

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Introducción a la teoría del invariante de Hopf
Introduction to the theory of the Hopf invariant

Supervisor: Jesús María Ruiz Sancho

Samuel M. A. Luque Astorga

Doble grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2023-24

Convocatoria ordinaria de junio

Madrid, 26 de junio de 2024

TRABAJO DE FIN DE GRADO

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL INVARIANTE DE HOPF

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

SAMUEL M. A. LUQUE ASTORGA

RESUMEN. En este trabajo estudiamos los rudimentos de la teoría del invariante de Hopf. En primer lugar, presentamos varios resultados relevantes sobre la teoría de variedades diferenciables: regularidad, aproximación, homotopía, integración y cohomología. A continuación, definimos el *grado de Brouwer-Kronecker* de una aplicación continua mediante cohomología de de Rham y aproximación, y estudiamos algunas de sus propiedades. Más tarde, hacemos lo mismo para el *invariante de Hopf*, y probamos, con esta definición, que es un número entero. También presentamos su definición mediante el *número de enlace* de dos fibras. Con estas herramientas, estudiamos los grupos de cohomotopía de variedades, y, en particular, los grupos de homotopía de las esferas, llegando a demostrar el teorema de Hopf: el grado es el único invariante de homotopía de las aplicaciones continuas sobre esferas. De ahí, pasamos a estudiar los resultados donde el invariante de Hopf es relevante, lo que nos lleva a las fibraciones de Hopf. Calculamos explícitamente el invariante de Hopf de la fibración de Hopf compleja y terminamos el trabajo viendo cómo induce isomorfismos entre los grupos de homotopía de las esferas involucradas.

Palabras clave: variedades diferenciables, grado de Brouwer-Kronecker, invariante de Hopf, número de enlace, grupos de homotopía, teorema de Hopf, fibraciones de Hopf.

ABSTRACT. In this work, we study the rudiments of the Hopf invariant theory. First, we present several relevant results on the theory of smooth manifolds: regularity, approximation, homotopy, integration, and cohomology. Next, we define the *Brouwer-Kronecker degree* of a continuous map using the de Rham cohomology and approximation, and study some of its properties. Later, we do the same for the *Hopf invariant*, and prove, with this definition, that it is an integer. We also present its definition using the *linking number* of two fibers. With these tools, we study the cohomotopy groups of manifolds, and, in particular, the homotopy groups of spheres, ultimately proving Hopf's theorem: the degree is the only homotopy invariant of continuous maps on spheres. From there, we proceed to study the results where the Hopf invariant is relevant, which leads us to Hopf fibrations. We explicitly calculate the Hopf invariant of the complex Hopf fibration and we conclude our work seeing how it induces isomorphisms between the homotopy groups of the involved spheres.

Keywords: smooth manifolds, Brouwer-Kronecker degree, Hopf invariant, linking number, homotopy groups, Hopf theorem, Hopf fibrations.

ÍNDICE

Introducción	1
1. Preliminares	3
2. Integración	6
3. Cohomología de de Rham	9
4. Grado de una aplicación diferenciable	10
5. Definición integral del invariante de Hopf	16
6. El invariante es un número entero	19
7. Definición del invariante de Hopf mediante el número de enlace	21
8. Aplicaciones en el estudio de la homotopía de las esferas	23
9. Fibraciones de Hopf. Cálculos en dimensión dos	31
Referencias	39

INTRODUCCIÓN

Los orígenes de la teoría del *invariante de Hopf* se remontan a 1931, cuando fue introducido por H. Hopf, [Hopf31], para distinguir infinitas clases de homotopía de aplicaciones $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Hopf logró esto originalmente mediante técnicas de topología combinatoria. Unos años después, en [Hopf35], extendió su definición y sus resultados a aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con $m \geq 2$: el invariante de Hopf es un número entero asociado a cada clase de homotopía de aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$. Consiguió, así, un análogo al *grado de Brouwer-Kronecker*, que solo tiene sentido para aplicaciones entre variedades de la misma dimensión.

En 1947, en [Wh47], Whitehead encontró una fórmula integral para el invariante de Hopf de aplicaciones $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, que puede generalizarse también a aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$, y es el punto de vista principal que adoptamos nosotros. A lo largo del trabajo, introducimos el invariante de Hopf mediante esta fórmula integral y exploramos sus propiedades básicas: que dos aplicaciones homótopas tienen el mismo invariante de Hopf, que el invariante de Hopf de cualquier aplicación es 0 cuando m es impar y, finalmente, que el invariante siempre es un número entero.

Asimismo, probamos una fórmula multiplicativa que involucra el invariante de Hopf y el grado de Brouwer-Kronecker. Mediante el uso de esta fórmula, obtendremos resultados relevantes sobre el invariante de Hopf usando las propiedades del grado de Brouwer-Kronecker. Es por esta razón que también desarrollamos con cierto detalle la teoría del grado de Brouwer-Kronecker, que, además, será de utilidad para completar algunos enunciados en las secciones finales.

Las aplicaciones de la teoría del invariante de Hopf son muy diversas. Las más inmediatas, por supuesto, están relacionadas con el estudio de las clases de homotopía de aplicaciones

$\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$, o, en otras palabras, del *grupo de homotopía* $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. De hecho, como consecuencia de la fórmula multiplicativa anteriormente mencionada, veremos que siempre que exista una aplicación $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con invariante de Hopf h , existirán aplicaciones de invariante de Hopf nh para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular, el grupo de homotopía $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$ será infinito cuando exista una aplicación $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con invariante de Hopf no nulo.

Sin embargo, el resultado más renombrado en torno a la teoría del invariante de Hopf, seguramente, es que existen aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con invariante de Hopf igual a 1 solo para $m = 2, 4, 8$. Este hecho es un teorema profundo de Adams (véase [Ad60]), que tiene una serie de consecuencias muy interesantes, como:

- \mathbb{R}^m es un álgebra real normada solo para $m = 1, 2, 4, 8$ (correspondiente, respectivamente, a los números reales, los números complejos, los cuaterniones y los octoniones).
- \mathbb{R}^m es un álgebra de división solo para $m = 1, 2, 4, 8$ (ídem).
- \mathbb{S}^{m-1} es paralelizable solo para $m = 1, 2, 4, 8$.
- \mathbb{S}^{m-1} admite un producto continuo con unidad solo para $m = 1, 2, 4, 8$.
- Los únicos fibrados $\mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^r$ son las fibrationes de Hopf.

Además, para m par, siempre existen aplicaciones con invariante igual a 2. Sin embargo, de nuevo, este resultado escapa a nuestro alcance, y puede consultarse en [Hus]. En resumen, la situación general es la siguiente:

- Si m es impar, todas las aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ tienen invariante de Hopf 0.
- Si m es par, existen aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con invariante de Hopf 2 (luego con invariante de Hopf h para cualquier h par).
- Si $m = 2, 4, 8$, y solo si $m = 2, 4, 8$, existen aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con invariante de Hopf 1 (luego con invariante de Hopf h para cualquier h entero).

En particular, $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$ es infinito para todo m par. En la sección 9, probaremos que, de hecho, el invariante de Hopf caracteriza las clases de homotopía de aplicaciones $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, aunque resulta que esto no es así en el resto de dimensiones. Todo esto constituye una pequeña parte del gran problema abierto de calcular grupos de homotopía de esferas, un área muy extensa que va mucho más allá de nuestras pretensiones.

El invariante de Hopf también admite una definición mediante lo que se conoce como *número de enlace*, que le da una interpretación geométrica. Dicha definición también se presentará en este trabajo, junto con algunos comentarios sobre la equivalencia de las definiciones. Es interesante remarcar que existen algunas aplicaciones más extravagantes de la teoría del invariante de Hopf, surgidas precisamente de su interpretación como número de enlace y de la equivalencia entre definiciones. Una de ellas, en física; más concretamente, en hidrodinámica y magnetismo, donde el invariante se interpreta como la *helicidad* de un campo vectorial, ya sea el campo de velocidades en un fluido o un campo magnético clásico. Consúltese [ArK] para una exposición detallada.

1. PRELIMINARES

En este trabajo, *diferenciable* equivale a *de clase infinito*. Reservamos la palabra *función* para las aplicaciones cuyo codominio es \mathbb{R} . A lo largo del texto, los símbolos M y N denotarán variedades diferenciables conexas (posiblemente con borde) de dimensiones m y n , respectivamente. Usamos libremente los fundamentos de la teoría de variedades diferenciables según se exponen en [GRz]. En concreto, también supondremos que son Hausdorff y cumplen el segundo axioma de numerabilidad.

En esta primera sección, presentamos una serie de resultados preliminares que nos serán de utilidad durante el trabajo, pero cuya demostración, por motivo de selección de contenidos (no de dificultad), relegamos a las referencias. Primero, destacamos un teorema importante:

Teorema de inversión local 1.1. *Sean M y N variedades sin borde. Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo local en $x \in M$ si y solo si $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ es un isomorfismo.*

(1.2) Valores regulares. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Un *punto crítico* de f es un punto $x \in M$ para el cual la derivada $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ no es sobreyectiva. Los puntos críticos forman un conjunto cerrado, C_f , lo cual se desprende de escribir la condición anterior en la derivada mediante ecuaciones que involucran el determinante jacobiano de una localización de f . Los puntos que no son críticos de f se llaman *puntos regulares*, y forman un conjunto abierto.

Por otro lado, un punto $a \in N$ se llama *valor crítico* de f si existe algún punto crítico $x \in f^{-1}(a)$. En consecuencia, el conjunto de valores críticos de f es $f(C_f) \subseteq N$. Si $a \in N$ no es un valor crítico, decimos que es un *valor regular* de f . Denotamos por $R_f = N \setminus f(C_f)$ al conjunto de valores regulares de f . Nótese que en el caso $\dim(M) < \dim(N)$, se tiene que $C_f = M$ y $R_f = N \setminus f(M)$.

Nótese que, en general, R_f no es abierto, pues $f(C_f)$ no tiene por qué ser cerrado. A menudo trabajaremos con aplicaciones $f : M \rightarrow N$ propias, que son cerradas por ser N Hausdorff y localmente compacta. En tal caso, $f(C_f)$ es cerrado, luego R_f es abierto.

Los valores regulares son de especial interés al estudiar imágenes inversas de variedades, como ilustra el siguiente teorema (ver [ORRz] II.1):

Teorema 1.3. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, M sin borde, y $P \subseteq R_f$ una subvariedad de N de codimensión k . Entonces:*

- (1) $f^{-1}(P)$ es una subvariedad de M de codimensión k con borde $\partial f^{-1}(P) = f^{-1}(\partial P)$.
- (2) $T_x f^{-1}(P) = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)} P)$ para cada $x \in f^{-1}(P)$.

En particular, la imagen inversa de un valor regular a es una variedad sin borde de dimensión $m - n$ con $T_x f^{-1}(a) = \ker d_x f$ para todo $x \in f^{-1}(a)$.

Será de particular utilidad el teorema de Sard-Brown, que afirma que siempre existen valores regulares (ver [ORz]):

Teorema de Sard-Brown 1.4. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Entonces, el conjunto R_f de valores regulares de f es residual (contiene una intersección numerable de abiertos densos), luego denso, en N .*

En particular, si $\dim(M) < \dim(N)$, entonces $N \setminus f(M)$ es residual, luego denso, en N .

Esta última afirmación se conoce como el *teorema de Sard fácil*.

Por último, el teorema de la fibración de Ehresmann, demostrado de forma elemental en [GRz], que afirma que el comportamiento de las aplicaciones sin puntos críticos es localmente trivial:

Teorema de la fibración de Ehresmann 1.5. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable propia tal que $d_x f$ es suprayectiva para todo $x \in M$. Entonces, cada $a \in N$ tiene un entorno abierto $U \subseteq N$ que cumple lo siguiente:*

- (1) *Existe un difeomorfismo $h : f^{-1}(a) \times U \rightarrow f^{-1}(U)$*
- (2) *El siguiente diagrama conmuta, siendo π_U la proyección sobre U :*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(a) \times U & \xrightarrow[\approx]{h} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow f \\ & U & \end{array}$$

(1.6) Homotopía. Como es bien conocido, una *homotopía (continua)* es una aplicación continua $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$, $(t, x) \mapsto H_t(x)$. Dos aplicaciones $f, g : M \rightarrow N$ se dicen *homótopas* si existe una homotopía H con $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Esto es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas $M \rightarrow N$, cuyo conjunto cociente se denota por $[M, N]$. Otra notación habitual es la siguiente: el *k -ésimo grupo de homotopía* de N es $\pi_k(N) = [\mathbb{S}^k, N]$, mientras que el *k -ésimo grupo de cohomotopía* de M es $\pi^k(M) = [M, \mathbb{S}^k]$. No nos preocuparemos, en este texto, de la operación de grupo, a cuyo efecto se puede consultar [Hat].

En el caso de aplicaciones propias, se consideran homotopías propias: dos aplicaciones propias son *propiamente homótopas* si son homótopas mediante una homotopía propia.

Dos resultados esenciales para nuestro estudio son los siguientes (ver [ORz]):

Proposición 1.7. *Sean M y N variedades diferenciables, N sin borde. Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación continua (propia), entonces existe una aplicación diferenciable (propia) $g : M \rightarrow N$ que es (propiamente) homótopa a f .*

Proposición 1.8. *Sean M y N variedades diferenciables, N sin borde. Si dos aplicaciones diferenciables $f, g : M \rightarrow N$ son (propiamente) homótopas, entonces lo son mediante una homotopía (propia) diferenciable.*

(1.9) Difeotopías. Una característica importante de las variedades diferenciables es la *homogeneidad*, que es la propiedad de que los puntos se pueden mover a conveniencia.

Definición 1.10. Sea M una variedad. Una difeotopía en M es una homotopía diferenciable $F : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tal que $F_0 = \text{Id}_M$ y todas las aplicaciones F_t , $0 \leq t \leq 1$, son difeomorfismos de M . Se dice que F une cada par de puntos $x \in M$ y $F_1(x)$.

El resultado fundamental sobre difeotopías es el siguiente, que, de nuevo, se puede consultar en [ORz]:

Teorema 1.11. Sea M una variedad sin borde de dimensión $m \geq 2$. Sean a_1, \dots, a_p y b_1, \dots, b_p dos colecciones de puntos en M , y sea A un abierto conexo que contenga a todos. Entonces, existe una difeotopía que une a_k y b_k para todo $k = 1, \dots, p$, y que es la identidad fuera de un compacto $K \subseteq A$.

El teorema también es cierto para $m = 1$ cuando $p = 1$. Para $M = \mathbb{R}$, el inconveniente esencial es que cualquier difeomorfismo es creciente o decreciente, lo cual implica que las dos colecciones de puntos deben estar ordenadas en el mismo (u opuesto) orden, exactamente. De ser así, es fácil producir una difeotopía que los una.

(1.12) Orientación. Una *orientación* ζ en un espacio vectorial E de dimensión finita $m \geq 1$ es una elección de una base $B = \{u_1, \dots, u_m\}$, siendo dos bases equivalentes cuando el determinante de la matriz de cambio entre ellas es positivo; denotamos $\zeta = [u_1, \dots, u_m]$ y decimos que B es una *base positiva* en ζ . Hay dos orientaciones, que se denotan por ζ y $-\zeta$ y se dicen *opuestas*. En $E = \mathbb{R}^m$ hay una *orientación canónica* $\zeta^{(m)}$, que corresponde a la base canónica $\{e_1, \dots, e_m\}$. Los dos primeros ejemplos de esto son bien conocidos: en \mathbb{R}^2 , la orientación antihoraria; en \mathbb{R}^3 , la orientación dada por la *regla del sacacorchos*.

