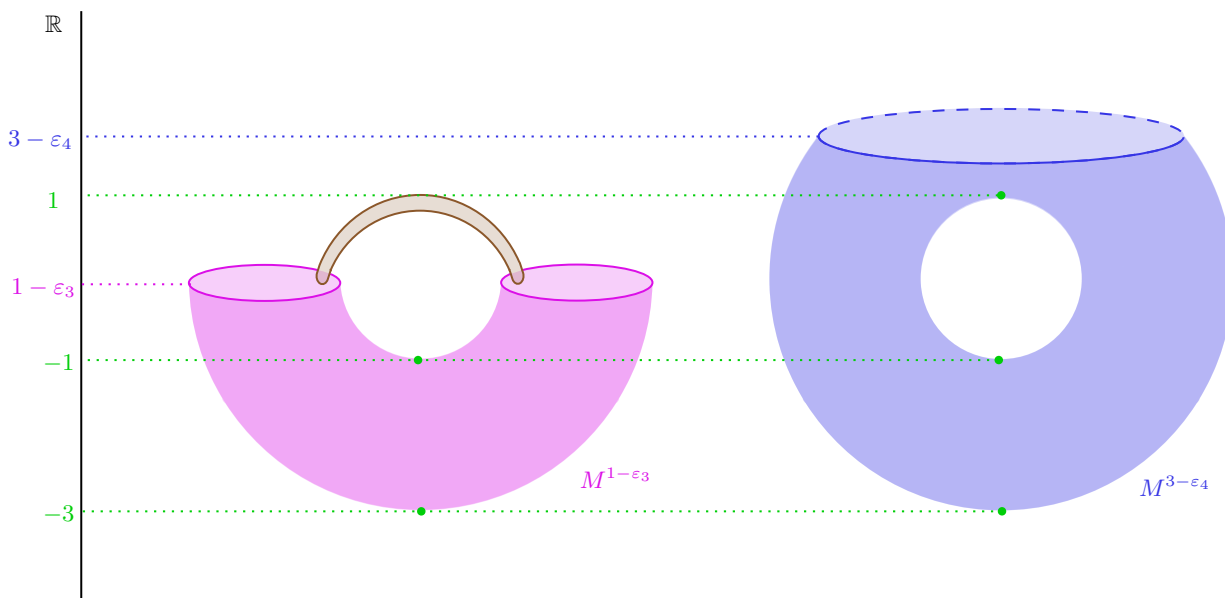


FIGURA 12. Esquema de la adjunción de la segunda celda en la reconstrucción del toro.

Para terminar, $M^{3+\varepsilon_4}$ es homeomorfo a $M^{3-\varepsilon_4}$ añadiéndole un disco abierto tal que la intersección sea un cilindro. Ahora, solamente hay una manera de hacerlo, y ya habremos obtenido el tipo topológico del toro conociendo solamente la información sobre los valores críticos de una función de Morse definida sobre él. Este último paso se muestra en la figura 13.

