

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA, ÁLGEBRA Y TOPOLOGÍA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

El Teorema de Jordan-Brouwer

On the Jordan-Brouwer Separation Theorem

Supervisor/es: Jesús M. Ruiz

Fernando Aparicio García

Grado en Matemáticas

Curso académico 2024-25

Convocatoria Ordinaria

Madrid, 30 de junio de 2025

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2025

EL TEOREMA DE JORDAN-BROUWER

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA, ÁLGEBRA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM
DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

FERNANDO APARICIO GARCÍA

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es presentar una demostración elemental del Teorema de Jordan-Brouwer en su versión clásica, que puede enunciarse de la siguiente manera: *toda hipersuperficie diferenciable de \mathbb{R}^n sin borde y cerrada en \mathbb{R}^n lo desconecta*. El Teorema de la función inversa nos garantiza que localmente se da esta separación, y lograremos extenderla a todo el espacio usando nociones básicas de topología elemental y un sencillo resultado acerca de grafos bipartitos. Después, interpretaremos esta demostración desde el punto de vista de la teoría de transversalidad, analizaremos cómo la desconexión obtenida induce una ecuación global para la hipersuperficie diferenciable, y estudiaremos una amplia familia de espacios topológicos donde se cumple una versión más general del teorema de Jordan-Brouwer mediante la cohomología de Čech.

ABSTRACT. The aim of this work is to provide an elementary proof of the classical version of the Jordan-Brouwer separation theorem, which can be stated as follows: *every boundaryless smooth hypersurface closed in \mathbb{R}^n disconnects \mathbb{R}^n* . The inverse function theorem implies that this separation holds locally, and we will extend the separation to the whole space using basic notions of point-set topology and a simple result about bipartite graphs. Later on, we will interpret this proof in the context of transversality theory, construct global equations for these hypersurfaces from the obtained division of the space, and analyze a large family of topological spaces where a more general version of the Jordan-Brouwer separation theorem holds using Čech cohomology.

ÍNDICE

Introducción	2
1. Divisiones y separaciones	4
1.1. El concepto de división	4
1.2. Separación local	5
2. Grafos de adherencia	7
2.1. Breve repaso de la teoría de grafos	7
2.2. El Grafo de adherencia	8
2.3. Topología y grafos	8
2.4. Otra aplicación del Grafo de adherencia	10
3. El Teorema principal	11
3.1. Operaciones con divisiones	11
3.2. Demostración del Teorema de Jordan-Brouwer	13
3.3. El núcleo de la demostración: Inducción por conexos	14
4. Divisiones via transversalidad	15
4.1. División via transversalidad	15
4.2. Jordan-Brouwer mediante aproximaciones transversales	16
4.3. Operaciones con divisiones via transversalidad	18
5. Ecuaciones globales	21
5.1. Orientabilidad y ecuación global de una hipersuperficie	22
5.2. La construcción de E.L. Lima	23
5.3. Otra construcción sin hipótesis de orientabilidad	23
6. Divisiones de otros espacios	26
6.1. Cohomología de Čech	27
6.2. Inducción por conexos y cohomología de Čech	30

INTRODUCCIÓN

Históricamente, el teorema de Jordan-Brouwer se ha demostrado de distintas maneras. Herramientas como la Teoría del Grado [11], la Cohomología de de Rham [8] y la Teoría de Transversalidad [7],[9] son las más habituales en la bibliografía que abarca este teorema, y requieren un análisis profundo de la estructura diferenciable de las variedades [10], [11]. A menudo se impone una condición de orientabilidad de la hipersuperficie, aunque se puede obtener por transversalidad [12]. También puede recurrirse a la Topología Algebraica y herramientas avanzadas suyas como la Dualidad de Alexander-Lefschetz, que además permiten generalizar el resultado a hipersuperficies topológicas [5], [13].

La única propiedad que utilizamos de la variedades diferenciables es su plitud local (*local flatness*), una consecuencia inmediata del Teorema de la Función Inversa: dos variedades diferenciables $M \subset N$ son localmente difeomorfas a $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$. En consecuencia, las hipersuperficies diferenciables separan entornos suficientemente pequeños en dos componentes conexas, es decir, *separan localmente*. El resultado principal de este trabajo es el siguiente:

Si un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n lo separa localmente, entonces lo desconecta.

En particular, toda hipersuperficie topológica cerrada y localmente plana desconecta a \mathbb{R}^n . La platitud local topológica es un tema de importancia en relación con estos problemas de desconexión [1]. Sin platitud la situación local es mucho más delicada [6]. En realidad, el resultado demuestra algo más que simplemente *desconectar* el espacio: En la Sección 1 definimos concepto de *división*, donde, además de desconexión, se pide que las componentes conexas se puedan agrupar de manera especial. Bajo la hipótesis de separación local, esta manera de agrupar las componentes conexas es a menudo única, y ésto lo deduciremos en la Sección 2 a través de un sencillo resultado sobre grafos bipartitos. En la Sección 3, aplicamos esta propiedad de unicidad para pegar divisiones de conjuntos bajo ciertas condiciones. En particular, podremos pegar las divisiones de rectángulos, los cuales apilaremos cuidadosamente hasta dividir todo \mathbb{R}^n , demostrando así nuestra versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer.

En la Sección 4 de este trabajo visitamos el Teorema de Jordan-Brouwer desde el punto de vista de la teoría de transversalidad. Primero resumimos una demostración típica de este teorema que hace uso del Teorema de Aproximación Transversal, un resultado profundo de la topología diferencial [10], y deducimos que la desconexión obtenida es una división. Después vemos que las operaciones de pegado de divisiones descritas en la Sección 3 son válidas en el contexto de transversalidad. Ésto nos permite deducir, gracias al método de apilar rectángulos descrito anteriormente, y sin necesidad del Teorema de Aproximación Transversal, que toda hipersuperficie diferenciable cerrada en \mathbb{R}^n y sin borde divide \mathbb{R}^n por transversalidad.

La Sección 5 se centra en encontrar una ecuación global para una hipersuperficie diferenciable $M \subset \mathbb{R}^n$ dada. Es decir, una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = M$ y cuyo gradiente no se anula en M . Las variedades diferenciables se caracterizan por el hecho de que se existen este tipo de ecuaciones a nivel local, pero raramente se pueden extender a una ecuación global. Por ello es sorprendente que sí sea posible para toda hipersuperficie diferenciable del espacio euclídeo. Empezaremos explotando la división del espacio para encontrar una orientación de M , y con ella la ecuación global. Después exploramos dos construcciones propuestas por E.L. Lima [7], una que sólo requiere la orientabilidad de M , y otra que es capaz de evitarla por completo, y cuyos argumentos tienen una naturaleza muy similar a la demostración principal de este trabajo.

Por último, en la Sección 6 estudiamos para qué espacios topológicos se cumple la versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer que enunciamos al principio de la introducción. Es decir, qué espacios topológicos se desconectan por cualquier cerrado que los separe localmente. Definimos el concepto de *inducción por conexos*, equivalente a poder construir el espacio a partir de cualquier recubrimiento suyo mediante las operaciones de abiertos que utilizamos en la Sección 3 para pegar divisiones. Por ejemplo, el hecho de que \mathbb{R}^n es inductivo por conexos ha sido clave para demostrar los resultados principales de este trabajo. Después, demostramos que todo espacio topológico inductivo por conexos cumple que $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$ en la cohomología de Čech, y que en todo espacio donde $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$ se verifica la versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer.

Antes de comenzar con el contenido principal, cabe recalcar que las ideas de división, separación local y operaciones de divisiones sobre las que se construye este trabajo fueron desarrolladas por el autor antes de conocer las construcciones de Lima para ecuaciones globales a pesar de su sorprendente similitud. La mayoría de este trabajo se dedica a explorar estas ideas en distintos contextos, ya sea el de divisiones, transversalidad o el de la cohomología de Čech. Fue a la hora de explorar toda la bibliografía existente que descubrimos que en el fondo la idea *no era nueva*. No obstante, esta revelación fue más un alivio que una decepción para el autor, pues en cierto modo confirma los resultados expuestos en este trabajo. Como es bien sabido, si algo no está en la literatura, es probablemente falso [2].

1 DIVISIONES Y SEPARACIONES

Como decimos en la introducción, debemos precisar bien el concepto de división que será central en nuestro trabajo.

1.1 EL CONCEPTO DE DIVISIÓN

Definición 1.1.1. Sea X un espacio localmente conexo, $M \subset X$ un cerrado, y $G \subset X$ un abierto conexo. Se dice que M divide G si existen dos abiertos disjuntos W_1, W_2 tales que

$$G \setminus M = W_1 \cup W_2 \quad \text{y} \quad \partial W_1 \cap G = M \cap G = \partial W_2 \cap G$$

Diremos que W_1 y W_2 son *mitades de $G \setminus M$* , y que el par $\{W_1, W_2\}$ es una *división de (G, M)* . Si $G \cap M = \emptyset$, entonces $\{G, \emptyset\}$ es por definición una división válida de $G \setminus M$. Cuando $M \cap G$ es no vacío y las mitades W_1, W_2 son conexas, diremos que M separa G .

Nótese que cualquier componente conexa V de $G \setminus M$ ha de estar contenida en una de las mitades de la división. De lo contrario, $W_1 \cap V$ y $W_2 \cap V$ serían abiertos complementarios no vacíos en V , contra su conexión. Presentamos a continuación una serie de ejemplos para familiarizarse con los conceptos de división y separación:

Ejemplos 1.1.2. (1) *Hiperplanos en \mathbb{R}^n* . Cualquier hiperplano afín $H^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ divide al espacio en dos componentes conexas cuyo borde es precisamente H . Es decir, H separa \mathbb{R}^n .

Si M consiste en dos hiperplanos paralelos, entonces las mitades serán la banda central y el exterior. Este último no es conexo, así que M divide a \mathbb{R}^n , pero no lo separa. Si añadimos otro hiperplano paralelo a M , ninguna de las dos mitades es conexa.

Por último, consideremos el conjunto $M := \{y = 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, formado por infinitas rectas paralelas. En este caso existen dos posibles divisiones para $\mathbb{R}^2 \setminus M$ (ver Fig. 1). Es decir, que M divide al espacio en dos formas “esencialmente distintas”. Este ejemplo se puede extrapolar a cualquier número de dimensiones.

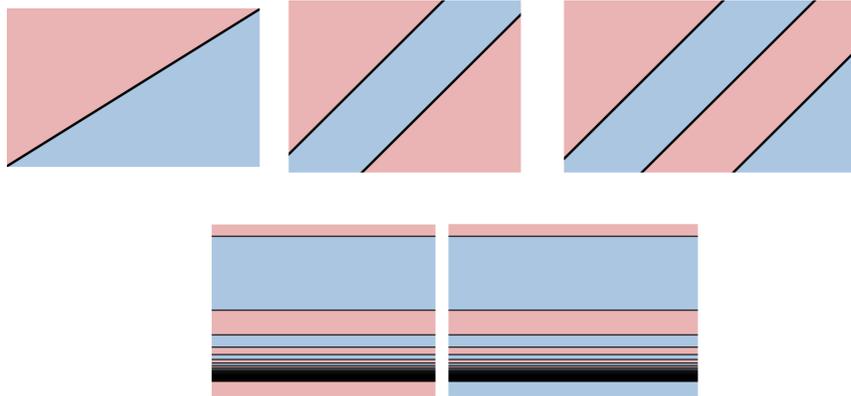


Figura 1: Ejemplos de divisiones válidas para distintos conjuntos de hiperplanos.

(2) *Segmentos en el disco*. Es claro que un par de radios separan el disco agujereado $G = \{0 < \|(x, y)\| < 1\}$ (véase la Fig. 2). Un solo radio no lo desconecta, mucho menos lo divide. Y aunque tres radios desconecten G , no lo dividen, pues no hay manera de agrupar las componentes conexas correctamente para hallar una división. Por lo tanto, la división y la desconexión no son equivalentes.

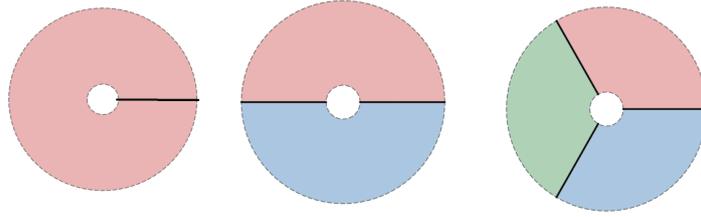


Figura 2: Ejemplos de división y no-división para segmentos en un disco.

El concepto de división es más fuerte que el de desconexión: la construcción de las mitades se puede interpretar como la elección de un signo en cada componente de $G \setminus M$ de tal forma que ningún par de componentes adyacentes lo compartan. Más adelante definiremos esta adyacencia con precisión a través de los *Grafos de Adherencia*.

Observación 1.1.3. Es posible relajar las condiciones de una división: dos abiertos disjuntos W_1, W_2 tales que $G \setminus M = W_1 \cup W_2$ y $G \cap M \subset \overline{W_1} \cap \overline{W_2}$ forman una división de (G, M) .

En efecto, tenemos por un lado que $G \cap M \subset G \cap (\overline{W_1} \setminus W_1) = G \cap \partial W_1$. Por otra parte, como W_1 no tiene frontera en $G \setminus M$, se deduce que $G \cap \partial W_1 \subset G \cap M$. Análogamente, $G \cap M = G \cap \partial W_2$.

1.2 SEPARACIÓN LOCAL

Como es habitual, X es un espacio localmente conexo. El concepto de separación local se define naturalmente de la siguiente manera:

Definición 1.2.1. Sea $M \subset X$ cerrado. Diremos que M *separa localmente* X cuando separa entornos arbitrariamente pequeños de cada $x \in M$.

Ejemplos 1.2.2. (1) Los hiperplanos vectoriales separan localmente \mathbb{R}^n .

(2) Si M separa localmente X , entonces también separa localmente todos sus abiertos.

(3) Todos los conjuntos de segmentos del Ejemplo 1.1.2(2) separan localmente el disco.

(4) Más generalmente, si M es una hipersuperficie diferenciable de N con $m = \dim(M)$, para cada $x \in M$ podemos tomar una carta de N adaptada a M . Es decir, un entorno $U^x \subset N$ de x y un difeomorfismo $\varphi : U^x \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $\varphi(M \cap U^x) = \{0\} \times \mathbb{R}^m$. Por esta razón, $U^x \setminus M = \varphi^{-1}((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m)$ tiene dos componentes conexas, y M separa localmente a N . La existencia de estas cartas adaptadas es una consecuencia directa del Teorema de la Función Inversa, y se pueden tomar arbitrariamente pequeñas. En particular, nos interesa para $N = \mathbb{R}^{m+1}$.

(5) El conjunto M de infinitas rectas descrito en el Ejemplo 1.1.2(1) no separa localmente \mathbb{R}^2 . Esto se debe a que, para cualquier entorno U de un punto en el eje de abscisas, el conjunto $U \setminus M$ tiene infinitas componentes conexas.

En este trabajo demostramos que si M separa localmente y divide a un abierto conexo $G \subset X$, entonces la división de $G \setminus M$ es única (a diferencia del ejemplo de con infinitas rectas paralelas). Gracias a este resultado, podremos juntar las divisiones de dos conjuntos con intersección conexa para encontrar una división de su unión. Sin embargo, es bastante complicado demostrar este resultado directamente; para ello traemos a escena los grafos de adherencia. Éstos nos permiten acercarnos al problema desde la teoría de grafos, y el lema que se presenta a continuación tendrá un papel importante durante todo el proceso.

Lema 1.2.3. Sean $G \subset X$ un abierto, $M \subset X$ un cerrado que separa localmente X , y $\mathcal{V}_{G \setminus M}$ la colección de componentes conexas de $G \setminus M$. Para cada $x \in M \cap G$ existen dos componentes $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{G \setminus M}$ no necesariamente distintas verificando las siguientes propiedades equivalentes:

- (1) Si M separa un entorno abierto $U^x \subset G$ de x , las mitades están contenidas en V_1 y V_2 respectivamente.
- (2) Existe un entorno abierto $U^x \subset G$ de x tal que $U^x \cap M \subset \partial V_1 \cap \partial V_2 \cap \text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2})$.
- (3) $x \in \partial V_1 \cap \partial V_2 \cap \text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2})$.
- (4) Si $V \in \mathcal{V}_{G \setminus M}$ y $x \in \overline{V}$, entonces $V = V_1$ ó $V = V_2$.

Nótese que el par $\{V_1, V_2\}$ es único en virtud de la última caracterización del enunciado. Por otra parte, el primer caso del Ejemplo 1.1.2(2) confirma que V_1 y V_2 no son necesariamente distintas.

Demostración. Sea $U^x \subset G$ un entorno abierto de x al que separa M . Como las mitades son conexas, han de estar contenidas en dos componentes $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{G \setminus M}$ respectivamente. Empecemos comprobando que dichas componentes verifican (2), y en particular que (1) \implies (2):

En efecto, la separación implica que $M \cap U^x = \partial W_1 \cap U^x \subset \overline{W_1} \cap G \subset \overline{V_1}$. Además $V_1 \subset G \setminus M$, luego $M \cap U^x \subset \overline{V_1} \setminus V_1 \subset \partial V_1$, y análogamente $M \cap U^x \subset \partial V_2$. Así obtenemos que

$$U^x = W_1 \cup W_2 \cup (M \cap U^x) \subset V_1 \cup V_2 \cup (\partial V_1 \cap \partial V_2) = \overline{V_1 \cup V_2},$$

y en particular $M \cap U^x \subset U^x = \text{Int}(U^x) \subset \text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2})$.

