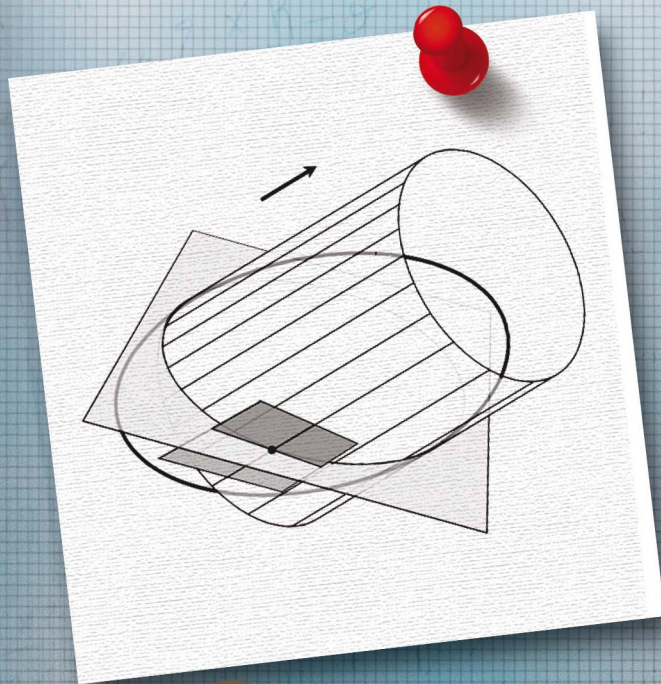


José Manuel Rodríguez-Sanjurjo
Jesús M. Ruiz

Lecciones de Geometría Afín

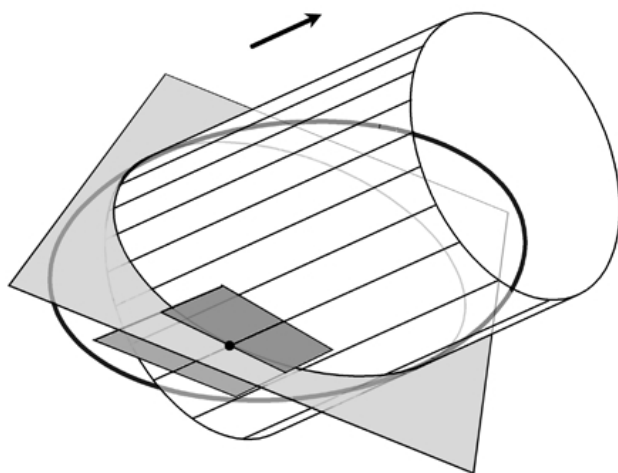


sanz y torres

Lecciones de GEOMETRÍA AFÍN

José Manuel Rodríguez-Sanjurjo
Jesús M. Ruiz

Universidad Complutense de Madrid



sanz y torres

Prefacio

La Geometría Afín trata del paralelismo y la semejanza, y es por tanto tan antigua como las matemáticas griegas. Sin embargo, basta leer el V postulado de Euclides para entender que se considerara un aspecto de la Geometría Euclídea, y no se distinguiera de ella. Luego, con el extraordinario florecimiento de la Geometría Proyectiva, pasó a ser un objeto parcial de ésta última. Incluso, por su tratamiento analítico, se ha considerado simplemente Álgebra Lineal, de la que la Geometría Proyectiva es la versión geométrica avanzada. La consecuencia es que la Geometría Afín se ha desarrollado con especificidad propia muy tardíamente, como muestran las referencias temporales que jalonan ese desarrollo. Las resumimos a continuación.

El calificativo afín no apareció hasta mediados del siglo XVIII, cuando en 1748 lo utiliza Euler para señalar relaciones que no involucran mediciones ni ángulos. Después aparecen las coordenadas baricéntricas, a principios del XIX, ideadas en 1827 por Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868) para situar centros de gravedad. Ya a finales del XIX Felix Klein (1849-1925) propone su famoso *Programa de Erlangen* en 1872, que entre otras cosas muestra como distinguir qué propiedades deben considerarse afines. Pero la definición formal de espacio afín no llega hasta principios del siglo XX, cuando en 1918 la introduce Hermann Weyl (1885-1955) en su libro *Space, Time and Matter*. Y la exuberancia matemática del siglo XX se dedicó después a asuntos mayores.

Un patrón similar se ha repetido en la literatura y la docencia. Necesaria, pero siempre relegada a un papel de apoyo. Ha habido introducciones puramente analíticas al final de un curso de Álgebra Lineal, o presentaciones minimalistas al comienzo de uno de Geometría Proyectiva. En lo tocante a la docencia, esto suele ser consecuencia de las dificultades que surgen en el aula para cubrir los programas previstos. Lo que hoy se imparte en los grados de Matemáticas son cursos de *Geometría Lineal*, que incluyen la afín y la proyectiva. Y partes variables de las dos se cubren también en otros grados de Ciencias e Ingenierías.

Hemos escrito estas notas a partir de las clases que de esta materia impartimos durante muchos años en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Hemos querido hacer un libro de texto para su uso directo en el aula. Su exposi-

ción debe ocupar un par de meses en el mejor de los casos y apenas uno en las situaciones más apuradas. Los objetivos son:

- Definir espacio afín mediante una acción vectorial sobre un conjunto de puntos, para distinguir puntos y direcciones. Introducir las variedades afines y estudiar sus incidencias: paralelismo y fórmula de Grassmann.
- Definir las aplicaciones afines y sus derivadas. Definir proyecciones paralelas y afinidades. Introducir el grupo afín, y sus elementos más distinguidos: traslaciones y homotecias, trasvecciones y dilataciones, simetrías.
- Introducir coordenadas mediante referencias afines cartesianas, para tratar con ecuaciones los problemas afines. Expresar la proporciones mediante la razón simple de tres puntos alineados y la interpolación lineal.
- Tratar la clasificación de aplicaciones afines con ecuaciones para hacerla un problema de semejanza de matrices con restricciones, y resolverlo utilizando formas canónicas de Jordan.
- Definir las cuádricas afines, sus ceros, centros, singularidades, tangencias y polaridad. Clasificarlas mediante ecuaciones reducidas. En particular describir todas las cónicas y todas las superficies cuádricas.