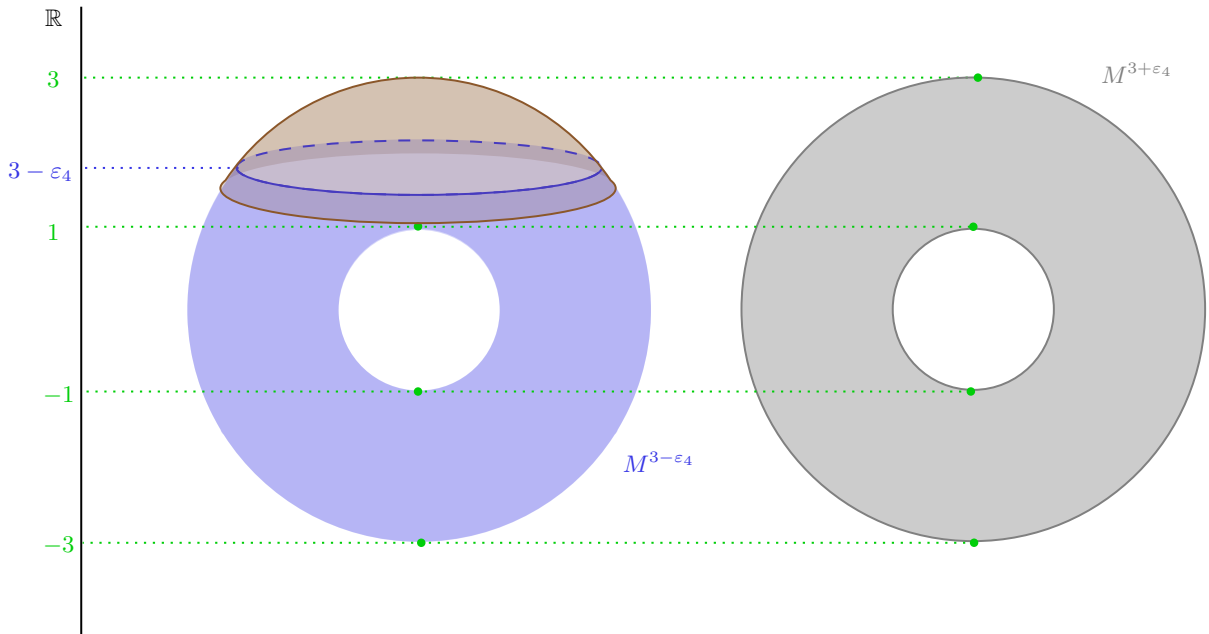


FIGURA 13. Esquema de la adición de la última celda en la reconstrucción del toro.

Veamos qué habría pasado si hubiéramos seguido con el caso 2. Aplicando el teorema 7.1, tendríamos que $M^{3-\varepsilon_4}$ es una variedad homeomorfa al esquema de la figura 14. Este caso es imposible, pues debemos añadir un disco cuya intersección con $M^{3-\varepsilon_4}$ sea un cilindro, y cualquier manera de hacerlo nos daría como resultado una variedad con borde, y estamos trabajando únicamente con variedades compactas sin borde.

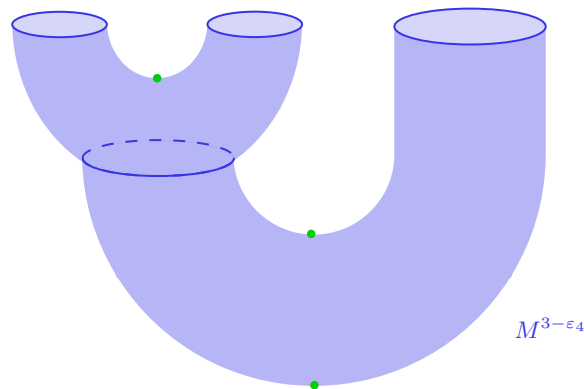


FIGURA 14. Esquema del caso descartado en la reconstrucción del toro.

Hasta ahora, hemos razonado el enunciado análogo al Lema de Reeb para el toro, que se formularía de la siguiente manera.

Corolario 10.1. *Si una superficie compacta y orientable $M \subseteq \mathbb{R}^3$ admite una función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ con cuatro puntos críticos p_1, p_2, p_3 y p_4 , con índices $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 2$, entonces M es un toro.*

Nótese que este procedimiento se extiende fácilmente a toros con g agujeros como se muestra en la figura 15. Las funciones de Morse sobre toros con g agujeros poseen $2(g+1)$ puntos críticos, de los cuales uno es un mínimo con índice 0, otro es un máximo con índice 2, y el resto son puntos de silla con índice 1. Es decir, el procedimiento descrito en esta sección es una forma de clasificar superficies orientables en \mathbb{R}^3 .