(2) \implies (3) Evidente.

(3) \implies (4) Por hipótesis, $x \in \partial V_1 \cap \partial V_2 \subset \overline{V_1} \cap \overline{V_2}$. Ahora sea $V \in \mathcal{V}_{G \setminus M}$ distinto de V_1 y V_2 . Como V y $V_1 \cup V_2$ son disjuntos, también lo son $V = \text{Int}(V)$ y $\overline{V_1 \cup V_2}$, y también lo son \overline{V} y $\text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2})$. Pero $x \in \text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2})$, luego $x \notin \overline{V}$.

(4) \implies (1) Sea $U^x \setminus M = W_1 \cup W_2$ una separación de cierto entorno abierto U^x de x , y sean V'_1, V'_2 las componentes de $G \setminus M$ que contienen a W_1 y W_2 respectivamente. Como estas componentes verifican (2), y (2) \implies (4), V'_1 y V'_2 se caracterizan como las componentes de $G \setminus M$ a las que x es adherente, y por lo tanto, $\{V_1, V_2\} = \{V'_1, V'_2\}$. Es decir, las mitades W_1 y W_2 están contenidas en V_1 y V_2 respectivamente salvo quizás por orden. \square

Corolario 1.2.4. Si M separa localmente y divide G , cada $x \in G \cap M$ pertenece a la adherencia de exactamente dos componentes conexas de $G \setminus M$, cada una contenida en una mitad distinta.

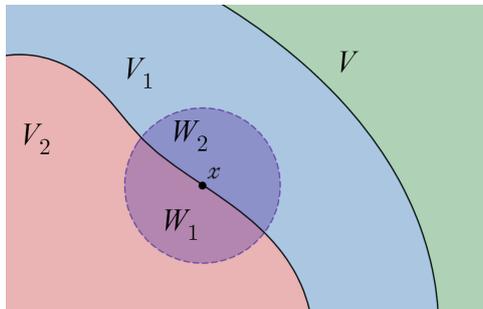


Figura 3: Boceto de la situación en el Lema 1.2.3

2 GRAFOS DE ADHERENCIA

2.1 BREVE REPASO DE LA TEORÍA DE GRAFOS

Antes de definir el concepto de *Grafo de Adherencia* sobre el que se construye este trabajo, presentamos en esta sección un breve recordatorio sobre las herramientas básicas de la teoría de grafos que utilizaremos más adelante:

Definición 2.1.1. (1) Un *grafo* es una estructura $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, que consiste en un conjunto \mathcal{V} de *vértices*, y en un conjunto \mathcal{E} de *aristas*, que son pares de vértices no necesariamente distintos.

(2) Se dice que dos vértices $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ son *adyacentes* cuando $\{V_1, V_2\} \in \mathcal{E}$. En particular, un vértice $V \in \mathcal{V}$ es adyacente a sí mismo cuando $\{V\} \in \mathcal{E}$.

(3) Un *camino* en \mathcal{G} es una cadena finita de vértices (V_1, V_2, \dots, V_k) , donde cada V_i es adyacente a V_{i+1} . Se dice que V_1 y V_k están *conectados* por el camino.

(4) Se dice que \mathcal{G} es *conexo* si cada par de vértices $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ está conectado por un camino en \mathcal{G} .

La conexión se caracteriza como sigue:

Proposición 2.1.2. *El grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es conexo si y sólo si para cualquier partición no trivial de vértices $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ (es decir, que $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset \neq \mathcal{V}_2$ y $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$), existe un vértice de \mathcal{V}_1 adyacente a uno de \mathcal{V}_2 .*

Demostración. Supongamos que \mathcal{G} es conexo, y sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ una partición no trivial de vértices. Tomamos dos vértices $V \in \mathcal{V}_1, V' \in \mathcal{V}_2$ arbitrarios, y sea $(V = V_1, V_2, \dots, V_k = V')$ un camino conectando a V con V' . Sea i_0 el último índice tal que V_i pertenece a \mathcal{V}_1 . Como V_{i_0+1} pertenece a \mathcal{V}_2 y es adyacente a $V_{i_0} \in \mathcal{V}_1$, hemos acabado.

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{G} no es conexo. Es decir, existen dos vértices $V, V' \in \mathcal{V}$ que no están conectados por un camino. Los conjuntos

$$\mathcal{V}_1 := \{V \in \mathcal{V} : \text{está conectado a } V \text{ por un camino en } \mathcal{G}\}, \quad \mathcal{V}_2 := \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1$$

no vacíos porque $V \in \mathcal{V}_1$ y $V' \in \mathcal{V}_2$, y complementarios por definición. Supongamos que existe algún vértice $V_1 \in \mathcal{V}_1$ adyacente a un $V_2 \in \mathcal{V}_2$. Por construcción de \mathcal{V}_1 existe un camino (V, \dots, V_1) . El camino (V, \dots, V_1, V_2) está bien definido y conecta a V con $V_2 \in \mathcal{V}_2$, contradiciendo la construcción de \mathcal{V}_2 . \square

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo. Un subconjunto $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ es *independiente* en \mathcal{G} si no contiene vértices adyacentes entre sí. El grafo \mathcal{G} es *bipartito* si existe una partición de vértices $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ donde \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 son conjuntos independientes. Al par $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ lo llamamos *bipartición* o *división* de \mathcal{G} .

Una definición equivalente de los grafos bipartitos es que son 2-coloreables. Es decir, que podemos hacer una asignación de dos colores (o signos) a cada vértice de tal forma que ningún par de vértices adyacentes compartan el mismo signo. A propósito, esta descripción es análoga a la que hicimos al explicar la noción de división: lo que buscamos cuando introducimos el grafo de adherencia es precisamente traducir las divisiones topológicas a divisiones de sus grafos de adherencia. Nótese que ningún vértice puede ser adyacente a sí mismo en un grafo bipartito.

El sencillo resultado que sigue será crucial más adelante.

Proposición 2.1.4. *Todo grafo bipartito y conexo tiene una única división.*

Demostración. Sean $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}'_1 \cup \mathcal{V}'_2$ dos divisiones de un grafo conexo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Queremos demostrar que son iguales. Sea $V_1 \in \mathcal{V}$ un vértice fijo, y supongamos sin pérdida de generalidad que pertenece a \mathcal{V}_1 y a \mathcal{V}'_1 . El grafo $\mathcal{G}_{G,M}$ es conexo, así que para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un camino $(V_1, V_2 \cdots, V_k = V)$ que conecta V_1 con V . Como V_2 es adyacente a V_1 , y V_1 pertenece a \mathcal{V}_1 y a \mathcal{V}'_1 , deducimos que V_2 ha de pertenecer a \mathcal{V}_2 y a \mathcal{V}'_2 .

Usando este argumento reiteradamente, se prueba por inducción que

$$V \in \mathcal{V}_2 \iff k \text{ es par} \iff V \in \mathcal{V}'_2,$$

y como $V \in \mathcal{V}$ era arbitrario, concluimos que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}'_1$ y que $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}'_2$. \square

2.2 EL GRAFO DE ADHERENCIA

Sean X un espacio localmente conexo, $G \subset X$ un abierto conexo, y $M \subset X$ un cerrado que separa localmente X . El objetivo de esta sección está en asociar a estos datos una estructura de grafo que traduzca conexión y divisiones topológicas en conexión y divisiones de grafos.

Definición 2.2.1. Para cada $x \in M$, definimos la *arista de adherencia* de x como el conjunto de componentes conexas a las que x es adherente. Es decir,

$$\mathcal{E}(x) := \{V \in \mathcal{V}_{G \setminus M} : x \in \overline{V}\}.$$

El *grafo de adherencia* de (G, M) es el par $\mathcal{G}_{G,M} = (\mathcal{V}_{G \setminus M}, \mathcal{E}_{G,M})$, donde $\mathcal{E}_{G,M} = \{\mathcal{E}(x) : x \in M\}$ es el conjunto de todas las aristas de adherencia. Por el Lema de la separación local 1.2.3, cada $\mathcal{E}(x)$ contiene exactamente una o dos componentes conexas, y por lo tanto el grafo está bien definido.

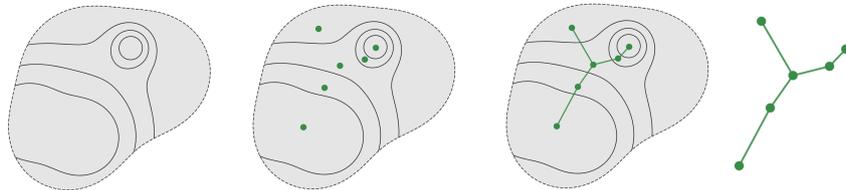


Figura 4: Boceto del grafo de adherencia ideal para ciertos G y M

Gracias al lema de la separación local 1.2.3, sabemos que si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{G \setminus M}$ son adyacentes, entonces $G \cap \partial V_1 \cap \partial V_2 \cap \text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2}) \neq \emptyset$. Esta condición es también suficiente para la adyacencia, pues un punto en dicha intersección pertenece a $G \cap \partial V_i \subset M$. De hecho, la condición de adyacencia se puede relajar a $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \neq \emptyset$ cuando M divide G (de ahí el nombre de grafo de *adherencia*).

2.3 TOPOLOGÍA Y GRAFOS

En esta sección analizamos cómo propiedades topológicas de un abierto se traducen a propiedades de los grafos de adherencia. De nuevo, X es un espacio localmente conexo, y $M \subset X$ un cerrado que separa localmente X .

Teorema 2.3.1. *Dado un abierto $G \subset X$, el grafo $\mathcal{G}_{G,M}$ es conexo si y sólo si G es conexo.*

Demostración. \Leftarrow Supongamos que el grafo de adherencia no es conexo y que existe una partición no trivial de vértices $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, donde ningún $V_1 \in \mathcal{V}_1$ es adyacente a ningún

$V_2 \in \mathcal{V}_2$. Definimos, para $i = 1, 2$, el conjunto $E_i := G \cap \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \overline{V}$ que tiene interior no vacío porque contiene a algún $V \in \mathcal{V}_i$. Veamos que $\text{Int}(E_1)$ y $\text{Int}(E_2)$ son abiertos complementarios en G , y en consecuencia que G no es conexo.

Sea $x \in G \cap M$ arbitrario, y $\mathcal{E}(x) = \{V, V'\}$ el par de componentes a las que es adherente. Por ser V y V' adyacentes, pertenecen al mismo \mathcal{V}_i , digamos \mathcal{V}_1 , y así $x \in \text{Int}(\overline{V \cup V'}) \cap G \subset \text{Int}(E_1)$. Como x no pertenece a la adherencia de ninguna otra componente conexa, (en particular, de ninguna perteneciente a \mathcal{V}_2), deducimos que $x \notin E_2 \supset \text{Int}(E_2)$. Por otra parte, todo $x \in G \setminus M$, pertenece a la adherencia de una única componente conexa (la de la $V_x \in \mathcal{V}_{G \setminus M}$ que lo contiene), luego pertenece al interior del E_i tal que $V_x \in \mathcal{V}_i$, pero no a E_{3-i} . En resumen, $G = \text{Int}(E_1) \cup \text{Int}(E_2)$ no es conexo.

\implies Recíprocamente, si G no es conexo, se puede expresar como la unión disjunta de abiertos no vacíos G_1, G_2 . Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{G \setminus M}$ dos componentes conexas contenidas en G_1 y G_2 respectivamente. Si $\{V_1, V_2\}$ fuera una arista del grafo de adherencia, es decir, $\{V_1, V_2\} = \mathcal{E}(x)$ para cierto $x \in M$, entonces tendríamos $x \in G \cap \partial V_1 \cap \partial V_2 \subset G \cap \overline{G_1} \cap \overline{G_2}$, lo cual es absurdo puesto que G_1 y G_2 son cerrados en G y disjuntos. Por lo tanto, los conjuntos $\mathcal{V}_i = \{V \in \mathcal{V}_{G \setminus M} : V \subset G_i\}$ para $i = 1, 2$ forman una partición no trivial de vértices en la que ningún vértice de \mathcal{V}_1 es adyacente a uno de \mathcal{V}_2 , concluyendo que $\mathcal{G}_{G,M}$ no es conexo. \square

La unicidad de división se recoge en el siguiente Teorema:

Teorema 2.3.2. *Sea $G \subset X$ abierto conexo. Entonces, existe una biyección entre las divisiones topológicas de $G \setminus M$ y las divisiones del grafo $\mathcal{G}_{G,M}$.*

En particular, M divide G si y sólo si $\mathcal{G}_{G,M}$ es bipartito, y si G es conexo la división de $G \setminus M$ es única.

Demostración. Dada una división $G \setminus M = W_1 \cup W_2$, los conjuntos $\mathcal{V}_i := \{V \in \mathcal{V} : V \subset W_i\}$ para $i = 1, 2$ forman una partición de $\mathcal{V}_{G \setminus M}$. Veamos que son independientes en $\mathcal{G}_{G,M}$: dada una arista $\mathcal{E}(x) = \{V_1, V_2\}$, si V_1 y V_2 pertenecieran al mismo \mathcal{V}_i , digamos \mathcal{V}_1 , entonces x pertenecería a $\text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2}) \subset \text{Int}(\overline{W_1})$. Pero $\overline{W_1}$ y W_2 son disjuntos; también lo serán $\text{Int}(\overline{W_1})$ y $\overline{W_2}$, y x no pertenecería a $\overline{W_2}$, contradiciendo la división. En resumen, V_1 y V_2 pertenecen a distintos \mathcal{V}_i 's. Como $\{V_1, V_2\} \in \mathcal{E}_{G,M}$ era arbitrario, concluimos que \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 son conjuntos independientes.

Por otra parte, si $\mathcal{V}_{G \setminus M} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ es una partición de vértices en dos conjuntos independientes, definimos los abiertos $W_i := \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} V$ para $i = 1, 2$. Cada $x \in G \cap M$ pertenece a la adherencia de dos componentes conexas V_1 y V_2 que han de estar contenidas, salvo quizás por orden, en \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 respectivamente (pues V_1, V_2 son adyacentes, y $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ son independientes). En particular, $x \in \overline{V_1} \cap \overline{V_2} \subset \overline{W_1} \cap \overline{W_2}$. Como $x \in M$ era arbitrario, concluimos que $M \subset \overline{W_1} \cap \overline{W_2}$, y por lo tanto $G \setminus M = W_1 \cup W_2$ es una división.

Nótese que tanto las mitades topológicas como los conjuntos independientes están caracterizados por las componentes conexas (o vértices) de $G \setminus M$ que contienen. Por lo tanto, se deduce inmediatamente que estas asignaciones de divisiones son inversas una de la otra (luego biyectivas).

Por último, si G es conexo y M divide G , el grafo $\mathcal{G}_{G,M}$ es conexo y bipartito, luego existe una única división de $\mathcal{G}_{G,M}$ (y de $G \setminus M$) gracias a la Proposición 2.1.4. \square

Aunque en este trabajo tratemos únicamente con la división de abiertos conexos, obsérvese que el paralelismo establecido en este resultado no depende de que G sea conexo. Es decir, que si se generaliza la Definición 1.1.1 a abiertos no conexos, ésta también sería compatible con su homólogo en los grafos de adherencia.

Ahora, veamos una condición suficiente para que una división sea de hecho separación:

Proposición 2.3.3. *En las condiciones anteriores, la aplicación $x \mapsto \mathcal{E}(x)$ es localmente constante. En particular, si $M \cap G$ es no vacío, conexo y divide G , lo separa.*

Demostración. Dado un $x \in M \cap G$, sea $\mathcal{E}(x) = \{V_1, V_2\}$. Por el lema de separación local 1.2.3, existe un entorno abierto de x , $U^x \subset G$, tal que $U^x \cap M \subset G \cap \partial V_1 \cap \partial V_2 \cap \text{Int}(\overline{V_1 \cup V_2})$. En particular, cada $y \in U^x \cap M$ pertenece a esta intersección, y por lo tanto $\mathcal{E}(y) = \{V_1, V_2\} = \mathcal{E}(x)$.

Si $M \cap G$ es conexo, toda aplicación localmente constante es constante. En particular, $\mathcal{G}_{G,M}$ sólo tiene una arista, y por conexión, a lo sumo dos vértices. Si $M \cap G$ es no vacío, también han de serlo las dos mitades de (G, M) , así que cada mitad será un vértice distinto del grafo, o lo que es lo mismo, una componente conexa. \square

2.4 OTRA APLICACIÓN DEL GRAFO DE ADHERENCIA

Una de las ideas clave en este trabajo es la sutil diferencia entre *desconectar* y *dividir* un espacio. Esta sutileza nos ha permitido, mediante los grafos de adherencia, garantizar que la división es única en abiertos conexos, y en la próxima sección explotaremos esta unicidad para encontrar divisiones de cualquier subconjunto que separe localmente \mathbb{R}^n . Antes de entrar en la demostración principal de este trabajo, vamos a analizar la diferencia entre desconexión, división y separación de un espacio a la hora de enunciar el Teorema de Jordan-Brouwer.

Originalmente, el Teorema de *separación* de Jordan-Brouwer afirma que cualquier hipersuperficie diferenciable conexa, sin borde y cerrada en \mathbb{R}^n desconecta el espacio en dos componentes conexas de las que es su frontera (es decir, lo separa). Cuando la hipersuperficie no es conexa también se desconecta el espacio, pero no se puede garantizar la separación. Podríamos denominar este resultado como el Teorema de *desconexión* de Jordan-Brouwer. En lo que queda de esta sección, vamos a demostrar que los teoremas de desconexión y de división de Jordan-Brouwer son equivalentes en el contexto de separación local, y que además implican el teorema de separación. Formalmente:

Teorema 2.4.1. *Sea X un espacio conexo y localmente conexo. Son equivalentes:*

- I. *Todo cerrado no vacío que separa localmente X desconecta X .*
- II. *Todo cerrado que separa localmente X divide X .*

Además, cuando se cumple cualquiera (o ambas) de las condiciones, todo cerrado y conexo que separa localmente X lo separa.