Para una variedad M de dimensión m , una *orientación en M* es una colección $\zeta_M = \{\zeta_x : x \in M\}$ de orientaciones ζ_x en cada espacio tangente $T_x M$, de manera que cada punto $a \in M$ tiene un sistema de coordenadas \mathbf{x} en cuyo dominio U

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \Big|_x \right] = \zeta_x \quad \text{para cada } x \in U.$$

Cuando se tiene esta condición, el sistema de coordenadas —y la correspondiente parametrización— se dicen *compatibles con la orientación*.

En una variedad conexa orientable M , la elección de una orientación ζ_a en el espacio tangente a un punto a determina las orientaciones ζ_x para el resto de $x \in M$. En particular, M únicamente tiene dos orientaciones.

En efecto: sean ζ y $\tilde{\zeta}$ son dos orientaciones de M que coinciden en un punto a , y llamemos $A = \{x \in M : \zeta_x = \tilde{\zeta}_x\}$. Sea $x \in A$ y tómnense \mathbf{x} y $\tilde{\mathbf{x}}$ dos sistemas de coordenadas compatibles, respectivamente, con ζ y $\tilde{\zeta}$, cuyos dominios, U y \tilde{U} , contienen ambos a x . Podemos suponer \tilde{U} conexo y contenido en U . El determinante jacobiano del cambio de coordenadas es positivo en x , luego positivo en todo \tilde{U} , así que $\tilde{U} \subseteq A$, concluyéndose que A es abierto. Se puede demostrar de forma análoga que $M \setminus A$ es abierto. Como M es conexa, A solo puede ser el vacío o toda M ; pero $a \in A$, así que $A = M$.

Observaciones 1.13. (1) Supongamos que M está orientada y consideremos un punto $a \in \partial M$. El espacio tangente $T_a(\partial M)$ es un hiperplano de $T_a M$, y mediante un sistema

de coordenadas $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{H}^m$ con $\mathbf{x}_1 \geq 0$ que cubre a a , obtenemos el isomorfismo lineal

$$d_a \mathbf{x} : u \mapsto t = (t_1, \dots, t_m)$$

del par $T_a(\partial M) \subseteq T_a M$ sobre el par $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$. Así, de entre los vectores tangentes a M en a que no son tangentes a ∂M se distinguen los *salientes*, esto es, aquellos que corresponden a $t_1 < 0$; y los *entrantes*, es decir, aquellos que corresponden a $t_1 > 0$. Esta definición no depende de la parametrización elegida (ver [GRz]) y permite definir una orientación $\partial\zeta_a$ en $T_a(\partial M)$ como sigue: $\partial\zeta_a$ es la que resulta de escoger una base u_2, \dots, u_m de $T_a(\partial M)$ tal que para un vector saliente $u_1 \in T_a M \setminus T_a(\partial M)$ la base u_1, u_2, \dots, u_m es positiva para ζ_a .

(2) El producto $M \times N$ de variedades orientadas M, N está orientado según la yuxtaposición de orientaciones $\zeta_M \oplus \zeta_N$, esto es, en cada punto $(a, b) \in M \times N$ mediante cualquier base $(u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n)$ de $T_{(a,b)}(M \times N) \cong T_a M \times T_b N$ obtenida concatenando bases positivas u_1, \dots, u_m y v_1, \dots, v_n de $T_a M$ y $T_b N$ respectivamente. Además, para cada $b \in N$, $M \times \{b\}$ se identifica naturalmente con M y está orientada de la misma forma que M .

(3) Pongámonos en la situación del teorema 1.3: una aplicación $f : M \rightarrow N$, M sin borde, $P \subseteq N$ una subvariedad de N de codimensión k . Supongamos, adicionalmente, orientaciones ζ_M, ζ_N y ζ_P en las tres variedades anteriores. Nuestro objetivo es definir una orientación $\zeta_{f^{-1}(P)}$ en $f^{-1}(P)$.

Sea $x \in f^{-1}(P)$. Sea E un complemento lineal de $T_x f^{-1}(P) = d_x f^{-1}(T_{f(x)} P)$ en $T_x M$, esto es, de forma que $T_x M = T_x f^{-1}(P) \oplus E$. Nótese que $d_x f|_E$ es un isomorfismo lineal entre E y $F = d_x f(E)$, y que, a su vez, F es un complemento lineal de $T_{f(x)} P$ en $T_{f(x)} N$. Sea ζ_F la orientación de F tal que $(\zeta_P)_{f(x)} \oplus \zeta_F = (\zeta_N)_{f(x)}$. El isomorfismo $d_x f|_E$ induce una orientación ζ_E en E a partir de ζ_F . Por último, sea $(\zeta_{f^{-1}(P)})_x$ la orientación de $T_x f^{-1}(P)$ tal que $(\zeta_{f^{-1}(P)})_x \oplus \zeta_E = (\zeta_M)_x$. Este procedimiento da una orientación en $f^{-1}(P)$ que solo depende de las orientaciones de M, N y P y de la aplicación f (ver [ORRz]). El diagrama siguiente resume la situación:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{d_x f} & \\ & \simeq & \\ T_x M = T_x f^{-1}(P) \oplus E^k & \xrightarrow{d_x f} & T_{f(x)} P \oplus F^k = T_{f(x)} N \\ & \swarrow \text{vía } d_x f & \\ (\zeta_M)_x = (\zeta_{f^{-1}(P)})_x \oplus \zeta_E & & (\zeta_P)_{f(x)} \oplus \zeta_F = (\zeta_N)_{f(x)} \end{array}$$

2. INTEGRACIÓN

Dedicamos esta breve sección a comentar dos resultados fundamentales en nuestro estudio. El primero de ellos es el teorema de Stokes:

Teorema de Stokes 2.1. *Sea M una variedad diferenciable orientada y ∂M orientada con la orientación inducida. Entonces,*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

para cada forma diferencial ω de grado $m - 1$ con soporte compacto en M .

A continuación, veremos una versión particular del teorema de Fubini para integrales de formas en variedades. Para su demostración, necesitaremos dos teoremas clásicos de integración:

Teorema de Fubini 2.2. *Sea $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que la integral $\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} |f|$ es finita. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx.$$

Teorema de Leibniz 2.3. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable de soporte compacto. Entonces,*

$$I \ni t \mapsto \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, t) dx$$

es diferenciable.

Ahora sí, terminamos la sección con el teorema de Fubini que mencionamos antes.

Proposición 2.4. *Sean M y N variedades orientadas, sin borde, de dimensiones m y n , respectivamente. Consideramos el producto $M \times N$ y la proyección $\pi : M \times N \rightarrow N$. Sean $\alpha \in \Gamma_c^m(M \times N)$ y $\omega \in \Gamma_c^n(N)$. La función*

$$N \ni b \mapsto \int_{M \times \{b\}} \alpha|_{M \times \{b\}} \in \mathbb{R} \quad (1)$$

es diferenciable y

$$\int_{M \times N} \alpha \wedge \pi^* \omega = \int_N \left(\int_{M \times \{\bullet\}} \alpha|_{M \times \{\bullet\}} \right) \omega.$$

Demostración. Para cada $b \in N$, la forma $\alpha|_{M \times \{b\}}$ tiene soporte compacto: $\text{supp}(\alpha|_{M \times \{b\}})$ (cerrado) está contenido en $\text{supp}(\alpha) \cap (M \times \{b\})$, que es compacto por ser $M \times \{b\}$ cerrado.

Escojamos un conjunto finito de dominios de coordenadas $\{U_i\}_{i=1}^r$ en M y $\{V_j\}_{j=1}^s$ en N , con parametrizaciones respectivas $\{\varphi_i\}_{i=1}^r$ y $\{\psi_j\}_{j=1}^s$, de forma que el soporte de α quede recubierto por $W = \bigcup_{i,j} (U_i \times V_j)$ y tales que sus sistemas de coordenadas sean compatibles con la orientación. Sean, también, $\{\theta_i\}_{i=1}^r$ y $\{\xi_j\}_{j=1}^s$ particiones diferenciables de la unidad en $\bigcup_i U_i$ y $\bigcup_j V_j$, respectivamente, subordinadas a dichos dominios de coordenadas.

En primer lugar, el conjunto de funciones $\{\theta_i \xi_j : W \rightarrow [0, 1]\}_{i,j}$ definidas por $\theta_i \xi_j(a, b) = \theta_i(a) \xi_j(b)$ es una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{U_i \times V_j\}_{i,j}$:

1. Como $\overline{\{\theta_i \neq 0\}} \subseteq U_i$ y $\overline{\{\xi_j \neq 0\}} \subseteq V_j$, entonces,

$$\overline{\{\theta_i \xi_j \neq 0\}} \subseteq \overline{\{\theta_i \neq 0\}} \times \overline{\{\xi_j \neq 0\}} \subseteq U_i \times V_j.$$

2. La partición es finita, luego localmente finita.

3. Para $(a, b) \in W$,

$$\sum_{i,j} \theta_i \xi_j(a, b) = \left(\sum_i \theta_i(a) \right) \left(\sum_j \xi_j(b) \right) = 1.$$

Ahora, veamos que (1) es una asignación diferenciable. Nótese que $\text{supp}(\alpha|_{M \times \{b\}})$ está contenido en $\bigcup_i (U_i \times \{b\})$, por lo que

$$\int_{M \times \{b\}} \alpha|_{M \times \{b\}} = \sum_{i=1}^r \int_{\varphi_i^{-1}(U_i \times \{b\})} \varphi_i^*(\theta_i \alpha|_{M \times \{b\}}),$$

donde se ha cometido el abuso de identificar $U_i \times \{b\} \equiv U_i$. Con esto, basta demostrar la diferenciable de cada sumando (esto es, el caso $M = \mathbb{R}^m$). Además, podemos suponer $N = \mathbb{R}^n$, pues la diferenciable es una cuestión local. Si $\alpha \in \Gamma_c^m(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, escribamos $\alpha = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m + \cdots$. Se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \{y\}} \alpha|_{\mathbb{R}^m \times \{y\}} = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx,$$

que es diferenciable por el teorema de Leibniz 2.3.

Para probar la segunda parte del teorema, empecemos por su versión local: primero, supongamos $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$. En tal caso, escribimos $\alpha = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m + \cdots$, $\omega = g dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, y, por tanto, $\pi^* \omega = g dx_{m+1} \wedge \cdots \wedge dx_{m+n}$. Denotando $x = (x_1, \dots, x_m)$ e $y = (x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$ y aplicando el teorema de Fubini 2.2:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} \alpha \wedge \pi^* \omega &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dx_{m+1} \wedge \cdots \wedge dx_{m+n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m \times \{\bullet\}} \alpha|_{\mathbb{R}^m \times \{\bullet\}} \right) \omega. \end{aligned}$$

Para el caso general, tenemos en cuenta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_i^{-1}(U_i) \times \psi_j^{-1}(V_j) & \xrightarrow[\approx]{\varphi_i \times \psi_j} & U_i \times V_j & \hookrightarrow & M \times N \\ p_j \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \psi_j^{-1}(V_j) & \xrightarrow[\approx]{\psi_j} & V_j & \hookrightarrow & N \end{array}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} \alpha \wedge \pi^* \omega &= \sum_{i,j} \int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \psi_j^{-1}(V_j)} (\varphi_i \times \psi_j)^*(\theta_i \xi_j(\alpha \wedge \pi^* \omega)) \\ &= \sum_{i,j} \int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \psi_j^{-1}(V_j)} (\varphi_i \times \psi_j)^*((\theta_i \alpha) \wedge \pi^*(\xi_j \omega)) \\ &= \sum_{i,j} \int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \psi_j^{-1}(V_j)} (\varphi_i \times \psi_j)^*(\theta_i \alpha) \wedge (p_j^* \psi_j^*(\xi_j \omega)) \\ \text{(versión local)} &= \sum_{i,j} \int_{\psi_j^{-1}(V_j)} \left(\int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \{\bullet\}} ((\varphi_i \times \psi_j)^*(\theta_i \alpha))|_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \{\bullet\}} \right) \psi_j^*(\xi_j \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{i,j} \int_{\psi_j^{-1}(V_j)} \psi_j^* \left(\left(\int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \{\bullet\}} \varphi_i^*(\theta_i \alpha|_{M \times \{\bullet\}}) \right) \xi_j \omega \right) \\
&= \sum_j \int_{\psi_j^{-1}(V_j)} \psi_j^* \left(\xi_j \left(\sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \{\bullet\}} \varphi_i^*(\theta_i \alpha|_{M \times \{\bullet\}}) \right) \omega \right) \\
&= \sum_j \int_{\psi_j^{-1}(V_j)} \psi_j^* \left(\xi_j \left(\int_{M \times \{\bullet\}} \alpha|_{M \times \{\bullet\}} \right) \omega \right) \\
&= \int_N \left(\int_{M \times \{\bullet\}} \alpha|_{M \times \{\bullet\}} \right) \omega.
\end{aligned}$$

Para el paso (*), escogemos $y \in \psi_j^{-1}(V_j)$ y definimos las inclusiones $J_y : \varphi_i^{-1}(U_i) \rightarrow \varphi_i^{-1}(U_i) \times \{y\} \subseteq \varphi_i^{-1}(U_i) \times \psi_j^{-1}(V_j)$ y $\mathbf{1}_{\psi_j(y)} : U_i \rightarrow U_i \times \{\psi_j(y)\} \subseteq U_i \times V_j$. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_i^{-1}(U_i) \times \psi_j^{-1}(V_j) & \xrightarrow{\varphi_i \times \psi_j} & U_i \times V_j \\
\uparrow J_y & & \uparrow \mathbf{1}_{\psi_j(y)} \\
\varphi_i^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i
\end{array}$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \{\psi_j(y)\}} \varphi_i^*(\theta_i \alpha|_{M \times \{\psi_j(y)\}}) &= \int_{\varphi_i^{-1}(U_i)} \varphi_i^*(\mathbf{1}_{\psi_j(y)}^*(\theta_i \alpha)) = \int_{\varphi_i^{-1}(U_i)} J_y^*(\varphi_i \times \psi_j)^*(\theta_i \alpha) \\
&= \int_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \{\bullet\}} ((\varphi_i \times \psi_j)^*(\theta_i \alpha))|_{\varphi_i^{-1}(U_i) \times \{\bullet\}}.
\end{aligned}$$

□

3. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

Para definir los invariantes de homotopía que nos interesan (grado de Brouwer-Kronecker e invariante de Hopf), son necesarias unas nociones básicas de cohomología, que presentamos a continuación. Recomendamos consultar el TFG [Cor] para una exposición más detallada.

(3.1) Formas y cohomología de de Rham con soporte compacto. Supongamos que M no tiene borde y está orientada. Denotamos por $\Gamma_c^k(M)$ al espacio vectorial de todas las formas diferenciales de grado k con soporte compacto en M . Obsérvese que si una k -forma ω se anula en un abierto, también lo hará su diferencial $d\omega$, por lo que $\text{supp}(d\omega) \subseteq \text{supp}(\omega)$. En particular, si $\omega \in \Gamma_c^k(M)$, entonces $d\omega \in \Gamma_c^{k+1}(M)$. El recíproco no es cierto (tómese, en $M = \mathbb{R}$, $d\omega = f(x)dx$, con f una función meseta). En todo caso, podemos restringir el operador diferencial exterior a $\Gamma_c^k(M)$, obteniéndose el siguiente complejo de cocadenas:

$$0 \longrightarrow \Gamma_c^0(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Gamma_c^k(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Gamma_c^m(M) \xrightarrow{d} 0.$$

Llamamos $Z_c^k(M) = \ker d$ al espacio de k -formas cerradas con soporte compacto y $B_c^k(M) = \text{im } d$ al espacio de k -formas con primitiva de soporte compacto (nótese que, por el contraejemplo de antes, este espacio no incluye a todas las k -formas exactas con soporte

compacto). Se dice que

$$H_c^k(M, \mathbb{R}) = \frac{Z_c^k(M)}{B_c^k(M)} = \frac{\{k\text{-formas cerradas con soporte compacto}\}}{\{k\text{-formas con primitiva de soporte compacto}\}}$$

es el k -ésimo grupo de cohomología de de Rham con soporte compacto. Por último, si la variedad M es compacta, podemos prescindir de todas las referencias al soporte compacto y del subíndice c en todo lo anterior.