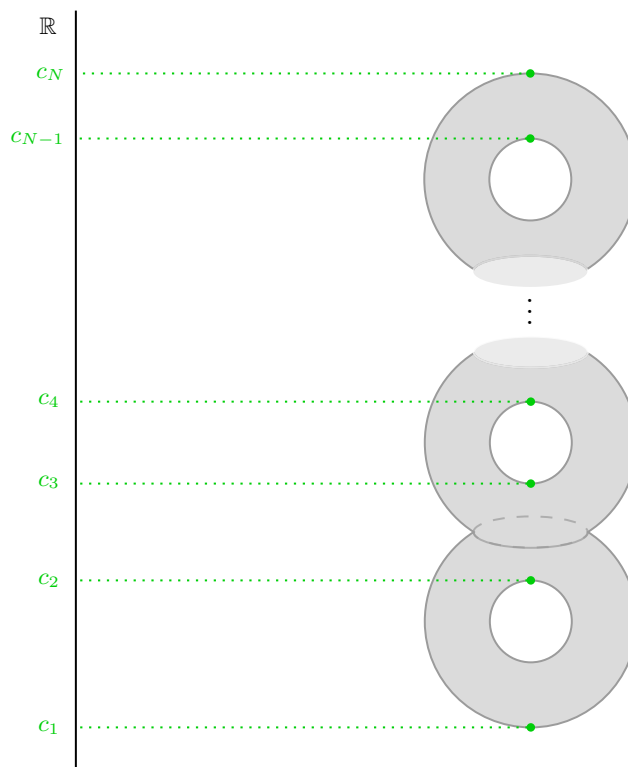


FIGURA 15. Esquema del procedimiento para toros con g agujeros.

El pegado de asas de manera “doblada” daría lugar a superficies no orientables, pero para ello deben estar sumergidas en \mathbb{R}^n con $n > 3$, ya que toda superficie compacta sin borde en \mathbb{R}^3 es orientable.

Por otro lado, notamos que el toro admite funciones de Morse con distintos puntos críticos a los que se enuncian en el corolario 10.1. Por ejemplo, en el caso de la variedad mostrada en la figura 16, tomando la misma función de Morse obtenemos una distribución de puntos críticos distinta a la anterior, pero la variedad es homeomorfa al toro. En este caso, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ y $\lambda_5 = \lambda_6 = 2$. Esto nos induce a pensar si existe alguna relación entre las funciones de Morse asociadas a variedades homeomorfas. En efecto, en estos dos ejemplos se mantiene invariante el índice de f . Esto da pie a la siguiente sección.

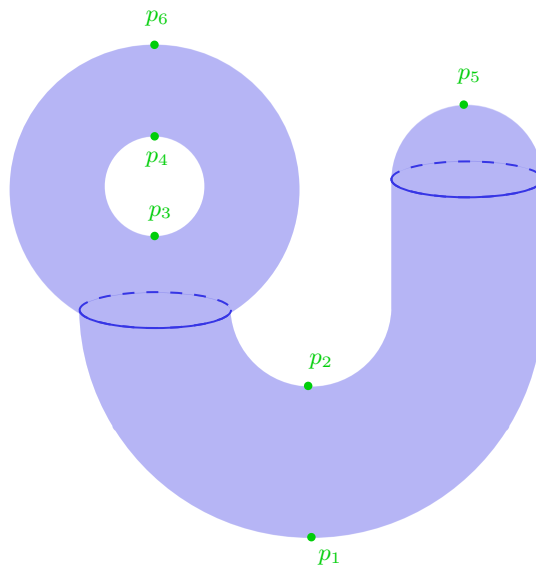


FIGURA 16. Superficie homeomorfa al toro con distintos puntos críticos.

11. TEOREMA DE POINCARÉ HOPF PARA FUNCIONES DE MORSE

El objetivo de esta sección es concluir que el índice de una función de Morse f sobre una variedad compacta sin borde M es un invariante topológico de la variedad, de hecho su característica de Euler. Empezamos con un concepto importante, que se puede definir fácilmente mediante la integral.

Proposición 11.1. *Sea $f: M_1 \rightarrow M_2$ una función diferenciable entre dos variedades compactas y orientadas de dimensión m . Entonces, existe un único $\deg(f) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{M_1} f^*(\omega) = \deg(f) \int_{M_2} \omega$$

para toda $\omega \in \Gamma^m(M_2)$.

En las condiciones de la proposición anterior, llamamos *grado* de f a $\deg(f)$ y se comprueba que siempre es un número entero y que solamente depende de la clase de homotopía de f . Sea N_1 una variedad diferenciable compacta, orientada y con borde de dimensión $n+1$, N_2 una variedad diferenciable orientada y sin borde de dimensión n , y $F: N_1 \rightarrow N_2$. El teorema del borde afirma que $\deg(F|_{\partial N_1}) = 0$. En efecto, si ω es una forma de grado máximo en N_2 con integral no nula, por el teorema de Stokes

$$\int_{\partial N_1} (F|_{\partial N_1})^*(\omega) = \int_{N_1} dF^*\omega = \int_{N_1} F^*d\omega = 0$$

porque ω es de grado máximo en N_2 . El siguiente teorema nos indica que el índice de una función de Morse solamente depende de la variedad. Para ello, recurrimos al teorema 1.5.