En virtud de la proposición 2.3.3, la última parte del enunciado es inmediata. Por otra parte, como la división de un espacio es más fuerte que la desconexión, sabemos que II. \implies I. Para la implicación opuesta veremos que, bajo I, el grafo de adherencia de cualquier cerrado M que separa localmente pertenece a una familia de grafos que siempre resultan ser bipartitos:

Definición 2.4.2. Un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es un *árbol* si es minimalmente conexo. Es decir, si es conexo, pero dejaría de serlo al eliminar cualquier arista del grafo.

Los dos siguientes resultados terminan de demostrar el Teorema 2.4.1:

Lema 2.4.3. *Sea X un espacio conexo y localmente conexo, y supongamos que cualquier cerrado (no vacío) que separa localmente X lo desconecta.*

Entonces, para cualquier M que separe localmente X , el grafo $\mathcal{G}_{X,M}$ es un árbol.

Demostración. El grafo de adherencia $\mathcal{G}_{X,M}$ es conexo porque X es conexo. Para ver que es minimalmente conexo, vamos a fijar una arista $\{V, V'\} \in \mathcal{E}_{X,M}$ arbitraria, y veremos que el grafo $\mathcal{G}' := (\mathcal{V}_{X \setminus M}, \mathcal{E}_{X,M} \setminus \{\{V, V'\}\})$ no es conexo. Como la aplicación $M \rightarrow \mathcal{E}_{X,M}, x \mapsto \mathcal{E}(x)$ es localmente constante, el conjunto $M' := \{x : \mathcal{E}(x) = \{V, V'\}\}$ es abierto y cerrado en M . En particular, es un cerrado en X y separa localmente X , así que por hipótesis, M' desconecta X .

Nótese que $M \setminus M'$ separa localmente X porque también es abierto y cerrado en M . En particular, separa localmente $X \setminus M'$, y si demostramos que el grafo \mathcal{G}' coincide con el grafo de adherencia $\mathcal{G}_{X \setminus M', M \setminus M'}$, como $X \setminus M'$ no es conexo, concluiremos que tampoco lo es \mathcal{G}' y habremos acabado.

En efecto, como $(X \setminus M') \setminus (M \setminus M') = X \setminus M$, los conjuntos de vértices de \mathcal{G}' y $\mathcal{G}_{X \setminus M', M \setminus M'}$ son iguales. Además, para cualquier $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{X \setminus M}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \{V_1, V_2\} \in \mathcal{E}_{X \setminus M', M \setminus M'} &\iff \{V_1, V_2\} = \mathcal{E}(x) \text{ para cierto } x \in M \setminus M' \\ &\iff \{V_1, V_2\} \in \mathcal{E}_{X, M} \text{ y } \{V_1, V_2\} \neq \{V, V'\} \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{E}_{X \setminus M', M \setminus M'} = \mathcal{E}_{X, M} \setminus \{\{V, V'\}\}$ y los grafos \mathcal{G} y $\mathcal{G}_{X \setminus M', M \setminus M'}$ son iguales. \square

Proposición 2.4.4. *Todo árbol es un grafo bipartito.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un árbol. Fijamos un $V_0 \in \mathcal{V}$, y para todo $V \in \mathcal{V}$ definimos $n(V)$ como la longitud mínima de un camino entre V_0 y V . Vamos a demostrar que si dos vértices $V, V' \in \mathcal{V}$ son adyacentes, entonces $n(V) = n(V') \pm 1$. Esto implica que los conjuntos $\mathcal{V}_1 := \{V \in \mathcal{V} : n(V) \text{ es impar}\}$ y $\mathcal{V}_2 := \{V \in \mathcal{V} : n(V) \text{ es par}\}$ son independientes, concluyendo que \mathcal{G} es bipartito.

Sean $P = (V_0, V_1, \dots, V_k = V)$ y $P' = (V_0, V'_1, \dots, V'_{k'} = V')$ dos caminos de longitud mínima de V_0 a V y V' respectivamente (es decir, $k = n(V)$ y $k' = n(V')$), y supongamos sin pérdida de generalidad que $k' \leq k$. Nótese que $V \neq V'$, ya que eliminar la arista de un vértice auto-adyacente no afecta a la conexión del grafo. Afirmamos que $V' = V_{k-1}$.

El camino P' no pasa por V porque la correspondiente truncación de P' sería un camino entre V_0 y V_1 más corto que P . Por otra parte, el camino P pasa por V' porque de lo contrario el grafo \mathcal{G} seguiría siendo conexo tras eliminar $\{V, V'\}$: para cualquier camino entre dos vértices, podemos sustituir cualquier ocurrencia de la arista $\{V, V'\}$ por el camino obtenido concatenando P' con el opuesto de P .

Ya sabemos que $V' = V_i$ para cierto $i \leq k-1$. Si tuviéramos $i < k-1$, el camino $(V_0, V_1, \dots, V_i = V', V)$ de longitud $i+1 < k$ conectaría V_0 a V , contradiciendo la construcción de P . Es decir, $V' = V_{k-1}$ y $n(V') = k-1 = n(V) - 1$. \square

3 EL TEOREMA PRINCIPAL

3.1 OPERACIONES CON DIVISIONES

En esta sección demostraremos dos lemas que explotan la unicidad de la división en conexos para crear divisiones en nuevos abiertos. Como de costumbre, X es un espacio localmente conexo y M un cerrado que separa localmente X .

Proposición 3.1.1 (Restricción de divisiones). *Sean $G' \subset G$ abiertos. Si $G \setminus M = W_1 \cup W_2$ es una división de G , entonces $G' \setminus M = (W_1 \cap G') \cup (W_2 \cap G')$ es una división de G' .*

Es decir, si M divide un abierto, también divide todo subconjunto abierto suyo.

Demostración. Si $G \cap M = \emptyset$, la división es trivial. Si $G \cap M \neq \emptyset$ basta con observar lo siguiente:

$$G' \setminus M = G' \cap (G \setminus M) = G' \cap (W_1 \cup W_2) = (G' \cap W_1) \cup (G' \cap W_2)$$

$$M \cap G' = (M \cap G) \cap G' \subset (\overline{W_1} \cap \overline{W_2}) \cap G' = \overline{(W_1 \cap G')} \cap \overline{(W_2 \cap G')}$$

Por la Observación 1.1.3, $G' \setminus M = (W_1 \cap G') \cup (W_2 \cap G')$ es una división.

Nótese que si $G' \cap M = \emptyset$, entonces G' es un conexo contenido en $G \setminus M$, y por lo tanto, está contenida en alguna mitad W_i . La división de G' heredada por G será la trivial, $\{G', \emptyset\}$. \square

Lema 3.1.2. *Si M divide los abiertos $G, G' \subset X$ y $G \cap G'$ es conexo, entonces M divide $G \cup G'$.*

Demostración. Sean $\{W_1, W_2\}$ y $\{W'_1, W'_2\}$ divisiones de $G \setminus M$ y de $G' \setminus M$ respectivamente. Por restricción de divisiones, tanto $\{W_1 \cap G', W_2 \cap G'\}$ como $\{W'_1 \cap G, W'_2 \cap G\}$ son divisiones de $(G \cap G') \setminus M$. Como M separa localmente a X y $G \cap G'$ es conexo, el Teorema 2.3.2 afirma que estas divisiones son iguales, es decir:

$$\{W_1 \cap G', W_2 \cap G'\} = \{W'_1 \cap G, W'_2 \cap G\}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $W_1 \cap G' = W'_1 \cap G$ y $W_2 \cap G' = W'_2 \cap G$, y en particular que $W_1 \cap W'_2 = W'_1 \cap W_2 = \emptyset$. Veamos que $\{W_1 \cup W'_1, W_2 \cup W'_2\}$ es una división de $(G \cup G') \setminus M$:

$$(W_1 \cup W'_1) \cap (W_2 \cup W'_2) = (W_1 \cap W_2) \cup (W_1 \cap W'_2) \cup (W'_1 \cap W_2) \cup (W'_1 \cap W'_2) = \emptyset$$

$$(W_1 \cup W'_1) \cup (W_2 \cup W'_2) = (W_1 \cup W_2) \cup (W'_1 \cup W'_2) = (G \setminus M) \cup (G' \setminus M) = (G \cup G') \setminus M$$

$$(G \cup G') \cap M = (G \cap M) \cup (G' \cap M) \subset (\overline{W_1} \cap \overline{W_2}) \cup (\overline{W'_1} \cap \overline{W'_2}) \subset \overline{W_1 \cup W'_1} \cap \overline{W_2 \cup W'_2}.$$

Por la Observación 1.1.3, M divide a $G \cup G'$. Nótese que este argumento es válido cuando la división de G o de G' es la trivial, es decir, cuando $G \cap M = \emptyset$. En este caso se da que una de las mitades de G es el propio G . En particular, $G \cap G' \setminus M$ es un abierto conexo contenido en $G' \setminus M$, y por lo tanto está contenido en una de las mitades de G' . \square

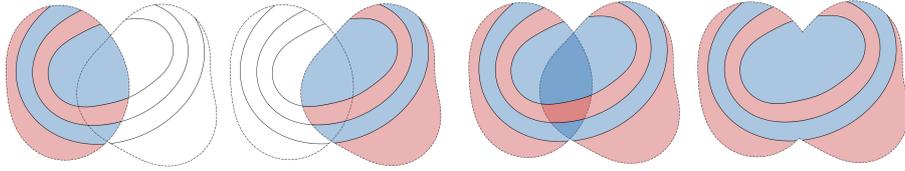


Figura 5: Boceto de la situación descrita en el Lema 3.1.2

Lema 3.1.3. *Si M divide todos los elementos de una sucesión creciente $\{G^n\}_n$ de abiertos conexos, también divide su unión.*

Demostración. Si tenemos $G^n \cap M = \emptyset$ para todo n , entonces $(\bigcup_n G^n) \cap M = \emptyset$, y la división es la trivial. Si no, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $M \cap G^1 \neq \emptyset$. Sean W_1^1, W_2^1 las mitades (no vacías) de (G^1, M) . Las divisiones de cada $G^n \setminus M$ serán de la forma $\{W_1^n, W_2^n\}$, con los W_1^n, W_2^n definidos recursivamente para que

$$W_1^n \cap G^{n-1} = W_1^{n-1} \quad \& \quad W_2^n \cap G^{n-1} = W_2^{n-1},$$

lo cual se puede lograr mediante restricción y unicidad de mitades. Así, $\{W_1^n\}_n$ y $\{W_2^n\}_n$ son sucesiones crecientes de abiertos. Veamos que $\{\bigcup_n W_1^n, \bigcup_n W_2^n\}$ es una división de $(\bigcup_n G^n) \setminus M$:

$$\left(\bigcup_n W_1^n\right) \cup \left(\bigcup_n W_2^n\right) = \bigcup_n (W_1^n \cup W_2^n) = \bigcup_n (G^n \setminus M) = \left(\bigcup_n G^n\right) \setminus M$$

$$\left(\bigcup_n W_1^n\right) \cap \left(\bigcup_n W_2^n\right) = \bigcup_{m,n} (W_1^m \cap W_2^n) \subset \bigcup_{m,n} (W_1^{m+n} \cap W_2^{m+n}) = \bigcup_{m,n} \emptyset = \emptyset$$

$$\left(\bigcup_n G^n\right) \cap M = \bigcup_n (G^n \cap M) \subset \bigcup_n (\overline{W_1^n} \cap \overline{W_2^n}) \subset \overline{\bigcup_n W_1^n} \cap \overline{\bigcup_n W_2^n}$$

Por la Observación 1.1.3, M divide a $\bigcup_n G^n$. \square

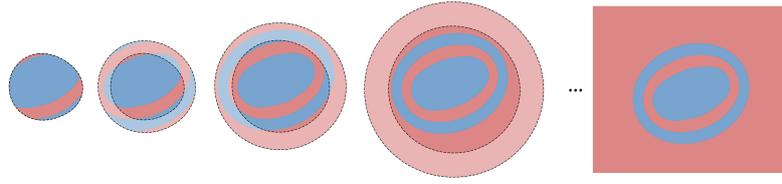


Figura 6: Boceto de la situación en el Lema 3.1.3

3.2 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE JORDAN-BROUWER

En esta sección establecemos el resultado principal:

Teorema 3.2.1 (Jordan-Brouwer, versión local-global). *Si M separa localmente \mathbb{R}^n , divide \mathbb{R}^n .*

Demostración. Vamos a demostrar que M divide a cualquier rectángulo abierto $R := \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$, y así poder aplicar el Lema 3.1.3 sobre la sucesión de rectángulos $\{\prod_{i=1}^n (-m, m)\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Nótese que la colección de abiertos $\mathcal{C} := \{G \subset \mathbb{R}^n : M \text{ divide a } G\}$ recubre \mathbb{R}^n . Si $x \in M$, entonces M divide a un entorno U^x por separación local. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$, entonces M divide a la componente conexa $V^x \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n \setminus M}$ por ser disjunta a M .

En particular, \mathcal{C} es un recubrimiento del compacto $\bar{R} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, y por lo tanto tiene un número de Lebesgue. Es decir, existe una constante $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in \bar{R}$, la bola $B(x, \delta)$ está contenida en algún $C_x \in \mathcal{C}$. Por restricción de divisiones, M divide a $B(x, \delta) \forall x \in \bar{R}$.

Ahora demostramos que para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in R$ y para cada $k = 0, 1, \dots, n$, M divide al rectángulo

$$R_k(x) = \prod_{i=1}^k (a_i, b_i) \times \prod_{i=k+1}^n (x_i - \delta, x_i + \delta)$$

y en particular, a $R = R_n(x)$. Lo haremos por inducción sobre k . El caso base es automáticamente cierto, pues $R_0(x) = B(x, \delta) \forall x \in R$. La idea del paso inductivo está en alargar cada rectángulo $R_k(x)$ en la $(k + 1)$ -ésima dirección hasta obtener $R_{k+1}(x)$, asegurándonos de que M lo divide mediante un uso iterado del Lema 3.1.2.

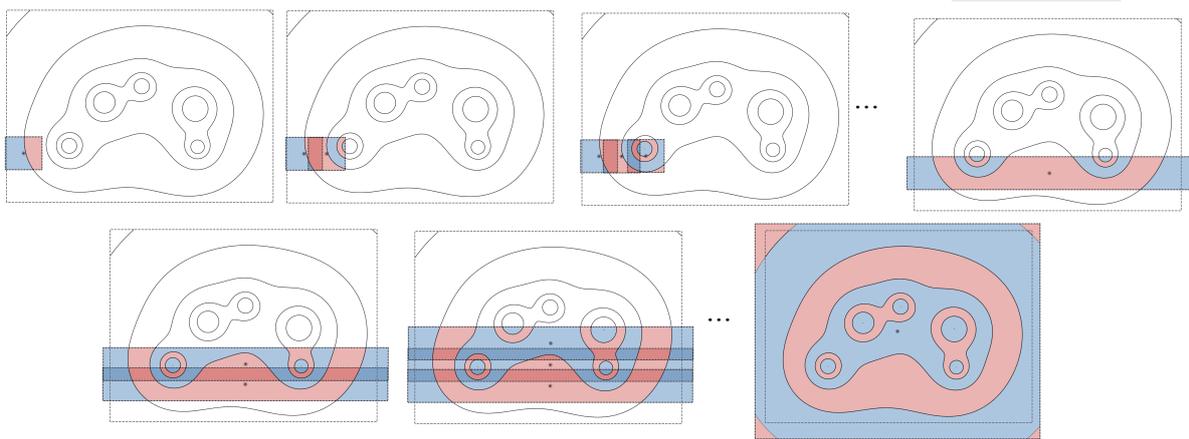


Figura 7: Boceto de la división de cada $R_{k+1}(x)$ construida a partir de las de cada $R_k(x^j)$

Supongamos, por hipótesis de inducción, que M divide a todo $R_k(x)$, $x \in R$. Consideramos una partición $a_{k+1} + \delta = y_1 < y_2 < \dots < y_r = b_{k+1} - \delta$, con $y_{j+1} - y_j < \delta \quad \forall j$, de tal forma

que $(a_{k+1}, b_{k+1}) = \bigcup_{j=1}^r (y_j - \delta, y_j + \delta)$. Definimos, para cada $j = 1, \dots, r$, el punto $x^j \in R$ que se obtiene al cambiar la $(k+1)$ -ésima coordenada de x por y_j .

También definimos $R' := \prod_{i=1}^k (a_i, b_i)$, y $R'' := \prod_{i=k+1}^n (x_i - \delta, x_i + \delta)$, de tal forma que:

$$R_k(x^j) = R' \times (y_j - \delta, y_j + \delta) \times R'', \quad \forall j = 1, \dots, r,$$

Para cada $l = 1, \dots, r$, la unión:

$$\bigcup_{j=1}^l R_k(x^j) = \bigcup_{j=1}^l (R' \times (y_j - \delta, y_j + \delta) \times R'') = R' \times \bigcup_{j=1}^l (y_j - \delta, y_j + \delta) \times R'' = R' \times (a_{k+1}, y_l + \delta) \times R''$$

es un rectángulo, y además $\bigcup_{j=1}^r R_k(x^j) = R' \times (a_{k+1}, b_{k+1}) \times R'' = R_{k+1}(x)$.