Estos contenidos se desgranar en siete capítulos, de los que son indispensables los tres primeros y el quinto. El capítulo cuarto se puede omitir, pero teníamos necesariamente que dedicar algunas páginas a la razón simple y la interpolación. Los dos capítulos sobre clasificación de afinidades y de cuádricas pueden reducirse a las definiciones y el enunciado de los resultados principales. Estos ajustes se sugieren para gestionar las limitaciones de tiempo que suelen padecerse.

El requisito previo necesario es un curso de Álgebra Lineal: matrices, espacios vectoriales y aplicaciones lineales, formas de Jordan, formas bilineales y formas cuadráticas. Nosotros utilizamos como referencia:

[AL] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, J.M. Ruiz: *Álgebra lineal* (2 volúmenes). Sanz y Torres: Madrid 2019.

En todo caso, lo que se explica aquí se sistematiza y comprende adecuadamente en el espacio proyectivo. En él se unifica, completa y entiende de verdad la geometría. La consecuencia más provechosa de la lectura de estas notas sería el deseo y la necesidad de aprender Geometría Proyectiva. En realidad, este texto está pensado como preparación para el siguiente:

[GP] J.M. Rodríguez-Sanjurjo, J.M. Ruiz: *Lecciones de Geometría Proyectiva*. Sanz y Torres: Madrid 2020.

Como complemento a la teoría expuesta, cada capítulo finaliza con una lista de ejercicios de dificultad variable, y al final del texto hay otra de problemas adicionales: casi 100 enunciados en total. También hay una colección de cuestiones rápidas “verdadero/falso” que deberían poder responderse (bien) sin necesitar casi reflexión.

* * *

Finalmente, debemos agradecer a muchos amigos y colegas las conversaciones, incluso discusiones, sobre qué explicar de estos temas y cómo, para superar las limitaciones de los programas. Mencionamos en especial a Concepción Fuertes, José M. Gamboa y José F. Ruiz. También queremos recordar a nuestro compañero José María Sánchez-Abril, quien nos enseñó la Geometría Afín y Proyectiva que hemos enseñado luego nosotros.

Pozuelo, Majadahonda
Junio de 2026

J.M. Rodríguez-Sanjurjo, J.M. Ruiz

Contenido

Capítulo I. Variedades afines	1
1. El espacio afín	1
2. Variedades afines	3
3. Operaciones con variedades afines	5
4. Dimensión e incidencia	7
Problemas	10
Capítulo II. Aplicaciones afines	13
1. Definición y propiedades	13
2. Afinidades y proyecciones paralelas	16
3. Traslaciones y homotecias	18
4. Trasvecciones y dilataciones	20
Problemas	23
Capítulo III. Coordenadas y ecuaciones	25
1. Coordenadas afines	25
2. Referencias afines	26
3. Ecuaciones de variedades afines	30
4. Ecuaciones de aplicaciones afines	33
Problemas	34
Capítulo IV. Razón simple	37
1. Definición y propiedades	37
2. Cálculo de la razón simple	38
3. El teorema de Thales	39
4. Interpolación lineal	40
Problemas	43
Capítulo V. Clasificación de aplicaciones afines	45
1. Variedades invariantes	45
2. Formas canónicas de Jordan	49
3. Aplicaciones afines del plano	54

4. Aplicaciones afines involutivas	57
Problemas	58
Capítulo VI. Cuádricas afines	61
1. Definiciones	61
2. Tangencias	66
3. Polaridad	69
4. Ecuaciones de cuádricas afines	73
Problemas	76
Capítulo VII. Clasificación de cuádricas afines	79
1. Rango y signo	79
2. Cónicas afines	82
3. Superficies cuádricas afines	85
Problemas	92
Problemas adicionales	95
Cuestiones	101
Bibliografía	105
Figuras	109
Símbolos	111
Índice	113

Variedades afines

En este capítulo se introduce el *espacio afín* mediante *acciones vectoriales*. Se definen sus subespacios o *variedades afines*, y se describen sus *posiciones relativas*, en especial el *paralelismo*. Se introducen los *puntos de infinito*. Se analizan las intersección y la generación de variedades afines. Se define la *dimensión* y se prueba la *fórmula de Grassmann*.

1. El espacio afín

En todo lo que sigue, consideramos un cuerpo base $\mathbb{K}$ de característica cero, que para nosotros siempre será el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. La primera definición es la siguiente:

Definición 1.1. Un *espacio afín* (sobre $\mathbb{K}$) es un conjunto no vacío X equipado con una *acción vectorial* γ , que es una aplicación

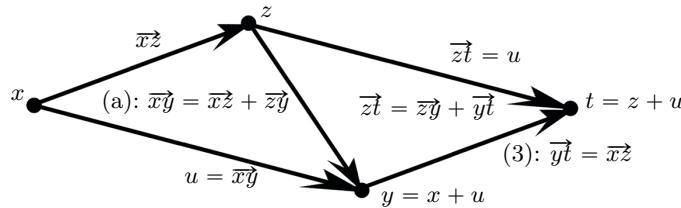
$$\gamma : X \times X \rightarrow \vec{X} : (x, y) \mapsto \gamma(x, y) = \overrightarrow{xy},$$

con valores en un espacio vectorial $\vec{X}$ sobre $\mathbb{K}$, tal que:

- (a) Se cumple $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zy}$ para cualesquiera $x, y, z \in X$, y
- (b) La aplicación $\gamma_x : X \rightarrow \vec{X} : y \mapsto \overrightarrow{xy}$ es biyectiva para algún $x \in X$.