Teorema 11.2 (Poincaré-Hopf para funciones de Morse). *Si $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse y η la aplicación de Gauss del borde su entorno tubular en cualquier \mathbb{R}^n donde sumerjamos M , entonces*

$$\text{Ind}(f) = \deg(\eta)$$

Demostración. Por la proposición 5.3, f admite un campo de tipo gradiente X . Sean p_k los puntos críticos de f . Definimos en N_ε el campo $\xi: N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\xi(x) = X(r(x)) + x - r(x)$$

En primer lugar, notamos que $X(r(x))$ es tangente a M y $x - r(x)$ es perpendicular a M , luego $\xi(x)$ se anula si y solo si se anulan ambos vectores por separado, es decir, si y solo si x pertenece a M y es punto crítico de f . Por tanto, tenemos que la restricción de $d_{p_k}\xi$ a $T_{p_k}M$ es $d_{p_k}X$, mientras que su restricción a $T_{p_k}M^\perp$ es la identidad. En consecuencia, $\text{sign}_{p_k}\xi = \text{sign}_{p_k}X$, y por las propiedades vistas en la sección 5 podemos escribir

$$\text{Ind}(f) = \sum_k \text{sign}_{p_k} X = \sum_k \text{sign}_{p_k} \xi$$

Por otro lado, para cada p_k elegimos una bola cerrada D_k con centro en p_k tal que todas ellas estén contenidas en el interior del entorno tubular y sean disjuntas. Definimos los campos $Y_k: \partial D_k \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ como

$$Y_k(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$$

que están bien definidos porque ξ no se anula en los bordes de estas bolas. También definimos el campo $Y: \partial N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ de la misma manera,

$$Y(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$$

Por el teorema del borde, la aplicación de Gauss en el borde de $N_\varepsilon \setminus \cup_k D_k$ tiene grado nulo, de donde

$$\text{deg}(Y) = \sum_k \text{deg}(Y_k)$$

donde ∂D_k se orienta como borde de D_k como muestra la figura 17.

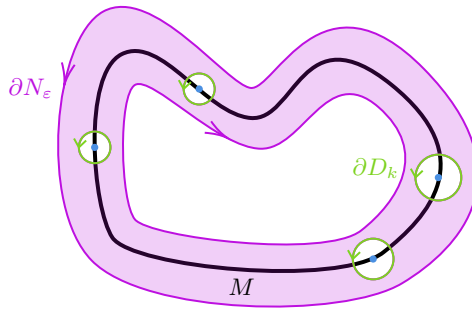


FIGURA 17. Esquema de la demostración del teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse.

Ahora, debemos notar que si R_k es el radio de D_k , entonces

$$Y_k(x) = \frac{1}{R_k} \xi(x)$$

de donde

$$\deg(Y) = \sum_k \deg \left(\xi \Big|_{\partial D_k} \right) = \sum_k \text{sign}_{p_k} \xi = \text{Ind}(f)$$

ya que $\xi|_{\partial D_k}$ es un difeomorfismo, luego su grado será ± 1 según conserve o invierta la orientación. Para concluir la demostración, basta comprobar que η e Y son homótopas. Para ello, solamente hay que verificar que no tienen imágenes antipodales para poder definir la homotopía como

$$H(x, t) = \frac{(1-t)\eta(x) + tY(x)}{\|(1-t)\eta(x) + tY(x)\|}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} Y(x) = -\eta(x) &\Leftrightarrow \frac{X(r(x)) + x - r(x)}{\|X(r(x)) + x - r(x)\|} = -\frac{1}{\varepsilon} (x - r(x)) \\ &\Leftrightarrow - \left(1 + \frac{\|X(r(x)) + x - r(x)\|}{\varepsilon} \right) (x - r(x)) = X(r(x)), \end{aligned}$$

lo cual es imposible por ser perpendiculares y no nulos. \square

Puesto que $\text{Ind}(f)$ no depende de la inmersión de M pero sí de la función de Morse f escogida, mientras que $\deg(\eta)$ sí depende de la inmersión pero no de f , el teorema anterior evidencia que ni $\text{Ind}(f)$ ni $\deg(\eta)$ dependen de la inmersión o de f . Lo fundamental es que podemos demostrar que ese índice coincide con la característica de Euler de la variedad. Para ello, necesitamos un resultado previo sobre la característica de Euler.