Demostremos por inducción que M divide a cada $\bigcup_{j=1}^l R_k(x^j)$, $l = 1, \dots, r$. Para $l = 1$ es cierto, pues por hipótesis de inducción sobre k , M divide $R_k(x^1)$. Supongamos que M divide a $\bigcup_{j=1}^l R_k(x^j)$. Como también divide a $R_k(x^{l+1})$, y la intersección de dos rectángulos es un rectángulo (en particular conexa), el Lema 3.1.2 implica que M divide a $R_k(x^{l+1}) \cup \bigcup_{j=1}^l R_k(x^j) = \bigcup_{j=1}^{l+1} R_k(x^j)$.

Por lo tanto, M divide a $\bigcup_{j=1}^r R_k(x^j) = R_{k+1}(x)$, terminando así la inducción sobre k . \square

3.3 EL NÚCLEO DE LA DEMOSTRACIÓN: INDUCCIÓN POR CONEXOS

La primera demostración del Teorema de Jordan-Brouwer que presentamos en este trabajo se puede separar en dos partes: primero introducimos los grafos de adherencia para demostrar demostrar tres lemas (3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3) que nos permiten encontrar divisiones de abiertos de un espacio X a través de las divisiones de otros. Después, el Teorema 3.2.1 se resume a demostrar que, partiendo de cualquier recubrimiento por abiertos \mathcal{C} de \mathbb{R}^n , se pueden aplicar estas tres operaciones de conjuntos reiteradamente hasta construir el propio espacio \mathbb{R}^n . Formalicemos estas ideas en un espacio topológico abstracto:

Definición 3.3.1. Sea X un espacio conexo y localmente conexo. Diremos que un recubrimiento suyo por abiertos conexos \mathcal{C} es *estable bajo operaciones conexas* cuando verifica las siguientes propiedades:

- I. Todo subconjunto abierto G' de un miembro $G \in \mathcal{C}$ también pertenece a \mathcal{C}
- II. La unión de dos miembros $G, G' \in \mathcal{C}$ pertenece a \mathcal{C} cuando su intersección es conexa.
- III. La unión de una cadena ascendente de abiertos conexos $\{G_\alpha\}_\alpha$ en \mathcal{C} pertenece a \mathcal{C} .

Diremos que el espacio X es *inductivo por conexas* si todo recubrimiento estable bajo operaciones conexas contiene X (y en virtud de I, todos sus abiertos).

Bajo este marco abstracto, los lemas 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3, son equivalentes a lo siguiente:

Corolario 3.3.2. *Sea X un espacio localmente conexo al que un cerrado M separa localmente. Entonces, los abiertos de X a los que M divide forman un recubrimiento estable bajo operaciones conexas. En particular, si X es un espacio inductivo por conexas, entonces todo cerrado que separa localmente X lo divide.*

Informalmente, se cumple el Teorema de Jordan-Brouwer local-global en todo espacio inductivo por conexas.

Nótese que, aunque el lema 3.1.3 trate únicamente uniones *numerables* de abiertos conexos crecientes, los argumentos utilizados para demostrarlo son perfectamente válidos para uniones arbitrarias.

Por otra parte, el Teorema 3.2.1 se resume a demostrar lo siguiente:

Corolario 3.3.3. \mathbb{R}^n es un espacio inductivo por conexos para $n \geq 1$.

En todas las secciones que siguen acabaremos imitando las operaciones de divisiones, ya sea en el contexto de transversalidad, en el de ecuaciones globales, o en el de la cohomología de Čech, y por ello definimos el concepto de inducción por conexos en esta sección. Sin embargo, no será hasta la sección 6 donde realmente exploraremos la relación entre la inducción por conexos y otras propiedades topológicas, y de paso encontraremos una amplia familia de espacios topológicos donde se cumple la versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer.

4 DIVISIONES VIA TRANSVERSALIDAD

En este trabajo, la clave para demostrar el Teorema de Jordan-Brouwer ha sido encontrar una definición apropiada de división. Como mencionamos anteriormente, una división se puede interpretar como una elección de signo entre las componentes conexas de $G \setminus M$ de tal forma que ningún par de componentes adyacentes lo compartan. Esta idea es similar a ciertos argumentos de transversalidad en la Teoría de Grado. En esta sección exploramos una demostración del Teorema de Jordan-Brouwer (en su versión diferenciable) común en la literatura de la topología diferencial [10], y descubriremos que la desconexión obtenida es de hecho una división.

Esta demostración hace uso del Teorema de Aproximación Transversal, un resultado clave de la teoría de transversalidad cuya demostración requiere un análisis profundo de la estructura diferenciable de las variedades. En la tercera parte de esta sección proponemos una demostración autocontenida del Teorema de Jordan-Brouwer diferenciable, la cual en vez de depender del Teorema de Aproximación Transversal, imita las operaciones de divisiones descritas en la sección 3.1 y utiliza el hecho de que \mathbb{R}^n es inductivo por conexos (Corolario 3.3.3) para concluir que toda hipersuperficie diferenciable de \mathbb{R}^n divide \mathbb{R}^n por transversalidad.

4.1 DIVISIÓN VIA TRANSVERSALIDAD

Primero hemos de definir el concepto de transversalidad. Sean $f : X \rightarrow Y$ aplicación diferenciable y $Z \subset Y$ una subvariedad. Se dice que f es una aplicación transversal a Z cuando

$$T_{f(x)}Z + \text{Im } df(x) = T_{f(x)}Y \quad \forall x \in f^{-1}(Z)$$

Recordamos que $Z \subset Y$ es subvariedad diferenciable de codimensión $k = \dim(Y) - \dim(Z)$ si y sólo si para cada $z \in Z$ existe un entorno V de z en Y tal que $Z \cap V$ una intersección completa en V . Es decir, si existe una función diferenciable $h : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ que verifique

$$(1) Z \cap V = h^{-1}(\{0\}), \text{ y } (2) d_z h : T_z Y \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ es sobreyectiva}$$

De esta manera, si $f : X \rightarrow Y$ es transversal a Z , veamos que $f^{-1}(Z) \subset X$ también es una subvariedad de codimensión K . Sea $x \in f^{-1}(Z)$, $z = f(x)$, y consideramos la intersección completa $h : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ para $Z \subset Y$ descrita anteriormente. Entonces $U := f^{-1}(V)$ y $\tilde{h} := h \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una intersección completa de $f^{-1}(Z) \cap U$. En efecto:

$$(1) \tilde{h}(\{0\})^{-1} = f^{-1}(h^{-1}(\{0\})) = f^{-1}(Z \cap V) = f^{-1}(Z) \cap U.$$

$$(2) \text{ Dado que } d_z h / T_z Z : T_z Y / T_z Z \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ está bien definida y es sobreyectiva (pues } h|_Z = 0 \text{ implica que } T_z Z \subset \ker d_z h \text{) y que } d_x f + T_z Z : T_x X \rightarrow T_z Y / T_z Z \text{ es sobreyectiva por transversalidad (pues } \text{Im } d_x f + T_z Z = T_z Y \text{), obtenemos que } d_x \tilde{h} = d_z h \circ d_x f = (d_z h / T_z Z) \circ (d_x f + T_z) \text{ es sobreyectiva.}$$

Volvamos ahora a la situación del Teorema de Jordan-Brouwer: una hipersuperficie cerrada $M \subset \mathbb{R}^n$. Para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ existe curva γ que los conecte y que sea transversal a M . En la sección 4.3 ofrecemos una demostración elemental de este resultado, aunque también se puede obtener aplicando el Teorema de Aproximación Transversal 4.2.1 (que enunciamos pero no demostramos) sobre el segmento $[x_1, x_2]$. Como γ es transversal a Z , el conjunto $\gamma^{-1}(Z)$ es una subvariedad diferenciable de codimensión 1 en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, $\gamma^{-1}(Z)$ es un conjunto discreto, y además finito porque $[0, 1]$ es compacto.

Llegados a este punto, podríamos definir la división de la siguiente manera:

Definición 4.1.1 (División por transversalidad). Sea M hipersuperficie de la variedad diferenciable conexa X . Se dice que M divide X por transversalidad si para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in X \setminus M$ y cualquier par de curvas γ_1, γ_2 transversales a M que los conecten se tiene que

$$\#\gamma_1^{-1}(M) \equiv \#\gamma_2^{-1}(M) \pmod{2}$$

Las *mitades* de la división se definen como las clases de equivalencia de la siguiente relación:

$$x_1 \sim x_2 \iff \#\gamma^{-1}(M) \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{para todo camino } \gamma \text{ transversal de } x_1 \text{ a } x_2$$

La división por transversalidad es equivalente a la división topológica con la que hemos trabajado en los capítulos anteriores: como X es localmente conexo, las mitades son abiertos disjuntos que recubren $X \setminus M$, y dado un $x \in M$ consideramos, en una carta adaptada, un segmento $[x_1, x_2]$ transversal a M via x . Aquí x_1 y x_2 pertenecen a mitades distintas (pues la transversalidad se preserva mediante difeomorfismos), y también lo harán cualquier par de puntos $x'_1 \in [x_1, x)$, $x'_2 \in (x, x_2]$ arbitrariamente cerca de x . Es decir, x es adherente a las dos mitades. En resumen, M divide X , y en particular lo desconecta (cuando $M \neq \emptyset$).

Con esta nueva definición, la relación entre divisiones topológicas y grafos bipartitos es todavía más clara. Una de las caracterizaciones de los grafos bipartitos es que todos sus ciclos (caminos que empiezan y acaban en el mismo vértice) tienen longitud par o, equivalentemente, que todos los caminos entre dos vértices V, V' tienen la misma longitud módulo 2. La ventaja de la teoría de transversalidad en el contexto de este trabajo es que es capaz de imitar el comportamiento del grafo de adherencia. Todo punto en $X \setminus M$ se puede identificar con la componente conexa a la que pertenece, y también podemos asociar cada camino transversal $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con un camino en el grafo de adherencia de la siguiente manera: el conjunto $\gamma^{-1}(M) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ induce una partición del dominio $[0, 1]$ en subintervalos $I_0 = [0, t_1], I_1 = [t_1, t_2], \dots, I_k = [t_k, 1]$, donde la imagen de cada subintervalo abierto $\text{Int}(I_i)$ está contenido en una componente conexa, llamémosla V_i . Para cada i , el punto $\gamma(t_i) \in M$ pertenece al interior de $\overline{V_{i-1}} \cup \overline{V_i}$, y por lo tanto $\{V_{i-1}, V_i\} = \mathcal{E}(\gamma(t_i))$. Es decir, V_{i-1} y V_i son adyacentes y (V_0, V_1, \dots, V_k) es un camino en el grafo de adherencia.

La división por transversalidad es capaz de caracterizar las mitades de manera constructiva, implícitamente afirmando que la división es única en espacios conexos. En la sección 4.3 imitamos las tres operaciones de divisiones que proponemos en la sección 3.1 desde el punto de vista de la transversalidad, y así el Corolario 3.3.3 es suficiente para demostrar la versión diferenciable del Teorema de Jordan-Brouwer.

4.2 JORDAN-BROUWER MEDIANTE APROXIMACIONES TRANSVERSALES

Para demostrar el Teorema de Jordan-Brouwer mediante transversalidad, nos apoyaremos en el siguiente resultado:

Teorema 4.2.1 (de aproximación transversal). Sean X una variedad diferenciable, Y una variedad diferenciable sin borde, y $Z \subset Y$ otra variedad diferenciable sin borde, las tres variedades

de dimensión pura; sea C un subconjunto cerrado de X . Entonces toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ diferenciable en un entorno de C en el que además f y $f|_{\partial X}$ son transversales a Z , se puede aproximar por aplicaciones diferenciables $g : X \rightarrow Y$ tales que:

- I. g es homótopa a f .
- II. g coincide con f en un entorno de C .
- III. g y $g|_{\partial X}$ son transversales a Z

Cabe recalcar que el teorema de aproximación transversal es un importante resultado en la teoría de transversalidad, y que su demostración conlleva un análisis profundo de la estructura diferenciable de las variedades. Sin embargo, éste nos abre un camino mucho más directo para demostrar el Teorema de Jordan-Brouwer que resumimos a continuación.

Teorema 4.2.2 (Jordan-Brouwer, versión diferenciable). *Sea M hipersuperficie diferenciable de \mathbb{R}^n sin borde y cerrada en \mathbb{R}^n . Entonces, M divide \mathbb{R}^n por transversalidad. En particular, lo desconecta en dos abiertos disjuntos de los que es su frontera.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus M$, y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos caminos transversales a M tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_1$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = x_2$. Vamos a demostrar que

$$\#\gamma_1^{-1}(M) \equiv \#\gamma_2^{-1}(M) \pmod{2}$$

Para ello consideramos una homotopía entre las dos curvas, por ejemplo, la interpolación lineal

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (s, t) \mapsto (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$$

Queremos aplicar el teorema de aproximación transversal sobre H , pero necesitamos que el dominio sea una variedad diferenciable con borde. En este caso, vamos extender H por los lados horizontales del cuadrado, es decir, $\tilde{H} : [0, 1] \times (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, pero asegurándose de que sigue siendo diferenciable y de que la imagen del dominio añadido no interseque a M . Esto último se puede asegurar tomando un ε lo suficientemente pequeño ya que ambos $x_1 = H([0, 1] \times \{0\})$ y $x_2 = H([0, 1] \times \{1\})$ pertenecen al interior de $\mathbb{R}^n \setminus M$. Nótese que \tilde{H} ya es transversal en el conjunto $C = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times (-\varepsilon, 0] \cup [0, 1] \times [1, 1+\varepsilon)$.

Aplicamos con estos datos el teorema de aproximación transversal, y obtenemos una nueva aplicación $\hat{H} : [0, 1] \times (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ transversal a M y tal que $\hat{H}|_C = \tilde{H}|_C$. En particular, nótese que $\gamma_1(t) = \hat{H}(0, t)$ y $\gamma_2(t) = \hat{H}(1, t) \forall t \in [0, 1]$, y que $H(s, t) \notin M$ para $t \in (-\varepsilon, 0] \cup [1, 1+\varepsilon)$. Además, como \hat{H} es transversal a M , deducimos que $\hat{H}^{-1}(M)$ es una subvariedad diferenciable y cerrada en $[0, 1] \times (0, 1)$ con $\partial\hat{H}^{-1}(M) \subset [0, 1] \times (0, 1) = \{0, 1\} \times [0, 1]$. Además está contenida en $[0, 1] \times (0, 1) \subset \partial[0, 1]^2$, luego es compacta y tiene una cantidad finita de componentes conexas. Por la caracterización de variedades diferenciables de dimensión 1, concluimos que sus bordes tienen una cantidad par de puntos, es decir,

$$\#\gamma_1^{-1}(M) + \#\gamma_2^{-1}(M) = \#\partial\hat{H}^{-1}(M) \equiv 0 \pmod{2}$$

Concluyendo efectivamente que $\#\gamma_1^{-1}(M) \equiv \#\gamma_2^{-1}(M) \pmod{2}$. □

Observación 4.2.3. Nótese que la única propiedad que utilizamos sobre el propio espacio \mathbb{R}^n (aparte de su estructura diferenciable) es que es simplemente conexo. Es decir, que el resultado anterior se generaliza sin dificultad a lo siguiente: *Toda hipersuperficie diferenciable y cerrada en un variedad simplemente conexa la divide.*

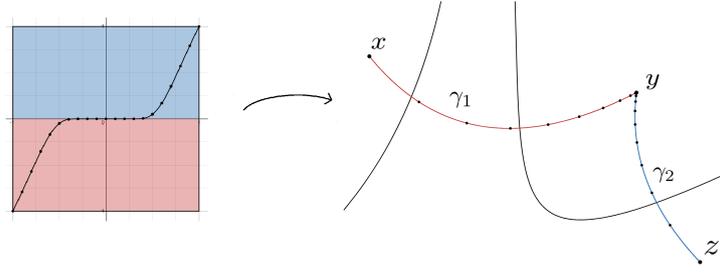


Figura 8: Esquema de la concatenación de caminos transversales a M

4.3 OPERACIONES CON DIVISIONES VIA TRANSVERSALIDAD

Como mencionamos anteriormente, el Teorema de Aproximación Transversal es un resultado clave en la teoría de transversalidad, y demostrarlo requiere un análisis profundo de la estructura diferenciable de las variedades. En esta sección demostraremos la existencia de caminos transversales a M que conecten cualquier par de puntos en una variedad conexa M . Después, imitaremos las operaciones de divisiones propuestas en la sección 3.1 con la nueva definición de división por transversalidad. Es decir, que la colección \mathcal{C} de abiertos de N a los que M divide es un recubrimiento estable bajo operaciones conexas. Así, el corolario 3.3.3 será suficiente para concluir una demostración autocontenida del Teorema de Jordan-Brouwer diferenciable.

Sea N variedad diferenciable conexa, y sea M hipersuperficie cerrada en N .