Los elementos de X son los *puntos* y los vectores de $\vec{X}$ son las *direcciones*. Dados dos puntos $x, y \in X$ y el correspondiente vector $u = \overrightarrow{xy}$, diremos que x es el *origen* de u e y es el *extremo* de u ; la igualdad $u = \overrightarrow{xy}$ se escribe también $y = x + u$, operación que se denomina *traslación*.

La figura siguiente representa la propiedad (a) de la definición anterior y la observación 1.2(3) que veremos a continuación.



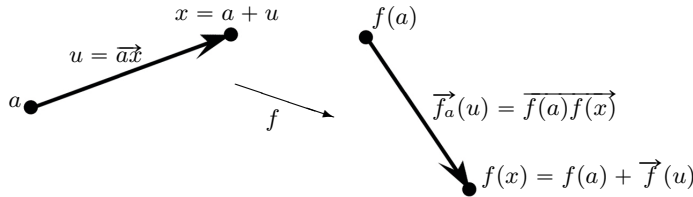
Aplicaciones afines

Se introducen aquí las *aplicaciones afines* y sus *derivadas*. Se analizan sus imágenes y preimágenes, y la *conservación del paralelismo y la alineación*. Se comprueba la *regla de la cadena* de la composición. Se definen y estudian *afinidades* y *proyecciones paralelas*, *traslaciones* y *homotecias*, *trasvecciones* y *dilataciones*, y *simetrías*.

1. Definición y propiedades

Sean X e Y dos espacios afines (sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$), y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación cualquiera. Para cada punto a de X definimos una aplicación entre los espacios de direcciones como sigue:

$$\vec{f}_a : \vec{X} \rightarrow \vec{Y} : u = \overrightarrow{ax} \mapsto \vec{f}(u) = \overrightarrow{f(a)f(x)}.$$



Podemos efectivamente hacerlo porque la acción $\gamma_a : x \mapsto \overrightarrow{ax}$ es biyectiva. Utilizando también la acción en el espacio Y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \gamma_a \downarrow & & \downarrow \gamma_{f(a)} \\ \vec{X} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{Y} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overrightarrow{ax} & \longmapsto & \overrightarrow{f(a)f(x)} \end{array}$$

La aplicación $\vec{f}$ no tiene ninguna propiedad especial, salvo que se imponga por definición. Y por ello se introduce la siguiente:

Coordenadas y ecuaciones

En este capítulo se introducen *coordenadas en el espacio afín* y la noción de *independencia afín*. Para ello se definen las denominadas *referencias afines*, y las *cartesianas* asociadas. Se describe la inmersión de un espacio afín *como hiperplano que no pasa por el origen*. Con coordenadas se tienen *ecuaciones* de variedades afines y de aplicaciones afines, que permiten expresar analíticamente incidencias y calcular imágenes e imágenes inversas. Todo esto se formula adecuadamente con expresiones matriciales. En cada ocasión se estudian los *cambios de coordenadas*.

1. Coordenadas afines

Sea X un espacio afín de dimensión n . El espacio de direcciones $E = \vec{X}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^n$, y existen isomorfismos lineales $\vec{\theta} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ (espacio vectorial). Ahora fijemos uno de ellos y un punto $a_0 \in X$. La fórmula $\theta(x) = \vec{\theta}(\overrightarrow{a_0x})$ define una afinidad $X \rightarrow \mathbb{K}^n$ (espacio afín) caracterizada porque $\theta(a_0) = 0$ y $\vec{\theta}$ es su derivada (lo que justifica la notación). En fin, si $x \in X$ diremos que $\theta(x) = (x_1, \dots, x_n)$ son *coordenadas afines* de x .

Por otra parte, el isomorfismo $\vec{\theta}$ está completamente determinado por la base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de E tal que $\vec{\theta}(u_i) = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, y diremos que $\theta(x) = (x_1, \dots, x_n)$ son *las coordenadas de x respecto de a_0 y $\mathcal{B}$* . Si escribimos $x = a_0 + u$ con $u = \overrightarrow{a_0x}$, como $\theta(x) = \vec{\theta}(u) = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, resulta que $u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ y $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de u respecto de $\mathcal{B}$.

La construcción involucra la elección de $\mathcal{B}$, pero esa base está determinada por los puntos $a_i = a_0 + u_i \in X$. Es inmediato que $a_0, a_1, \dots, a_n$ generan X . Así llegamos a la siguiente noción:

Definición 1.1. Diremos que los puntos $a_0, a_1, \dots, a_d$ de X son *independientes* si generan una variedad afín de dimensión d .

Esto significa que d es la dimensión de su espacio de direcciones

$$\overrightarrow{V(a_0, a_1, \dots, a_d)} = L[u_1, \dots, u_d], \quad u_j = \overrightarrow{a_0a_j}, 1 \leq j \leq d.$$

Razón simple

Aquí introducimos la *razón simple* de tres puntos alineados, que caracteriza las afinidades de la recta: son las biyecciones que la conservan. La razón simple se calcula con coordenadas, y se calcula también cómo cambia al permutar los puntos. Se demuestra el *teorema de Thales*, que en el plano expresa la *semejanza de triángulos*. En fin, se define la *interpolación lineal*, que puede usarse como fundamento de la geometría afín, pues su conservación caracteriza variedades y aplicaciones afines.

