

# Modelización: de la justificación matemática de sencillos juegos mecánicos a las aplicaciones industriales<sup>1</sup>

J. I. DÍAZ<sup>2</sup>

Instituto de Matemática Interdisciplinar y Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid  
Real Academia de Ciencias

## 1. INTRODUCCIÓN

La primera etapa a la hora de abordar matemáticamente un problema «real» trata de su *modelización*. Un modelo no es más que un conjunto de relaciones utilizado para representar y estudiar de forma sencilla y comprensible un objeto o fenómeno de la realidad. La experiencia muestra que obtener un modelo «correcto» no es siempre una tarea fácil y de hecho puede equivaler a haber resuelto ya gran parte del problema. Su carácter constructivo involucra inevitablemente otras componentes ligadas a la experiencia, intuición y sentido estético. Éstas son quizás las razones por la que numerosos autores se refieren a ese proceso cómo «el arte de modelizar». No confundir con el «modelado» típico del proceso artístico<sup>3</sup>.

La modelización debe completarse con el proceso de la experimentación. La aparición de los ordenadores cambió drásticamente el panorama. El proceso de modelización es de naturaleza interdisciplinar, requiere un conocimiento del objeto en estudio y una cierta experiencia en las técnicas matemáticas que hacen coherente un modelo. La modelización necesi-

ta grandes dosis creativas y ha marcado importantes avances de la ciencia. Es el arte de hallar el lenguaje matemático subyacente en el universo que nos preconizaba Galileo. El modelo matemático se introduce como «prototipo», bajo unas simplificaciones necesarias. Según la naturaleza de las simplificaciones supuestas se puede obtener una familia de modelos susceptibles de ser ordenados jerárquicamente según su distinta complejidad.

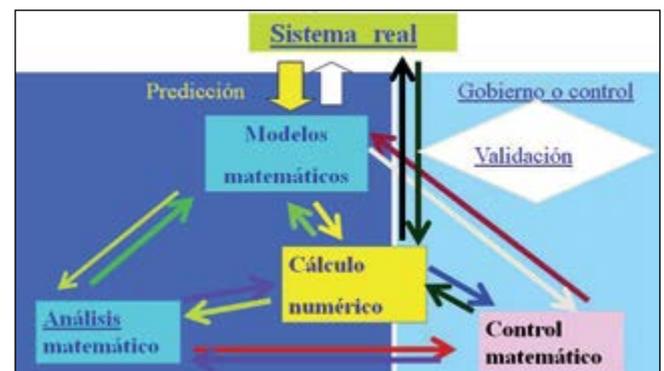


Figura 1. Etapas de la «Trilogía Universal» en la modelización matemática según J.-L. Lions<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Conferencia impartida en la RAC, el 5 de junio de 2014, en el *X Ciclo de conferencias de divulgación científica: Ciencia para todos*.

<sup>2</sup> Investigaciones parcialmente financiadas por el proyecto Ref. MTM2014-57113-P de la DGISPI y el Grupo de Investigación MOMAT (Ref. 910480) de la Universidad Complutense de Madrid.

<sup>3</sup> Esta es la razón por la que este conferenciante propuso, en junio de 2002, a la Real Academia Española, acuñar la palabra «Modelización» (por increíble que pueda parecer, inexistente hasta entonces en el castellano oficialmente reconocido) y que tal y como le comunicó su entonces Vicepresidente (y Presidente de la de Ciencias), A. Martín Municio, fue aprobada en tan sólo unos meses al admitir el verbo «modelizar» y todas sus palabras derivadas.

<sup>4</sup> Imagen del autor.

En este trabajo se analizará la modelización de tres sencillos juegos mecánicos que suelen llamar la atención a quienes los observan: la «peonza invertible» (también denominada *Tippe Top*<sup>5</sup>), «la piedra celta» (conocida también como *rattleback*, en inglés, o *anagyre*, en francés)<sup>6</sup> y «el disco de Euler»<sup>7</sup>. Analizaremos los grandes rasgos de su modelización matemática (sin entrar totalmente en detalles del completo rigor matemático) y sus insospechados comportamientos comunes. Incluso en cursos académicamente reglados, de Mecánica Clásica, habitualmente no son tenidos en cuenta. Como ya señalaba certeramente Leonardo da Vinci (1452-1519) *la Mecánica es el paraíso de las ciencias matemáticas pues por medio de ella surgen los frutos de la matemática*<sup>8</sup>.



**Figura 2.** Jean Siméon Chardin (Paris, 1699-1779) *L'enfant au toton*<sup>9</sup>.



**Figura 3.** Wolfgang Pauli (1900-1958: PN 1945) y Niels Bohr (1885-1962: PN 1922) y la *Tippe Top*<sup>10</sup>.

Muchos de esos juegos son una sencilla y directa visualización de procesos bastante más complejos que aparecen también en la esfera de las aplicaciones industriales. Esas peonzas, esos simples juegos mecánicos conectan con importantes valores eternos y universales: la curiosidad y el afán de comprender.

Esos valores los podemos apreciar en todo tipo de personas: de niños en su más cándida infancia a galardonados con el Premio Nobel (véanse las figuras 2 y 3).

Más tradicional, pero menos vistosa, la curiosa rotación de un huevo duro y objetos similares ha atraído permanentemente la atención de muy destacados científicos<sup>11</sup>.

<sup>5</sup> Patentada por W. Ostberg en 1950 ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Toupie\\_tippe-top](https://fr.wikipedia.org/wiki/Toupie_tippe-top)).

<sup>6</sup> Arqueólogos del siglo XIX que investigaban yacimientos egipcios y celtas encontraron algunas piedras que giraban de una manera peculiar mostrando un sentido de giro preferente: si se les hace girar en ese sentido sigue girando hasta que se para, pero si se les hace girar en sentido contrario, al cabo de unas pocas vueltas, se paran y empiezan a girar al revés, en su sentido preferido. Las primeras descripciones científicas de las piedras celtas se publicaron en 1890 a cargo de Sir Gilbert Thomas Walker.