Lema 4.3.1. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow N$ caminos diferenciables transversales a M , y supongamos que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) \in N \setminus M$. Entonces, existe un camino diferenciable $\gamma : [-1, 1] \rightarrow N$ transversal a M tal que

$$\gamma(-1) = \gamma_1(0), \quad \gamma(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0), \quad \gamma(1) = \gamma_2(1), \quad \text{y} \quad \#\gamma^{-1}(M) = \#\gamma_1^{-1}(M) + \#\gamma_2^{-1}(M)$$

Demostración. La función $f(t) = e^{1-\frac{1}{t}}$ es un homeomorfismo diferenciable de $[0, 1]$ en sí mismo que verifica $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n . El camino

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(1 - f(-t)) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ \gamma_2(f(t)) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Está bien definido y es diferenciable gracias a que $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$, y verifica todas las condiciones que buscamos gracias a que f es biyección y cumple que $f'(x) > 0$ para $x > 0$. \square

Teorema 4.3.2. Sea N variedad diferenciable conexa, y sea M hipersuperficie cerrada en N . Entonces, para cada par de puntos $x, y \in N$ existe un camino transversal a M que los une.

Demostración.

- *Caso particular:* Cuando $N = \mathbb{R}^{m+1}$ y M es $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ o vacío, procedemos de la siguiente manera: si x o y no pertenecen a M , basta con el segmento que los une cuando $x \neq y$ y con una circunferencia lo suficiente pequeña cuando $x = y$. Si $x \neq y$ y ambos pertenecen a M , podemos usar una semi-circunferencia “vertical” dada por $\gamma(t) = \frac{x+y}{2} + \cos(t)\frac{x-y}{2} + e_1 \sin(t)\frac{|x-y|}{2} \quad \forall t \in [0, \pi]$, o una circunferencia vertical en el caso de que $x = y$.

- *Caso general:* Construimos la siguiente relación en M :

$$x \sim y \iff \exists \gamma : [a, b] \rightarrow N \text{ transversal a } M \text{ que pasa por } x \text{ e } y$$

Demostraremos que es una relación de equivalencia local (es decir, donde todo x está relacionado con todos los elementos de algún entorno suyo). Así, el conjunto cociente N/\sim es una partición

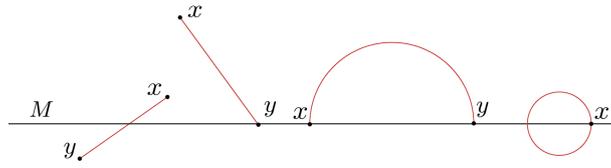


Figura 9: Caminos transversales válidos para cada posible situación del par x, y en el caso particular

de N en abiertos, y la conexión de N implica que N/\sim tiene una única clase de equivalencia. Es decir, $x \sim y$ para cualquier par $x, y \in M$

La relación es simétrica porque si $\gamma : [a, b]$ es transversal a M , también lo es $-\gamma : [-b, -a] \rightarrow N, t \mapsto \gamma(-t)$. Para ver que \sim es reflexiva y que sus clases de equivalencias son abiertas, fijamos un $x \in N$, y tomamos una carta adaptada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, U \cap M \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^m$ (donde, si $x \in N \setminus M$, $U \cap M$ podría ser vacío). Por el caso particular, existen caminos transversales a $\varphi(M)$ entre cualquier par de puntos $\varphi(y), \varphi(z) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Como φ es un difeomorfismo, deducimos que $y \sim z$ para $y, z \in U$ y en particular, $x \sim x$.

Para la transitividad tenemos que trabajar un poco más. Sean $x, y, z \in N$ tales que $x \sim y \sim z$. Sin pérdida de generalidad, existen $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow N$, tales que $\gamma_1(0) = x, \gamma_1(1) = y = \gamma_2(0)$ y $\gamma_2(1) = z$. Distinguimos dos casos: si $y \in N \setminus M$, aplicamos el Lema 4.3.1 y obtenemos un camino γ de x a z transversal a M (véase la figura 8). Si $y \in M$, tomamos un entorno abierto U de y donde todos sus elementos están relacionados entre sí, dos valores $t_1 \in \gamma_1^{-1}(U \setminus M)$ y $\gamma_2^{-1}(U \setminus M)$ (nótese que $\gamma_i^{-1}(U)$ es abierto y que $\gamma_i^{-1}(M)$ es discreto) y un camino γ_3 transversal a M que conecte $\gamma_1(t_1)$ con $\gamma_2(t_2)$. Ahora podemos aplicar el Lema 4.3.1 dos veces, primero con $\gamma_1|_{[0, t_1]}$ y γ_3 , y después con $\gamma_3|_{[t_2, 1]}$, para concluir que $x \sim z$. \square

Los tres lemas que siguen pretenden imitar los lemas 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3 en el nuevo marco de divisiones por transversalidad. Estos tres lemas demuestran precisamente que la colección \mathcal{C} de abiertos de N a los que M divide cumplen las propiedades I, II, y III que definen un recubrimiento estable bajo operaciones conexas. El primero de todos es el más sencillo:

Lema 4.3.3 (Restricción de división por transversalidad). *Sean $G \subset G'$ abiertos conexos en N . Si M divide G por transversalidad, también divide G' por transversalidad*

Demostración. Sean $x, y \in G'$, y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow G'$ caminos transversales a M de x a y . Como ambos caminos están contenidos en G , deducimos inmediatamente que $\#\gamma_1^{-1}(M) \equiv \#\gamma_2^{-1}(M) \pmod{2}$ \square

Los argumentos para demostrar la segunda operación de divisiones vía transversalidad son muy similares a la demostración más popular de que la esfera \mathbb{S}^n es simplemente conexa para $n \geq 2$ (o más generalmente, que la unión de dos abiertos simplemente conexos cuya intersección es conexa también es simplemente conexa).

Lema 4.3.4. *Si M divide los abiertos G y G' por transversalidad, y $G \cap G'$ es conexo, entonces M divide $G \cup G'$ por transversalidad.*

Demostración. Sean $x, y \in (G \cup G') \setminus M$, y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow N$ caminos transversales a M de x a y . Queremos demostrar que $\#\gamma_1^{-1}(M) \equiv \#\gamma_2^{-1}(M) \pmod{2}$. Si pegamos γ_1 y $-\gamma_2$ mediante el Lema 4.3.1 para obtener un camino $\gamma : [0, 2] \rightarrow N$ transversal a M con $x = \gamma(0) = \gamma(2)$, el problema se reduce a demostrar que $\#\gamma^{-1}(M) \equiv 0 \pmod{2}$. Primero modificaremos el camino,

sin alterar la paridad de la preimagen de M , para que esté enteramente contenido en G o G' . Como M divide a G y a G' por transversalidad, y un pequeño “círculo” que pase por x no interseca a M^1 , esto implicará que $\#\gamma^{-1}(M) \equiv 0 \pmod{2}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in G$. Los conjuntos $\gamma^{-1}(G)$ y $\gamma^{-1}(G')$ son abiertos de $[0, 2]$, luego se pueden expresar como una unión finita o numerable de intervalos disjuntos, todos abiertos salvo quizás para los extremos de $[0, 2]$. Es decir, $\gamma^{-1}(G) = \bigcup_{j \in J} I_j$ y $\gamma^{-1}(G') = \bigcup_{k \in K} I'_k$. La colección $\{I_j : j \in J\} \cup \{I'_k : k \in K\}$ es un recubrimiento por abiertos del compacto $[0, 2]$, luego tiene un subrecubrimiento finito. Tomando un subrecubrimiento minimal, ordenando los intervalos según uno de sus extremos, y quizás añadiendo un último intervalo $I_m \subset \gamma^{-1}(G)$ conteniendo al 2, podremos expresar el intervalo $[0, 2]$ de la siguiente manera:

$$[0, 2] = I_0 \cup I'_0 \cup I_1 \cup I'_1 \cup \cdots \cup I_{m-1} \cup I'_{m-1} \cup I_m,$$

donde $0 \in I_0, 2 \in I_m$, cada intervalo interseca a sus dos intervalos contiguos, y es disjunto a los demás (de lo contrario, los miembros intermedios entre dos intervalos no contiguos con intersección no vacía serían redundantes en este recubrimiento supuestamente minimal). Ahora fijamos un $i = 0, \dots, m-1$. Como $\gamma^{-1}(M)$ es finito, existen dos valores

$$t_i \in I_i \cap I'_i \setminus \gamma^{-1}(M) \quad t'_i \in I'_i \cap I_{i+1} \setminus \gamma^{-1}(M).$$

Por hipótesis, $G \cap G'$ es conexo, y como $t_i, t'_i \in \gamma^{-1}(G \cap G' \setminus M)$, existe un camino $\gamma^i : [t_i, t'_i] \rightarrow G \cap G'$ transversal a M y de $\gamma(t_i)$ a $\gamma(t'_i)$ (Lema 4.3.2). Además, como $[t_i, t'_i] \subset I'_i$, el camino $\gamma|_{[t_i, t'_i]}$ está contenido en G' , luego

$$\#(\gamma|_{[t_i, t'_i]})^{-1}(M) \equiv \#(\gamma^i)^{-1}(M) \pmod{2} \quad \text{para } i = 0, \dots, m-1$$

por hipótesis de división de G' . Por último, recordamos que hemos elegido los valores t_i, t'_i de tal forma que $\gamma(t_i), \gamma(t'_i) \in G \cap G' \setminus M$, así que podemos construir el camino

$$\gamma^* := \gamma|_{[0, t_0]} + \gamma^0 + \gamma|_{[t'_0, t_1]} + \gamma^1 + \cdots + \gamma^{m-1} + \gamma|_{[t'_{m-1}, 2]}$$

mediante un uso iterado del Lema 4.3.1. Este camino está enteramente contenido en G , pues este es el caso de cada γ^i , y porque $[t'_i, t_{i+1}] \subset I_{i+1} \subset \gamma^{-1}(G)$. Como existe un camino diferenciable en G de x a sí mismo que no pasa por M^1 , y como M divide a G , deducimos que $\#(\gamma^*)^{-1}(M) \equiv 0 \pmod{2}$, y así

$$\begin{aligned} \#\gamma_1^{-1}(M) + \#\gamma_2^{-1}(M) &\equiv \#\gamma^{-1}(M) \\ &\equiv \#(\gamma|_{[0, t_0]})^{-1}(M) + \#(\gamma|_{[t_0, t'_0]})^{-1}(M) + \cdots + \#(\gamma|_{[t_{m-1}, t'_{m-1}]})^{-1}(M) + \#(\gamma|_{[t'_{m-1}, 2]})^{-1}(M) \\ &\equiv \#(\gamma|_{[0, t_0]})^{-1}(M) + \#(\gamma^0)^{-1}(M) + \cdots + \#(\gamma^{m-1})^{-1}(M) + \#(\gamma|_{[t'_{m-1}, 2]})^{-1}(M) \\ &\equiv \#(\gamma^*)^{-1}(M) \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Es decir, $\#\gamma_1^{-1}(M) \equiv \#\gamma_2^{-1}(M) \pmod{2}$. □

Igual que con el lema 3.1.3, presentamos el siguiente lema para sucesiones numerables de abiertos conexos ascendentes, pero el mismo argumento también es válido para uniones arbitrariamente grandes. No obstante, este detalle no tiene gran importancia en el contexto de variedades diferenciables, ya que se les suele pedir el segundo axioma de numerabilidad, y por lo tanto cualquier recubrimiento de un abierto suyo tiene un subrecubrimiento numerable.

¹Dada una carta adaptada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ para un entorno abierto U de x tal que $U \cap M = \emptyset$, tómesese la preimagen por φ de una circunferencia que pase por $\varphi(x)$

Lema 4.3.5. *Si M divide por transversalidad todos los elementos de una sucesión creciente de abiertos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces también M divide por transversalidad a su unión.*

Demostración. Sean $x, y \in G'$, y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \bigcup_n G_n$ caminos transversales a M de x a y . Nótese que $\{G_n\}_n$ es un recubrimiento por abiertos del compacto $A = \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_2([0, 1])$, luego tiene un sub-recubrimiento finito $A \subset G_{n_1} \cup \dots \cup G_{n_k}$. Para $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ obtenemos que $A \subset G_n$, luego $\#\gamma_1^{-1}(M) \equiv \#\gamma_2^{-1}(M) \pmod{2}$. \square

Como mencionamos anteriormente, los tres lemas que acabamos de demostrar (4.3.3, 4.3.4 y 4.3.5) se pueden resumir en lo siguiente:

Corolario 4.3.6. *Sea M hipersuperficie diferenciable cerrada y sin borde en N . Entonces, la colección*

$$\mathcal{C} := \{G \subset N : M \text{ divide } G \text{ por transversalidad}\}$$

es un recubrimiento estable bajo operaciones conexas.

En particular, si N es una variedad diferenciable inductiva por conexos, toda hipersuperficie diferenciable en N la divide por transversalidad.

Corolario 4.3.7 (Teorema de Jordan-Brouwer, versión diferenciable). *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ hipersuperficie diferenciable cerrada en \mathbb{R}^{m+1} . Entonces, M divide \mathbb{R}^{m+1} por transversalidad.*

En la misma línea que en la sección 3.3.1, hemos descubierto que el Teorema de Jordan-Brouwer diferenciable es cierto, no sólo en el espacio euclídeo, sino también en cualquier variedad diferenciable inductiva por conexos. En la sección anterior (4.2) ya vimos que el resultado es cierto para toda variedad simplemente conexa, así que es natural empezar a buscar relaciones entre la inducción por conexos y otras propiedades de la topología algebraica como ser simplemente conexo. En la sección 6 demostramos todo espacio topológico X inductivo por conexos cumple que $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ (con la cohomología de Čech), y que en todo espacio X donde $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ se cumple la versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer (y también la versión diferenciable cuando X es una variedad, pues ya hemos visto que la división y la división por transversalidad son equivalentes para hipersuperficies diferenciables). Se sabe que la condición $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ es ligeramente más débil a ser simplemente conexo, con lo cual el resultado obtenido en esta sección es ligeramente más fuerte al que obtuvimos en la sección 4.2 mediante aproximaciones transversales.

5 ECUACIONES GLOBALES

Como describimos en la sección 4, una intersección completa para una subvariedad diferenciable $M \subset N$ de codimensión k es una aplicación diferenciable $f : N \rightarrow \mathbb{R}^k$ cuyo conjunto de ceros es M , y tal que $df(x)$ es inyectiva para todo $x \in M$. En particular para hipersuperficies diferenciables (subvariedades de codimensión 1), una ecuación global es función diferenciable $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $M = f^{-1}(0)$, y cuyo gradiente no se anula en M . La ventaja de las intersecciones completas es que nos permiten dar una descripción de las variedades diferenciables mediante sistemas de ecuaciones implícitas. En el caso general, sin embargo, sólo se puede garantizar la existencia de estas ecuaciones a nivel local. Se puede demostrar que todas las variedades en \mathbb{R}^n con ecuación global son orientables, o equivalentemente, que ninguna subvariedad no orientable puede tener ecuación global en \mathbb{R}^{m+1} .

En esta sección demostramos que toda hipersuperficie diferenciable M cerrada en \mathbb{R} tiene ecuación global.

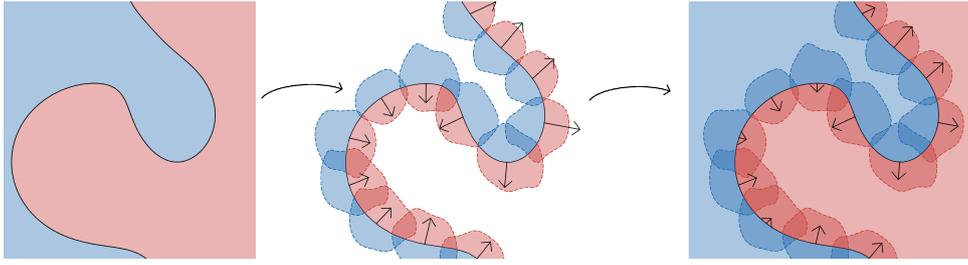


Figura 10: Esquema de la orientabilidad y la ecuación global obtenidas a partir de una división

5.1 ORIENTABILIDAD Y ECUACIÓN GLOBAL DE UNA HIPERSUPERFICIE

Recordamos que una función diferenciable es creciente en la dirección de su gradiente. Por lo tanto, la definición de una ecuación global f nos garantiza, para todo $x \in M$, que $f(x+t\nabla f(x)) > 0$ y $f(x-t\nabla f(x)) < 0$ para todo $t > 0$ lo suficientemente pequeño. En otras palabras, la ecuación global induce un signo a cada componente conexas de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ de tal forma que ningún par de componentes *adyacentes* compartan un mismo signo. Ésta no es la primera vez que nos encontramos con esta situación; de hecho, es precisamente la búsqueda de ecuaciones globales la que inspiró en primer lugar el concepto de división. En esta sección partiremos de la división del espacio para construir orientaciones y ecuaciones globales de cualquier hipersuperficie diferenciable de \mathbb{R}^{m+1} .

Teorema 5.1.1. *Sea M hipersuperficie diferenciable de \mathbb{R}^{m+1} . Entonces M es orientable y existe una ecuación global para M .*

Demostración. Por el Teorema de Jordan-Brouwer (3.2.1 o 4.2.2) M divide \mathbb{R}^{m+1} . Sea $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M = W_+ \cup W_-$ la división pertinente. Para demostrar que M es orientable, hemos de encontrar un campo de vectores normales unitarios $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$.

Dado $x \in M$, consideramos una carta adaptada $\varphi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, $M \cap U_x \rightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\}$. La última coordenada de φ se anula en M , luego $z \mapsto \nabla_z \varphi_{n+1}$ es un campo normal a $M \cap U_x$. Además $U_x \setminus M = \{\varphi_{m+1} > 0\} \cup \{\varphi_{m+1} < 0\}$ es división de x , así que, por restricción y unicidad de división podemos asumir que $\{\varphi_{m+1} > 0\} = W_+ \cap U_x$. Así, para todo $z \in M \cap U_x$, el vector $\nu(z) := \nabla_z \varphi_{n+1} / \|\nabla_z \varphi_{n+1}\|$ se puede caracterizar como *el único vector normal unitario en z tal que $z + t\nu(z) \in W_+$ para todo t lo suficientemente pequeño*. Esta caracterización es diferenciable en U_x , y a la vez independiente del entorno U_x elegido. Como $x \in M$ era arbitrario, la caracterización anterior induce un campo normal unitario diferenciable en M .