1. Definición y propiedades

Estudiamos aquí el invariante elemental para las proporciones en Geometría Afín, porque nociones como *punto medio* no involucran ningún tipo de medición ni de distancia.

Definición 1.1. Sean a, b, c tres puntos alineados de un espacio afín X , $a \neq b$. Entonces los vectores $\overrightarrow{ac}$ y $\overrightarrow{ab}$ son proporcionales, digamos $\overrightarrow{ac} = \rho \overrightarrow{ab}$ y el escalar ρ es la *razón simple* de los tres puntos. Se denota $\rho = [a, b, c]$.

Es claro que $\rho = 0$ si $c = a$ y $\rho = 1$ si $c = b$. Además, $c = a + \rho \overrightarrow{ab}$, luego fijados a y b , el escalar ρ determina c . En suma, $[a, b, \cdot]$ es una biyección de la recta $L = V(a, b)$ sobre $\mathbb{K}$. De hecho es una afinidad de L sobre $\mathbb{A}^1$: la dada por $a, b \mapsto 0, 1$. Podemos enunciar esto con más generalidad:

Proposición 1.2. *Las afinidades entre rectas afines son las biyecciones que conservan la razón simple.*

Demostración. Sea $f : L \rightarrow L'$ una biyección entre dos rectas afines, y consideremos dos puntos distintos $a, b \in L$, de manera que $u = \overrightarrow{ab} \neq 0$ genera $\overrightarrow{L}$. Para cada $\rho \in \mathbb{K}$ existe $c \in L$ tal que $\rho = [a, b, c]$ y denotamos $\rho' = [f(a), f(b), f(c)]$. A continuación calculamos de dos maneras diferentes $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ac})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{f(a)f(c)} = \rho' \overrightarrow{f(a)f(b)} = \rho' \overrightarrow{f(ab)} = \rho' \overrightarrow{f(u)}, \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{f}(\rho \overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f}(\rho u). \end{cases}$$

Clasificación de aplicaciones afines

Se aborda aquí el cálculo de las *variedades invariantes* de una aplicación afín. Requiere el de sus *direcciones invariantes*, problema que resuelve el Álgebra Lineal mediante las *formas canónicas de Jordan*. distinguimos los *puntos fijos* y los *puntos fijos de infinito*. Describimos la búsqueda de variedades invariantes cuando hay puntos fijos, y la de *rectas invariantes* e *hiperplanos invariantes* en general. La *clasificación de aplicaciones afines*, ligada a la búsqueda de invariantes, se plantea analíticamente como *semejanza afín* de matrices. Se resuelve con las *formas de Jordan afines*, en las que el autovalor 1 es especial. Como ejemplo se enumeran todas las *afinidades del plano*. En dimensión arbitraria se usa la clasificación para caracterizar las simetrías por ser aplicaciones afines *involutivas*.

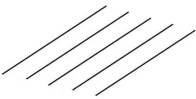
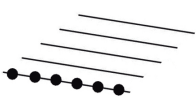
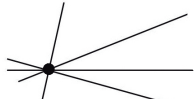
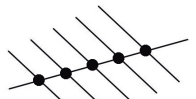
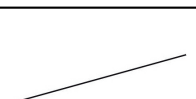
1. Variedades invariantes

Aunque a continuación no suponemos que las aplicaciones afines sean biyectivas, gran parte del interés de lo que hagamos corresponde a su aplicación a las afinidades.

El siguiente concepto es fundamental:

Definición 1.1. Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación afín. Un punto *fijo* de f es un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Una variedad afín $Y \subset X$ se denomina *invariante* si $f(Y) \subset Y$.

Para simplificar escribiremos *variedad invariante* en lugar de *variedad afín invariante*. Si f es una afinidad, sus variedades invariantes cumplen de hecho $f(Y) = Y$, pues Y y $f(Y)$ tienen la misma dimensión. La clasificación de f está cifrada en la configuración de sus variedades invariantes: cuántas hay de cada dimensión, y cuáles son sus posiciones relativas o *incidencias*. Nótese que las variedades invariantes son una familia estable para las operaciones geométricas: la intersección de dos variedades invariantes es invariante también, así como es

$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$		<i>Traslación.</i> Ningún punto fijo; rectas invariantes las paralelas a la dirección de traslación. Todos los puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$		<i>Trasvección.</i> Una recta de puntos fijos; rectas invariantes la de puntos fijos y todas sus paralelas. Un único punto de infinito fijo (la dirección de trasvección).
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$		<i>Trasvección seguida de traslación no en la dirección de trasvección.</i> Ningún punto fijo; ninguna recta invariante. Un único punto de infinito fijo (la dirección de trasvección).
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$		<i>Homotecia (de razón λ).</i> Un único punto fijo (el centro de la homotecia); invariantes todas las rectas que pasan por el punto fijo. Todos los puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$		<i>Dilatación (de razón λ).</i> Una recta de puntos fijos (la base de la dilatación); rectas invariantes: la de puntos fijos y todas las paralelas a una dirección distinta (la de dilatación). Dos puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$		<i>Dilatación seguida de traslación no en la dirección de dilatación.</i> Ningún punto fijo; una única recta invariante (la base de la dilatación). Dos puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$		<i>Tipo hiperbólico.</i> Un único punto fijo; dos rectas invariantes que pasan por él. Dos puntos de infinito fijos.
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$		<i>Tipo parabólico.</i> Un único punto fijo; una única recta invariante que pasa por él. Un único punto de infinito fijo.
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & \\ 0 & \beta & \alpha \end{array}\right)$		<i>Tipo elíptico.</i> Un único punto fijo; ninguna recta invariante. Ningún punto de infinito fijo.