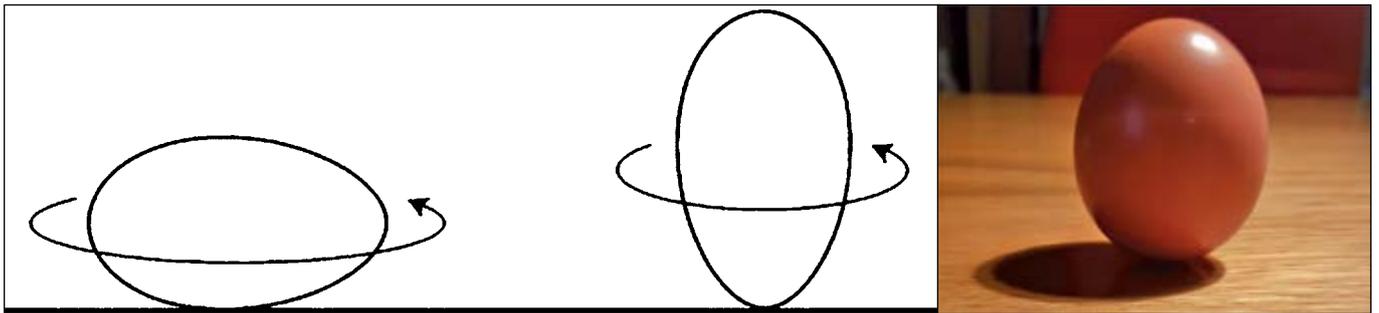
<sup>7</sup> Diseñado por J. Bendik en la década de los años 1980, fue comercializado inicialmente por la Tangent Toy Company. En la actualidad es comercializado por Damert Company, Auburn, Alabama, Estados Unidos.

<sup>8</sup> Notebooks, v. 1, ch. 20 (1489-1508).

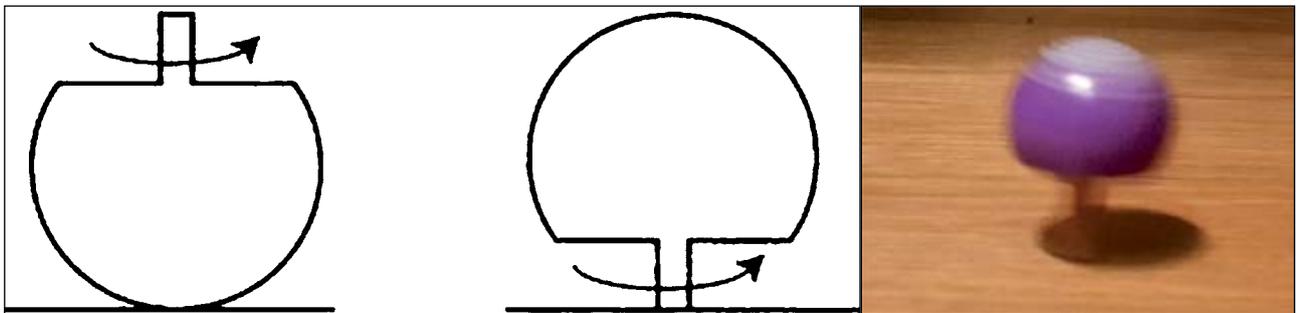
<sup>9</sup> Obra de 1708, actualmente en el Louvre.

<sup>10</sup> Foto tomada en la University of Lund el 31 de mayo de 1951. Credit: Photograph by Erik Gustafson, courtesy AIP Emilio Segre Visual Archives, Margrethe Bohr Collection ([www.aip.org/history/esva](http://www.aip.org/history/esva)).

<sup>11</sup> Como precedentes, ya en el siglo XIX, Sir William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) y su amigo Bailie Hugh Blackburn (1823-1909) analizaron los giros de «piedras con forma de huevo» que encontraban en playas. Una referencia más moderna sobre el estudio matemático de giros de huevos duros es el artículo N. Bou-Rabee, J. E. Marsden and L. A. Romero, *A geometrical treatment of Jellett's egg*, *Z. Angew. Math. Mech.* 85 (2005), 618-642.



**Figura 4.** Rotación de un huevo en estado natural y rotación de un huevo cocido<sup>12</sup>.



**Figura 5.** La «peonza invertible» o Tippe Top<sup>13</sup>.

Sobre la historia de la «peonza invertible» se posee una amplia información<sup>14</sup>. Cuando el objeto se coloca sobre una mesa, el centro de masa apunta hacia abajo, hacia la mesa. Tras un cierto tiempo de giro, su centro de masa se levanta (al igual que en la rotación de un huevo duro). En 1952 comienza el estudio matemático sobre la *Tippe Top* con un artículo debido a C. M. Braams (Rijks University, Utrecht). Algunas de las preguntas que sugiere su observación son: ¿de dónde saca la energía para girar invertida? ¿por qué cambia el sentido de giro una vez que se invierte?

Desde que encontré, por primera vez, la llamada «piedra celta», en el Museo de la Ciencia de Cardiff,

en febrero de 2007, mi curiosidad por intentar develar tan caprichoso comportamiento no ha hecho más que crecer. El objeto, aparentemente simétrico<sup>15</sup>, gira perfectamente en uno de los sentidos (que es preferente) pero se opone a girar en sentido contrario tras un reducido número de vueltas. De nuevo uno se puede preguntar ¿de dónde saca la energía para cambiar el sentido de giro cuando se le hace rotar en la «mala dirección»?

El tercero de los ejemplos que analizaremos es el denominado «disco de Euler» que no es más que un disco especialmente pesado que gira apoyándose sobre una superficie muy pulida y ligeramente con-

<sup>12</sup> Foto del autor.