Para construir una ecuación global, empezamos definiendo la siguiente aplicación:

$$\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, (x, t) \mapsto x + t\nu(x)$$

Para cada $x \in M$, como $\nu(x)$ es un vector normal a M , el Teorema de la Función Inversa nos garantiza que $\Phi|_{V_x \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ es difeomorfismo para cierto entorno $V_x \subset M$ de x y cierto $\varepsilon > 0$. Tomando estos entornos lo suficientemente pequeños, podemos asumir que $U_x := \Phi(V_x \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ sólo interseca a M en V_x . Consideramos la función $\Pi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, t) \mapsto t$, que es diferenciable y verifica $U_x \cap M = V_x = \Pi_x^{-1}(0)$. Además, $\nabla \Pi_x(x) = \nu(x)$ por definición de Φ , y también tenemos que $\{\Pi_x > 0\} = U_x \cap W_+$ y $\{\Pi_x < 0\} = U_x \cap W_-$ por la caracterización del campo normal.

Así obtenemos una familia de funciones $\{\Pi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}\}_{x \in M}$. La colección $\mathcal{C} = \{W_+, W_-\} \cup \{U_x : x \in M\}$ es un recubrimiento de M , y vamos a tomar una partición diferenciable subordinada $\{\theta_+, \theta_-\} \cup \{\theta_x : x \in M\}$. Veamos que la función $f = \theta_+ - \theta_- + \sum_{x \in M} \theta_x \Pi_x$ es ecuación global de M .

Si $z \in W_+$ entonces $\Pi_x(z) > 0$ para todo $x \in M$ con $z \in U_x$, y también $\theta_-(z) = 0$. Por lo tanto, $f(z) = \theta_+(z) + \sum_{x \in M} \theta_x(z) \Pi_x(z)$ es una combinación lineal convexa de valores estrictamente positivos y en particular, $f(z) > 0 \forall z \in W_+$. Análogamente, $f(z) < 0 \forall z \in W_-$, y por continuidad concluimos que $M = f^{-1}(0)$. Ahora sólo queda demostrar que $\nabla f(z) \neq 0 \forall z \in M$. Si z no pertenece a W_+ ni a W_- entonces $\theta_+(z) = \theta_-(z) = 0$ y $\nabla \theta_+(z) = \nabla \theta_-(z) = 0$, y para cada $x \in M$ con $z \in U_x$ tendremos lo siguiente:

$$\nabla(\theta_x \Pi_x)(z) = \Pi_x(z) \nabla \theta_x(z) + \theta_x(z) \nabla \Pi_x(z) = 0 \cdot \nabla \theta_x(z) + \theta_x(z) \nu(z) = \theta_x(z) \nu(z).$$

Luego $\nabla f(z) = \sum_{x \in M} \nabla(\theta_x \Pi_x)(z) = \sum_{x \in M} \theta_x(z) \nu(z) = \nu(z) \neq 0$, tal y como buscábamos. \square

5.2 LA CONSTRUCCIÓN DE E.L. LIMA

Llegados a este punto, es claro que las propiedades de orientabilidad, dividir el espacio, o tener ecuación global están íntimamente relacionadas. De hecho, otras fuentes [7] se acercan al problema en la dirección contraria: parten de que toda hipersuperficie de \mathbb{R}^{m+1} es orientable usando algún argumento de transversalidad [12], y después construyen una ecuación global para demostrar el Teorema de Jordan-Brouwer. La construcción propuesta por Lima [7] tiene una naturaleza similar a la aquí presentada, pero es capaz de lograrlo sin utilizar la división.

Teorema 5.2.1 (Lima). *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ hipersuperficie diferenciable conexa y orientable. Entonces, existe una ecuación global para M .*

Demostración. Partimos de la aplicación $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ descrita en el Teorema 5.1.1, donde para cada $x \in M$ existe un $\varepsilon_x > 0$ tal que Φ restringido a $G_{x,\varepsilon_x} = \{|y - x| < \varepsilon_x\} \times (-\varepsilon_x, \varepsilon_x)$ es difeomorfismo. Sin mucha dificultad se puede demostrar que Φ también es difeomorfismo en el abierto $G = \bigcup_{x \in M} G_{x,\varepsilon_x/3}$ que contiene a $M \times \{0\}$.

En particular M separa al abierto $U = \Phi(G)$ que lo contiene, $\Pi : U \rightarrow M, \Phi(x, t) \mapsto x$ es una proyección diferenciable de U en M , y la función $h : U \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, t) \mapsto t$ es ecuación global de M en U . Ahora tomamos un abierto U' de \mathbb{R}^{m+1} tal que $M \subset U' \subset \overline{U'} \subset U$, una función diferenciable $\varepsilon : M \rightarrow (0, \infty)$ tal que $B(x, \varepsilon(x)) \subset U'$ para todo $x \in M$ (que se puede construir mediante particiones diferenciables de la unidad), y una función diferenciable $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ impar tal que $\lambda'(0) = 1$, $\lambda(x) = 1$ para $x > 1$, y $\lambda(x) = -1$ para $x < -1$.

La función $\hat{f}(x) := \lambda(h(x)/\varepsilon(\Pi(x)))$ sigue siendo una ecuación global de M en U , y por definición de ε y λ verifica que $\hat{f}(x) = \pm 1$ para $x \in U \setminus U'$. Sea $\hat{\xi} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ su gradiente. Como $\overline{U'} \subset U$ y $\hat{\xi}$ se anula en todo $U \setminus U'$, podemos extenderla por ceros a un campo vectorial $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Además tenemos $\nabla \times \xi = 0$ en U porque ahí coincide con el gradiente de \hat{f} , y en $\mathbb{R}^n \setminus U$ porque $\xi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus U' \supset \mathbb{R}^n \setminus U$.

Como \mathbb{R}^n es simplemente conexo, ξ es el gradiente de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que sin pérdida de generalidad verifica $f(x) = 0$ para cierto $x \in M$. Como $\nabla f|_U = \xi|_U = \nabla \hat{f}$ y U es conexo (por serlo M), se deduce que $f|_U = \hat{f}$, y en particular que f es una ecuación global de M en U . Para ver que también lo es en M basta comprobar que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^n \setminus U$. En efecto, dado $z \in \mathbb{R}^n \setminus U$ tomamos el punto $z_0 \in \partial U'$ que minimice la distancia a z , asegurando así que el segmento $[z_0, z]$ no interseca a U' . Como $\nabla f = \xi$ se anula fuera de U' , y $z_0 \in \partial U' \subset U \setminus U'$, deducimos que $f(z) = f(z_0) = \hat{f}(z_0) = \pm 1 \neq 0$, concluyendo que f es ecuación global de M . \square

5.3 OTRA CONSTRUCCIÓN SIN HIPÓTESIS DE ORIENTABILIDAD

En el mismo artículo de Lima [7] también se explica cómo construir una ecuación global de cualquier hipersuperficie diferenciable de $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ sin la necesidad de asumir su orientabilidad. La idea es de naturaleza muy similar a la primera demostración del Teorema de Jordan-Brouwer

presentada en este trabajo: imitando la idea de separación local, Lima parte de que las hipersuperficies tienen ecuaciones locales, y cuidadosamente se asegura de que estas ecuaciones locales que recubren \mathbb{R}^{m+1} coinciden salvo por signo localmente en dominios comunes. Después demuestra que si dos ecuaciones coinciden salvo por signo localmente en un abierto conexo, han de coincidir *globalmente* salvo por signo (análogo a la unicidad de división en abiertos conexos). Y para construir la ecuación en todo \mathbb{R}^{m+1} , en vez de apilar rectángulos como hacemos en este trabajo en la sección 3.2.1, lo hace mediante entornos de segmentos. En esta sección daremos un resumen de esta construcción:

Definición 5.3.1. Sean $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Se dice que f y g coinciden salvo por signo localmente si para todo $x \in G$ existe un entorno abierto suyo, U_x , tal que $f|_{U_x} = \pm g|_{U_x}$.

La siguiente observación es análoga a la primera operación de divisiones (Lema 3.1.1) en el contexto de funciones que coinciden localmente:

Observación 5.3.2. Supongamos que $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ coinciden salvo por signo localmente, y sea $G' \subset G$ un abierto. Entonces, $f|_{G'}$ y $g|_{G'}$ coinciden salvo por signo localmente.

Ahora observemos la siguiente proposición, también propuesta por Lima, que es equivalente a la unicidad de divisiones en conexos (Teorema 2.3.2):

Proposición 5.3.3. Sea G conexo y $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas que coinciden salvo por signo localmente. Si $f^{-1}(0) \subset G$ no tiene puntos interiores, entonces $f = \pm g$.

Demostración. Para cada $x \in G$, definimos

$$h(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } f|_{U_x} = g|_{U_x} \\ -1 & \text{si } f|_{U_x} = -g|_{U_x} \end{cases}$$

Donde U_x es un entorno de x donde f y g coinciden salvo por signo. Nótese que $h(x)$ está caracterizado por los valores de f y g en cualquier $y \in U_x \setminus f^{-1}(0)$ (que es no vacío porque $f^{-1}(0)$ no tiene puntos interiores), luego no depende del entorno U_x escogido (para cualquier otro entorno U'_x , tómese un $y \in U_x \cap U'_x \setminus f^{-1}(0)$).

Además, h es localmente constante, porque para cada $x \in G$ asigna el mismo valor en todo U_x . Si G es conexo, h será constante, y como $f = hg$ por definición, concluimos que $f = \pm g$. \square

De esta proposición se deducen dos resultados análogos a la segunda y la tercera operación de divisiones (Lemas 3.1.2 y 3.1.3) respectivamente para funciones que coinciden salvo por signo localmente:

Corolario 5.3.4. Sean $f : G \rightarrow \mathbb{R}, g : G' \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones que coinciden localmente salvo por signo en $G \cap G'$, y supongamos que $G \cap G'$ es conexo y que $f^{-1}(0)$ y $g^{-1}(0)$ no tienen puntos interiores. Entonces, existe una función $h : G \cup G' \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide salvo por signo localmente con f en G y con g en G' .

Corolario 5.3.5. Sea $\{G_n\}_n$ una cadena ascendente de abiertos conexos de un espacio X , y $\{f_n : G_n \rightarrow \mathbb{R}\}_n$ una familia de funciones que coinciden salvo por signo localmente entre sí, y tales que ningún $f_n^{-1}(0)$ tiene puntos interiores. Entonces, existe una función $f : \bigcup_n G_n \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide salvo por signo localmente con cada f_n en su respectivo dominio.

Ahora, para construir una ecuación global de una hipersuperficie diferenciable cerrada en \mathbb{R}^{m+1} , lo que haremos es recubrir \mathbb{R}^{m+1} con ecuaciones locales de M que coincidan salvo por signo localmente, y después unir las mediante las operaciones de división para encontrar una ecuación global de M .

Proposición 5.3.6. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ hipersuperficie diferenciable cerrada en \mathbb{R}^n . Entonces, existe un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ de \mathbb{R}^n , y una colección de funciones $\{f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}\}$ donde cada f_i es una ecuación global de $U_i \cap M$ (en particular, $f_i^{-1}(0) = U_i \cap M$ no tiene puntos interiores), y de tal forma que para cada par $i, j \in I$, las funciones f_i y f_j coinciden salvo por signo localmente en $U_i \cap U_j$.*

Demostración. Dado un $p \in M$, como M será orientable en un entorno abierto V_p de p lo suficientemente pequeño, sea $\nu_p : M \cap V_p \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ un campo normal unitario. Nótese que éste es único salvo por signo. Usando argumentos parecidos a los del Teorema 5.1.1, existe un entorno abierto de p , $W_p \subset V_p$, y un $\varepsilon_p > 0$ tales que W_p es isomorfo a $(W_p \cap M) \times (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$ via $(q, t) \mapsto q + t\nu_p(q)$. Sea $g_p : W_p \rightarrow \mathbb{R}, q + t\nu_p(q) \mapsto t$, y sea $\delta_p > 0$ tal que $B_{p, 3\delta_p} \subset W_p$, y sea $U_p = B_{p, \delta_p}$.

Como $G := \bigcup_p G_p$ es un abierto que contiene al cerrado M , podemos construir, mediante particiones diferenciables de la unidad, un abierto G' tal que $M \subset G' \subset \overline{G'} \subset G$, y una función diferenciable $\delta : M \rightarrow (0, \infty)$ tal que $B_{p, 2\delta(p)} \subset G'$ para todo p . También podemos construir una función impar creciente $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ tal que $\lambda(x) = -1$ para todo $x \leq -1$ y $\lambda(x) = 1$ para todo $x \geq 1$. Para cada $p \in M$, definimos la función $f_p := \lambda(g_p|_{U_p}/\delta(p))$. Por definición tenemos que $f_p^{-1}(0) = (g_p|_{U_p})^{-1}(0) = U_p \cap M$, y en particular el conjunto de ceros de f_p no tiene puntos interiores. Por otra parte, se puede ver que si $U_p \cap U_{p'} \neq \emptyset$, entonces $U_p \cup U_{p'}$ ha de estar enteramente contenido en W_p o en $W_{p'}$ (sin pérdida de generalidad, en W_p). Como la elección de $g_p : W_p \rightarrow M$ es única salvo por signo localmente, se deduce que $g_{p'}|_{U_{p'}}$ coincide salvo por signo localmente con $g_p|_{U_p}$, y por lo tanto f_p y $f_{p'}$ coinciden salvo por signo localmente.

Para completar la demostración añadimos a nuestro recubrimiento el abierto $U_0 := \mathbb{R}^{m+1} \setminus \overline{G'}$ que contiene a $\mathbb{R}^{m+1} \setminus G$ por definición de G' . Como lo $g_p(x) \notin \{-1, 1\}$ sólo si $x \in B_{p, 2\delta(p)} \subset G'$, se deduce que todo g_p coincide salvo por signo localmente con la función constante 1 en $U_p \cap U_0$. Por lo tanto, las colecciones $\mathcal{U} := \{U_p : p \in M\} \cup \{U_0\}$ y $\{f_p : p \in M\} \cup \{1|_{U_0}\}$ cumplen todos los requisitos que buscamos. \square

Gracias a todo ésto, obtenemos otra demostración autocontenida del Teorema de Jordan-Brouwer para variedades diferenciables:

Teorema 5.3.7. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ hipersuperficie diferenciable cerrada en M . Entonces, existe una ecuación global $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ para M . En particular, M es orientable y divide \mathbb{R}^{m+1} .*

Demostración. Consideramos el recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y la familia de funciones $\{f_i\}_{i \in I}$ que construimos en la proposición anterior, y sea \mathcal{C} la colección de abiertos $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ para los cuales existe una función $f_G : G \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide salvo por signo localmente con cada f_i . Nótese que \mathcal{C} contiene a \mathcal{U} por construcción, en particular que \mathcal{C} recubre \mathbb{R}^{m+1} , y que para cada par $G, G' \in \mathcal{C}$, las funciones f_G y $f_{G'}$ coinciden salvo por signo localmente en $G \cap G'$, (pues lo hacen en $G \cap G' \cap U_i$ para todo i). Gracias a esto, la observación 5.3.2 y los corolarios 5.3.4 y 5.3.5 implican que \mathcal{C} cumple las propiedades I, II, y III de un recubrimiento estable bajo operaciones conexas. Como \mathbb{R}^{m+1} es un espacio inductivo por conexos (Corolario 3.3.3), concluimos que existe una función $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide salvo por signo localmente con cada f_i , y por lo tanto es una ecuación global de M .

De todas formas, aquí resumimos la forma en la que Lima demuestra que \mathcal{C} contiene a \mathbb{R}^{m+1} . Primero demuestra que para cualquier segmento $S = [x_0, x_1]$ existe un abierto en \mathcal{C} que lo contiene. En efecto, para cada $x \in S$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $U_x := B_{x, \varepsilon_x} \in \mathcal{C}$ (usando la propiedad I de restricción). Como la colección de bolas $\{U_x\}_{x \in S}$ recubre el compacto S , existe un subrecubrimiento finito, que además podemos tomar minimal. De esta manera, ordenando las bolas adecuadamente, podemos escribir S de la siguiente forma:

$$S \subset U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_k$$

De tal forma que cada bola interseca a sus dos bolas contiguas en la expresión, y es disjunta a las demás (de forma similar al Lema 4.3.4). Podemos argumentar por inducción sobre $1 \leq l \leq k$ que $\bigcup_{i=0}^l U_i \in \mathcal{C}$. Para $l = 1$ el resultado es inmediato, y si $\bigcup_{i=0}^l U_i \in \mathcal{C}$, como $(\bigcup_{i=0}^l U_i) \cap U_{l+1} = U_l \cap U_{l+1}$ (por la elección de los U_i 's) y éste es conexo (la intersección de dos bolas convexas es convexa, luego conexa), el lema 5.3.4 garantiza que $\bigcup_{i=0}^{l+1} U_i \in \mathcal{C}$, completando la inducción sobre l . En resumen, $U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$ es un abierto que pertenece a \mathcal{C} y que contiene a S .