Aplicaciones afines del plano

Cuádricas afines

Abordamos en este capítulo el estudio de las cuádricas afines, un tema central de la teoría. Definimos una *cuádrica afín* como una clase de equivalencia por proporcionalidad de *formas biafinas simétricas*. Se definen *ceros* y *centros de simetría*, *diámetros*, *vectores isotropos*, *direcciones asintóticas*, *puntos de infinito*, y *asíntotas*. Todo esto retoma en general nociones familiares del estudio elemental de las cónicas del plano afín. Para entender el concepto de tangencia a una cuádrica se estudian sus posibles incidencias con una recta afín, que distinguen puntos *regulares* y *singulares*, incluso de infinito, y dan vía al concepto de cuádrica *degenerada* o *no degenerada*. La finalidad es llegar a definir el *hiperplano tangente* a una cuádrica en un punto regular. Se introduce la *polaridad* asociada a una cuádrica, que es una forma de *dualidad* y reformula la tangencia, incluso en infinito. Finalmente se revisa todo esto con ecuaciones para hacer el cálculo de todos estos elementos.

1. Definiciones

Lo mismo que las formas cuadráticas de un espacio vectorial se definen a partir de la noción previa de forma bilineal simétrica, para definir las cuádricas afines debemos introducir el siguiente concepto:

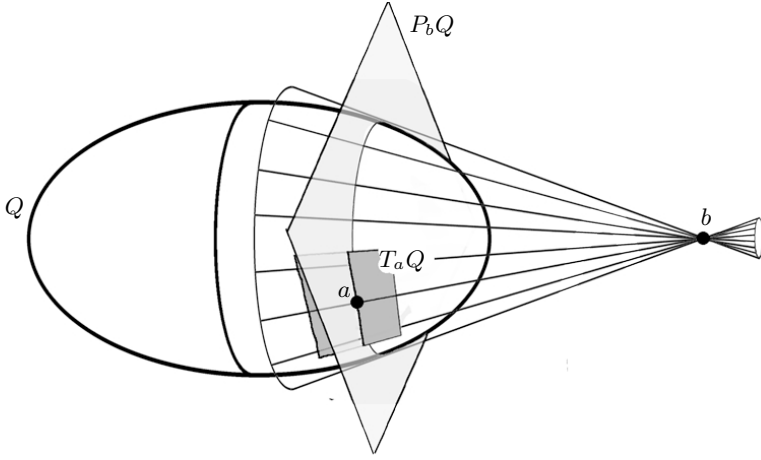
Definición 1.1. Sea X un espacio afín. Una *forma biafín* de X es una aplicación $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{K}^1$ que es afín *separadamente en cada variable*.

La condición del enunciado significa que para cualesquiera $a, b \in X$ las dos aplicaciones

$$\begin{cases} \varphi_b : X \rightarrow \mathbb{K}^1 : x \mapsto \varphi(x, b), \\ \varphi_a : X \rightarrow \mathbb{K}^1 : y \mapsto \varphi(a, y) \end{cases}$$

son afines, es decir, tienen derivadas lineales $\overrightarrow{\varphi}_b, \overrightarrow{\varphi}_a : \overrightarrow{X} \rightarrow \mathbb{K}$. En consecuencia, tenemos

$$\begin{cases} \varphi(a + u, b) = \varphi(a, b) + \overrightarrow{\varphi}_b(u), \\ \varphi(a, b + v) = \varphi(a, b) + \overrightarrow{\varphi}_a(v), \end{cases}$$



(4) Aunque en la figura anterior no haya lugar a ello, por b también pueden pasar rectas tangentes a la cuádrica *en infinito*. Es decir, puede haber vectores isotropos u tales que la recta $b + L[u]$ sea tangente a la cuádrica en $[u]$. Esto pasa cuando b está en el hiperplano polar de $[u]$, o sea, cuando $\vec{\varphi}_b(u) = 0$. En particular, esas rectas $b + L[u]$ son paralelas a $P_b Q : \varphi(x, b) = 0$.

(5) En fin, consideremos la cuádrica $[\psi]$ definida por la forma biafín

$$\psi(x, y) = \varphi(x, b)\varphi(b, y) - \varphi(b, b)\varphi(x, y)$$

y sus ceros $Q' = Q[\psi]$. Las cuádricas Q y Q' cortan el hiperplano polar $P_b Q$ en los mismos puntos y en cada uno los hiperplanos tangentes a Q y Q' coinciden. El lugar de ceros Q' es la unión de todas las rectas que pasan por b y son tangentes a la cuádrica Q , incluidas las que son tangentes en puntos de infinito. Por eso decimos que Q' es el *cono tangente* a Q con vértice b . La comprobación de estas afirmaciones es un excelente ejercicio que requiere utilizar bien todos los conceptos introducidos anteriormente. ■

(3.3) Polaridad en infinito. La polaridad se puede extender a los puntos de infinito. Hagámoslo aunque escondamos como tahúres el espacio proyectivo en la bocamanga. Sea $[\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X . Sea $[u]$ un punto de infinito de X , que no es una dirección asíntotica de la cuádrica (es decir, $[u] \notin Q^\infty$).