(3.2) Homomorfismos inducidos en cohomología. Cada aplicación diferenciable propia $f : M \rightarrow N$ entre variedades sin borde induce una aplicación lineal

$$f^* : \Gamma_c^k(N) \rightarrow \Gamma_c^k(M), \quad \omega \mapsto f^*\omega.$$

En efecto, como $\text{supp}(\omega)$ es compacto y f , propia, $f^{-1}(\text{supp}(\omega))$ es compacto. Además, $\text{supp}(f^*\omega)$ es cerrado y está contenido en $f^{-1}(\text{supp}(\omega))$, así que es compacto.

Esta f^* es compatible con todas las operaciones con formas, incluida la diferenciación exterior, así que también induce homomorfismos entre los grupos de cohomología, que, del mismo modo, denotamos por f^* .

(3.3) Algunas cohomologías importantes. Principalmente, nos interesa la cohomología de las esferas. Por argumentos que no veremos aquí, es:

$$H^k(\mathbb{S}^m) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, m, \\ 0, & \text{si } k \neq 0, m. \end{cases}$$

Por último, nos será útil el siguiente teorema, que es consecuencia de que M y $M \times [0, 1]$ tienen el mismo tipo de homotopía propia:

Teorema 3.4. *Los grupos de cohomología $H_c^k(M)$ y $H_c^k(M \times [0, 1])$ son isomorfos.*

4. GRADO DE UNA APLICACIÓN DIFERENCIABLE

En esta sección, se presenta la definición del grado de Brouwer-Kronecker de una aplicación diferenciable en términos de formas diferenciales e integración.

Para empezar, introducimos el *signo* de una aplicación diferenciable:

(4.1) Signo de una aplicación diferenciable. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación entre variedades orientadas de la misma dimensión. Sea $x \in M$ un punto regular de f , de forma que $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ es un isomorfismo lineal. Se dice que f *preserva* (resp., *invierte*) la orientación en $x \in M$ si $d_x f$ transforma bases positivas de $T_x M$ en bases positivas (resp., negativas) de $T_{f(x)} N$. Escribimos

$$\text{sign}_x(f) = +1 \quad (\text{resp., } -1)$$

y lo llamamos el *signo* de f en x . El signo se puede calcular fácilmente mediante el signo del determinante jacobiano de una localización de f . En particular, es localmente constante, luego constante en cada componente conexa de $M \setminus C_f$.

Nos centraremos en el grupo $H_c^m(M, \mathbb{R})$, que se puede describir mediante integración cuando M está orientada y no tiene borde.

Proposición 4.2 (Teorema de Stokes recíproco). *Sea M una variedad conexa, orientada y sin borde. La aplicación lineal*

$$\int_M : H_c^m(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

es un isomorfismo.

Demostración. Está bien definida como consecuencia del teorema de Stokes 2.1: si $[\omega] = [\omega']$, se tiene que $\omega - \omega' = d\alpha$ para alguna α con soporte compacto, luego

$$\int_M \omega - \int_M \omega' = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0,$$

pues M no tiene borde.

Por las propiedades de la integral, esta aplicación es una forma lineal. Es no nula: tomando un dominio de coordenadas $V \approx \mathbb{R}^m$ podemos llevar a V la m -forma

$$f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

con $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ una función meseta con soporte compacto. Esta construcción nos permite extender por cero a toda M la forma inducida en V , llamemos ω a dicha extensión. Su integral es $\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^m} f \neq 0$.

Ahora, demostrar el teorema es equivalente a demostrar que la clase de cohomología $[\alpha]$ de cualquier $\alpha \in \Gamma_c^m(M)$ es proporcional a ω , esto es, que la dimensión de $H_c^m(M, \mathbb{R})$ es 1. Una primera reducción es que podemos suponer el soporte de α contenido también en un dominio de coordenadas difeomorfo a \mathbb{R}^m . Para ello, recubrimos M con abiertos de ese tipo y, mediante una partición de la unidad $\{\theta_i\}$ subordinada al recubrimiento, escribimos $\alpha = \sum_{i=1}^r \theta_i \alpha$, de forma que el soporte de cada sumando está contenido en un abierto del recubrimiento elegido (la suma es finita porque el soporte de α es compacto). Así, para mostrar que $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega]$, basta probar que cada $[\theta_i \alpha]$ lo es.

También podemos suponer que el soporte de α está contenido en V . En efecto, puesto que M es conexa, existe una cadena $U_0, \dots, U_r = V$ de abiertos difeomorfos a \mathbb{R}^m con el soporte de α contenido en U_0 y $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$. Para cada $i = 1, \dots, r$, sea $\omega_i \in \Gamma_c^m(M)$ con integral no nula y soporte contenido en $U_{i-1} \cap U_i$. Si la proporcionalidad se cumple para formas con soportes en el mismo abierto difeomorfo a \mathbb{R}^m , resulta que $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega_1]$, que lo es a $[\omega_2]$, \dots , que lo es a $[\omega_r]$, que lo es a $[\omega]$.

Con todo esto y mediante un difeomorfismo $V \rightarrow \mathbb{R}^m$, supondremos que $M = \mathbb{R}^m$. Buscamos un escalar c tal que $\alpha - c\omega$ tenga una primitiva con soporte compacto. Pero

$$\alpha - c\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

donde f es una función con soporte compacto e integral nula. Decir que $\alpha - c\omega$ es exacta equivale a encontrar un campo X con soporte compacto para el cual $f = \text{div}(X)$, en cuyo caso $\det(X, \bullet)$ es la primitiva buscada.

Probaremos por inducción sobre $n \leq m$ lo siguiente:

Sea $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ con soporte compacto. Denotamos $x = (y, z)$ con $y = (x_1, \dots, x_n)$, $z = (x_{n+1}, \dots, x_m)$, y suponemos que $\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy = 0$. Entonces

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$$

para n funciones con soporte compacto X_1, \dots, X_n .

Para $n = 1$, basta tomar

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, z) dt,$$

cuyo soporte es compacto: si x_1 es suficientemente pequeño, el integrando es cero. Si $\|z\|$ es suficientemente grande, el integrando es nuevamente cero. Si x_1 es suficientemente grande,

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, z) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) dt = 0.$$

Para $n \geq 2$, denotamos $y' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, de manera que $x = (y', x_n, z)$. Sea $\varphi(y')$ con soporte compacto e integral $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y') dy' = 1$, y definamos:

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad h(x) = \varphi(y') \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, x_n, z) du.$$

La función g tiene soporte compacto, por tenerlo f y φ , y además $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y', x_n, z) dy' = 0$ por construcción. La hipótesis de inducción aplicada a g implica que existen $n-1$ funciones con soporte compacto $X_1(x), \dots, X_{n-1}(x)$ tales que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x).$$

Por otro lado, podemos escribir $h(x) = \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x)$, siendo

$$X_n(x) = \varphi(y') \int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt,$$

que tiene soporte compacto:

1. Si $\|y'\|$ es suficientemente grande, $\varphi(y') = 0$;
2. si $\|z\|$ es suficientemente grande o x_n suficientemente pequeño, se tiene $f(u, t, z) = 0$ dentro de la integral; y,
3. si x_n es suficientemente grande,

$$\int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy = 0.$$

En conclusión, las funciones X_1, \dots, X_n tienen soporte compacto y

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x).$$

□

Sean M y N dos variedades conexas, orientadas y sin borde. En el caso de que tengan la misma dimensión m , el isomorfismo anterior da el siguiente diagrama conmutativo de aplicaciones lineales:

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(N, \mathbb{R}) & \xrightarrow{f^*} & H_c^m(M, \mathbb{R}) \\ f_N \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow f_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{R} \end{array} \quad (2)$$

El resultado principal sobre grado y cohomología es el que se presenta a continuación, y afirma que la aplicación λ del diagrama es la multiplicación por algún número entero d al que llamamos *grado* de la aplicación f .

Teorema y definición 4.3. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable propia entre variedades conexas, orientadas y sin borde de la misma dimensión m . Entonces, existe un número entero d tal que*

$$\int_M f^* \omega = d \cdot \int_N \omega$$

para cada m -forma con soporte compacto en N . Además, para cualquier valor regular $a \in N$ de f , se tiene

$$d = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f) \quad (0 \text{ si } f^{-1}(a) = \emptyset).$$

Llamamos *grado de Brouwer-Kronecker* (o simplemente *grado*) de f al entero d , y lo denotamos por $\deg(f)$.

Demostración. La aplicación lineal λ del diagrama 2 es la multiplicación por un número real δ , y la conmutatividad del diagrama es equivalente a la ecuación

$$\int_M f^* \omega = \delta \cdot \int_N \omega$$

para cada m -forma ω con soporte compacto en N . El teorema de Sard 1.4 nos permite escoger un valor regular a de f , y la demostración habrá concluido una vez probemos que

$$\delta = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f).$$

En particular, será suficiente demostrar que

$$\int_M f^* \omega = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f) \int_N \omega \quad (3)$$

para una ω conveniente (con $\int_N \omega \neq 0$) que determinaremos ahora.

Primero, como M y N comparten dimensión y a es un valor regular, el teorema de inversión local 1.1 garantiza que la imagen inversa de a es discreta. También es compacta por ser f propia. Por tanto, es finita, pongamos $f^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_r\}$, suponiendo primero $r > 0$. De hecho, existe un entorno abierto V de a en N y r entornos abiertos disjuntos U_1, \dots, U_r de x_1, \dots, x_r en M tales que las restricciones $f|_{U_k} : U_k \rightarrow V$ son difeomorfismos y $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_r$. Para obtener V , invocamos el teorema de inversión local de nuevo para conseguir entornos U'_k de x_k de manera que $f|_{U'_k}$ es un difeomorfismo sobre

algún entorno abierto V' de a , que podemos tomar común para todos los k 's. Entonces, como f es cerrada por ser propia (1.2), el conjunto $f(M \setminus \bigcup_k U'_k)$ es cerrado. Como dicho conjunto no contiene a a , se puede encontrar un entorno abierto $V \subseteq V'$ de a tal que V es difeomorfo a \mathbb{R}^m y

$$V \cap f(M \setminus \bigcup_k U'_k) = \emptyset.$$

Por tanto, $f^{-1}(V) \subseteq \bigcup_k U'_k$, y tomamos $U_k = f^{-1}(V) \cap U'_k$, de manera que $f^{-1}(V) = \bigcup_k U_k$.

Usando el difeomorfismo $V \rightarrow \mathbb{R}^m$, llevamos a V la m -forma

$$\varphi(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m, \quad (4)$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ es una función meseta tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0, & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

Esta construcción garantiza que la forma inducida en V se puede extender por cero a toda N y que tiene soporte compacto. Denotamos por ω a esa extensión. Esta es la m -forma para la que comprobaremos 3.

Por un lado, como el soporte de ω está contenido en V ,

$$\int_N \omega = \int_V \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)dx_1 \cdots dx_m \neq 0.$$

Por otro lado, el soporte de la forma $f^*\omega$ está contenido en $f^{-1}(V) = \bigcup_k U_k$, y, como los U_k son disjuntos, tenemos

$$\int_M f^*\omega = \sum_k \int_{U_k} f^*\omega.$$

Aquí podemos aplicar el cambio de variables $f|_{U_k} : U_k \rightarrow V$ para calcular cada sumando, obteniéndose

$$\int_{U_k} f^*\omega = \varepsilon_k \int_V \omega,$$

donde $\varepsilon_k = \pm 1$ en función de si $f|_{U_k}$ preserva o invierte la orientación. Dicho de otro modo,

$$\varepsilon_k = \text{sign}_{x_k}(f),$$

por lo que se concluye que

$$\int_M f^*\omega = \sum_k \varepsilon_k \int_V \omega = \sum_k \text{sign}_{x_k}(f) \int_N \omega,$$

como se quería.

Queda ver el caso $f^{-1}(a) = \emptyset$. Como se dijo anteriormente, f es cerrada por ser propia, luego $V = N \setminus f(M)$ es un entorno abierto de a . Lo reducimos, si es preciso, para que sea difeomorfo a \mathbb{R}^m , e inducimos en él la misma m -forma que antes, dada por la ecuación local 4. Extendiéndola por cero a toda N , obtenemos —como antes— una m -forma ω

con soporte compacto contenido en V cuya integral es no nula. Además, como ω es idénticamente nula en $f(M)$, $f^*\omega = 0$, por lo que

$$0 = \int_M f^*\omega = \delta \cdot \int_N \omega$$

y se concluye que $\delta = 0$. □

(4.4) Fórmula general de cambio de variables para integrales. El teorema anterior se puede enunciar como una fórmula de cambio de variables general para integrales: si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación propia entre variedades de la misma dimensión m , conexas, orientadas y sin borde, entonces

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \cdot \int_N \omega$$

para cada m -forma ω con soporte compacto en N . En particular, la integral es cero si f no es sobreyectiva.

Como consecuencia de esto, el grado tiene la siguiente propiedad multiplicativa:

Proposición 4.5. *Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ dos aplicaciones propias entre variedades conexas, orientadas y sin borde, todas de dimensión m . Entonces,*

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

Demostración. Sea ω una m -forma con soporte compacto en P . Entonces,

$$\int_M (g \circ f)^*\omega = \int_M f^*g^*\omega = \deg(f) \int_N g^*\omega = \deg(f) \deg(g) \int_P \omega,$$

lo que muestra que $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$. □

Otra propiedad importante del grado es que es invariante por homotopía:

Proposición 4.6. *Sean M y N dos variedades conexas, orientadas y sin borde de dimensión m , y sea $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$ una homotopía propia diferenciable. Entonces,*

$$\deg(H_0) = \deg(H_1).$$

Demostración. Sea ω una m -forma con soporte compacto en N con integral no nula, y considérese $H^*\omega$. Por las propiedades de la diferenciación exterior, $dH^*\omega = H^*d\omega = 0$. Por lo tanto,

$$\int_{[0,1] \times M} dH^*\omega = 0.$$

Por otra parte, el borde de $[0, 1] \times M$ es la unión disjunta de dos copias M_0 y M_1 de M orientadas en sentido opuesto entre sí. El teorema de Stokes 2.1 nos da

$$0 = \int_{[0,1] \times M} dH^*\omega = \int_{M_1} H_1^*\omega - \int_{M_0} H_0^*\omega.$$

Así pues,

$$\deg(H_0) \int_N \omega = \int_{M_0} H_0^*\omega = \int_{M_1} H_1^*\omega = \deg(H_1) \int_N \omega,$$

luego $\deg(H_0) = \deg(H_1)$, como queríamos demostrar. \square

(4.7) Grado de una aplicación continua. La invariancia por homotopía nos permite definir el grado de Brouwer-Kronecker para cualquier aplicación continua propia: si $f : M \rightarrow N$ es continua y propia (M y N son conexas, orientadas, sin borde y de la misma dimensión), definimos $\deg(f)$ como $\deg(g)$ para cualquier $g : M \rightarrow N$ diferenciable propiamente homótopa a f . La proposición 1.7 garantiza la existencia de esta g , mientras que la proposición 1.8 junto con la invariancia del grado por homotopía propia diferenciable (proposición 4.6) garantizan que $\deg(f)$ es independiente de la elección de g y que $\deg(f)$ es invariante por homotopía.