Para construir la ecuación en \mathbb{R}^{m+1} , hacemos lo siguiente: para cada $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, sea $S_x = [0, x]$ el segmento que conecta x con el origen. Como existe un abierto $G_x \in \mathcal{C}$ que contiene a S_x , y S_x es compacto, sea $\delta_x > 0$ tal que $V_x := \bigcup_{y \in S_x} B_{y, \delta_x} \subset G_x$, y en particular $V_x \in \mathcal{C}$ (Observación 5.3.2). Nótese que V_x es convexo porque es la suma de dos conjuntos convexas. Para cualesquiera $x, x' \in \mathbb{R}^{m+1}$, la intersección $V_x \cap V_{x'}$ es no vacía (contiene al origen) y convexa (en particular, conexa), luego $f_{V_x} = \pm f_{V_{x'}}$ en el dominio común. Sin pérdida de generalidad, podemos fijar un f_{V_0} y elegir cada f_{V_x} de tal forma que $f_{V_x} = f_{V_0}$ en $V_0 \cap V_x$. Así, para cualesquiera $x, x' \in \mathbb{R}^{m+1}$, como $f_{V_x} = \pm f_{V_{x'}}$ en $V_x \cap V_{x'}$ y $f_{V_x} = f_{V_0} = f_{V_{x'}}$ en $V_x \cap V_{x'} \cap V_0$ (que es no vacío porque contiene al origen), se dará que $f_{V_x} = f_{V_{x'}}$, y por lo tanto $f := \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} f_{V_x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida y cumple todas las propiedades deseadas. \square

6 DIVISIONES DE OTROS ESPACIOS

Como vimos a la hora de demostrar el Teorema de Jordan-Brouwer mediante aproximaciones transversales, la versión diferenciable del teorema se puede generalizar a cualquier espacio ambiente que sea simplemente conexo. Por ejemplo, este es el caso de una esfera \mathbb{S}^n cuando $n \geq 2$. También hay herramientas avanzadas de la topología algebraica, como la dualidad de Alexander-Lefschetz, que permiten relajar todavía más las condiciones sobre N . Concretamente, el Teorema de Jordan-Brouwer diferenciable se cumple en una variedad diferenciable N si y sólo si $H^1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$ [13].

Las herramientas de la tercera sección también nos permiten demostrar el Teorema de Jordan-Brouwer local-global para las esferas. Basta con ver que \mathbb{S}^n se puede describir mediante dos cartas homeomorfas a \mathbb{R}^n cuya intersección es conexa (tómense las proyecciones estereográficas de los polos $(1, 0, \dots)$ y $(-1, 0, \dots)$ sobre el plano del ecuador $x_1 = 0$; la intersección de dichas cartas es homeomorfa a $(-1, 1) \times \mathbb{S}^{n-1}$, y por lo tanto conexa para $n \geq 2$). Gracias al Teorema 3.2.1, todo subconjunto cerrado $M \subset \mathbb{S}^n$ que separa localmente la esfera divide las dos cartas, y por el Lema 3.1.2, también divide la esfera.

Esto lleva a preguntarnos para qué espacios se cumple que todo subconjunto M que lo separa localmente también lo divide (informalmente, ¿para qué espacios se cumple *la versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer?*). Como vimos en el corolario 3.3.2, el Teorema de Jordan Brouwer es cierto en todo espacio inductivo por conexos.

No obstante, es necesario recalcar la diferencia entre un espacio inductivo por conexos y un espacio donde se verifica la versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer. Aunque todo espacio de la primera categoría pertenece a la segunda, no estamos seguros de si la veracidad de la versión local-global del Teorema de Jordan-Brouwer implica que ésta se pueda verificar mediante nada más que operaciones de divisiones. La naturaleza de este problema reside en que no tenemos herramientas para construir conjuntos que separen localmente ni manipularlos para encontrar contraejemplos al Teorema de Jordan-Brouwer cuando un espacio no es inductivo por conexos.

Volviendo a la pregunta principal de esta sección, ¿para qué otros espacios topológicos se cumple el Teorema de Jordan-Brouwer? ¿Existe alguna relación entre la inducción por conexos y alguna otra propiedad topológica conocida? En lo que sigue proponemos una versión alternativa del corolario 3.3.2 que en vez de utilizar los grafos de adherencia, cruciales en la sección 3.1 para

operar con divisiones, recurre a una herramienta topológica que es frecuentemente utilizada en la literatura para resolver problemas de naturaleza similar al Teorema de Jordan-Brouwer.

6.1 COHOMOLOGÍA DE ČECH

En esta sección definimos brevemente las nociones básicas necesarias para construir el primer grupo de cohomología de Čech de un espacio X sobre el haz $\underline{\mathbb{Z}}_2$. La mayoría de las demostraciones en esta introducción están inspiradas en unas notas sobre superficies riemannianas de Otto Forster [3], pero han sido adaptadas para nuestro caso particular.

Definición 6.1.1 (Cohomología de un recubrimiento). Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de X , y $k \in \mathbb{N}$:

- (1) Un k -símplice de \mathcal{U} es una secuencia $\sigma = (U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$ en \mathcal{U} . Denominamos *soporte* de σ a la intersección de todos los miembros de σ , y lo denotamos por $|\sigma|$. Denotamos a la colección de k -símplices de \mathcal{U} por $\Delta^k(\mathcal{U})$.
- (2) Para $0 \leq j \leq k$, definimos el j -ésimo borde de σ como $\partial_j \sigma := (U_{i_0}, \dots, U_{i_{j-1}}, U_{i_{j+1}}, \dots, U_{i_{k+1}}) \in \Delta^{k-1}(\mathcal{U})$.
- (3) Una k -cocadena de \mathcal{U} (sobre el haz $\underline{\mathbb{Z}}_2$) es una aplicación f que asigna, a cada $\sigma \in \Delta^k(\mathcal{U})$, una función $f_\sigma = f_{i_0 \dots i_k} : |\sigma| \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_2$ localmente constante. El conjunto de k -cocadenas de \mathcal{U} se denota por $C^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$.
- (4) El *coborde* de una cocadena $f \in C^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ es la $(k+1)$ -cocadena ∂f que asigna, a cada $(k+1)$ -símplice $\sigma = (U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{k+1}})$, la función ∂f_σ dada por

$$\partial f_\sigma = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j f_{\partial_j \sigma}|_{|\sigma|}$$

Donde $f_{\partial_j \sigma}|_{|\sigma|}$ es la restricción a $|\sigma|$ de la función $f_{\partial_j \sigma}$ originalmente definida en el soporte de $\partial_j \sigma$ (nótese que $|\sigma| \subset |\partial_j \sigma|$). Como $f_{\partial_j \sigma}|_{|\sigma|}$ es una función localmente constante en $|\sigma|$ para todo j , también lo será ∂f . Por lo tanto, ∂f está bien definida como $(k+1)$ -cocadena.

- (5) Una k -cocadena f es k -cociclo si $\partial f = 0$. La colección de k -cociclos en \mathcal{U} se denota por $\mathcal{Z}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$.
- (6) Una k -cocadena f es k -coborde si es el coborde de algún cocadena $g \in C^{k-1}(\mathcal{U})$, es decir, si $f = \partial g$. La colección de k -cobordes en \mathcal{U} se denota por $\mathcal{B}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$. Definimos también $\mathcal{B}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) := 0$.
- (7) Para cada $f \in C^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ se tiene que $\partial^2 f = \partial(\partial f) = 0$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{B}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) \subset \mathcal{Z}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ para $k \geq 1$. Se define el k -ésimo grupo de cohomología del recubrimiento \mathcal{U} como el grupo cociente $\check{H}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) := \mathcal{Z}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) / \mathcal{B}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$. En efecto, podemos expandir la definición de coborde de f dos veces sobre un $\sigma = (U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{k+1}}) \in \Delta^{k+2}(\mathcal{U})$ para obtener lo siguiente:

$$(\partial^2 f)_\sigma = \sum_{j=0}^{k+2} \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^{k+2} (-1)^j (-1)^{\ell - \mathbb{1}_{j < \ell}} f|_{\partial_{\ell - \mathbb{1}_{j < \ell}} \partial_j \sigma} = \sum_{0 \leq j < \ell \leq k+2} (-1)^{j+\ell} (f|_{\partial_j \partial_{\ell-1} \sigma} - f|_{\partial_\ell \partial_j \sigma}) = 0$$

Donde $\mathbb{1}_{j < \ell}$ vale 1 si $j < \ell$ y 0 cuando $j > \ell$. Es gracias a esta paridad causada por el orden entre j y ℓ que $\partial^2 f = 0$.

Esta definición se puede extender sin dificultad a cualquier pre-haz en X . Un pre-haz es una aplicación \mathcal{F} que asigna a cada abierto $U \subset X$ un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$, y a cada par de abiertos $V \subset U$ un homomorfismo de restricción $\text{res}_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ verificando que $\text{res}_U^U = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ y que $\text{res}_V^U \circ \text{res}_W^V = \text{res}_W^U$ para abiertos cualesquiera $W \subset V \subset U$. De todas formas, en este trabajo sólo nos interesa trabajar sobre el haz $\underline{\mathbb{Z}}_2$, que asigna a cada abierto $U \subset X$ el grupo de aplicaciones localmente constantes en U con las restricciones definidas naturalmente.

Definición 6.1.2 (Cohomologías bajo refinamientos). Sea $\mathcal{V} = \{G_j\}_{j \in J}$ un recubrimiento por abiertos de X que es refinamiento de \mathcal{U} , y sea $\tau : J \rightarrow I$ tal que $V_j \subset U_{\tau_j}$ para todo $j \in J$. Ésta elección induce naturalmente las siguientes relaciones entre símlices, cocadenas, y grupos de cohomología sobre \mathcal{U} y \mathcal{V} :

- (1) Dado $\sigma = (V_{j_0}, \dots, V_{j_k}) \in \Delta^k(\mathcal{V})$, la secuencia $\tau_\Delta(\sigma) := (U_{\tau_{j_0}}, \dots, U_{\tau_{j_k}})$ es un k -símlice en \mathcal{U} . Por lo tanto, obtenemos una función entre símlices $\varphi_\Delta : \Delta^k(\mathcal{U}') \rightarrow \Delta^k(\mathcal{U})$ que además verifica $\partial_\ell(\varphi_\Delta(\sigma')) = \varphi_\Delta(\partial_\ell \sigma')$ para todo $\sigma \in \Delta^k(\mathcal{V})$, $0 \leq \ell \leq k$.
- (2) Así podemos definir una aplicación $\varphi_C : C^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) \rightarrow C^k(\mathcal{V}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ que asigna, a cada cadena $f \in C^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$, la cadena $\tau_C(f) \in C^k(\mathcal{V}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ dada por $\tau_C(f)_\sigma = f_{\tau_\Delta(\sigma)}|_{|\sigma|}$ para todo $\sigma \in \Delta^k(\mathcal{V})$. Gracias a que τ_Δ conmuta con los ∂_ℓ 's, se deduce que $\partial \tau_C(f) = \tau_C(\partial f) \forall f$.
- (3) En particular, τ_C manda cociclos en \mathcal{U} a cociclos en \mathcal{V} , y cobordes en \mathcal{U} a cobordes en \mathcal{V} . Cocientando τ_C sobre los cobordes en $C^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ y $C^k(\mathcal{V}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ obtenemos una aplicación $t_V^U : \check{H}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$.

Además, la aplicación t_V^U no depende de la función τ elegida, es decir, que tenemos una única aplicación natural $t_V^U : \check{H}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$. Debajo lo demostramos para $k = 0$ y $k = 1$, que son los únicos casos que utilizaremos en este trabajo. También se puede comprobar sin mucha dificultad que t_U^U es la identidad en $\check{H}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ y que $t_W^V \circ t_V^U = t_W^U$, para refinamientos $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \preceq \mathcal{W}$.

Como los recubrimientos por abiertos de X forman un conjunto dirigido bajo refinamientos, definimos el k -ésimo grupo de cohomología de X como el límite directo de $\check{H}^k(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ sobre los recubrimientos de \mathcal{U} de X vía estos homomorfismos naturales, y lo denotamos por $\check{H}^k(X, \underline{\mathbb{Z}}_2)$.

Proposición 6.1.3 (El grupo 0 de cohomología).

- (I) Para cualquier recubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X , el grupo de cohomología $\check{H}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$, que coincide con $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ (pues $\mathcal{B}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) = 0$) es naturalmente isomorfo al grupo de aplicaciones localmente constantes de X en $\underline{\mathbb{Z}}_2$ mediante $g \mapsto \bigcup_{i \in I} g_i$
- (II) Dado un refinamiento $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$, la aplicación t_V^U se caracteriza por los isomorfismos de $\check{H}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ y $\check{H}^0(\mathcal{V}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ con las funciones localmente constantes en X descritos en (I). En particular, t_V^U no depende del $\tau : J \rightarrow I$ elegido y es un isomorfismo.

Como todos los $\check{H}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ son isomorfos entre sí y con el grupo funciones localmente constantes en X , deducimos que su límite directo bajo refinamientos, $\check{H}^0(X, \underline{\mathbb{Z}}_2)$, es también isomorfo al grupo de funciones localmente constantes en X . En particular, X es conexo si y sólo si $\check{H}^0(X, \underline{\mathbb{Z}}_2) \cong \{h : X \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_2 \text{ constante}\} \cong \underline{\mathbb{Z}}_2$.

Demostración. (I) Dado un $g \in \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ tenemos, para cada $x \in U_i \cap U_{i'}$, que $g_i(x) - g_{i'}(x) = (\partial g)_{i_i}(x) = 0$, luego la función dada por $\Phi_U(g)(x) := g_i(x)$ no depende del $U_i \ni x$ elegido (es decir, está bien definida en X), y es localmente constante en X porque lo es en cada U_i . Por otra parte, cualquier aplicación localmente constante h induce un cociclo dado por $g_i := h|_{U_i}$.

(II) Sean $\tau : J \rightarrow I$ con $V_j \subset U_{\tau_j} \forall j$, $g \in \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$, y $h : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ una función localmente constante que caracteriza g tal y como describimos en (1), tenemos para todo $j \in J$, $x \in U_j$, que $\tau_C(g)_j(x) = g_{\tau_j}(x) = h(x)$. Es decir, que h también describe $\tau_C(g)$, concluyendo que $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{U}}$ es composición de isomorfismos (luego isomorfismo) y que no depende de τ . \square

Proposición 6.1.4 (El primer grupo de cohomología).

- (I) Una cocadena $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ es cociclo si y sólo si verifica, para todo $i_0, i_1, i_2 \in I$, que $f_{i_0 i_0} = f_{i_0 i_1} + f_{i_1 i_0} = f_{i_0 i_1} + f_{i_1 i_2} + f_{i_2 i_0} = 0$ en todo $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2}$.
- (II) Dado un refinamiento $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$, la aplicación $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ no depende del $\tau : J \rightarrow I$ elegido y es inyectiva.

En particular, deducimos por la definición de límite directo que $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$ si y sólo si $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$ para todo recubrimiento por abiertos \mathcal{U} de X . Este resultado es particular para $k = 0, 1$ y no se puede generalizar para $k \geq 2$, pues $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ puede dejar de ser inyectiva.

Demostración. (I) Por definición, f es cociclo si y sólo si $f_{i_1 i_2}(x) - f_{i_0 i_2}(x) + f_{i_0 i_1}(x) = 0$ para todo $x \in U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2}$. Tomando $i_0 = i_1 = i_2$ se obtiene $f_{i_0 i_0}(x) = 0$, y con $i_0 = i_2$ se obtiene $f_{i_1 i_0}(x) - 0 + f_{i_0 i_1}(x) = 0$. En particular $f_{i_2 i_0}(x) = -f_{i_0 i_2}(x)$, concluyendo que $f_{i_0 i_1}(x) + f_{i_1 i_2}(x) + f_{i_2 i_0}(x) = 0$. El resultado recíproco es evidente.

(II) Para ver que $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ no depende de la elección de τ , sean $\tau, \tau' : J \rightarrow I$ tal que $V_j \in U_{\tau_j} \cap U_{\tau'_j}$ para todo $j \in J$. Queremos demostrar que $\tau_C(f) - \tau'_C(f) \in \mathcal{B}^1(\mathcal{V}, \mathbb{Z}_2)$ para todo $f \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$. Definimos la cadena $g \in C^0(\mathcal{V}, \mathbb{Z}_2)$ dada por $g_j := f_{\tau'_j \tau_j}$ (que tiene a $V_j \cap U_{\tau_j} = V_j$ por dominio) en cada $j \in J$, y así obtenemos, en cada $V_{j_0} \cap V_{j_1}$, que

$$\begin{aligned} \tau_C(f)_{j_0 j_1} - \tau'_C(f)_{j_0 j_1} &= f_{\tau_{j_0} \tau_{j_1}} - f_{\tau'_{j_0} \tau'_{j_1}} = f_{\tau_{j_0} \tau_{j_1}} - f_{\tau_{j_0} \tau'_{j_1}} + f_{\tau_{j_0} \tau'_{j_1}} - f_{\tau'_{j_0} \tau'_{j_1}} \\ &= (f_{\tau'_{j_1} \tau_{j_0}} + f_{\tau_{j_0} \tau_{j_1}}) - (f_{\tau'_{j_0} \tau'_{j_1}} + f_{\tau'_{j_1} \tau_{j_0}}) \stackrel{(1)}{=} f_{\tau'_{j_1} \tau_{j_0}} - f_{\tau'_{j_0} \tau_{j_0}} = g_{j_1} - g_{j_0} \end{aligned}$$

Es decir, que $\tau_C(f) - \tau'_C(f) = \partial g$, tal y cómo buscábamos.