(1) Consideramos un punto cualquiera $a \in X$ y la forma afín:

$$\varphi_u^\infty : x = a + v \mapsto \vec{\varphi}_x(u) = \vec{\varphi}_a(u) + \vec{\varphi}(u, v).$$

Clasificación de cuádricas afines

En este último capítulo clasificamos las cuádricas afines. Se describe el comportamiento de sus *ecuaciones* por cambios de coordenadas mediante la *congruencia* de matrices. Se definen *rango*, sobre los reales y los complejos, y *signo/signatura* sobre los reales, para obtener las ecuaciones *reducidas*, con las que se completa la clasificación. Obtenemos las tablas detalladas de *cónicas* y *superficies cuádricas* afines, complejas y reales, degeneradas y no degeneradas, detallando ceros y centros.

1. Rango y signo

Para clasificar cuádricas adoptamos el punto de vista más directo: buscar las ecuaciones más sencillas posibles, eligiendo adecuadamente las coordenadas. Dos cuádricas afines se llaman *equivalentes* si tienen la misma ecuación (en diferentes coordenadas). Sea X un espacio afín.

(1.1) Cambio de coordenadas. Sabemos cómo se calculan las ecuaciones $\varphi(x, y)$, $Q(x)$ y la matriz $\widehat{M}$ de una cuádrica $[\varphi]$ respecto de una referencia $\mathcal{R}$ de X . Veamos ahora cómo varían al variar la referencia. Sean $\mathcal{R}'$ una segunda referencia de X y

$$\widehat{M}' = \left(\begin{array}{c|c} m'_0 & m' \\ \hline m'^t & M' \end{array} \right)$$

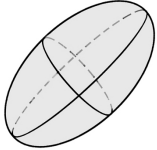
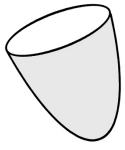
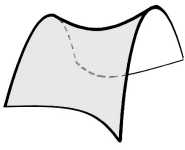
la matriz de la cuádrica en coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$. Sea

$$\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & C \end{array} \right)$$

la matriz de cambio que transforma coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$ en coordenadas respecto de $\mathcal{R}$. Entonces

$$\widehat{M}' = \widehat{C}^t \widehat{M} \widehat{C}.$$

(2) Según lo anterior, las matrices de la misma cuádrica respecto de referencias diferentes son *congruentes* via la matriz regular $\widehat{C}$. Sin embargo si escribimos con

$1 + x^2 + y^2 + z^2$ $\left(\begin{array}{c ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$		<i>Cuádrica invisible no degenerada.</i> Un único centro, sin ceros, sin puntos de infinito.
$1 - x^2 + y^2 + z^2$ $\left(\begin{array}{c ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$		<i>Hiperboloide elíptico o de dos hojas.</i> Un único centro, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas transversales no vacías son elipses, hipérbolas o parábolas. Sus secciones planas tangentes son puntos.
$1 - x^2 - y^2 + z^2$ $\left(\begin{array}{c ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$		<i>Hiperboloide hiperbólico o de una hoja.</i> Un único centro, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas transversales son elipses, hipérbolas o parábolas, o pares de rectas paralelas. Sus secciones planas tangentes son pares de rectas transversales.
$1 - x^2 - y^2 - z^2$ $\left(\begin{array}{c ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$		<i>Elipsoide.</i> Un único centro, los ceros generan el espacio, ningún punto de infinito. Sus secciones planas transversales no vacías son elipses. Sus secciones planas tangentes son puntos.
$x^2 + y^2 - z$ $\left(\begin{array}{c ccc} 0 & & -1/2 & \\ \hline & 1 & & \\ -1/2 & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$		<i>Paraboloide elíptico.</i> Ningún centro, los ceros generan el espacio, un único punto de infinito. Sus secciones planas transversales no vacías son elipses. Sus secciones planas tangentes son puntos.
$x^2 - y^2 - z$ $\left(\begin{array}{c ccc} 0 & & -1/2 & \\ \hline & 1 & & \\ -1/2 & & -1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$		<i>Paraboloide hiperbólico o silla de montar.</i> Ningún centro, los ceros generan el espacio, infinitos puntos de infinito. Sus secciones planas transversales son elipses, hipérbolas o parábolas. Sus secciones planas tangentes son pares de rectas transversales.

Superficies cuádricas afines no degeneradas

Problemas adicionales

Número 1. Se considera la dilatación $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ tal que:

- (1) Induce una homotecia de razón 3 en el plano $x - y + z = 2$.
- (2) Deja los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ fijos.

Se pide:

- (a) Base, dirección y razón de f .
- (b) Ecuaciones de f .
- (c) Encontrar una traslación g tal que $g \circ f$ deje el punto $(1, 0, 0)$ fijo.
- (d) Ecuaciones de $g \circ f$.
- (e) Decidir si $g \circ f$ es una dilatación.

Número 2. Se considera la superficie cuádrica afín real Q de ecuación

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy - 2\alpha z - \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

- (a) Calcular α sabiendo que el punto $(1, 0, -1)$ es centro de la cónica C intersección de Q con el plano $x + y = 1$.
- (b) Hallar una ecuación reducida de C y una referencia respecto de la cual C tenga esa ecuación.
- (c) Hallar una ecuación reducida de Q . ¿Existe alguna referencia respecto de la cual Q tenga la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$?
- (d) Calcular el lugar geométrico de los puntos de Q cuyo plano tangente contiene a la recta $y = z + 1 = 0$.