Ejemplo 4.8. En general, el grado no clasifica completamente las clases de homotopía (aunque sí para aplicaciones sobre la esfera, como veremos en la sección 8). Para ver esto, consideremos la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $z \mapsto 1/z$, donde hemos identificado \mathbb{S}^1 con el grupo multiplicativo de números complejos de módulo 1. Calculando la derivada de f en 1,

$$d_1 f(u) = -u,$$

se concluye que f tiene grado -1 . Entonces, definimos en el toro $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ la aplicación $F = f \times f : T \rightarrow T$. Esta aplicación tiene grado 1, pero no es homótopa a la identidad.

En efecto, para calcular $\deg(F)$, nótese que la derivada de F en $a = (1, 1)$,

$$d_a F(u, v) = (d_1 f(u), d_1 f(v)) = (-u, -v),$$

preserva la orientación, luego $\deg(F) = 1$. Ahora, supongamos que tenemos una homotopía H_t con $H_0 = F$, $H_1 = \text{Id}_T$. Denotamos por $j : \mathbb{S}^1 \rightarrow T$ a la inclusión $z \mapsto (z, 1)$, y por $p : T \rightarrow \mathbb{S}^1$ la proyección sobre el primer factor. Entonces, h_t es una homotopía con $h_0 = f$ y $h_1 = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$. Pero esta homotopía no puede existir, pues $\deg(f) = -1$ y $\deg(\text{Id}_{\mathbb{S}^1}) = 1$.

5. DEFINICIÓN INTEGRAL DEL INVARIANTE DE HOPF

En esta sección, $m \geq 2$ será un número entero.

Definición y proposición 5.1. Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ una aplicación diferenciable. Sea $\omega \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea $\alpha \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$ una primitiva de $f^*\omega$. El número

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha$$

solo depende de f . Se dice que es el invariante de Hopf de f .

Demostración. Como $df^*\omega = f^*d\omega = f^*0 = 0$ y $H^m(\mathbb{S}^{2m-1}) = 0$, $f^*\omega$ siempre tiene una primitiva, α .

Primero, fijemos ω y veamos que $h(f)$ no depende de la primitiva escogida. Sean $\alpha, \beta \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$ dos primitivas de $f^*\omega$. Como $d\alpha = d\beta$, tenemos que $d(\alpha - \beta) = 0$ y, como $H^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1}) = 0$, existe $\gamma \in \Gamma^{m-2}(\mathbb{S}^{2m-1})$ tal que $d\gamma = \alpha - \beta$.

Ahora, consideremos la $(2m - 2)$ -forma $\gamma \wedge f^*\omega$. Su diferencial es

$$d(\gamma \wedge f^*\omega) = d\gamma \wedge f^*\omega \pm \underbrace{\gamma \wedge f^*d\omega}_0 = (\alpha - \beta) \wedge f^*\omega = \alpha \wedge d\alpha - \beta \wedge d\beta,$$

pues $d\alpha = d\beta = f^*\omega$. El teorema de Stokes 2.1 aplicado a $\gamma \wedge f^*\omega$ se lee:

$$0 = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d(\gamma \wedge f^*\omega) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha - \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \beta \wedge d\beta,$$

con lo que se prueba que $h(f)$ no depende de la primitiva de $f^*\omega$ escogida.

Para finalizar la demostración, solo tenemos que ver que $h(f)$ no depende de la $\omega \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$ escogida. A la luz de la proposición 4.2, esto es lo mismo que decir que $h(f)$ no cambia si sustituimos ω por otra m -forma ω' en su misma clase de cohomología, esto es, tal que $\omega' = \omega + d\beta$ para alguna β .

Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Observemos primero que la forma $\alpha' = \alpha + f^*\beta$ es una primitiva de $f^*\omega'$:

$$d(\alpha + f^*\beta) = f^*\omega + f^*d\beta = f^*(\omega + d\beta) = f^*\omega'.$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha' \wedge d\alpha' &= \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} (\alpha + f^*\beta) \wedge (d\alpha + f^*d\beta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha + \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} f^*\beta \wedge (d\alpha + f^*d\beta) + \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge f^*d\beta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha + \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \underbrace{f^*(\beta \wedge (\omega + d\beta))}_0 \pm \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} (d(\alpha \wedge f^*\beta) - d\alpha \wedge f^*\beta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha \pm \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d(\alpha \wedge f^*\beta)}_0 \mp \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \underbrace{f^*(\omega \wedge \beta)}_0 = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha. \end{aligned}$$

En el cálculo precedente, $\beta \wedge (\omega + d\beta) = 0$ y $\omega \wedge \beta = 0$ por ser formas en \mathbb{S}^m de grado superior a m . Además, $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d(\alpha \wedge f^*\beta) = 0$ por el teorema de Stokes. Por último, se ha aplicado la regla de Leibniz a $d(\alpha \wedge f^*\beta)$ para obtener

$$d(\alpha \wedge f^*\beta) = d\alpha \wedge f^*\beta \pm \alpha \wedge f^*d\beta,$$

y, por tanto, $\alpha \wedge f^*d\beta = \pm(d(\alpha \wedge f^*\beta) - d\alpha \wedge f^*\beta)$. \square

Como el grado, el invariante de Hopf es invariante por homotopía:

Proposición 5.2. *Sea $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ una homotopía diferenciable. Entonces*

$$h(H_0) = h(H_1).$$

Demostración. Sea $\omega \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ con integral uno. Consideramos $H^*\omega \in \Gamma^m([0, 1] \times \mathbb{S}^{2m-1})$, que es cerrada (por serlo ω), luego exacta (recuérdese que, por el teorema 3.4, $[0, 1] \times \mathbb{S}^{2m-1}$ tiene los mismos grupos de cohomología que \mathbb{S}^{2m-1} , así que los únicos no triviales son los de grados 0 y $2m - 1$). Sea $\beta \in \Gamma^{m-1}([0, 1] \times \mathbb{S}^{2m-1})$ una primitiva suya.

Obsérvese que $\beta_0 = \beta|_{\{0\} \times \mathbb{S}^{2m-1}} \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$ es una primitiva de $H_0^* \omega$, ídem con $\beta_1 = \beta|_{\{1\} \times \mathbb{S}^{2m-1}}$. Aplicando el teorema de Stokes 2.1 a la $(2m-1)$ -forma $\beta \wedge d\beta$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0,1] \times \mathbb{S}^{2m-1}} H^* \underbrace{(\omega \wedge \omega)}_0 = \int_{[0,1] \times \mathbb{S}^{2m-1}} d\beta \wedge d\beta \\ &= \int_{[0,1] \times \mathbb{S}^{2m-1}} d(\beta \wedge d\beta) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \beta_1 \wedge d\beta_1 - \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \beta_0 \wedge d\beta_0, \end{aligned}$$

es decir, $h(H_0) = h(H_1)$. \square

(5.3) Invariante de Hopf para aplicaciones continuas. Como para el grado, la invariancia por homotopía nos permite definir el invariante de Hopf para cualquier aplicación continua: si $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es continua, definimos $h(f)$ como $h(g)$ para cualquier $g : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable homótopa a f . La proposición 1.7 garantiza la existencia de esta g , mientras que la proposición 1.8 junto con la invariancia de h por homotopía diferenciable (proposición 5.2) garantizan que $h(f)$ es independiente de la elección de g y que $h(f)$ es invariante por homotopía.

Observaciones 5.4. (1) Si m es impar, $h(f) = 0$ para cualquier f . En efecto, como el grado de α es par,

$$\alpha \wedge d\alpha = \frac{1}{2} d(\alpha \wedge \alpha).$$

Entonces, por el teorema de Stokes 2.1, $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha = 0$.

(2) Si f es nulhomótopa, esto es, homótopa a una aplicación constante, entonces $h(f) = 0$, pues el invariante de Hopf de una aplicación constante es nulo. En particular, el invariante de Hopf de una aplicación no sobreyectiva es nulo.

(3) Por último, si $\omega_{2m-1} \in \Gamma^{2m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$ da un generador normalizado de $H^{2m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$, es decir, $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \omega_{2m-1} = 1$, entonces:

$$[\alpha \wedge d\alpha] = h(f)[\omega_{2m-1}],$$

consecuencia directa de que $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha = h(f)$ y de que la integral $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}}$ es un isomorfismo sobre \mathbb{R} .

Para terminar, la fórmula multiplicativa mencionada en la introducción es la siguiente:

Proposición 5.5. Sean f, g las aplicaciones continuas del siguiente diagrama:

$$\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$$

Entonces, $h(f \circ g) = h(f) \deg(g)$.

Demostración. Podemos suponer f y g diferenciables: si f y g son continuas y escogemos \hat{f} y \hat{g} diferenciables homótopas a f y g , respectivamente, tendremos que $\hat{f} \circ \hat{g}$ es homótopa a $f \circ g$. Por tanto,

$$h(f \circ g) = h(\hat{f} \circ \hat{g}) \stackrel{(*)}{=} h(\hat{f}) \deg(\hat{g}) = h(f) \deg(g),$$

y $(*)$ es el caso diferenciable.

Sea $\omega \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea $\alpha \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$ una primitiva de $f^*\omega$. Entonces, $g^*\alpha$ es una primitiva de $(f \circ g)^*\omega$:

$$dg^*\alpha = g^*d\alpha = g^*f^*\omega = (f \circ g)^*\omega.$$

Además, $g^*\alpha \wedge dg^*\alpha = g^*(\alpha \wedge d\alpha)$, por lo que

$$h(f \circ g) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} g^*(\alpha \wedge d\alpha) = \deg(g) \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha = h(f) \deg(g),$$

donde hemos usado la fórmula general de cambio de variable para integrales de 4.4. \square

6. EL INVARIANTE ES UN NÚMERO ENTERO

A continuación, se proporciona una fórmula alternativa para el cálculo del invariante de Hopf. Las ideas presentes en esta sección se inspiran en [Wtn].

Lema 6.1. *Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ una aplicación diferenciable. Sea $\omega \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea $\alpha \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$ una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in R_f$ y $M_a = f^{-1}(a)$, que es una subvariedad de \mathbb{S}^{2m-1} de dimensión $m-1$, orientada según la orientación inducida. Entonces,*

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. $R_f = \mathbb{S}^m \setminus f(C_f)$ es abierto, pues f es cerrada al ser una aplicación continua de un compacto en un Hausdorff. Así, se puede escoger un entorno abierto de a , $U \subseteq R_f$, y la restricción $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$, que es propia, cumple las hipótesis del teorema de la fibración de Ehresmann 1.5: reduciendo U , si es preciso, existe un difeomorfismo h que hace conmutar al diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} M_a \times U & \xrightarrow[\approx]{h} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow f \\ & & U \end{array}$$

Además, podemos suponer U difeomorfo a \mathbb{R}^n . Así, para cada $b \in U$, existe un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ que une a con b y cuya imagen —también denotada γ por comodidad— es una variedad diferenciable compacta orientada de dimensión 1 con borde $\partial\gamma = \{a, b\}$. Por estar γ contenido en R_f , $f^{-1}(\gamma)$ es una subvariedad compacta de \mathbb{S}^{2m-1} de dimensión m con borde $\partial f^{-1}(\gamma) = M_a \cup M_b$ (o bien el conjunto vacío, pero, en tal caso, el lema es trivial). Está orientada con la orientación inducida de γ . Aplicando el teorema de Stokes a α :

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} d\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0,$$

pues, para todo $x \in f^{-1}(\gamma)$, $(f^*\omega)_x$ es nula al evaluarla sobre vectores de $T_x f^{-1}(\gamma) = d_x f^{-1}(T_{f(x)}\gamma)$, ya que ω es de grado $m \geq 2$ y $\dim \gamma = 1$. Concluimos que $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para cualquier $b \in U$.

Supongamos, en primer lugar, que el soporte de ω está contenido en U , de forma que $\int_U \omega = 1$. Se tiene que $\text{supp}(\alpha \wedge d\alpha) \subseteq \text{supp}(d\alpha) = \text{supp}(f^*\omega) \subseteq f^{-1}(\text{supp}(\omega)) \subseteq f^{-1}(U)$.

De esta manera,

$$\begin{aligned}
h(f) &= \int_{f^{-1}(U)} \alpha \wedge d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* f^* \omega \\
&= \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge \pi_U^* \omega \stackrel{(1)}{=} \int_U \left(\int_{M_a \times \{\bullet\}} h^* \alpha|_{M_a \times \{\bullet\}} \right) \omega \\
&= \int_U \left(\int_{M_\bullet} \alpha \right) \omega \stackrel{(2)}{=} \left(\int_{M_a} \alpha \right) \underbrace{\left(\int_U \omega \right)}_{=1} = \int_{M_a} \alpha,
\end{aligned}$$

donde en la igualdad (1) se ha usado el teorema de Fubini para variedades 2.4, y, en la (2), que $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para cualquier $b \in U$.

Para el caso general, esto es, en el que el soporte de ω no está contenido necesariamente en U , tomamos una $\omega' \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ con soporte en U e integral 1, por tanto cohomóloga a ω . Escribimos $\omega' = \omega + d\beta$ para cierta $\beta \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^m)$. Obsérvese que $\alpha' = \alpha + f^*\beta$ es una primitiva de $f^*\omega'$: $d\alpha' = d\alpha + f^*d\beta = f^*(\omega + d\beta) = f^*\omega'$. Así,

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha' = \int_{M_a} \alpha + \int_{M_a} f^*\beta = \int_{M_a} \alpha,$$

pues, para todo $x \in M_a$, $(f^*\beta)_x$ es nula al evaluarla sobre vectores de $T_x M_a = \ker d_x f$. \square

Proposición 6.2. *El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es un número entero.*

Demostración. Sean $a \in R_f$ y $M_a = f^{-1}(a)$, como en la demostración anterior. Tomamos $c \in \mathbb{S}^{2m-1} \setminus M_a$, que existe porque f no puede ser la aplicación constante a . De esta forma, podemos considerar la homotopía

$$H : [0, 1] \times M_a \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t, x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

entre las aplicaciones $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ (la inclusión de M_a en \mathbb{S}^{2m-1}) y $H_1 \equiv -c$. Se tendrá, pues, que H_0^* es la restricción a M_a y que $H_1^* \equiv 0$. Así, escribiendo $N = [0, 1] \times M_a$, usando el teorema de Stokes y la fórmula del lema 6.1, el invariante de Hopf de f será

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* d\alpha = \int_N H^* f^* \omega = \int_N (f \circ H)^* \omega,$$

y la prueba concluirá al demostrar que $\int_N (f \circ H)^* \omega$ es un número entero. En primer lugar, nótese que $f \circ H : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ es una aplicación diferenciable entre variedades compactas de la misma dimensión. Sea $p \in R_{(f \circ H)} \setminus \{a, f(-c)\}$, que existe por el teorema de Sard-Brown 1.4. Se tiene que $(f \circ H)^{-1}(p)$ es compacto y discreto, luego finito, pongamos $\{q_1, \dots, q_r\}$. Además, por la elección de p , $(f \circ H)^{-1}(p)$ no está en el borde de N , así que —como en la demostración del teorema 4.3— podemos aplicar el teorema de inversión local 1.1 en cada q_k y el hecho de que $(f \circ H)$ es cerrada para obtener abiertos disjuntos W_1, \dots, W_r y un entorno abierto $W \subseteq \mathbb{S}^m$ de p tales que $(f \circ H)^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y las restricciones $(f \circ H)|_{W_k}$ son difeomorfismos entre W_k y W .