Proposición 11.3. *Sean U y V dos abiertos de una variedad diferenciable M de dimensión m . Si los grupos de cohomología de de Rham de U , V y $U \cap V$ son de dimensión finita, entonces los de $U \cap V$ también y*

$$\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Demostración. El hecho de que los grupos de cohomología de de Rham de $U \cap V$ son de dimensión finita se deduce inmediatamente del teorema 1.11 considerando la sucesión

$$\dots \xrightarrow{J_{p-1}^*} H^{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial_{p-1}^*} H^p(U \cup V) \xrightarrow{I_p^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{J_p^*} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial_p^*} \dots$$

Como el teorema 1.11 asegura que la sucesión anterior es exacta, se tiene que

$$\begin{aligned} \dim H^p(U \cup V) &= \dim(\text{im } \partial_{p-1}^*) + \dim(\text{im } I_p^*) \\ \dim (H^p(U) \oplus H^p(V)) &= \dim(\text{im } I_p^*) + \dim(\text{im } J_p^*) \\ \dim H^p(U \cap V) &= \dim(\text{im } J_p^*) + \dim(\text{im } \partial_p^*) \end{aligned}$$

con $0 \leq p \leq m$. Aplicando la definición de la característica de Euler,

$$\begin{aligned}\chi(U \cup V) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial_{p-1}^*) + \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} I_p^*) \\ \chi(U) + \chi(V) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} I_p^*) + \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} J_p^*) \\ \chi(U \cap V) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} J_p^*) + \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial_p^*)\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\chi(U \cap V) + \chi(U \cup V) - \chi(U) - \chi(V) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial_{p-1}^*) + \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\operatorname{im} \partial_p^*) \\ &= \dim(\operatorname{im} \partial_{-1}^*) + (-1)^m \dim(\operatorname{im} \partial_m^*) \\ &= 0\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de que $H^{-1}(U \cup V)$ y $H^{m+1}(U \cup V)$ son nulos, ya que $\Gamma^{-1}(M) = \Gamma^{m+1}(M) = \{0\}$. \square

A continuación, obtenemos un resultado parcial para explotar la manera en que las funciones de Morse descomponen la variedad.

Proposición 11.4. *En las condiciones del teorema 9.2, si $M^{a-\varepsilon}$ tiene cohomología de dimensión finita, entonces $M^{a+\varepsilon}$ también y se cumple*

$$\chi(M^{a+\varepsilon}) - \chi(M^{a-\varepsilon}) = \sum_{i=1}^r (-1)^{\lambda_i}.$$

Demostración. Sea $U = \cup_{i=1}^r U_i$. Como U es la unión disjunta de r abiertos conexos disjuntos, tenemos por las proposiciones 1.6, 1.7 y 1.9 que $H^0(U) = \mathbb{R}^r$ y $H^p(U) = 0$ para $p \neq 0$. Esto implica $\chi(U) = r$. La tercera condición del teorema 9.2 dice que $U_i \cap M^{a-\varepsilon}$ tiene el mismo tipo de homotopía que \mathbb{S}^{λ_i-1} . Sabemos por la proposición 1.10 que $H^p(\mathbb{S}^{\lambda_i-1}) = \mathbb{R}$ si $p = 0$ o $p = \lambda_i - 1$ y $H^p(\mathbb{S}^{\lambda_i-1}) = 0$ en otro caso. Por la invarianza homotópica de la cohomología (proposición 1.8), tenemos

$$\chi(U_i \cap M^{a-\varepsilon}) = \chi(\mathbb{S}^{\lambda_i-1}) = 1 + (-1)^{\lambda_i-1}.$$

Como $U \cap M^{a-\varepsilon}$ es la unión disjunta de los conjuntos $U_i \cap M^{a-\varepsilon}$,

$$\chi(U \cap M^{a-\varepsilon}) = \sum_{i=1}^r \left(1 + (-1)^{\lambda_i-1}\right) = r - \sum_{i=1}^r (-1)^{\lambda_i} = \chi(U) - \sum_{i=1}^r (-1)^{\lambda_i}.$$