Número 3. En un espacio afín X de dimensión 3 se considera la aplicación afín $f : X \rightarrow X$ cuya matriz respecto de la referencia cartesiana $\mathcal{R} = \{a_0; u, v, w\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

y se pide

- (a) Comprobar que f tiene un único punto fijo, y obtener unas ecuaciones de la imagen Y de f .
- (b) Escribir las ecuaciones de $f|Y : Y \rightarrow Y$ respecto de una referencia de Y cuyo origen sea el punto fijo de f .
- (c) Buscar las rectas invariantes de $f|Y$.
- (d) Hallar la imagen inversa Z del punto fijo de f y hacer con Z lo mismo que con Y en (b).
- (e) Encontrar la variedad invariante mínima que contiene al punto $a = a_0 - u - 3v + w$.

Cuestiones

Juzgar la veracidad de cada una de las afirmaciones siguientes.

Número 1. La dimensión de la variedad generada por dos variedades que no se cortan es la suma de las dimensiones de las variedades.

Número 2. Toda reordenación de tres puntos alineados puede hacerse con una afinidad.

Número 3. Entre dos espacios afines de la misma dimensión finita existen infinitas afinidades.

Número 4. Dos planos afines de $\mathbb{A}^4$ siempre se cortan.

Número 5. Dos variedades afines de dimensiones r y s de un espacio afín de dimensión $n > r + s$ no pueden cruzarse.

Número 6. Un vector es paralelo a una intersección no vacía de variedades afines si lo es a todas ellas.

Número 7. Una afinidad de $\mathbb{A}^3$ transforma rectas que se cruzan en rectas que se cruzan.

Número 8. Toda afinidad del plano real tiene alguna recta invariante.

Número 9. La máxima dimensión posible de una variedad generada por r puntos es r .

Número 10. Una aplicación afín suprayectiva de un espacio afín en sí mismo es una afinidad.

Número 11. Dados tres puntos alineados distintos, siempre existe una reordenación suya que no se puede realizar mediante una afinidad.

Número 12. Una afinidad del plano deja fijos todos los puntos de infinito.

Número 13. Los vectores paralelos a la imagen de una variedad Z por una aplicación afín son las imágenes por la derivada de los vectores paralelos a Z .

Número 14. Existen afinidades sin puntos fijos.

Bibliografía

En esta bibliografía se enumeran algunas obras que presentan las nociones de la Geometría Afín, normalmente como preámbulo más o menos extenso a la Geometría Euclídea y a la Geometría Proyectiva; también se incluyen libros de historia de la materia. Como ocurre a menudo, la lectura de los libros más antiguos puede resultar dificultosa.

- [1] M. Audin: *Géométrie* (2ª edición). Les Ulis: EDP Sciences 2006. [Traducción inglesa revisada de la edición francesa de 1998, Berlín: Springer Verlag 2002.]
- [2] E. Artin: *Geometric algebra*. Nueva York: Interscience 1957.
- [3] R. Artzy: *Linear Geometry*. Reading: Addison-Wesley 1965. [Reimpresión, Nueva York: Dover 2008.]
- [4] H.F. Baker: *Principles of geometry, vols. I y II*. Cambridge: Cambridge University Press 1929-30.
- [5] H.F. Baker: *Introduction to plane geometry*. Cambridge: Cambridge University Press 1943. [Reimpresión, Nueva York: Chelsea Publishing Company 1971.]
- [6] H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt, H. Kunle (eds.): *Fundamentals of mathematics, vol. II, Geometry*. Cambridge, Mass.: MIT Press 1974.
- [7] M.C. Beltrametti, E. Carletti, D. Gallarati, G. Monti Bragadin: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Turín: Bollati Boringhieri 2002.
- [8] M.K. Bennet: *Affine and projective geometry*. Nueva York: John Wiley 1995.
- [9] M. Berger: *Géométrie, 5 vols*. Paris: CEDIC-Fernand Nathan 1977. [Traducción inglesa revisada en dos vols., Berlín: Springer Verlag 1987.]
- [10] M. Berger, J.P. Berry, P. Pansu, X. Saint-Raymond: *Problèmes de géométrie commentés et rédigés*. Paris: CEDIC-Fernand Nathan 1982. [Traducción inglesa revisada, Nueva York: Springer Verlag 1984.]
- [11] L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli (eds.): *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, vol. II, parte 2ª*. Milán: Hoepli 1979.
- [12] L. Bianchi: *Lezioni di geometria analitica*. Pisa: Enrico Spoerri Editore 1920.
- [13] L.M. Blumenthal: *A modern view of geometry*. Nueva York: Dover 1961.
- [14] L.M. Blumenthal, K. Menger (eds.): *Studies in geometry*. San Francisco: Freeman 1970.
- [15] K. Borsuk: *Multidimensional analytic geometry*. Varsovia: Polish Scientific Publishers 1969.
- [16] D.A. Brannan, M.F. Esplen, J.J. Gray: *Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press 1999.
- [17] G. Castelnuovo: *Lezioni di geometria analitica*. Milán: Societa Editrice Dante Alighieri 1938.
- [18] J.N. Cederberg: *A course of modern geometries* (2ª edición). Berlín: Springer Verlag 1989.