<sup>13</sup> Foto del autor.

<sup>14</sup> En el libro del ayudante de Lord Kelvin, John Perry (1850-1920), *Spinning Tops and Gyroscopic Motions*, 1890, se describe un pequeño objeto esférico cuyo centro de masa no coincide con el centro de la esfera. En 1950 la peonza invertible fue re-patentada por el ingeniero danés Werner Ostberg, quien la denominó *Tippe Top*. Tuvo la idea durante una visita a América del Sur, donde había visto a la gente jugando con una fruta pequeña y redonda. Cuando giraban por el tallo como una peonza giraba por un segundo y luego se invertía y giraba sobre el tallo. Produjo en masa la *Tippe Top* y ganó gran popularidad en todo el mundo: en Canadá se vendía en farmacias y a partir de 1953 se obsequiaba en el interior de las cajas de cereales de varias marcas.

<sup>15</sup> La imagen de abajo corresponde a un ejemplar de gran tamaño (60 cm de diámetro) elaborado por el ebanista francés, residente en Quebec, Canadá, Emmanuel Péluchon, comprada por este autor.



Figura 6. Piedra celta<sup>16</sup>.



Figura 7. Disco de Euler<sup>17</sup>.

vexa y que emplea un tiempo más largo de lo normal en dejar de rotar sobre puntos del borde de su cara inferior, produciendo una sensación de flotabilidad y generando un ruido que crece a medida que su velocidad aumenta cada vez más hasta pararse de manera abrupta<sup>18</sup>. ¿Por qué gira aún más rápidamente

poco antes de pararse?, ¿por qué ese ruido tan concentrado cuando se detiene?

Finalizaremos el trabajo señalando como algunos problemas de «origen industrial» tienen ciertos puntos comunes con los sencillos juegos mecánicos mencionados<sup>19</sup>.

## 2. BREVÍSIMOS COMENTARIOS SOBRE EL MODELO, Y SU ANÁLISIS MATEMÁTICO: EL SÓLIDO RÍGIDO

Los principios fundamentales que se han de aplicar en el movimiento de un sólido rígido no son más que<sup>20</sup> la segunda Ley de Newton (para la variación del momento lineal)<sup>21</sup> y la ecuación vectorial sobre la variación del momento angular<sup>22</sup>, respecto de un punto cualquiera. A diferencia del caso de un número finito de partículas, esta otra ecuación no se deduce de la segunda ley. Esta fue una de las correcciones que Leonhard Euler (1707-1783) realizó sobre la teoría de Newton. Su profundo trabajo, «*Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable*»<sup>23</sup>, no apareció hasta tres años después de su obra magna sobre Mecánica de Fluidos<sup>24</sup>, de 1755. Sus investigaciones sobre el sólido rígido fueron mantenidas durante varios años y recogidas en su libro de 1765<sup>25</sup>. Este

<sup>16</sup> Foto del autor.

<sup>17</sup> Foto del autor.

<sup>18</sup> Tuve el privilegio de conocer este disco visitando París, en 2004, directamente de H. K. Moffat (en ese momento Director del Instituto Newton de la Universidad de Cambridge) quien me presentó personalmente varias impresionantes experiencias. Al finalizar mi conferencia en la universidad de Paris VI, relacionada con la propiedad de *extinción en tiempo finito* en mecánica de fluidos, H. Brezis había sugerido contactar con él dado que Moffat estaba allí en esas fechas. Como se indicará más tarde, Moffat es el autor de varios prestigiosos estudios sobre este sólido rígido.

<sup>19</sup> Por limitaciones de extensión de este artículo no serán incluidos otros ejemplos que fueron ilustrados durante la conferencia que dio lugar a este trabajo. Véanse, por ejemplo, G. Barceló, J. I. Díaz, A. M. Ramos, Un problema inverso emergente en el estudio de los movimientos con rotaciones intrínsecas no coaxiales de un disco, XX CEDYA (X Congreso de Matemática Aplicada). Universidad de Sevilla, 2007, y J. I. Díaz y R. Gómez, Measure-valued solutions to a nonlocal conservation law arising in crystal precipitation. CD-Actas del XXI CEDYA (XI Congreso de Matemática Aplicada). Universidad de Castilla la Mancha, Ciudad Real, 2009.

<sup>20</sup> Numerosos libros de texto pueden ser mencionados a este propósito. Uno de mis preferidos, por su pedagógica exposición, es J. Taylor, Mecánica Clásica, Ed. Reverté, Barcelona, 2014. Distintas versiones de las notas de clase de este autor (*Una introducción matemática a la mecánica clásica, analítica y dualidad partícula-onda*) vienen siendo distribuidas a los alumnos de la UCM desde hace más de una década y darán lugar a una monografía de próxima aparición. Una obra simultánea (esta vez en colaboración con David Gómez-Castro), con numerosos problemas resueltos, está también en alto grado de elaboración.

<sup>21</sup> Lo que permite hallar, por ejemplo, las tres coordenadas del centro de masa.

<sup>22</sup> Lo que determina las tres coordenadas del vector velocidad angular y así completan los seis grados de libertad que bastan para caracterizar al movimiento del sólido rígido.

<sup>23</sup> Mém. de l'Acad. Sci. Berlin 14, 154-193, 1758.

<sup>24</sup> «Principes generaux de l'état d'équilibre des fluides».

<sup>25</sup> «Theoria Motus Corporum Solidorum Seu Rigidorum», Greifswald, 1765.

hecho, en sí mismo, es un excelente indicador de las dificultades que acarrea el estudio del sólido rígido que, al menos intuitivamente, debería ser más sencillo que el estudio de medios continuos (como es el caso de un líquido o un gas). Tal y como lúcidamente Euler señalaba en esa obra de 1755:

*La teoría queda reducida a unas ecuaciones diferenciales: solo falta el cultivo de su análisis matemático.*

A los dos principios fundamentales mencionados se le ha de añadir la «ley constitutiva» que nos informe de cómo está distribuida la masa de ese cuerpo: en otras palabras, de la «forma del sólido rígido». La *matriz de inercia* del cuerpo da cuenta de esa información tan fundamental.