Podemos tomar $\omega \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ con soporte contenido en W , de forma que

$$\text{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq (f \circ H)^{-1}(\text{supp}(\omega)) \subseteq (f \circ H)^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k.$$

Finalmente,

$$\int_N (f \circ H)^*\omega = \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).$$

□

7. DEFINICIÓN DEL INVARIANTE DE HOPF MEDIANTE EL NÚMERO DE ENLACE

En esta sección, presentamos la definición del invariante de Hopf según se da en [ORz] y, en parte, en [BT]. Se define primero el número de enlace de dos subvariedades compactas del espacio euclídeo.

Definición 7.1. Sean n un entero positivo y $0 < k < n$. Sean M y N subvariedades regulares compactas, sin borde y orientadas de \mathbb{R}^n , de dimensiones respectivas $k - 1$ y $n - k$, con $M \cap N = \emptyset$. Sea

$$\Lambda : M \times N \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, (x, y) \mapsto \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Se dice que el número de enlace de M y N es $\ell(M, N) = \text{deg}(\Lambda)$.

El número de enlace para variedades de dimensión 1 en el espacio (esto es, lazos) se puede interpretar geoméricamente como el número de veces que uno de los lazos, previamente escogido, pasa por encima del otro según la perspectiva del lector, contado con signos según la orientación. Una manera de determinar si el cruce debe ser contado como $+1$ o como -1 es la *regla de la mano derecha*: en el punto de cruce, colocamos la mano derecha con la palma apuntando hacia el papel y alineamos el pulgar en el sentido de la orientación del lazo escogido (el que pasa por encima). Si la orientación del otro lazo se corresponde con el sentido determinado por el índice, entonces el cruce es positivo. En caso contrario, el cruce es negativo:

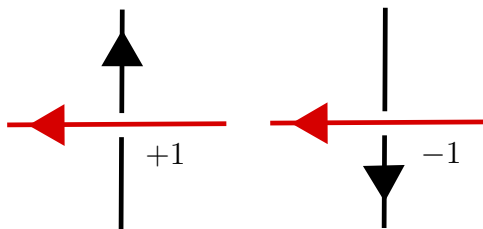


FIGURA 1. Regla de la mano derecha.

La figura 2 muestra un ejemplo de cálculo de número de enlace: el lazo rojo pasa por encima del negro dos veces, ambas con la orientación positiva, por lo que el número de enlace es 2.

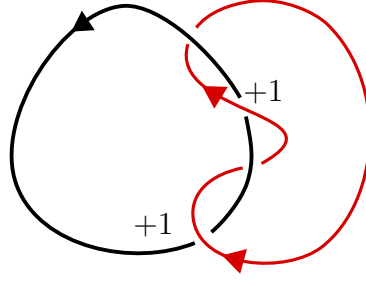


FIGURA 2. Número de enlace de dos lazos en el espacio.

Por último, vamos a denotar por $\Phi : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$ a la proyección estereográfica desde el polo norte $a_N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{2m-1}$. Con esto:

Definición y proposición 7.2. *Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ una aplicación diferenciable.*

- (1) *Si f no es sobreyectiva, definimos $h(f) = 0$.*
- (2) *Si f es sobreyectiva, considérense dos valores regulares distintos, $a, b \neq f(-p)$. Entonces, $\Phi f^{-1}(a)$ y $\Phi f^{-1}(b)$ son subvariedades de \mathbb{R}^{2m-1} en las condiciones de la definición 7.1 y el entero*

$$h(f) = \ell(\Phi f^{-1}(a), \Phi f^{-1}(b))$$

solo depende de f .

Se dice que $h(f)$ es el invariante de Hopf de f .

(7.3) Versión integral de la definición anterior. Otra definición integral de número de enlace que es relevante en nuestro caso es la siguiente: dada una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$, sean $a, b \in \mathbb{S}^m$ dos valores regulares. Sean U_a, U_b entornos abiertos conexos disjuntos de a y b en \mathbb{S}^m , y escojamos $\omega_a \in \Gamma_c^m(U_a)$, $\omega_b \in \Gamma_c^m(U_b)$ generadores de $H_c^m(U_a)$ y $H_c^m(U_b)$, respectivamente (es decir, con integral uno). Las formas $f^*\omega_a$ y $f^*\omega_b$, definidas en $f^{-1}(U_a)$ y $f^{-1}(U_b)$, tienen extensiones por cero, $\eta_a, \eta_b \in \Gamma^m(\mathbb{S}^{2m-1})$. Como antes, estas formas tienen primitivas α_a, α_b . Tras esta construcción, resulta que

$$h(f) = \ell(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha_a \wedge d\alpha_b = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha_a \wedge \eta_b.$$

Esta definición es independiente de todas las elecciones involucradas. En efecto, sea α'_a otra primitiva de η_a . Entonces, $\alpha'_a - \alpha_a$ es cerrada. Por tanto, usando el teorema de Stokes:

$$\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} (\alpha'_a - \alpha_a) \wedge \eta_b = \pm \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d((\alpha'_a - \alpha_a) \wedge \alpha_b) = 0.$$

Por otro lado, si ω'_b es otro representante de $[\omega_b] \in H_c^m(U_b)$, y denotamos por η'_b a la respectiva extensión por cero de $f^*\omega'_b$, entonces, $\eta_b - \eta'_b = d\mu$ para alguna $(m-1)$ -forma μ con soporte compacto contenido en $f^{-1}(U_b)$. Así,

$$\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha_a \wedge (\eta_b - \eta'_b) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha_a \wedge d\mu = \pm \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d(\alpha_a \wedge \mu) \mp \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d\alpha_a \wedge \mu,$$

y ambos términos en la derecha se anulan: el primero por el teorema de Stokes y el segundo porque los soportes de $d\alpha_a = \eta_a$ y μ son disjuntos.

La definición integral de número de enlace es equivalente a la 7.1. Las técnicas utilizadas habitualmente para demostrarlo no son elementales, e involucran conceptos más allá de nuestro objetivo en este trabajo. Por un lado, el cálculo del número de enlace mediante el grado equivale a una tercera definición mediante teoría de la intersección (véase [Wh]), mientras que la equivalencia de esta última con la fórmula integral que tenemos se puede ver en [ArK] o en [BT] (en esta última referencia, el argumento es válido en el caso $m = 2$, aunque los autores proponen que se generalice a cualquier dimensión).

Es muy fácil ver que la definición 7.3 de invariante de Hopf es equivalente a la 5.1. Primero, nótese que ω_a y ω_b , extendidas por cero, son ambas representantes del generador de $H^m(\mathbb{S}^m)$. Así, por un lado, según la definición integral de invariante de Hopf,

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha_a \wedge d\alpha_a.$$

Por otro lado, por tener la misma integral, ω_a y ω_b son cohomólogas; es decir, existe una $\beta \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^m)$ tal que $\omega_a - \omega_b = d\beta$. Por tanto:

$$\alpha_a \wedge (\eta_a - \eta_b) = \alpha_a \wedge (f^*d\beta) = \pm d(\alpha_a \wedge f^*\beta) \mp d\alpha_a \wedge f^*\beta.$$

El último término de la derecha es igual a

$$\eta_a \wedge f^*\beta = f^*(\omega_a \wedge \beta),$$

pero $\omega_a \wedge \beta$ es de grado $2m - 1$ en \mathbb{S}^m y, por tanto, se anula. El teorema de Stokes concluye la demostración:

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha_a \wedge \eta_a = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha_a \wedge \eta_b = \ell(f^{-1}(a), f^{-1}(b)).$$

8. APLICACIONES EN EL ESTUDIO DE LA HOMOTOPÍA DE LAS ESFERAS

En esta sección, veremos que el invariante de Hopf puede arrojar luz sobre el cálculo de los grupos de cohomotopía $[M, \mathbb{S}^k]$, y, en concreto, cuando $M = \mathbb{S}^p$, los grupos de homotopía $\pi_p(\mathbb{S}^k) = [\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^k]$. El desarrollo se basa en la exposición de [ORz].

Primero, estudiamos el caso $\dim(M) < k$.

Lema 8.1. *Sea M una variedad (posiblemente no compacta). Sean $f, g : M \rightarrow \mathbb{S}^k$ dos aplicaciones continuas que no tengan imágenes antipodales: $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in M$. Entonces,*

$$H_t(x) = \frac{tg(x) + (1-t)f(x)}{\|tg(x) + (1-t)f(x)\|}$$

es una homotopía bien definida con $H_0 = f$, $H_1 = g$. En particular, si f no es suprayectiva, entonces, es nulhomótopa.

Demostración. Sea $x \in M$. Entonces, $tg(x) + (1-t)f(x)$ es un punto del segmento que une $f(x)$ con $g(x)$. Como ambos puntos pertenecen a la esfera, $tg(x) + (1-t)f(x) = 0$ si y solo si $f(x) = -g(x)$, excluido por hipótesis. Por tanto, H está bien definida (y es continua).

Finalmente, si f no es suprayectiva, esto es, existe un $p \notin f(M)$, entonces, f es homótopa a la aplicación constante p . \square

Corolario 8.2. *El grupo de cohomotopía $[M, \mathbb{S}^k]$ es trivial si $\dim(M) < k$. En particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k) = \{0\}$ para $p < k$.*

Demostración. Por la proposición 1.7, es suficiente probar que cualquier aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{S}^k$ es nulhomótota. Y en efecto lo es: por el teorema de Sard fácil 1.4, f no puede ser suprayectiva, y el lema implica que es nulhomótota. \square

A continuación, el caso $k = \dim(M)$. Para ello, utilizaremos el teorema de Hopf, que afirma que el grado de Brouwer-Kronecker distingue entre clases de homotopía $[M, \mathbb{S}^m]$, junto con el siguiente lema:

Lema 8.3. *Sea M una variedad compacta, orientada, sin borde y de dimensión m . Entonces, para cada entero d , existe una aplicación $h_d : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado d .*

Demostración. Primero, veamos el caso $M = \mathbb{S}^m$: encontraremos una $f_d : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado d para cualquier $d \in \mathbb{Z}$.

Caso $d = 0$. Basta tomar como f_0 cualquier aplicación constante.

Caso $d \geq 1$. Cualquier punto $x \in \mathbb{S}^m$ se puede parametrizar según

$$x = (x_1, x_2, x') = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, x'), \quad \rho = \sqrt{1 - \|x'\|^2}.$$

Definimos la aplicación

$$g_d(x) = (\rho \cos(d \cdot \theta), \rho \sin(d \cdot \theta), x'),$$

que, geoméricamente, *enrolla* las circunferencias $\{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, x') : x' \text{ fijo}\}$, d veces sobre sí mismas. Para eliminar el parámetro θ , obsérvese que

$$\cos(d \cdot \theta) = P_d(\cos \theta, \sin \theta), \quad \sin(d \cdot \theta) = Q_d(\cos \theta, \sin \theta)$$

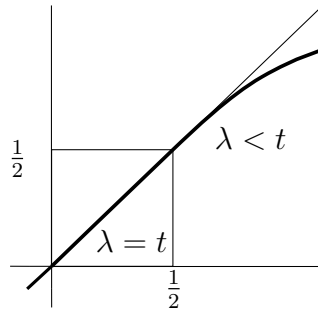
para ciertos polinomios homogéneos P_d, Q_d de grado d . Se tiene:

$$\begin{aligned} g_d(x) &= \left(\rho P_d \left(\frac{1}{\rho} x_1, \frac{1}{\rho} x_2 \right), \rho Q_d \left(\frac{1}{\rho} x_1, \frac{1}{\rho} x_2 \right), x' \right) \\ &= \left(\frac{1}{\rho^{d-1}} P_d(x_1, x_2), \frac{1}{\rho^{d-1}} Q_d(x_1, x_2), x' \right). \end{aligned}$$

Esto muestra que g_d es diferenciable salvo cuando $\|x'\| = 1$. Para arreglar esto, usamos la deformación $\tilde{\rho}$ de ρ definida por

$$\tilde{\rho} = \sqrt{1 - \lambda(\|x'\|^2)},$$

para $\lambda(t)$ una función diferenciable que es $= t$ para $t \leq \frac{1}{2}$ y $< t$ para $t > \frac{1}{2}$, como en la figura siguiente:



Por tanto, ahora tenemos una aplicación diferenciable

$$\tilde{g}_d(x) = \left(\frac{1}{\tilde{\rho}^{d-1}} P_d(x_1, x_2), \frac{1}{\tilde{\rho}^{d-1}} Q_d(x_1, x_2), x' \right).$$

Para $\|x'\| \leq \frac{1}{2}$, coincide con $g_d(x) \in \mathbb{S}^m$, pero, en caso contrario, debemos normalizar para obtener $f_d = \tilde{g}_d(x)/\|\tilde{g}_d(x)\| : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$. Afirmamos que $\deg(f_d) = d$.

En efecto, sea $a = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^m$. Supongamos que $f_d(x) = a$. Entonces, $x' = 0$ y $\rho = 1$, luego $f_d(x) = g_d(x) = (\cos(d \cdot \theta), \sin(d \cdot \theta), 0)$, y obtenemos

$$x = (\cos \theta_k, \sin \theta_k, 0), \quad \theta_k = 2\pi \frac{k}{d}, \quad 0 \leq k < d.$$

Suficientemente cerca de cada uno de estos puntos podemos usar la parametrización $x = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, x')$, que es compatible con la orientación estándar de la esfera. La expresión local de nuestra aplicación es, pues:

$$f_d \equiv g_d : (\theta, x') \mapsto (d \cdot \theta, x').$$

Esto es claramente un difeomorfismo que preserva la orientación, lo que muestra que a es un valor regular de f_d , y

$$\deg(f_d) = \sum_{x \in f_d^{-1}(a)} \text{sign}_x(f_d) = \sum_{k=1}^d (+1) = d.$$

Se puede usar este mismo método para d negativo, simplemente enrollando en el sentido horario, en lugar de antihorario. Sin embargo, tenemos un argumento alternativo.

Caso $d = -1$. La simetría

$$f_{-1} : (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_m, -x_{m+1})$$

tiene grado $\deg(f_{-1}) = -1$. En efecto, f_{-1} lleva el polo norte $a_N = (0, \dots, 0, 1)$ al polo sur $a_S = -a_N$, pero $d_{a_N} f_{-1}$ es la identidad, pues los vectores tangentes tienen su última componente nula. Sin embargo, $T_{a_N} \mathbb{S}^m$ y $T_{a_S} \mathbb{S}^m$ tienen orientaciones opuestas, así que f_{-1} invierte la orientación, luego $\deg(f_{-1}) = -1$.

Caso $d < 0$. Sea $f_d = f_{-1} \circ f_{-d}$, de forma que, por la proposición 4.5,

$$\deg(f_d) = \deg(f_{-1}) \deg(f_{-d}) = (-1)(-d) = d,$$

como se quería.

Pasamos al caso general. Es suficiente encontrar $h : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado ± 1 . En efecto, dada tal h , podemos usar las aplicaciones $f_{\pm d}$ anteriores para definir $h_d = f_{\pm d} \circ h$, que tiene grado d por 4.5. De hecho, construiremos una aplicación $h : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ tal que el polo norte $a_N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^m$ es un valor regular con una única preimagen.