Finalmente, aplicando la proposición 11.3 se tiene

$$\sum_{i=1}^r (-1)^{\lambda_i} = \chi(U) - \chi(U \cap M^{a-\varepsilon}) = \chi(U \cup M^{a-\varepsilon}) - \chi(M^{a-\varepsilon}) = \chi(M^{a+\varepsilon}) - \chi(M^{a-\varepsilon}).$$

\square

Teorema 11.5 (Poincaré-Hopf para funciones de Morse). *Sea M una variedad compacta y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Entonces,*

$$\text{Ind}(f) = \chi(M)$$

Demostración. Sea $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ los valores críticos de f . Escogemos valores regulares b_j de manera que $b_0 < a_1$, $b_j \in (a_j, a_{j+1})$ para $1 \leq j \leq k-1$ y $a_k < b_k$. Por el teorema 7.1, las dimensiones de $H^d(M(b_j))$ no dependen de la elección de los b_j . Además, si $M(b_{j-1})$ tiene cohomología de de Rham de dimensión finita, lo mismo se cumple para $M(b_j)$ por la proposición 11.4, y

$$\chi(M(b_j)) - \chi(M(b_{j-1})) = \sum_{p \in f^{-1}(a_j)} (-1)^{\lambda(p)}$$

donde la suma recorre los puntos críticos asociados al valor a_j y $\lambda(p)$ denota el índice de p . Comenzando con $M(b_0) = \emptyset$, por inducción tenemos que $\dim H^d(M(b_j)) < \infty$ para todo j y todo d . En consecuencia, tenemos

$$\chi(M) = \chi(M(b_k)) - \chi(M(b_0)) = \sum_p (-1)^{\lambda(p)} = \text{Ind}(f)$$

donde p recorre todos los puntos críticos de f . □

El teorema 11.5 forma parte de las conocidas como *desigualdades de Morse*, cuya demostración necesita un estudio algo más detallado de la cohomología de de Rham pero es de dificultad similar (véase [3]). Las desigualdades de Morse afirman que, si c_λ denota el número de puntos críticos de la función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces para todo $k = 0, \dots, m$ se tiene

$$\sum_{\lambda=0}^k (-1)^{k-\lambda} \beta_\lambda(M) \leq \sum_{\lambda=0}^k (-1)^{k-\lambda} c_\lambda$$

donde para $k = m$ se da la igualdad, y se obtiene precisamente el teorema 11.5. En particular, las desigualdades de Morse implican

$$\beta_\lambda(M) \leq c_\lambda$$

para $\lambda = 0, \dots, m$. Hay más resultados de índole similar, como el *principio lacunar de Morse*, que afirma que si la función de Morse no tiene puntos críticos con índices consecutivos, se da la igualdad

$$\beta_\lambda(M) = c_\lambda$$

para todo $\lambda = 0, \dots, m$.

12. CÁLCULO DE LA CARACTERÍSTICA DE EULER MEDIANTE TEORÍA DE MORSE

El objetivo de esta sección es concluir el trabajo con una aplicación de toda la teoría desarrollada: el cálculo de la característica de Euler mediante funciones de Morse. Comenzamos demostrando una consecuencia inmediata del teorema 11.5.

Proposición 12.1. *Si M es una variedad compacta de dimensión impar, entonces*

$$\chi(M) = 0$$

Demostración. Sea m la dimensión de M y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Entonces, $-f$ es una función de Morse con los mismos puntos críticos que f , que denotamos como $\{p_i\}$. Ahora, si para la función f el punto crítico p_i tiene índice λ_i , como la derivada es lineal, por la definición 2.2 el índice de p_i como punto crítico de $-f$ será $m - \lambda_i$. En consecuencia,

$$\text{Ind}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \qquad \text{Ind}(-f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{m-k} c_k$$

y ambos son iguales a $\chi(M)$ por el teorema 11.5. Como m es impar, $m - k$ siempre tendrá paridad opuesta a k , luego tenemos que $\text{Ind}(-f) = -\text{Ind}(f)$ y, en consecuencia,

$$\chi(M) = \text{Ind}(f) = -\text{Ind}(f)$$

de donde concluimos que $\chi(M) = 0$. □

Por otro lado, utilizando la función de Morse de la sección 10 para el toro T , obtenemos fácilmente que $\chi(T) = 0$. Para un toro con g agujeros que denotaremos T_g , vimos también en la sección 10 que sus funciones de Morse poseen $2(g + 1)$ puntos críticos, de los cuales uno es un mínimo con índice 0, otro es un máximo con índice 2, y el resto son puntos de silla con índice 1. Concluimos por tanto la siguiente proposición.