Todo lo que antecede es de aplicación en el caso de movimientos «libres» pero con gran frecuencia los movimientos de un sólido rígido están sometidos a «ligaduras» que coartan sus posibles movimientos y que se formulan en términos de la llamada *Mecánica Analítica* de Joseph Louis Lagrange<sup>26</sup> (1736-1813).

En ambos casos se obtiene así un sistema de ecuaciones diferenciales que constituye un modelo «bien planteado en sentido de Hadamard»<sup>27</sup>: admite solución, es única y depende continuamente de los datos<sup>28</sup>. Uno se podría preguntar si acaso es posible encontrar una «solución exacta» que venga dada por una expresión concreta más o menos explícita: es lo que caracteriza a los llamados «sistemas integrables por cuadraturas». Pero esto no es cierto más que en contados casos particulares. El aparentemente sencillo problema de la rotación de una peonza que tenga también en cuenta

la acción de la gravedad no es, en general, resoluble exactamente en términos de cuadraturas. Durante muchos años, los únicos casos integrables conocidos eran: el caso de una peonza con punto fijo y en el que se desprecia la acción de la gravedad (estudio realizado por Euler), y el caso en el que el punto fijo de la peonza y el centro de gravedad se encuentran en un eje de simetría (estudio debido a Lagrange).

Los avances posteriores más relevantes en el estudio del sólido rígido coincidieron con el largo periodo de consolidación y nacimiento del concepto de rigor matemático del siglo XIX. Fueron detectados numerosos «problemas sin solución», «funciones que no admiten expresión alguna en términos de polinomios ni funciones trigonométricas (como, por ejemplo las funciones elípticas), etc. Por citar tan solo unos cuantos nombres que participaron en esos avances mencionaré aquí a C. G. J. Jacobi (1804-1851), Karl Weierstrass (1815-1897) y Sofia Vasilievna Kovalévskaya (Moscú, 1850 - Estocolmo, 1891)<sup>29</sup>.

Pero conocer que el modelo está «bien planteado» no agota los capítulos básicos que han de dar respuesta para completar el análisis matemático del modelo. Por ejemplo, el estudio de la estabilidad de las soluciones estacionarias, cuando el tiempo converge a infinito, es de una importancia capital. Tras los trabajos de grandes matemáticos como P.G.L. Dirichlet (1805-1859), H. Poincaré (1854-1912) y A. M. Lyapunov (1857-1918), por citar tan solo a tres de ellos, hoy sabemos que dos de las grandes herramientas para ese estudio son el llamado «Principio de estabilidad linealizada» (que se aplica tras «linealizar» el sistema de ecuaciones diferenciales, que usualmente es de carácter no lineal) y la Teoría de la estabilidad de Lyapunov.

<sup>26</sup> En realidad, se debe considerar también a Euler como cofundador de la Mecánica Analítica. En su famosa carta a Euler, de 12 de agosto de 1755, contando tan solo 19 años, Lagrange le informaba de que él tenía una manera alternativa y más simple de probar muchos de los resultados que había aprendido en sus clases. Euler sentenció que con esa carta nacía una nueva parcela de las matemáticas que podría llevar el título de *Cálculo de Variaciones*.

<sup>27</sup> Jacques Salomon Hadamard (1865-1963).

<sup>28</sup> Se aplica a este modelo la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias establecida, entre otros por Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Giuseppe Peano (1858-1932) y Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903).

<sup>29</sup> Matemática rusa de relevancia universal, fue la primera mujer que consiguió una plaza de profesora universitaria en Europa (en Suecia, en 1881). S. Kovalevskaya obtuvo en la década de los ochenta del XIX una solución analítica para el caso de una peonza en la que dos de los principales momentos de inercia respecto del punto fijo son iguales y el doble de la tercera y cuando el centro de gravedad está en el plano de los momentos iguales de inercia (véase, por ejemplo, el libro de E. T. Whittaker, (1873-1956), *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies*, Primera Edición 1917, versión en Cambridge, University Press de 1944, p. 164).

Un caso sencillo particular, pero ilustrativo de alguna situación nada trivial que nos podemos encontrar en el estudio del sólido rígido se refiere al caso de un cuerpo con tres momentos principales de inercia diferentes,  $I_1 < I_2 < I_3$ , en presencia de unos momentos angulares externos de coordenadas  $\tau_i$ . Las ecuaciones<sup>30</sup> de Euler son:

$$I_1 \omega_1' + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = \tau_1$$

$$I_2 \omega_2' + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = \tau_2$$

$$I_3 \omega_3' + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = \tau_3.$$

Denotando por T a la energía cinética y por  $\vec{L}$  al vector momento angular se obtiene la relación:

$$2T = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}.$$

Dado que:

$$|\vec{L}|^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2,$$

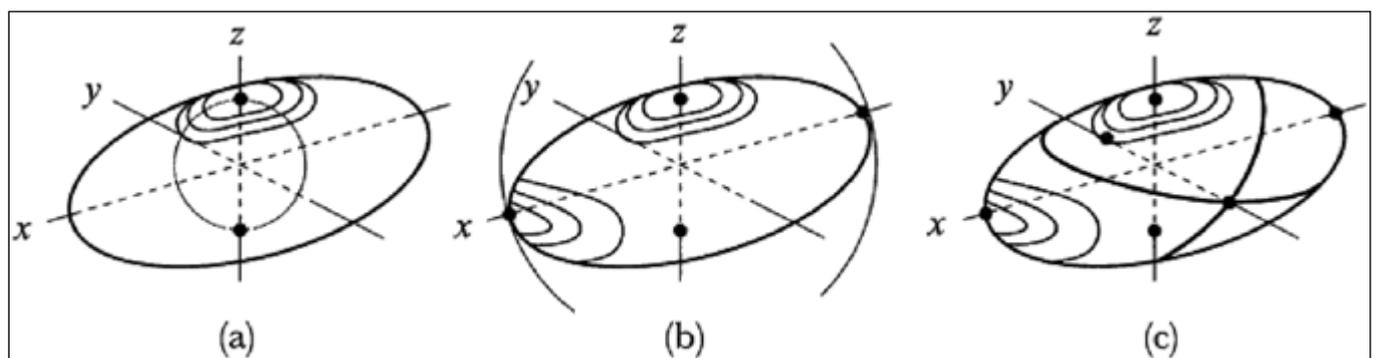
la intersección del elipsoide con una familia de esferas conduce a una información equivalente al plano de fa-