Sea U un abierto de M difeomorfo a \mathbb{R}^m . Consideremos una función meseta diferenciable en \mathbb{R}^m :

$$\tau(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Identificando $U \equiv \mathbb{R}^m$, definimos $h : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ por

$$h(x) = \begin{cases} (0, \dots, 0, -1), & \text{el polo sur, para } x \notin U, \\ \left(\frac{2\tau(x)x}{\tau(x)^2 + \|x\|^2}, \frac{\tau(x)^2 - \|x\|^2}{\tau(x)^2 + \|x\|^2} \right), & \text{para } x \in U. \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida, porque, si $x \in U$ con $\|x\| \geq 1$, se tiene $\tau(x) = 0$ y $h(x) = (0, \dots, 0, -1)$. Por otro lado, usando las ecuaciones de la proyección estereográfica π desde el polo sur, para cada $x \in U$ con $\tau(x) \neq 0$, se tiene que

$$h(x) = \pi^{-1} \left(\frac{x}{\tau(x)} \right).$$

De esta forma, h es el difeomorfismo π^{-1} para $\tau(x) = 1$, esto es, para $\|x\| \leq \frac{1}{2}$. Por otro lado, $x = 0$ es la única preimagen de $(0, \dots, 0, 1)$. En efecto, supongamos que $(0, \dots, 0, 1) = h(x)$. Entonces, $x \in U$ y $\tau(x) \neq 0$, por lo que

$$(0, \dots, 0, 1) = h(x) = \pi^{-1} \left(\frac{x}{\tau(x)} \right),$$

así que $x = 0$. Esto concluye la demostración. \square

(8.4) Extensión antipodal, linealización y normalización. Sea M una variedad orientada y sin borde de dimensión m (posiblemente no compacta).

(1) Fijamos un sistema de coordenadas $\mathbb{R}^m \equiv U \subseteq M$ y una aplicación $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $h^{-1}(0) = \{c\}$. Usando la proyección estereográfica desde el polo sur $a_S = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^m$ para identificar \mathbb{R}^m con el abierto $V = \mathbb{S}^m \setminus \{a_S\}$ y $0 \in \mathbb{R}^m$ con el polo norte $a_N = -a_S$. Entonces, $h = \pi^{-1} \circ h$ se puede ver como una aplicación sobre $\mathbb{R}^m \equiv V \subset \mathbb{S}^m$:

$$\begin{array}{ccccc} M & & c \longmapsto & 0 \equiv a_N & \mathbb{S}^m \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ U & \xleftarrow{\equiv} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\equiv} & V \end{array}$$

Lo que queremos es extender $h : U \rightarrow V$ a $\bar{h} : M \rightarrow \mathbb{S}^m$, de forma que, fuera de cierto entorno de c , todos los puntos de M vayan al polo sur.

Para ello, modificamos h con un truco análogo al usado en la demostración anterior:

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} (0, \dots, 0, -1), & \text{el polo sur, para } x \notin U, \\ \left(\frac{2\tau_c(x)h(x)}{\tau_c(x)^2 + \|h(x)\|^2}, \frac{\tau_c(x)^2 - \|h(x)\|^2}{\tau_c(x)^2 + \|h(x)\|^2} \right), & \text{para } x \in U, \end{cases}$$

donde τ_c es una función meseta diferenciable $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tau_c(x) = \begin{cases} 1, & \|x - c\| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \|x - c\| \geq 1. \end{cases}$$

Como antes, esto define bien una aplicación diferenciable, pues $\|h(x)\| \neq 0$ en un entorno de $\|x - c\| \geq 1$, y $\bar{h}(x) = (0, \dots, 0, -1)$ para $\|x - c\| \geq 1$. Usando nuevamente las ecuaciones

de la proyección estereográfica π desde el polo sur, para cada $x \in U$ con $\tau(x) \neq 0$ se tiene que

$$\bar{h}(x) = \pi^{-1} \left(\frac{h(x)}{\tau(x)} \right),$$

luego $\bar{h} = \pi^{-1} \circ h$ en la bola de radio $1/2$. Nótese también que $\bar{h}(x) = (0, \dots, 0, 1)$ si y solo si $x \in U$ y $h(x) = 0$, si y solo si $x = c$. Llamamos a esta construcción la *extensión antipodal*.

A la vista del lema de homotopía, 8.1, también nos interesan las posibles imágenes antipodales de h y \bar{h} en \mathbb{S}^m . Supongamos que es el caso para algún punto $x \in U$. Entonces:

$$\left(\frac{2\tau_c(x)h(x)}{\tau_c(x)^2 + \|h(x)\|^2}, \frac{\tau_c(x)^2 - \|h(x)\|^2}{\tau_c(x)^2 + \|h(x)\|^2} \right) = - \left(\frac{2h(x)}{1 + \|h(x)\|^2}, \frac{1 - \|h(x)\|^2}{1 + \|h(x)\|^2} \right).$$

Fijándonos en la última componente de la ecuación anterior, tenemos que $\tau(x) = \|h(x)\|^2$ (y, por tanto, $h(x) \neq 0$). Entonces, fijándonos en el resto de componentes, obtenemos

$$\frac{\tau_c(x)h_i(x)}{\tau_c(x)^2 + \|h(x)\|^2} = - \frac{h_i(x)}{1 + \|h(x)\|^2},$$

que es imposible. Concluimos que h y \bar{h} no tienen imágenes antipodales.

(2) Ahora, supongamos que h es un difeomorfismo, y denotemos $L = d_c h$, que es un isomorfismo lineal. Entonces,

$$H_t(x) = \begin{cases} \frac{h(tx + (1-t)c)}{t}, & t \neq 0, \\ L(x - c), & t = 0 \end{cases}$$

es una homotopía entre $H_0 = L - L(c)$ y $H_1 = h$. En efecto:

$$\begin{aligned} h(x) - h(c) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} h(tx + (1-t)c) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial h}{\partial x_i} (tx + (1-t)c) (x_i - c_i) dt = \sum_{i=1}^{m+1} (x_i - c_i) g_i(x), \end{aligned}$$

donde las g_i 's son las funciones continuas

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i} (tx + (1-t)c) dt.$$

En particular, $g_i(c) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(c)$, y, sustituyendo todo en la definición de H_t , se concluye que

$$H_t(x) = \sum_{i=1}^{m+1} (x_i - c_i) g_i(tx + (1-t)c), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

con lo que H es continua.

Además, observamos que $H_t(x) = 0$ si y solo si $x = c$, así que podemos aplicar una extensión antipodal a H para obtener una homotopía \bar{H}_t tal que $\bar{H}_1 = \bar{h}$ y $\pi \circ \bar{H}_0 \equiv L - L(c)$ cerca de c . Hemos *linealizado* la aplicación \bar{h} .

(3) El determinante del isomorfismo lineal L puede ser positivo o negativo. En el primer caso, sea A la identidad, y, en el segundo, la simetría respecto a la primera variable en \mathbb{R}^m . En cualquier caso, los signos de los determinantes de L y A coinciden.

Observemos que $\text{GL}(m, \mathbb{R})$, el espacio de matrices $m \times m$ invertibles, tiene dos componentes conexas: $\{\det > 0\}$ y $\{\det < 0\}$. En efecto: por un lado, la ecuación $\det = 0$ muestra que hay al menos dos. Para ver que hay como mucho dos, basta probar que $\{\det > 0\}$ es conexo por caminos; la conexión de $\{\det < 0\}$ se obtiene cambiando el signo de la última columna. En primer lugar, el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt da un camino entre cualquier matriz $(v_1 \cdots v_m)$ de determinante positivo y una matriz ortogonal de determinante $+1$: se aplica el proceso

$$\begin{aligned} w'_1 &= v_1 / \|v_1\|, \\ w'_j &= \left(v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w'_i \rangle}{\langle w'_i, w'_i \rangle} w'_i \right) / \|\cdots\|, \end{aligned}$$

lo que nos permite definir los caminos continuos

$$\begin{aligned} w_1(t) &= v_1 / \|v_1\|, & t \in [0, 1], \\ w_j(t) &= \left(v_j - t \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w'_i \rangle}{\langle w'_i, w'_i \rangle} w'_i \right) / \|\cdots\|, & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Nótese que, para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $1 \leq i \leq m$,

$$\text{span}\{w_1(t), \dots, w_i(t)\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_i\},$$

así que $\{w_1(t), \dots, w_m(t)\}$ es una base de \mathbb{R}^m para todo t . Dicha base coincide con la base ortonormal $\{w'_1, \dots, w'_m\}$ para $t = 1$. Así, el camino de matrices $(w_1(t) \cdots w_m(t))$, que está contenido en $\{\det > 0\}$, es el que buscábamos. Ahora, encontraremos un camino entre la matriz identidad y $W = (w'_1, \dots, w'_m)$. El teorema espectral para matrices ortogonales garantiza que se puede encontrar una matriz ortogonal P tal que

$$P^T W P = \begin{cases} \text{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_k)), & m = 2k \text{ par}, \\ \text{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_k), 1), & m = 2k + 1 \text{ impar}, \end{cases}$$

donde

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

es una matriz 2×2 correspondiente a una rotación. En cualquier caso, el camino

$$[0, 1] \ni t \mapsto \begin{cases} P \text{diag}(R(t\theta_1), \dots, R(t\theta_k)) P^T, & m = 2k \text{ par}, \\ P \text{diag}(R(t\theta_1), \dots, R(t\theta_k), 1) P^T, & m = 2k + 1 \text{ impar} \end{cases}$$

une la identidad ($t = 0$) con W ($t = 1$) sin salirse de $\{\det = 1\}$.

Ahora, sea $t \mapsto A_t$ un camino que una $A_0 = L$ con $A_1 = A$ y tal que $\det(A_t) \neq 0$ para todo t . Aplicamos la extensión antipodal a $B_t = A_t - A_t(c)$ para encontrar una homotopía \bar{B}_t entre una extensión antipodal de $L - L(c)$ y una de $A - A(c)$. Nótese que la extensión antipodal es posible porque, al ser A_t invertible, $B_t(x) = A_t(x - c) = 0$ si y solo si $x = c$. Esta *normalización* muestra que \bar{h} es homótopa a \bar{B}_1 , la extensión antipodal de $A - A(c)$.

Estas manipulaciones son la clave para probar el teorema de Hopf, que afirma que ejemplos como el 4.8 no son posibles para aplicaciones sobre esferas.

Teorema de Hopf 8.5. *Sea M una variedad compacta, orientada, sin borde y de dimensión m . Dos aplicaciones continuas $M \rightarrow \mathbb{S}^m$ con el mismo grado de Brouwer-Kronecker son homótopas.*

Demostración. Hacemos la demostración para $m \geq 2$. Para $m = 1$, se puede seguir una argumentación similar, pero más engorrosa. Recomendamos, sin embargo, consultar el trabajo de fin de grado [Est] para una demostración elemental del caso $m = 1$.

Como de costumbre, basta probar el teorema para aplicaciones diferenciables. Lo demostraremos viendo que todas las aplicaciones $f : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ de grado d tienen una *forma normal* común. Supongamos que $\deg(f) = d \geq 0$ (resp., $d \leq 0$) y fijemos un dominio de coordenadas $U \cong \mathbb{R}^m$, cuyo sistema de coordenadas sea compatible con la orientación, y d puntos $c_1, \dots, c_d \in U$ (ninguno si $d = 0$). Vamos a construir una aplicación homótopa a f que solo depende de estos puntos y d .

Escogemos $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f , que, mediante una difeotopía de la esfera (teorema 1.11), podemos mover al polo norte. Entonces, a tiene $2r + d$ preimágenes, de forma que

1. en $d + r$ de las preimágenes, el signo de f es positivo (resp., negativo),
2. en las r restantes, el signo de f es negativo (resp., positivo).

Entonces, escogemos $2r + d$ puntos $p_1, q_1, \dots, p_r, q_r, c_1, \dots, c_d \in U$, y usamos una difeotopía para mover los puntos de $f^{-1}(a)$ como sigue (no se hace nada si no hay puntos que mover):

1. los r en los que f es negativa (resp., positiva) a q_1, \dots, q_r ,
2. algunos r en los que f es positiva (resp., negativa) a p_1, \dots, p_r ,
3. los d restantes a c_1, \dots, c_d .

Identificamos $U \cong \mathbb{R}^m$ mediante el sistema de coordenadas, y nuestros puntos q_k, p_k, c_i están en \mathbb{R}^m . Usamos una difeotopía de \mathbb{R}^m que sea la identidad fuera de una bola suficientemente grande (nuevamente, teorema 1.11) para mover dichos puntos, de forma que

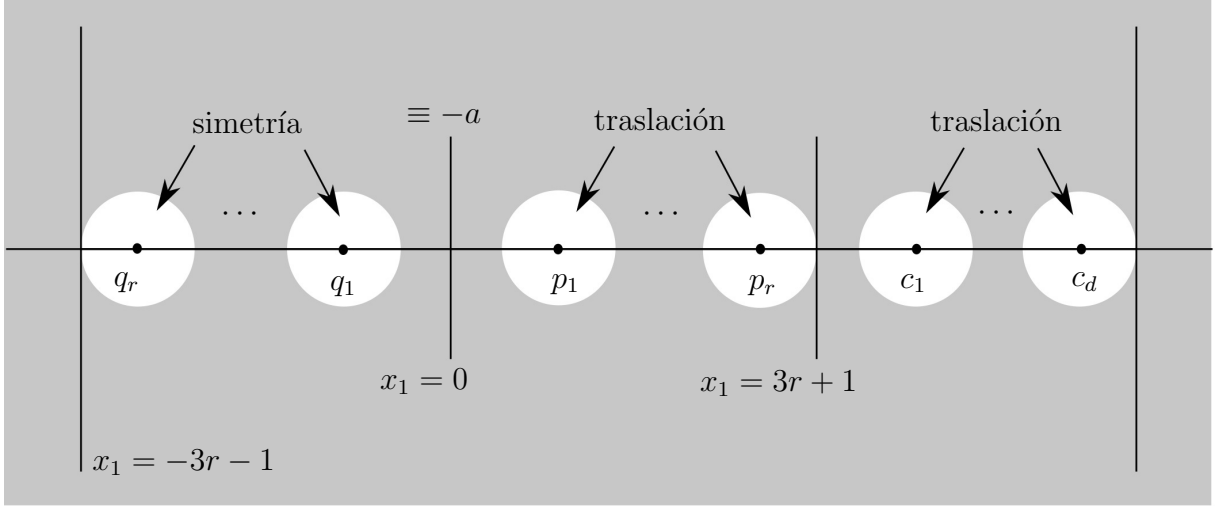
1. $q_k = (-3k, 0, \dots, 0)$,
2. $p_k = (3k, 0, \dots, 0)$,
3. $c_i = (3(s + i), 0, \dots, 0)$ para algún $s \geq r$ fijado.

Ahora, consideramos las aplicaciones que resultan de restringir f a las bolas abiertas de radio 1 centradas en los puntos q_k, p_k, c_i . Aplicamos a estas restricciones la extensión antipodal (8.4 (1)). Estas extensiones antipodales son $\equiv -a$ fuera de dichas bolas, por lo que se pueden pegar para obtener una aplicación diferenciable $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{S}^m$. Además, f y \bar{f} no tienen imágenes antipodales, así que son homótopas, consecuencia del lema 8.1. Aplicamos la linealización y la normalización (8.4 (2), (3)) por separado en las bolas mencionadas. Como \bar{f} es $\equiv -a$ fuera de las bolas, las homotopías correspondientes se

pueden pegar. El resultado es una aplicación $\bar{g} : M \rightarrow \mathbb{S}^m$, homótopa a \bar{f} —luego a f —, que es, en las bolas centradas en q_k, p_k, c_i , respectivamente, la extensión antipodal de

1. la simetría $(x_1, y) \mapsto (-x_1, y) + q_k$,
2. la traslación $(x_1, y) \mapsto (x_1, y) - p_k, y$
3. la traslación $(x_1, y) \mapsto (x_1, y) - c_i$,

donde x_1 es la primera coordenada e y son todas las demás.