Figuras

Aplicaciones afines del plano, 56

Cónicas afines

degeneradas, 84

no degeneradas, 83

Coordenadas respecto de una referencia

afín, 28

Derivada de una aplicación afín, 13

Dilatación, 22

Homotecia, 19

Inmersión de un espacio afín como hiperplano, 30

Interpolación iterada, 42

Operaciones con puntos y vectores, 1

Polaridad

de una cónica, 70

de una superficie cuádrica, 71

en infinito, 72

Referencias afines, 26

Superficies cuádricas afines

con muchos puntos singulares, 91

con un único punto singular, 90

no degeneradas, 89

Teorema de Thales, 39

en el plano, 40

Trasvección, 21

Símbolos

$\gamma : X \times X \rightarrow \overrightarrow{X}$	1	$\text{GL}(\overrightarrow{X})$	17
$\gamma_x : X \rightarrow \overrightarrow{X}$	1	$f(x) = (x + W) \cap Y$	17
$\mathbb{K}^n = \mathbb{A}^n = \overrightarrow{\mathbb{A}^n}$	3	$f(x) = x + w$	18
$\gamma(Y \times Y) = \gamma_a(Y)$	4	$\mathsf{T}(X)$	18
$\overrightarrow{a + V} = V$	4	$f(x) = c + \lambda \overrightarrow{cx}$	19
$Y = \{a + u : u \in V\} = a + V$	4	$x + f(x)w, \overrightarrow{f}(w) = 0$	20
$\overrightarrow{Y} = V = -a + Y$	4	$f(x) + \lambda \overrightarrow{f(x)x}$	22
$\overrightarrow{Y} = \bigcap_i \overrightarrow{Y_i}$	6	$\overrightarrow{f} + \lambda(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{X}})$	22
$Y = a + \bigcap_i \overrightarrow{Y_i}$	6	$\theta(x) = \overrightarrow{\theta}(\overrightarrow{ax})$	25
$V(A) = \bigcap_{Y \supseteq A} Y$	6	$\theta(x) = (x_1, \dots, x_n)$	25
$\overrightarrow{V(A)} = L[\overrightarrow{ax} : x \in A]$	6	$\overrightarrow{V(a_0, a_1, \dots, a_d)} = L[u_1, \dots, u_d]$	25
$\overrightarrow{V(Y, Z)} = L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$	6	$\mathcal{R} = \{a_0, \dots, a_n\}$	26
$\dim(X)$	7	$\{a_0; u_1, \dots, u_n\}$	26
$\text{codim}(Y) = \dim(X) - \dim(Y)$	7	$\overrightarrow{pq} \rightarrow y - x$	28
$V(a, b) = a + L[\overrightarrow{ab}]$	8	$y^t = c^t + Mx^t$	29
$\dim(V(Y, Z))$	8	$\begin{pmatrix} 1 \\ y^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ c^t & & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}$	29
$flax = \overrightarrow{f(a)f(x)}$	13	$\hat{C}$	29
$f(x) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax})$	14	$\hat{X} = \mathbb{K}^{n+1}$	29
$\overrightarrow{f(Z)} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{Z})$	15	$X : x_0 = 1, \overrightarrow{X} : x_0 = 0$	29
$\overrightarrow{f^{-1}(T)} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{T})$	15	$Y : Ax^t = b^t$	31
$f : X \rightarrow \mathbb{K}$	16	$\dim(Y) = n - \text{rg}(A)$	31
$\overrightarrow{f} : \overrightarrow{X} \rightarrow \mathbb{K}$	16	$Y : x^t = M\lambda^t + c^t$	31
$Y = f^{-1}(t)$	16	$Y \cap Z : (A C)x^t = (b^t c^t)$	32
$\overrightarrow{Y} = \ker(\overrightarrow{f})$	16	$\text{rg}(A C)$	32
$\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$	16	$y^t - m^t = Mx^t$	33
$\text{GA}(X)$	17		

Índice

- Acción vectorial, 1
- Afinidad, 16
- Aplicación
 - idempotente, 18, 23
 - involutiva, 22, 23
- Aplicación afín, 14
 - derivada de una, 14
 - inyectiva, suprayectiva, inyectiva, 14
- Aplicaciones afines
 - de la recta, 53
 - del plano, 54
 - equivalentes, 49
 - involutivas, 57
- Asíntotas de una cuádrica, 65
- Autovalores de una aplicación afín y de su derivada, 50
- Base de una proyección, 18
- Cambio
 - de coordenadas, 28
 - de referencia, 28
- Caracterización geométrica
 - de las dilataciones, 23
 - de las trasvecciones, 21
- Centro de una simetría central, 22
- Centros de una cuádrica, 63
 - y simetrías, 65
- Ceros de una cuádrica, 63
- Cilindro
 - elíptico, 90
 - hiperbólico, 90
 - parabólico, 90
 - tangente a una cuádrica, 72
- Clasificación de cuádricas afines
 - complejas, 81
 - reales, 82
- Codimensión de una variedad afín, 7
- Composición de una homotecia y una traslación, 20
- Congruencia de las matrices de una cuádrica afín, 79
- Cónica afín, 62
 - invisible degenerada, 84
 - invisible no degenerada, 83
- Conjunto convexo, 44
- Cono, 90
 - tangente a una cuádrica, 71
- Conservación
 - de la alineación, 15
 - de la interpolación, 42
 - de la razón simple, 37
 - del paralelismo, 15
- Coordenadas afines, 25
 - adaptadas a una variedad, 32
 - inducidas en una variedad afín, 32
 - respecto de una base y un punto, 25
 - respecto de una referencia afín, 27
 - y direcciones, 28
- Cuádrica afín, 62
 - no degenerada, 75
- Cuádricas afines
 - de una recta afín, 67
 - equivalentes, 79
- Diámetros de una cuádrica, 64
- Dilatación, 22
 - base de, 22
 - razón de, 22
- Dimensión de un espacio afín, 7
- Dimensiones e incidencias, 9
- Dirección
 - asintótica de una cuádrica, 65
 - de una proyección, 18
 - de una variedad afín, 4
- Dualidad respecto de una cuádrica, 69