ses, representando los pequeños giros en torno a cada uno de los tres ejes principales de inercia. Es el llamado *Elipsoide de Louis Poinsot* (1777-1859). Vemos que los giros en torno al primero y tercer eje son «estables» pero que el giro en torno al segundo de los ejes es un «punto silla» inestable. Véase la Figura 8.

Esto es algo que podemos detectar en la vida cotidiana haciendo girar, por ejemplo, una caja con sus tres aristas de diferente longitud (por ejemplo una caja de cerillas de gran tamaño). Véase la Figura 9.

Acabaremos este breve recordatorio haciendo mención a una de las herramientas fundamentales que el gran Euler desarrolló para el estudio del sólido rígido, y por tanto para los cambios de los sistemas de referencia de coordenadas del sistema  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  (en nuestro caso el sistema de referencia absoluto) al sistema  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  (sistema de referencia relativo ligado al cuerpo). Se trata de la introducción de los *ángulos de Euler*. Véase la Figura 10.

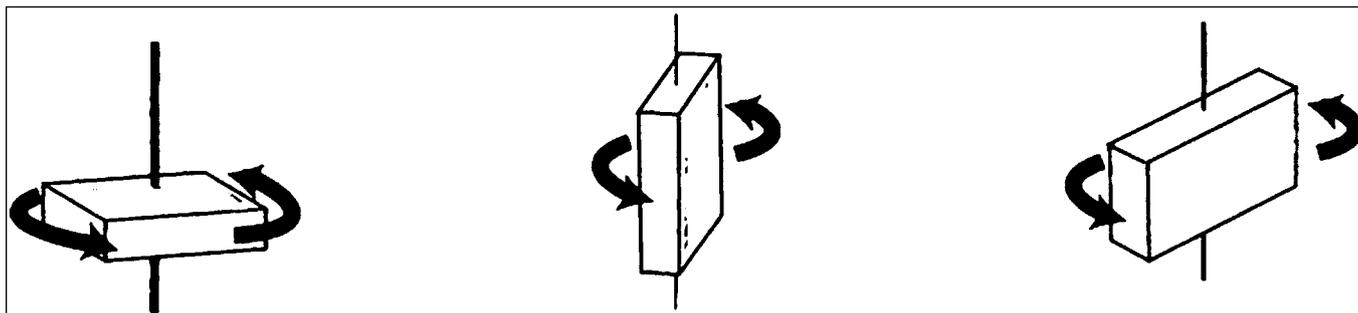
Obsérvese que  $\vec{e}_z$  es el vector unitario respecto del eje z de la base de referencia absoluta,  $\vec{e}_N$  es el vector unitario a lo largo de la llamada *línea de nodos* y que  $\vec{e}_z$  es el vector unitario respecto del eje Z del sistema de referencia relativo unido al cuerpo rígido. El vector velocidad angular puede ser ahora escrito en términos de los ángulos de Euler<sup>31</sup> como:



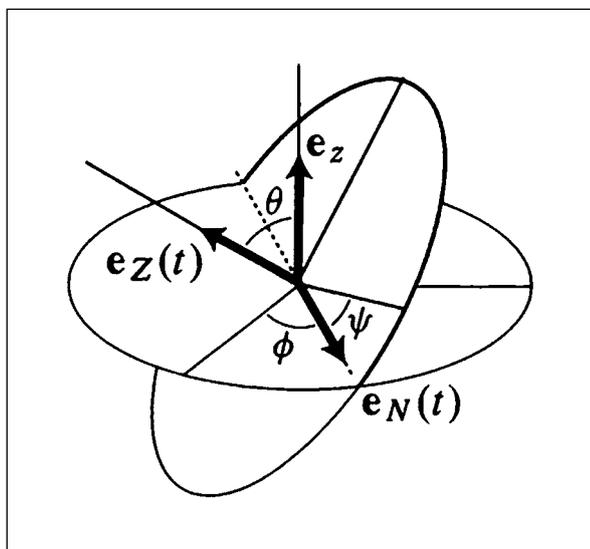
**Figura 8.** Diferente estabilidad de los giros alrededor de los ejes principales de inercia.

<sup>30</sup> Obsérvese que son no lineales (como sucede también con las de Navier Stokes que formulan el balance de los momentos lineal y angular de un fluido).

<sup>31</sup> El lector debe recordar a este respecto que las notaciones sobre los ángulos involucrados no son universales por lo que un mismo símbolo puede tener diferente significado en autores diferentes.



**Figura 9.** Modos de rotación de una caja respecto de sus ejes principales con mayor, menor e intermedio momento de inercia respectivamente.