Lo importante aquí es que $\bar{g}(-x_1, y) = \bar{g}(x_1, y)$ para $|y| \leq 3r + 1$. Esto implica que la siguiente homotopía está bien definida (y, por tanto, es continua) para $0 \leq t \leq 3r + 1$:

$$H_t(x_1, y) = \begin{cases} \bar{g}(x_1, y), & |x_1| \geq t, \\ \bar{g}(t, y), & |x_1| \leq t. \end{cases}$$

Nótese que esta homotopía en $\mathbb{R}^m \equiv U \subseteq M$ se extiende a M , pues $H_t \equiv -a$ fuera de $-3r - 1 \leq x_1 \leq 3(s + d) + 1$, $\|y\| \leq 1$. Tenemos que $H_0 = \bar{g}$ y

$$H_{3r+1}(x) = \begin{cases} \bar{g}(x) & \text{en las bolas centradas en los puntos } c_i, \\ -a & \text{fuera de dichas bolas.} \end{cases}$$

Esta $h = H_{3r+1}$ es la aplicación que buscamos. Por supuesto, es homótopa a f , el polo norte a es un valor regular de h , $h^{-1}(a) = \{c_1, \dots, c_d\}$ y h es la extensión antipodal de la traslación $(x_1, y) \mapsto (x_1, y) - c_i$ en las bolas unidad centradas en cada c_i . Nótese que si $d = 0$, esta es la aplicación constante $\equiv -a$. \square

Corolario 8.6. *Sea M una variedad compacta, orientada, sin borde y de dimensión m . Entonces,*

$$\pi^m(M) = \mathbb{Z}.$$

En particular, $\pi_m(\mathbb{S}^m) = \pi^m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de los resultados anteriores, pues el grupo de cohomotopía $\pi^m(M) = [M, \mathbb{S}^m]$. \square

Los teoremas que se han visto en esta sección ilustran que los grupos $[M, \mathbb{S}^k]$ cuando $k \leq \dim(M)$ están bien determinados: $[M, \mathbb{S}^k] = \mathbb{Z}$ para $k = \dim(M)$ y $[M, \mathbb{S}^k] = \{0\}$ para $k < \dim(M)$. El problema es, entonces, el caso $k > \dim(M)$, especialmente para esferas $M = \mathbb{S}^p$. El invariante de Hopf es de particular utilidad al estudiar $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$.

Proposición 8.7. *Si existe una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ de invariante de Hopf no nulo, entonces, la aplicación*

$$f_* : \mathbb{Z} = \pi_{2m-1}(\mathbb{S}^{2m-1}) \rightarrow \pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m),$$

$$[g] \mapsto [f \circ g]$$

es inyectiva. En particular, $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$ es infinito.

Demostración. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ tales que $[f \circ g_1] = [f \circ g_2]$. Entonces, $h(f \circ g_1) = h(f \circ g_2)$ y, por la proposición 5.5,

$$h(f) \deg(g_1) = h(f) \deg(g_2).$$

Pero $h(f) \neq 0$, así que $\deg(g_1) = \deg(g_2)$ y el teorema de Hopf 8.5 implica que $[g_1] = [g_2]$. \square

Claramente, las f que parecen más apropiadas para esta construcción son aquellas con $h(f) = \pm 1$. En la siguiente sección, se exploran las *fibraciones de Hopf*, que son un ejemplo clásico de tales aplicaciones.

9. FIBRACIONES DE HOPF. CÁLCULOS EN DIMENSIÓN DOS

Antes de estudiar las fibraciones de Hopf, necesitamos presentar brevemente las nociones de *fibración* y *fibrado*.

(9.1) Fibraciones y fibrados. Dados tres espacios topológicos X, E, B , y aplicaciones $f : E \rightarrow B$, $h : X \rightarrow B$, se dice que $\tilde{h} : X \rightarrow E$ es una *elevación* de h si el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \nearrow \tilde{h} & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Una *fibración de Hurewicz* (o, simplemente, *fibración*) es una aplicación $f : E \rightarrow B$ tal que, para todo espacio topológico X y toda homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow B$ con elevación \tilde{H}_0 de H_0 , existe una elevación \tilde{H} de H .

Por su lado, un *fibrado* es una cuaterna (E, B, f, F) , donde E, B y F son espacios topológicos y $f : E \rightarrow B$ es una aplicación continua sobreyectiva tal que cada punto de B tiene un entorno abierto U y un homeomorfismo $\Phi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E & \longleftarrow & f^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & U \times F \\ f \downarrow & & f \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ B & \longleftarrow & U & & \end{array}$$

es conmutativo, siendo π_1 la proyección sobre el primer factor. Escribimos $F \rightarrow E \rightarrow_f B$, y decimos que $f^{-1}(x) \approx F$ es la *fibra* de x . Resulta que todo fibrado con B paracompacto es una fibración (véase [Spa]), aunque se trata de un resultado muy profundo que no necesitaremos. Nos contentamos con su versión para cuando X es un disco, que es mucho más elemental y su demostración se puede encontrar en [Hat], o con su versión para cuando todos los espacios involucrados son variedades, que se puede encontrar en el trabajo de fin de grado [Cas].

(9.2) Álgebras sobre \mathbb{R} . En lo que sigue, denotamos por $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ a los números reales, complejos, cuaterniones y octoniones, respectivamente. Debemos entenderlos como álgebras sobre \mathbb{R} , esto es, espacios vectoriales reales dotados de un producto bilineal entre vectores. Su producto se obtiene mediante el *procedimiento de Cayley-Dickson*, que, partiendo de \mathbb{R} , proporciona álgebras duplicando el número de coordenadas y definiendo un producto y una involución, la *conjugación*, que denotamos con un asterisco. Resulta que, hasta \mathbb{O} , todas ellas son de división. El producto en \mathbb{H} y en \mathbb{O} no es conmutativo, y tampoco asociativo en \mathbb{O} . Para realizar manipulaciones algebraicas en \mathbb{F} , conviene tener en cuenta las siguientes propiedades: si $z, w \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{F}$,

- $rz = zr$;
- $|z|^2 = zz^* = z^*z$, y $|\bullet|$ es la norma euclídea en \mathbb{R}^m , así que $z^{-1} = z^*/|z|^2$ si $z \neq 0$;
- $|zw| = |z||w|$;
- $(zw)^* = w^*z^*$, por tanto, $(zw)^{-1} = w^{-1}z^{-1}$;
- $z(z^*w) = (zz^*)w$ y $(wz)z^* = w(zz^*)$, luego $z(z^{-1})w = w$ y $(wz)z^{-1} = w$.

(9.3) Las fibraciones de Hopf. Ahora, consideramos el plano $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$, con la topología euclídea. La recta proyectiva $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ es el cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1}z_0 = w_1^{-1}w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Equipamos $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ con la topología imagen directa por el paso al cociente

$$p : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^1, (z_0, z_1) \mapsto (z_0 : z_1).$$

Se puede comprobar fácilmente que $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ es Hausdorff con esta topología. Además, nótese que la restricción de p a $\mathbb{S}^{2m-1} \subseteq \mathbb{F}^2$ sigue siendo sobreyectiva. En particular, $p|_{\mathbb{S}^{2m-1}}$ es una identificación cerrada, pues \mathbb{S}^{2m-1} es compacto y $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$, Hausdorff. En particular, $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ es compacta y se obtiene añadiendo un punto a \mathbb{F} , por lo que es la compactificación de Alexandroff de \mathbb{F} , pongamos $\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Explícitamente,

$$\psi : \mathbb{F}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}_\infty, (z_0 : z_1) \mapsto \begin{cases} z_1^{-1}z_0, & z_1 \neq 0, \\ \infty, & z_1 = 0 \end{cases}$$

es un homeomorfismo: es continua y ambos espacios son compactos y separados. Finalmente, es bien conocido que la compactificación por un punto de $\mathbb{F} \equiv \mathbb{R}^m$ es la esfera \mathbb{S}^m , por lo que tenemos un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{F}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^m$ fácil de explicitar por proyección

estereográfica, como se verá más adelante. En todo caso, $\mathbb{F}\mathbb{P}^1 \stackrel{\varphi \circ \psi}{\cong} \mathbb{S}^m$, y las aplicaciones

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^m, \quad (z_0, z_1) \mapsto (z_0 : z_1),$$

entendidas como aplicaciones $\varphi \circ \psi \circ p : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$, son las *fibraciones de Hopf*. A partir de este punto, el símbolo f se referirá a una de estas fibraciones de Hopf.

Proposición 9.4. *Las fibraciones de Hopf son fibrados —luego fibraciones— en los que todos los espacios involucrados son esferas. Concretamente, se tiene*

$$\mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow_f \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow_f \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^7 \rightarrow_f \mathbb{S}^4, \quad \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^{15} \rightarrow_f \mathbb{S}^8.$$

Demostración. Cualquier fibra $f^{-1}(x)$ es una \mathbb{F} -recta vectorial en \mathbb{F}^2 cortada con \mathbb{S}^{2m-1} , es decir, un subespacio real de dimensión m intersecado con la esfera, esto es, una esfera \mathbb{S}^{m-1} .

Veamos que $p : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^1$ es un fibrado. Recubrimos $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ con los abiertos $\{z_i \neq 0\}$, $i = 0, 1$, y definimos las aplicaciones $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{S}^{m-1}$, $\Psi_i : U_i \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow p^{-1}(U_i)$ dadas por

$$\begin{aligned} \Phi_0(z_0, z_1) &= ((z_0 : z_1), z_0/|z_0|), & \Psi_0((z_0 : z_1), \lambda) &= (\lambda, \lambda(z_0^{-1}z_1)) / \|(\lambda, \lambda(z_0^{-1}z_1))\|, \\ \Phi_1(z_0, z_1) &= ((z_0 : z_1), z_1/|z_1|), & \Psi_1((z_0 : z_1), \lambda) &= (\lambda(z_1^{-1}z_0), \lambda) / \|(\lambda(z_1^{-1}z_0), \lambda)\|. \end{aligned}$$

Se puede comprobar algebraicamente (usando las propiedades descritas en 9.2) que Φ_i y Ψ_i son mutuamente inversas, y, como son continuas, homeomorfismos. \square

En el caso $m = 1$, obtenemos la identificación antipodal $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$. En los otros casos, tenemos aplicaciones $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con $m \geq 2$, por lo que podemos hablar de su invariante de Hopf. Resulta que todas tienen invariante de Hopf uno. Recuérdese que en la introducción se mencionó que una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ con invariante de Hopf uno solo existe para $m = 2, 4, 8$. En este trabajo, por la simplicidad de los cálculos, veremos que la fibración de Hopf compleja tiene invariante de Hopf uno. Para ello, vamos a explicitar la forma de las fibraciones de Hopf con $m \geq 2$:

Proposición 9.5. *Las fibraciones de Hopf $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ están dadas por la fórmula*

$$f(z_0, z_1) = (|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_1^*z_0),$$

entendiendo $\mathbb{S}^{2m-1} \subseteq \mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{F}^2$, y las operaciones de $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

Demostración. En este caso, entendemos la fibración f como la composición de

- el paso al cociente $p : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^1, (z_0, z_1) \mapsto (z_0 : z_1)$,
- el homeomorfismo $\psi : \mathbb{F}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}^*$:

$$\psi : (z_0 : z_1) \mapsto \begin{cases} z_1^{-1}z_0, & \text{si } z_1 \neq 0, \\ \infty, & \text{si } z_1 = 0, \end{cases} \quad \psi^{-1} : z \mapsto \begin{cases} (z : 1), & \text{si } z \neq \infty, \\ (1 : 0), & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

- y la proyección estereográfica desde $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^m$, $\varphi : \mathbb{F}^* \rightarrow \mathbb{S}^m$:

$$\varphi : z \mapsto \begin{cases} \frac{(|z|^2 - 1, 2z)}{|z|^2 + 1}, & \text{si } z \neq \infty, \\ (1, 0, \dots, 0), & \text{si } z = \infty, \end{cases} \quad \varphi^{-1} : (t, w) \mapsto \begin{cases} \frac{w}{1-t}, & \text{si } t \neq 1, \\ \infty, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Utilizando las propiedades algebraicas de \mathbb{F} y componiendo las tres fórmulas:

$$\begin{aligned} f(z_0, z_1) = \varphi(z_1^{-1}z_0) &= \frac{(|z_1^{-1}z_0|^2 - 1, 2z_1^{-1}z_0)}{|z_1^{-1}z_0|^2 + 1} = \frac{(|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_1^*z_0)}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \\ &= (|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_1^*z_0), \end{aligned}$$

que también es verdad si $z_1 = 0$. □

Y, ahora:

Proposición 9.6. *El invariante de Hopf de $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es 1.*

Demostración. Dividimos la demostración en cuatro pasos:

- Encontrar una 2-forma ω en \mathbb{S}^2 con $\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 1$.
 - Retrotraerla a \mathbb{S}^3 mediante f .
 - Encontrar una 1-forma α en \mathbb{S}^3 tal que $d\alpha = f^*\omega$.
 - Calcular $h(f) = \int_{\mathbb{S}^3} \alpha \wedge d\alpha$.
- (a) Una 2-forma ω en \mathbb{S}^2 con $\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 1$.

La forma de volumen habitual en la esfera es

$$\Omega_x = \det(x, \bullet) = x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

que tiene $\int_{\mathbb{S}^2} \Omega = 4\pi$. Por tanto, $\omega = \frac{1}{4\pi} \Omega$ cumple lo que buscábamos.

En el abierto $\{x_3 \neq 0\}$ de \mathbb{S}^2 , cuyo complementario tiene medida nula, la forma ω tiene una expresión más simple. En efecto, como $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, entonces, $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0$. Esto permite eliminar dx_3 de la expresión de ω :

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3}.$$

- Retrotraerla a \mathbb{S}^3 mediante f .

La forma explícita de f en este caso es

$$f : \begin{cases} x_1 = x^2 + y^2 - u^2 - v^2 \stackrel{(*)}{=} 2(x^2 + y^2) - 1, \\ x_2 = 2(xu + yv), \\ x_3 = 2(yu - xv), \end{cases}$$

donde $(*)$ es consecuencia de que $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$. Entonces:

$$f^*\omega = f^* \left(\frac{1}{4\pi} \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{d(x^2 + y^2) \wedge d(xu + yv)}{yu - xv} = -\frac{1}{\pi} d(xdy + u dv).$$

(c) Una 1-forma α en \mathbb{S}^3 tal que $d\alpha = f^*\omega$.

Evidentemente, $\alpha = -\frac{1}{\pi}(xdy + u dv)$ es una primitiva de $f^*\omega$.

(d) Calcular $h(f) = \int_{\mathbb{S}^3} \alpha \wedge d\alpha$.