Para ver que $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ es inyectivo, queremos demostrar que si $f \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ es 1-cociclo en \mathcal{U} y su imagen $\tau_C(f)$ es coborde en \mathcal{V} , entonces f es coborde en \mathcal{U} . En efecto, por hipótesis existe $g \in C^0(\mathcal{V}, \mathbb{Z}_2)$ tal que $\tau_C(f) = \delta g$. I.e. para cada $i \in I$, $j_0, j_1 \in J$ tenemos, en $U_i \cap V_{j_0} \cap V_{j_1}$, que

$$g_{j_1} - g_{j_0} = \tau_C(f)_{j_0 j_1} = f_{\tau_{j_0} \tau_{j_1}} = f_{\tau_{j_0} i} + f_{i \tau_{j_1}} = f_{i \tau_{j_1}} - f_{i \tau_{j_0}}$$

Luego $g_{j_1} - f_{i \tau_{j_1}}(x) = g_{j_0}(x) - f_{i \tau_{j_0}}(x)$. De esta manera, la aplicación $h_i : U_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$ dada por $h_i(x) := f_{i \tau_j}(x) - g_j(x)$ no depende del $U_j \ni x$ elegido y es localmente constante (pues lo es en cada $V_j \cap U_i$). Además, para cualquier $x \in U_{i_0}, U_{i_1}$, y cualquier $j \in J$ con $x \in U_j$ verifica que:

$$f_{i_0 i_1}(x) = f_{\tau_{j_1} i_1}(x) - f_{\tau_j - i_0}(x) = h_{i_1}(x) - g_j(x) - (h_{i_0}(x) - g_j(x)) = h_{i_1}(x) - h_{i_0}(x),$$

concluyendo que $f = \partial h$ y en particular, que f es un coborde en \mathcal{U} . \square

Observación 6.1.5 (Restricción de cocadenas). Sea $G \subset X$ abierto de X y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de X . Entonces $\mathcal{U}|_G := \{U_i \cap G\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de G . Además, existe un homomorfismo natural que asigna a cada $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ el cociclo $f|_G \in C^k(\mathcal{U}|_G, \mathbb{Z}_2)$ dado por $(f|_G)_{i_0 \dots i_k} = f_{i_0 \dots i_k}|_{G \cap U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}$, y que además conmuta con el coborde (es decir, $\partial(f|_G) = (\partial f)|_G$) por definición. En particular, si f es un cociclo (o coborde) en \mathcal{U} , también lo será $f|_G$ en $\mathcal{U}|_G$.

6.2 INDUCCIÓN POR CONEXOS Y COHOMOLOGÍA DE ČECH

Vamos a dar una nueva demostración del Corolario 3.3.2 mediante dos resultados:

Teorema 6.2.1. *Sea X un espacio topológico inductivo por conexos. Entonces $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}_2) \equiv 0$.*

Demostración. Supongamos que X es inductivo por conexos, y sea \mathcal{U} un recubrimiento por abiertos de X . Queremos demostrar que $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2) = 0$. Fijamos un $f \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$, y consideramos la siguiente colección de abiertos de X :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \{G \subset X \text{ abierto} : f|_G \in \mathcal{B}^1(\mathcal{U}|_G, \underline{\mathbb{Z}}_2)\} \\ &= \{G \subset X \text{ abierto} : \exists g \in C^0(\mathcal{U}|_G, \underline{\mathbb{Z}}_2) \text{ tal que } f|_G = \partial g\} \end{aligned}$$

Si demostramos que \mathcal{C} es un recubrimiento de X estable bajo operaciones conexas, entonces la inducción por conexos de X implica que $X \in \mathcal{C}$, o lo que es lo mismo, $f \in \mathcal{B}^1(\mathcal{U}|_X, \underline{\mathbb{Z}}_2) = \mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$. En efecto:

\mathcal{C} es recubrimiento: veamos que \mathcal{C} contiene a U_{i_0} para todo $i_0 \in I$ y que en particular \mathcal{C} recubre X . Fijamos un $i_0 \in I$, y definimos, para todo $i \in I$, la función localmente constante $g_i := f_{i_0 i}$ definida en $U_{i_0} \cap U_i \in \Delta^0(\mathcal{U}|_{U_{i_0}})$. Entonces, para cualquier $i, i' \in I$ tenemos en todo $U_{i_0} \cap U_i \cap U_{i'}$ que:

$$g_{i'} - g_i = f_{i_0 i'} - f_{i_0 i} = f_{i i'} = (f|_{U_{i_0}})_{i i'}$$

Es decir, $f|_{U_i} = \partial g$.

\mathcal{C} verifica I: sean $G' \subset G \subset X$ abiertos, y sea $g \in C^0(\mathcal{U}|_G, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ tal que $f|_G = \partial g$. Por la observación 6.1.5 (donde G toma el papel de X y G' el de G), se deduce que $f|_{G'} = \partial g|_{G'}$ y en particular $f|_{G'}$, es cociclo en $\mathcal{U}|_{G'}$.

\mathcal{C} verifica II: Sean $G, G' \in \mathcal{C}$ tales que $G \cap G'$ es conexo. Queremos demostrar que $G \cup G' \in \mathcal{C}$. Por hipótesis $f|_G = \partial g$ y $f|_{G'} = \partial g'$ para ciertos $g \in C^0(\mathcal{U}|_G, \underline{\mathbb{Z}}_2)$, $g' \in C^0(\mathcal{U}|_{G'}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$. En particular, la cadena $g'' := g|_{G \cap G'} - g'|_{G \cap G'} \in C^0(\mathcal{U}|_{G \cap G'}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ cumple que $\partial g'' = 0$, y como $G \cap G'$ es conexo, deducimos que la función localmente constante $h : G \cap G' \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_2$ que describe g'' es constante (proposición 6.1.3). Sin pérdida de generalidad, $h \equiv 0$, o equivalentemente $g|_{G \cap G'} = g'|_{G \cap G'}$. Así, para cada $i \in I$, la función

$$\hat{g}_i : U_i \cap (G \cup G') \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_2, x \mapsto \begin{cases} g_i(x) & \text{si } x \in G \\ g'_i(x) & \text{si } x \in G' \end{cases}$$

está bien definida y es localmente constante en $U \cap (G \cup G')$, lo cual implica que $\hat{g} \in C^0(\mathcal{U}|_{G \cup G'}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$, y que para todo $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ y $x \in U_0 \cap U_1 \cap (G \cup G')$ se cumple que $\hat{g}_{U_1}(x) - \hat{g}_{U_0}(x) = g_{U_1}(x) - g_{U_0}(x) = f_{U_0 U_1}(x)$ si $x \in G$, o $\hat{g}_{U_1}(x) - \hat{g}_{U_0}(x) = g'_{U_1}(x) - g'_{U_0}(x) = f_{U_0 U_1}(x)$ si $x \in G'$. En resumen, deducimos que $f|_{G \cup G'} = \partial \hat{g}$, concluyendo que $G \cup G' \in \mathcal{C}$.

\mathcal{C} verifica III: sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cadena ascendente de abiertos en \mathcal{C} , y tomamos para cada $\alpha \in J$ un $g^\alpha \in C^0(\mathcal{U}|_{G_\alpha}, \underline{\mathbb{Z}}_2)$ tal que $f|_{G_\alpha} = \partial g^\alpha$. Queremos probar que su unión pertenece a \mathcal{C} . Empezamos fijando un $\alpha_0 \in J$. Para cualquier $\alpha \in J$, la intersección $G_\alpha \cap G_{\alpha_0}$ es conexa (ha de ser o G_α o bien G_{α_0}) luego, usando un argumento similar a la parte II, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $g^\alpha|_{G_\alpha \cap G_{\alpha_0}} = g^{\alpha_0}|_{G_\alpha \cap G_{\alpha_0}}$. Por lo tanto, la cocadena \hat{g} dada por $\hat{g}_i(x) = \bigcup_\alpha g_i^\alpha$ para todo $i \in I$ está bien definida, y para cada $i_0, i_1 \in I$, y $x \in U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \bigcup_\alpha G_\alpha$, verifica que:

$$g_{i_1}(x) - g_{i_0}(x) = g_{i_1}^\alpha(x) - g_{i_0}^\alpha(x) = (f|_{G_\alpha})_{i_0 i_1}(x) = f_{i_0 i_1}(x) = (f|_{\bigcup_\alpha G_\alpha})_{i_0 i_1}(x)$$

Donde α es cualquier elemento de J tal que $x \in G_\alpha$. En resumen, $f|_{\bigcup_\alpha G_\alpha} = \partial \hat{g}$, luego $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{C}$. \square

Teorema 6.2.2. *Sea X un espacio topológico localmente conexo tal que $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$. Entonces se cumple el Teorema de Jordan-Brouwer en X . Es decir, todo subconjunto cerrado $M \subset X$ que separa localmente X divide X .*

Demostración. Supongamos que $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$, y sea $M \subset X$ un cerrado que separa localmente X . Consideramos dos colecciones de abiertos de X , la de las componentes conexas de $X \setminus M$, $\mathcal{V}_{X \setminus M} = \{V_i\}_{i \in I}$, y $\mathcal{W} := \{W \subset X : M \text{ separa } W\} = \{W_j\}_{j \in J}$, de tal forma que $\mathcal{U} := \mathcal{V}_{X \setminus M} \cup \mathcal{W}$ es un recubrimiento de X por hipótesis de separación local. Para cada $j \in J$, sea $W_j \setminus M = W_j^0 \cup W_j^1$ su separación. Vamos a definir la siguiente cocadena $\hat{g} \in C^0(\mathcal{U}|_{X \setminus M}, \mathbb{Z}_2)$. Para cada $i \in I$, sea $\hat{g}_i \equiv 0$ y para cada $j \in J$, la función

$$\hat{g}_j(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in W_j^0 \\ 1 & \text{si } x \in W_j^1 \end{cases}$$

está bien definida y es localmente constante en $W_j \setminus M$ porque W_j^0 y W_j^1 son dos abiertos disjuntos. Sea $\hat{f} := \partial \hat{g}$, que es un borde en $\mathcal{U}|_{X \setminus M}$.

La idea es la siguiente: vamos a demostrar que existe un cociclo f en \mathcal{U} tal que $f|_{X \setminus M} = \hat{f}$. Como $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$, f también será coborde, digamos $f = \partial g$. La colección de funciones $\{g_i\}_{i \in I}$ inducirá una aplicación localmente constante $h : X \setminus M \rightarrow \mathbb{Z}_2$, y $X \setminus M = \{h = 0\} \cup \{h = 1\}$ será la división del espacio que buscamos.

Empecemos demostrando la existencia de f . La condición de que $f|_{X \setminus M} = \hat{f}$ implica que todas las funciones f_{ii} , f_{ij} y f_{jj} están totalmente caracterizadas por \hat{f} en $X \setminus M$. Por lo tanto basta comprobar que, para cualesquiera $j, j' \in J$, la función $\hat{f}_{jj'} : W_j \cap W_{j'} \setminus M \rightarrow \mathbb{Z}_2$ se puede extender a una función $f_{jj'} : W_j \cap W_{j'} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ localmente constante. Nótese que $\hat{f}_{jj'}$ no tiene por qué ser constante (por ejemplo, cuando $W_j \cap W_{j'}$ no es conexo), pero podemos hacer lo siguiente: dado $x \in M \cap W_j \cap W_{j'}$, sea $j'' \in J$ tal que $x \in W_{j''} \subset W_j \cap W_{j'}$. Por simplificar la notación, sea $U := W_{j''}$, y sea $U \setminus M = U^0 \cup U^1$ su separación. Por restricción de divisiones y la unicidad de separaciones, tenemos que

$$\{W_j^0 \cap U, W_j^1 \cap U\} = \{U^0, U^1\} = \{W_{j'}^0 \cap U, W_{j'}^1 \cap U\}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $W_j^0 \cap U = U^0$. Así, por definición de \hat{g} y de $\hat{f} = \partial \hat{g}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{f}_{jj'}|_{U^0} \equiv 0 &\iff \hat{g}_j|_{U^0} = \hat{g}_{j'}|_{U^0} \iff W_j^0 \cap U = U^0 \cap U \iff \\ &\iff W_j^1 \cap U = U^1 \cap U \iff \hat{g}_j|_{U^1} = \hat{g}_{j'}|_{U^1} \iff \hat{f}_{jj'}|_{U^1} \equiv 0 \end{aligned}$$

En otras palabras, los valores que caracterizan $\hat{f}_{jj'}|_{U^0}$ y $\hat{f}_{jj'}|_{U^1}$ han de ser iguales (o ambos son 0, o ambos son 1), lo cual implica que $\hat{f}_{jj'}$ es constante en $U \setminus M$, y por lo tanto se puede extender a una función constante en U . Como $x \in M \cap W_j \cap W_{j'}$ era arbitrario, deducimos que la función localmente constante $\hat{f}_{jj'} : W_j \cap W_{j'} \setminus M \rightarrow \mathbb{Z}_2$ se puede extender a una función localmente constante $f_{jj'} : W_j \cap W_{j'} \rightarrow \mathbb{Z}_2$, y que además es única por densidad de $X \setminus M$.

Ahora que f está bien definido como cocadena en \mathcal{U} , veamos que es cociclo. Como $\hat{f} = f|_{X \setminus M}$ es cociclo en $\mathcal{U}|_{X \setminus M}$, tenemos para cada $j, j', j'' \in J$ que

$$f_{jj'} + f_{j'j''} + f_{j''j} = \hat{f}_{jj'} + \hat{f}_{j'j''} + \hat{f}_{j''j} = 0$$

en todo $W_j \cap W_{j'} \cap W_{j''} \setminus M$. Por restricción de divisiones, sabemos que $W_j \cap W_{j'} \cap W_{j''} \setminus M$ es denso en $W_j \cap W_{j'} \cap W_{j''}$, y por lo tanto la ecuación anterior se ha de verificar en todo $W_j \cap W_{j'} \cap W_{j''}$, concluyendo que f es cociclo.

Recordamos que $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \equiv 0$; sea $g \in \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ tal que $f = \partial g$, y sea $h : X \setminus M \rightarrow \mathbb{Z}_2$ la aplicación localmente constante obtenida uniendo todos los g_i 's. Veamos que $\{h = 0\}, \{h = 1\}$ forman una división de X :

El hecho de que $X \setminus M = \{h = 0\} \cup \{h = 1\}$ es evidente, así que sólo queda comprobar que $M \subset \overline{\{h = 0\}} \cap \overline{\{h = 1\}}$. En efecto, sea $x \in M$, sea $W_j \in \mathcal{W}$ un entorno abierto de x al que separa M , sea $W_j \setminus M = W_j^0 \cap W_j^1$ su división, y sean V_{i_0}, V_{i_1} las componentes conexas de $X \setminus M$ que continenen a W_j^0 y W_j^1 respectivamente. Supongamos primero que $g_j \equiv 0$. Así obtenemos que

$$h|_{W_j^0} = g_{i_0}|_{W_j^0} = g_j|_{W_j^0} + f_{j i_0}|_{W_j^0} = 0 + \hat{f}_{j i_0}|_{W_j^0} = \hat{g}_{i_0}|_{W_j^0} - \hat{g}_j|_{W_j^0} = 0 - 0 = 0$$

Luego $W_j^0 \subset \{h = 0\}$ y por lo tanto $x \in \overline{W_j^0} \subset \overline{\{h = 0\}}$. Análogamente se obtiene que $h|_{W_j^1} = 1$, y por lo tanto, $x \in \overline{W_j^1} \subset \overline{\{h = 1\}}$. Si tuviéramos $g_j = 1$ habríamos obtenido que $h|_{W_j^0} = 1$ y $h|_{W_j^1} = 0$, concluyendo de la misma manera que $x \in \overline{\{h = 0\}} \cap \overline{\{h = 1\}}$. \square

REFERENCIAS

- [1] Morton Brown. Locally flat imbeddings of topological manifolds. *Annals of Mathematics*, 75(2):331–341, 1962.
- [2] Enrique Outerelo. Despedida a la facultad de ciencias matemáticas. <https://blogs.mat.ucm.es/jesusr/inicio/enrique/>, 2004.
- [3] Otto Forster. Lectures on riemann surfaces. In *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1981.
- [4] José M. Gamboa and Jesús M. Ruiz. *Iniciación al estudio de Variedades Diferenciables*. Sanz y Torres, 2023.
- [5] Marvin Greenberg and John L. Harper. *Algebraic Topology. A first course*. Benjamin, 1981.
- [6] Alexander Lemmens. A local Jordan-Brouwer separation theorem. <https://arxiv.org/abs/1810.13221v1>, 2018.
- [7] Elon L. Lima. The Jordan-Brouwer separation theorem for smooth hypersurfaces. *American Math. Monthly*, 95(1):39–42, 1988.
- [8] Ib Madsen and Jørgen Tornehave. *From Calculus to Cohomology. De Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, 1997.
- [9] Peter McGrath. On the smooth Jordan-Brouwer separation theorem. *American Math. Monthly*, 123(3):292–295, 2016.
- [10] Enrique Outerelo, Juan A. Rojo, and Jesús M. Ruiz. *Topología Diferencial, un curso de iniciación*. Sanz y Torres, 2023.
- [11] Enrique Outerelo and Jesús M. Ruiz. *Mapping degree theory*. Number 108 in Graduate Studies in Mathematics. AMS-RMSE, 2019.
- [12] Hans Samelson. Orientability of hypersurfaces in \mathbb{R}^n . *American Math. Monthly*, 22(1):301–302, 1969.
- [13] user98602. Generalized Jordan-Brouwer separation theorem. <https://math.stackexchange.com/questions/1485127>, 2015.