**Figura 10.** Ángulos de Euler.

$$\vec{\omega}(t) = \phi'(t)\vec{e}_z(t) + \theta'(t)\vec{e}_N(t) + \psi'(t)\vec{e}_z(t),$$

y así

$$\omega_1 = \phi' \text{sen}\theta \text{sen}\psi + \theta' \text{cos}\psi$$

$$\omega_2 = \phi' \text{sen}\theta \text{cos}\psi + \theta' \text{sen}\psi$$

$$\omega_3 = \phi' \text{cos}\theta + \psi'.$$

### 3. ESTUDIO DE LA PEONZA REVERSIBLE

El objetivo de esta sección es mostrar que el punto de apoyo C(t) de la peonza (en contacto con la superficie inferior: véase la Figura 11) describe una curva sobre la superficie de la peonza que alcanza la parte superior de la peonza y hace que invierta, a partir de ese instante, su posición y su sentido de giro (véase la Figura 12). El estudio que presentaremos aquí está inspirado en el de W.A. Pliskin de 1954<sup>32</sup>. En los momentos iniciales de la rotación el módulo  $\omega$  del vector velocidad angular es prácticamente constante por lo que podemos suponer (aproximadamente) que  $\vec{L} = \omega \vec{e}_z(t)$ . Como los momentos de inercia  $I_1, I_3$  son muy parecidos podemos suponer de hecho que son iguales ( $I_1 = I_3 = I$ ). Podemos esquematizar la situación mediante la Figura 11 representando el centro de masa G, el punto de contacto C, el centro de simetría O supuesto sobre la parte inferior de la peonza (que suponemos que es una parte de una esfera de radio R, de momento de inercia I, y en cuyo centro O situamos el origen de del sistema relativo de coordenadas), el vector momento angular  $\vec{L}$ , el ángulo de Euler  $\theta$  el momento vectorial  $\vec{\tau}$  y la fuerza de rozamiento  $\vec{f}$  que es opuesta al movimiento de velocidad  $\vec{v}$ .

Se tiene entonces que  $\vec{\tau} = \vec{L}'$  en coordenadas relativas. Como  $(\vec{e}_z, \vec{\tau}) = (\vec{e}_z, \vec{L}') = (\vec{e}_z, \vec{L})'$  obtenemos<sup>33</sup> que  $(\vec{e}_z, \vec{\tau}) = -|\vec{\tau}| \text{sen}\theta$  y por tanto:

$$(\vec{e}_z, \vec{L})' = (|\vec{L}| \text{cos}\theta)' = |\vec{L}| \text{cos}\theta'.$$

<sup>32</sup> W.A. Pliskin, «The Tippe Top (Topsy-Turvy Top.)» Amer. J. Phys. 22, 28-32, 1954.

<sup>33</sup>  $(\vec{e}_z, \vec{\tau})$  denota al producto escalar de esos dos vectores.

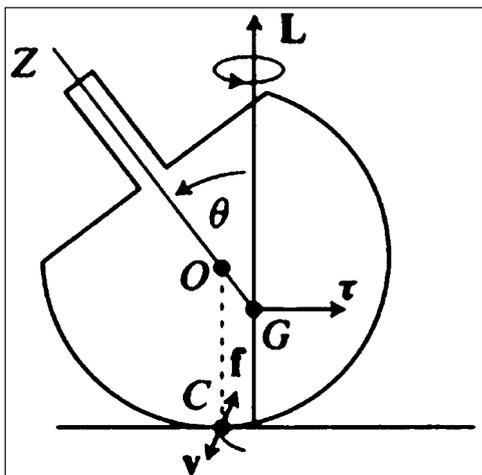


Figura 11. La peonza reversible en la primera fase de la rotación.

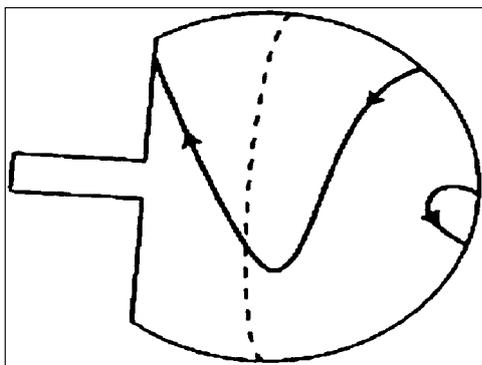


Figura 12. Trayectoria del punto de contacto<sup>34</sup>.

Por lo que:

$$\theta' = \frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{L}|} = \frac{\mu WR}{I\omega},$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción, y  $W$  es el peso. Obtenemos así la Ley constitutiva de la fricción. Eso muestra que  $\theta(t)$  es inicialmente creciente y lo es hasta que el pivote toca el suelo y así, en la segunda fase, la peonza se invierte.

Pero, ¿por qué lo hace invertir el sentido de giro de manera que en la segunda fase sigue con el mismo sentido de giro que en la primera pese a haber invertido su posición?

Si  $\alpha$  es la velocidad angular del punto de contacto C respecto del eje Z, no es difícil mostrar que de la segunda ecuación de Euler se obtiene la expresión:

$$I_1\omega_2' + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 - I_3\alpha\omega_1 = \tau_2.$$

Además, podemos suponer que  $\tau_2 = aW\text{sen}\theta$  si  $a\text{sen}\theta$  es la distancia entre G y C (el peso  $W$  le suponemos actuando en C). Por tanto, como aproximadamente  $\omega_1 = \omega\text{sen}\theta$  (y  $\omega_3 = \omega\text{cos}\theta$ , pues  $\vec{L} = \omega\vec{e}_z(t)$ ), llegamos a que:

$$I_1\theta'' + (I_1 - I_3)\omega^2\text{sen}\theta\text{cos}\theta - I_3\alpha\omega\text{sen}\theta = aW\text{sen}\theta.$$

Por tanto,

$$I_1\theta'' + (I_1 - I_3)\omega^2\text{sen}\theta\text{cos}\theta - I_3\alpha\omega\text{sen}\theta = aW\text{sen}\theta.$$