El invariante de Hopf de la fibración de Hopf compleja es:

$$\begin{aligned} h(f) &= \int_{\mathbb{S}^3} \alpha \wedge d\alpha = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} (xdy \wedge du \wedge dv + u dv \wedge dx \wedge dy) \\ (\text{por simetría}) &= \frac{2}{\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} xdy \wedge du \wedge dv. \end{aligned}$$

Para calcular dicha integral, usamos coordenadas esféricas $0 < \xi < \pi$, $0 < \phi < \pi$, $0 < \theta < 2\pi$:

$$\begin{cases} x = \sin(\xi) \sin(\phi) \cos(\theta), \\ y = \sin(\xi) \sin(\phi) \sin(\theta), \\ u = \sin(\xi) \cos(\phi), \\ v = \cos(\xi), \end{cases}$$

de manera que la integral se convierte en

$$\begin{aligned} h(f) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\xi)^4 \sin(\phi)^3 \cos(\theta)^2 d\theta d\phi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \sin(\xi)^4 d\xi \int_0^\pi \sin(\phi)^3 d\phi \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{2}{\pi^2} \frac{3\pi}{8} \frac{4}{3} \pi = 1. \end{aligned} \quad \square$$

(9.7) Interpretación geométrica. Este invariante de Hopf también se puede calcular geoméricamente. Tomando coordenadas polares en \mathbb{C} , la fibración $f \equiv p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ se escribe $(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) \mapsto (r_0 e^{i\theta_0} : r_1 e^{i\theta_1})$, con $r_0^2 + r_1^2 = 1$. Si $r_1 \neq 0$, para un ratio fijo r_0/r_1 , los ángulos θ_i recorren independientemente \mathbb{S}^1 , de forma que los puntos $(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1})$ forman un toro $T_\rho \subseteq \mathbb{S}^3$. Según varía $0 < \rho < \infty$, estos toros llenan la totalidad de \mathbb{S}^3 salvo los dos casos límite, donde los radios r_0 y r_1 son 0, respectivamente, en cuyo caso los toros degeneran a circunferencias T_0 y T_∞ . Estas dos circunferencias son las circunferencias unidad en los factores $\mathbb{C} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{C}$, respectivamente, así que, mediante la proyección estereográfica $\Phi : \mathbb{S}^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ desde el polo norte, cuyas ecuaciones son

$$(x, y, u, v) \mapsto \left(\frac{x}{1-v}, \frac{y}{1-v}, \frac{u}{1-v} \right),$$

T_0 y T_∞ se corresponden con la circunferencia unidad en el plano xy y con el eje z , respectivamente. Los toros concéntricos T_ρ se disponen según la siguiente figura:

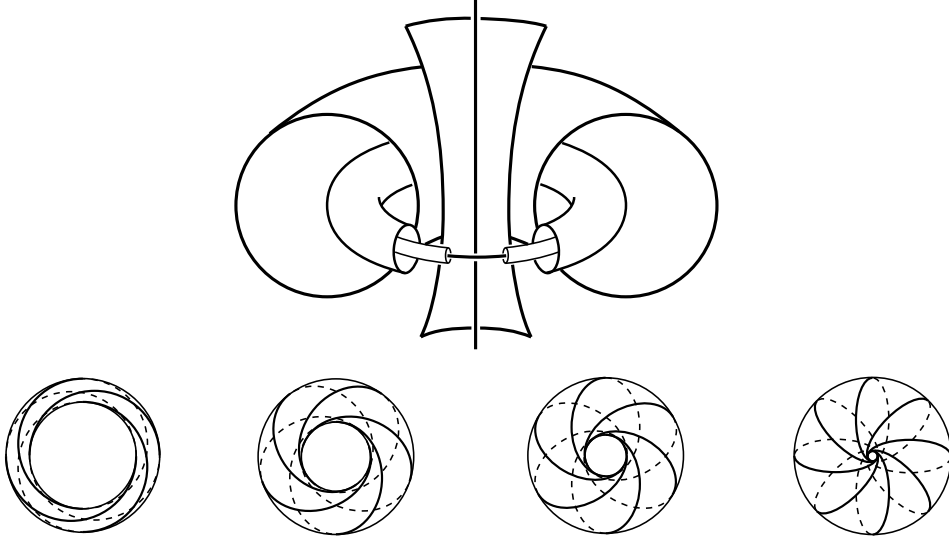


FIGURA 3. Imagen mediante proyección estereográfica $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de los toros formados por las fibras de la fibración de Hopf compleja $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow_f \mathbb{S}^2$ (figura tomada de [Hat], §4.2, ejemplo 4.45).

Cada toro es unión de fibras \mathbb{S}^1 , cada una dada por los pares (θ_0, θ_1) con $\theta_0 - \theta_1$ constante. Dichas fibras tienen pendiente 1 en el toro, de forma que le dan una vuelta longitudinal y meridionalmente a la vez. Según ρ se acerca a 0 o a ∞ , las fibras \mathbb{S}^1 se parecen más a T_0 o a T_∞ . Por último, si se miran desde arriba (esto es, desde un punto en el eje z positivo), las fibras están orientadas en el sentido de las agujas del reloj, mientras que T_∞ está orientado en el sentido positivo de la variable z .

Según la definición 7.2 del invariante de Hopf como número de enlace, el invariante de Hopf de la fibración de Hopf será el número de enlace de cualesquiera dos fibras. Atendiendo a la descripción anterior, dicho número de enlace es 1.

Finalmente, veremos cómo la fibración de Hopf compleja, $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, induce isomorfismos entre los grupos de homotopía de $\pi_n(\mathbb{S}^3)$ y $\pi_n(\mathbb{S}^2)$. El argumento que damos está relacionado con la *exactitud* de la fibración $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, véase [Hat].

Teorema 9.8. *Sea $n \geq 3$. Entonces, la aplicación*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_n(\mathbb{S}^3) &\rightarrow \pi_n(\mathbb{S}^2), \\ [g] &\mapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. En particular, $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $I = [0, 1]$. Denotamos por ∂I^n a la frontera topológica de I^n en \mathbb{R}^n . Las clases de homotopía de aplicaciones $g : \mathbb{S}^n \rightarrow X$, donde X es un espacio topológico conexo por caminos, se pueden identificar con las clases de homotopía de aplicaciones $\equiv g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, siendo $x_0 \in X$ cualquier punto, pues $\mathbb{S}^n \approx I^n / \partial I^n$, y donde las homotopías son constantes en ∂I^n . Además, denotaremos por J^{n-1} a la adherencia

de $\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{1\})$. Nótese que existe un homeomorfismo $\varphi_n : I^n \rightarrow I^n$ que hace corresponder $I^{n-1} \times \{0\}$ con J^{n-1} y el resto de caras con $I^{n-1} \times \{1\}$.

Dicho esto, dividimos la prueba en dos partes: se verá la sobreyectividad y la inyectividad de f_* por separado.

Sobreyectividad. Dada una $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^2$, existe una $G : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^3$ tal que $f \circ G \simeq g$. En efecto, viendo g como una aplicación $g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\mathbb{S}^2, x_0)$, resulta que $g : I^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una homotopía con $g_0 = g|_{I^{n-1} \times \{0\}} \equiv x_0$. Escogido un $y_0 \in f^{-1}(x_0) =: F$, la aplicación $\tilde{g}_0 \equiv y_0$ es una elevación de g_0 . Al ser f una fibración (9.1), existe una \tilde{g} que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^3 \\ & \nearrow \exists \tilde{g} & \downarrow f \\ I^{n-1} \times [0, 1] & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

En concreto, $\tilde{g} : I^n \rightarrow \mathbb{S}^3$ cumple que $\tilde{g}|_{I^{n-1} \times \{0\}} \equiv y_0$ y $f \circ \tilde{g} = g$. Componiendo con el homeomorfismo φ_n , podemos suponer directamente que $\tilde{g}|_{J^{n-1}} \equiv y_0$, mientras que, por ser $f \circ \tilde{g} = g$, $\tilde{g}(I^{n-1} \times \{1\}) \subseteq F$.

Así, como $\pi_{n-1}(\mathbb{S}^1) = 0$ (elemental, véase [PJR]), la aplicación

$$\tilde{g}|_{I^{n-1} \times \{1\}} : (I^{n-1} \times \{1\}, \partial(I^{n-1} \times \{1\})) \rightarrow (F, y_0) \equiv (\mathbb{S}^1, y_0)$$

es nulhomótopa, pongamos, mediante una homotopía $H_t : (I^{n-1} \times \{1\}) \rightarrow F$ que deja $\partial(I^{n-1} \times \{1\})$ fija en y_0 . Sea $G : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\mathbb{S}^3, y_0)$ la aplicación que resulta de pegar las aplicaciones \tilde{g} y H :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline y_0 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \tilde{g} \\ \hline F \\ \hline \end{array} \\ \hline y_0 \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{|c|} \hline y_0 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \tilde{g} \\ \hline F \\ \hline H \\ \hline \end{array} \\ \hline y_0 \end{array} \end{array}$$

Además, \tilde{g} y G son homótopas en \mathbb{S}^3 mediante la homotopía \tilde{H} que consiste en ir pegando a g segmentos de H cada vez más largos: $\tilde{H}_t : I^n \rightarrow \mathbb{S}^3$,

$$\tilde{H}_t(y, x_n) = \begin{cases} \tilde{g}\left(y, \frac{x_n}{1-t/2}\right), & x_n \leq 1-t/2, \\ H(y, x_n - (1-t/2)), & x_n \geq 1-t/2, \end{cases}$$

donde y son las primeras $n-1$ coordenadas y x_n es la última. Así, $f \circ \tilde{H}$ es una homotopía entre $f \circ \tilde{H}_0 = f \circ \tilde{g} = g$ y $f \circ \tilde{H}_1 = f \circ G$.

Inyectividad. Sean $g, g' : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^3$ dos aplicaciones tales que $f \circ g \simeq f \circ g'$. De nuevo, se pueden ver como aplicaciones $g, g' : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\mathbb{S}^2, x_0)$ tales que $f \circ g$ y $f \circ g'$ son homótopas mediante una homotopía que deja constante ∂I^n , sea esta homotopía

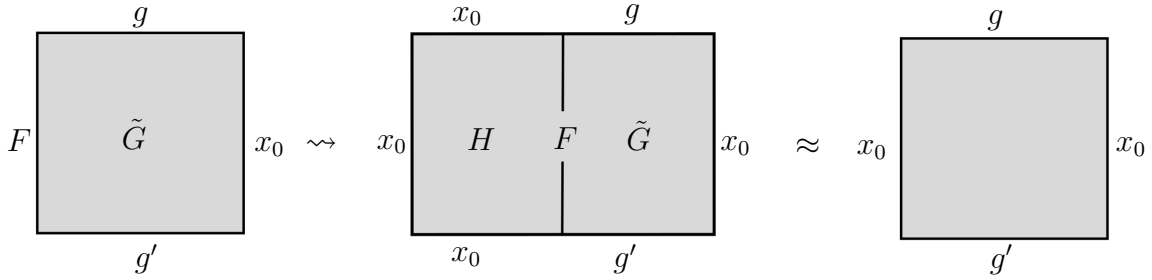
$G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (\mathbb{S}^2, f(x_0))$. Aplicamos de nuevo la propiedad de levantamiento de homotopías 9.1

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^3 \\ & \nearrow \exists \tilde{G} & \downarrow f \\ I^n \times I & \xrightarrow{G} & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

a partir de las elevaciones parciales $\tilde{G}|_{I^n \times \{0\}} = g$, $\tilde{G}|_{I^n \times \{1\}} = g'$, $\tilde{G}|_{J^{n-1} \times I} \equiv x_0$ (estas tres elevaciones parciales, por homeomorfismo de $I^n \times I$ en sí mismo, equivalen a una elevación parcial definida únicamente en $I^n \times \{0\}$). Se obtiene una $\tilde{G} : I^n \times I \rightarrow \mathbb{S}^3$, homotopía entre g y g' , tal que $f \circ \tilde{G} = G$ y, por tanto,

$$\tilde{G}_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{S}^3, F, x_0),$$

donde $F = f^{-1}f(x_0) \equiv \mathbb{S}^1$. Volvemos a utilizar que $\pi_n(\mathbb{S}^1) = 0$ para encontrar una homotopía H entre $\tilde{G}|_{I^{n-1} \times \{1\} \times I} : (I^{n-1} \times \{1\} \times I, \partial(I^{n-1} \times \{1\} \times I))$ y x_0 que fije la frontera, y la pegamos a \tilde{G} . Mediante homeomorfismo en el espacio resultante de pegar estas dos aplicaciones, obtenemos una homotopía $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (\mathbb{S}^3, x_0)$ entre g y g' . La siguiente figura ilustra el argumento:



□

El invariante de Hopf simplifica la prueba de la inyectividad para el caso $n = 3$: si dos aplicaciones $g, g' : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ cumplen que $f \circ g \simeq f \circ g'$, entonces, $h(f \circ g) = h(f \circ g')$. Usando la proposición 4.6,

$$\deg(g) = \deg(g) h(f) = h(f \circ g) = h(f \circ g') = \deg(g') h(f) = \deg(g'),$$

y el teorema de Hopf 8.5 implica que $g \simeq g'$.

Por otro lado, el invariante de Hopf da un isomorfismo explícito $h(f) : \pi_3(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$:

Sobreyectividad. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, existe una $g : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ de grado k (lema 8.3), y, por la proposición 4.6,

$$h(f \circ g) = h(f) \deg(g) = k,$$

esto es, la aplicación $f \circ g : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tiene invariante de Hopf igual a k .

Inyectividad. Supongamos que $g, g' : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ son dos aplicaciones con el mismo invariante de Hopf. Por la sobreyectividad de f_* (teorema 9.8), existen $G, G' : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tales que

$$g \simeq f \circ G, \quad g' \simeq f \circ G'.$$

Aplicando de nuevo la proposición 4.6, $\deg(G) = h(g) = h(g') = \deg(G')$. El teorema de Hopf 8.5 dice que G y G' son homótopas, luego

$$g \simeq f \circ G \simeq f \circ G' \simeq g'.$$

REFERENCIAS

- [Ad60] ADAMS, J. F. (1960). On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Annals of Mathematics*, 20-104. 2
- [ArK] ARNOLD, V. I., & KHESIN, B. A. (2009). *Topological methods in hydrodynamics* (Vol. 19). New York: Springer. 2, 23
- [BT] BOTT, R., & TU, L. W. (1982). *Differential forms in algebraic topology* (Vol. 82). New York: Springer. 21, 23
- [Cas] CASADO, R. (2021). *Cohomología de de Rham y fibraciones de esferas*. Trabajo de fin de grado, Universidad Complutense de Madrid.
Disponible en <http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/dfps/>. 32
- [Cor] CORDERO, P. (2021). *Cohomología de de Rham en variedades*. Trabajo de fin de grado, Universidad Complutense de Madrid.
Disponible en <http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/dfps/>. 9
- [Est] ESTEBAN, P. (2019). *Cohomología de de Rham y grado de Brouwer-Kronecker*. Trabajo de fin de grado, Universidad Complutense de Madrid.
Disponible en <http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/dfps/>. 29
- [GRz] GAMBOA, J. M., & RUIZ, J. M. (2022). *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*. Sanz y Torres. 3, 4, 6
- [Hat] HATCHER, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press. 4, 32, 36
- [Hopf31] HOPF, H. (1931). Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann*, 104(1), 637-665. 1
- [Hopf35] HOPF, H. (1935). Über die abbildungen von sphären auf sphäre niedrigerer dimension. *Fundamenta Mathematicae*, 25(1), 427-440. 1
- [Hus] HUSEMÖLLER, D. (1966). *Fibre bundles* (Vol. 5). New York: McGraw-Hill. 2
- [ORz] OUTERELO, E., & RUIZ, J. M. (2009). *Mapping Degree Theory*. American Mathematical Society. 3, 4, 5, 21, 23
- [ORRz] OUTERELO, E., ROJO, J. A., & RUIZ, J. M. (2023). *Topología Diferencial*. Sanz y Torres. 3, 6
- [PJR] PORRAS, J. D., JAENADA, M., & RUIZ, J. M. (2019). *Topología Algebraica muy elemental en dimensión muy baja*. Sanz y Torres. 37
- [Spa] SPANIER, E. (1966). *Algebraic topology*. McGraw-Hill. 32
- [Wh] WHITE, J. H. (1968). *Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions*. University of Minnesota. 23
- [Wh47] WHITEHEAD, J. H. C. (1947). An expression of Hopf's invariant as an integral. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 33(5), 117-123. 1
- [Wtn] WHITNEY, H. (1957). *Geometric integration theory*. Princeton University Press. 19