Proposición 12.2. *Si T_g es el toro con g agujeros, entonces*

$$\chi(T_g) = 2(1 - g)$$

Ahora, el objetivo es calcular la característica de Euler de los espacios proyectivos $\mathbb{R}P^n$. Como el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ es equivalente a la esfera \mathbb{S}^n identificando los puntos antipodales, las funciones reales sobre $\mathbb{R}P^n$ son equivalentes a funciones $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con simetría par, es decir, con $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Luego definimos la función $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i^2$$

donde $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y ciertos números reales que cumplen $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Esta función inducirá en el espacio proyectivo otra función $\bar{f}: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$. Para comprobar que es de Morse, calculemos los puntos críticos de f . En primer lugar, tenemos

$$d_x f(v) = 2 \sum_{i=0}^n a_i x_i v_i$$

donde $v = (v_0, \dots, v_n) \in T_x \mathbb{S}^n$, es decir,

$$\sum_{i=0}^n x_i v_i = 0$$

Por tanto, x es un punto crítico de f si y solo si (x_0, \dots, x_n) y $(a_0 x_0, \dots, a_n x_n)$ son linealmente dependientes. Por la elección de los coeficientes a_i , esto solo ocurre cuando $x = e_j = (0, \dots, \pm 1, \dots, 0)$, donde el término ± 1 se encuentra en la posición j . Ahora, debemos

comprobar que son no degenerados. Para los puntos $\pm e_0$, elegimos la parametrización φ_{\pm} en un entorno de $\pm e_0$

$$\varphi_{\pm}(y_1, \dots, y_n) = \left(\pm\sqrt{1 - \|y\|}, y_1, \dots, y_n \right)$$

luego en un entorno de $0 \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$f \circ \varphi_{\pm}(y) = a_0 (1 - \|y\|) + \sum_{i=1}^n a_i y_i = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) y_i^2$$

La hessiana de $f \circ \varphi_{\pm}$ en 0 es $\text{Hess}_0(f \circ \varphi_{\pm}) = \text{diag}(2(a_1 - a_0), \dots, 2(a_n - a_0))$, luego por la elección de los a_i se tiene que $\pm e_0$ son puntos críticos no degenerados con índice 0. El mismo procedimiento sirve para todos los $\pm e_j$, obteniendo que son no degenerados con índice j .

En consecuencia, la función $\bar{f}: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene como puntos críticos la clase $[e_j]$ de los puntos e_j , todos ellos no degenerados con índice j . Por tanto, aplicando el teorema 11.5, hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 12.3. *Si $\mathbb{R}P^n$ denota el espacio proyectivo real n -dimensional, entonces*

$$\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

REFERENCIAS

- [1] J.M. Gamboa y J.M. Ruiz. *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*. Editorial Sanz y Torres, S.L., 2022. [3](#), [6](#)
- [2] E. Outerelo, J.Á. Rojo y J.M. Ruiz. *Topología diferencial: Un curso de iniciación (3ª Edición)*. Editorial Sanz y Torres, S.L., 2023. [3](#), [12](#)
- [3] I.H. Madsen y J. Tornehave. *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes*. Cambridge University Press, 1997. [5](#), [6](#), [35](#)
- [4] P. Cordero Encinar. Cohomología de de Rham en variedades. *Trabajo de Fin de Grado, Universidad Complutense de Madrid*, 2021. URL: <https://blogs.mat.ucm.es/jesusr/wp-content/uploads/sites/52/2021/07/paula.pdf>. [6](#)
- [5] D. Ruiz Cases. El teorema de de Rham. *Trabajo de Fin de Grado, Universidad Complutense de Madrid*, 2022. URL: <https://blogs.mat.ucm.es/jesusr/wp-content/uploads/sites/52/2022/07/diego.pdf>. [6](#)
- [6] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64(2):399–405, 1956. [18](#)
- [7] S. Gonnord y N. Tosel. *Calcul différentiel: thèmes d'analyse pour l'agrégation*. Ellipses, 1998. [22](#)
- [8] E. Outerelo y J.M. Ruiz. *Mapping Degree Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2009.