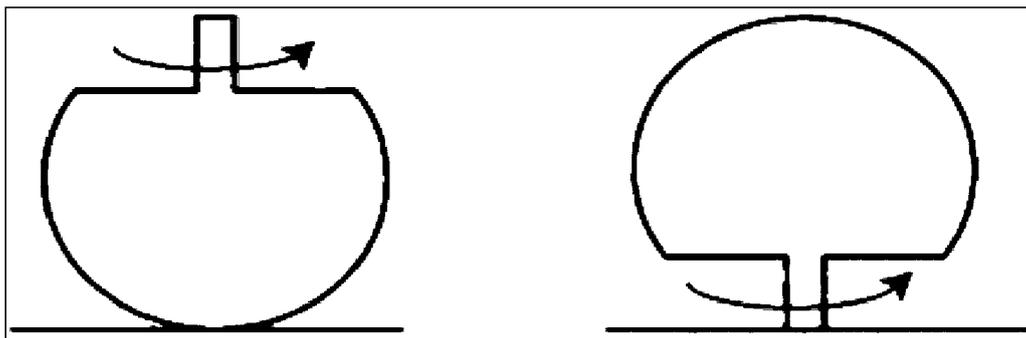


Figura 13. Sentido de rotación en ambas fases de la peonza invertida.

<sup>34</sup> Se puede conseguir la traza de esa curva mediante técnicas de pigmentación de la propia peonza (véase la referencia citada Pliskin (1954).

En esta peonza  $\theta'$  es pequeña comparada con  $\omega$ . Con ello, podemos suponer que  $\theta'$  es despreciable y llegamos a que:

$$\alpha = \frac{aW}{I_3\omega} + \frac{(I_1 - I_3)\omega \cos\theta}{I_3}$$

En particular,  $\alpha = 0$  si  $\theta_0(t_0) = \theta_0$  siendo:

$$\cos\theta_0 = \frac{aW}{(I_1 - I_3)\omega^2}$$

Por tanto  $\alpha(t)$  cambia de signo en  $t = t_0$  como queríamos probar.

Estudios matematizados sobre otras propiedades cualitativas sobre la peonza reversible son asequibles en la literatura<sup>35, 36</sup>.

#### 4. SOBRE LA PIEDRA CELTA

El objetivo de esta sección es mostrar que uno de los dos sentidos de rotación de la piedra celta es inestable. Adaptaremos aquí, con algunos cambios, la presentación de P. Bérest (1997)<sup>37</sup>. La Figura 14 (en la que ahora los ejes del sistema de referencia relativo se han representado con mayúsculas) permite representar los ángulos de Euler, el centro de masa  $G$  y los puntos de apoyo (que ahora denotamos por  $I_0$  e  $I(t)$ ).

Denotaremos por  $\{G; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  al sistema de referencia baricéntrico de direcciones principales de inercia del sólido. Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  los valores propios del tensor

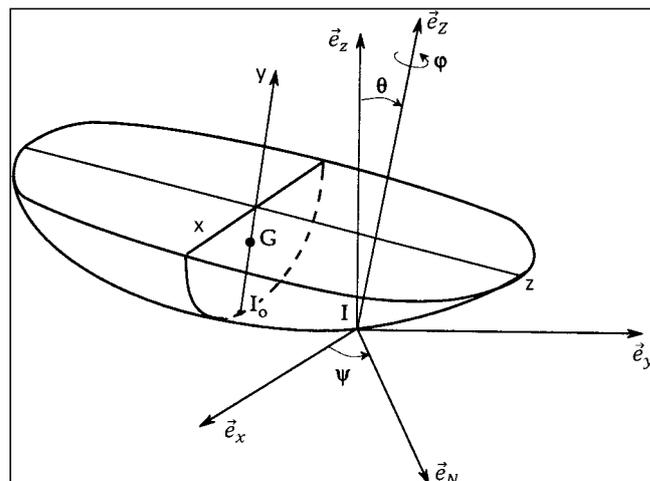


Figura 14. La piedra celta y los ángulos de Euler.

de inercia. Como veremos a continuación, la piedra se ha de suponer con una pequeña asimetría, difícilmente apreciable a simple vista, que será la responsable de ese comportamiento tan peculiar. El eje  $Gy$  corta a la superficie del sólido en el punto  $I_0 := (0, -a, 0)$ <sup>38</sup>. Suponemos que en ese punto el vector normal es una dirección principal del sólido. En el entorno de  $I_0$  la superficie admite una ecuación (al menos al tercer orden de aproximación):

$$y = -a + \frac{Px^2 + 2Qxz + Rz^2}{2}$$

Definamos  $\Lambda = PR - Q^2$ . Suponemos que el sólido es convexo en un entorno de  $I_0$ , es decir que  $P > 0$  y  $\Lambda > 0$  (lo que obliga a que  $R > 0$ ). Los radios de curvatura principales, inversos de los valores propios (que son positivos pues  $P > 0$  y  $\Lambda > 0$ ) vienen dados por la condición:

<sup>35</sup> Braams, C. M. «The Symmetrical Spherical Top.» Nature 170, No. 4314, Braams, C. M. Physica 18, 503, 1952, Braams, C. M. «The Tippe Top.» Amer. J. Phys. 22, 568, 1954, Cohen, R. J. Amer. J. Phys. 45, 12, 1977, Ebenfeld, S. and Scheck, F. Ann. Phys. 243, 195, 1995, Hart, J. B. «Angular Momentum and the Tippe Top.» Amer. J. Phys. 27, 189, 1959, Hugenholz, N. M. Physica 18, 515, 1952, Isaeva, L. S. J. Appl. Math. Mech. 23, 572, 1959, Kuypers, F.; Meyer, G. P.; Freihart, J.; Friedl, C.; Gerisch, M.; Kraus, H. J.; and Seidel, K. ZAMM 74, 503, 1994, Leutwyler, H. Eur. J. Phys. 15, 59, 1994, O'Brien, S. O. and Synge, J. L. Proc. Roy. Irish Acad. A56, 23, 1954, A. C. SIAM J. Appl. Math. 54, 597, 1994.

<sup>36</sup> Una animación basada en el modelo matemático (a modo de realidad virtual) se puede encontrar en <https://www.youtube.com/watch?v=D-S1jA8vWwQ>.

<sup>37</sup> P. Bérest, Calcul des Variations, Ellipses, París, 1997.

<sup>38</sup> Nótese que en la base absoluta, lo que el lector puede imaginar como el eje  $z$ , es, sin embargo, el eje de la  $y$  coordenada. Esto podría modificarse fácilmente pero nos parece mejor seguir la misma notación que en la referencia indicada (que también adoptan otros autores) para evitar posibles contradicciones con otras notaciones que se introducirán a continuación. Por ejemplo, esa notación conduce a ángulos de Euler que difieren ligeramente de los presentados usualmente.

$$\begin{vmatrix} P - \frac{1}{\rho} & Q \\ Q & R - \frac{1}{\rho} \end{vmatrix} = 0.$$

En el caso particular de total simetría (Q=0) los planos principales de curvatura coinciden con los planos de direcciones principales de inercia x=0 y z=0 y la ecuación de la superficie se puede escribir como:

$$y = -a + \frac{x^4 + z^4}{2 \left( \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2} \right)}.$$

Como veremos a continuación, nos interesará mantener que sea  $Q \neq 0$ . Analicemos las *condiciones de ligadura (o de contacto)*. Sea  $\{O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  un sistema de referencia absoluto (fijo), con Oy en la vertical ascendente (coincidiendo con la dirección GZ si el sólido está en equilibrio) y sea  $z=0$  la ecuación del plano horizontal (supuesto fijo). Utilizaremos los ángulos de Euler de los ejes x,y,z respecto de los ejes X, Y, Z. Por ejemplo:

$$\vec{e}_z = \text{sen}\theta \text{sen}\phi \vec{e}_x + \text{sen}\theta \text{cos}\phi \vec{e}_y + \text{cos}\theta \vec{e}_z.$$

Suponemos que el sólido rueda sin deslizamiento sobre el plano  $z=0$ . Sea I(t) el punto de contacto (en un entorno de  $I_0$ ). Las hipótesis de ligadura (no holonómica) son: i) I(t) es un punto de la superficie exterior del sólido, ii) la normal al sólido en I(t) es paralela al eje z, iii) la velocidad del punto I(t) es nula (pues el plano está en reposo). Si escribimos I(t)=(x,y,z) (en realidad son funciones del tiempo) se ha de tener:

$$f(x, y, z) = -y - a + \frac{Px^2 + 2Qxz + Rz^2}{2} = 0,$$

$$\nabla f \times \vec{e}_z = 0,$$

lo que proyectado en los ejes X,Y,Z se escribe como

$$\begin{pmatrix} Px + Qz \\ -1 \\ Qx + Ry \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \text{cos}\phi \\ \text{cos}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tras los cálculos correspondientes, el punto de contacto en términos de los ángulos de Euler (desconocidos a priori) viene dado por:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\Lambda} \left( Q \frac{\text{cot}\theta}{\text{cos}\phi} - R \tan\phi \right) \\ z = \frac{1}{\Lambda} \left( -P \frac{\text{cot}\theta}{\text{cos}\theta} + Q \tan\phi \right). \end{cases}$$

Para hallar las ecuaciones del movimiento tomamos momentos angulares desde el punto I(t). Como siempre, se parte de la relación entre el momento angular, la matriz de inercia (teniendo en cuenta la forma del sólido) y el vector velocidad angular

$$\vec{L}_I(t) = J_I \vec{\omega}_Z(t),$$

siendo  $J_I$  la matriz de inercia respecto del sistema de referencia (relativo)  $\{I(t); \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  (de direcciones paralelas a  $\{G; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ )  $\vec{\omega}(t)$  el vector velocidad angular (relativa) del sólido, es decir dado por:

$$\vec{\omega} = (\theta \text{cos}\phi + \psi' \text{sen}\theta \text{sen}\phi) \vec{e}_x + (-\theta' \text{sen}\phi + \psi' \text{sen}\theta \text{cos}\phi) \vec{e}_y + (\phi' + \psi' \text{cos}\theta) \vec{e}_z.$$

La ecuación del momento angular (suponiendo «perfecta» la ligadura) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_I(t) = \overline{I(t)G(t)} \times m\vec{g}.$$

Por el Teorema de J. Steiner (1796-1863) se tiene que:

$$J_I = \begin{pmatrix} \lambda_1 + m(y^2 + z^2) & -mxy & -mxz \\ -mxy & \lambda_2 + m(x^2 + z^2) & -myz \\ -mxz & -myz & \lambda_3 + m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Además, por el Teorema de G. G. de Coriolis (1792-1843) (generalizado por D. Poisson (1741-1840)) sabemos que:

$$\frac{d}{dt} J_I \vec{\omega}(t) = \frac{d}{dt} J_I \vec{\omega}(t) \Big|_{\text{relativo}} + \vec{\omega}(t) \times (J_I \vec{\omega}(t)),$$

lo que nos lleva a las ecuaciones de Euler (sistema no lineal acoplado) para las coordenadas de  $\vec{\omega}(t)$ .

Para justificar el peculiar movimiento de este curioso sólido rígido debemos analizar la estabilidad en torno a los giros horizontales. Es fácil comprobar que los giros horizontales vienen dados por:

$$\theta_{\infty}(t) = \frac{\pi}{2}, \phi_{\infty}(t) = 0, \psi'_{\infty}(t) \equiv \psi'_0 \text{ para todo } t > 0,$$

pues son soluciones particulares (movimientos permanentes) de las ecuaciones de Euler<sup>39</sup>. Para analizar su estabilidad aplicaremos el proceso de linealización<sup>40</sup> (aunque aquí solo presentaremos una exposición «formal» desprovista del necesario rigor que alargaría necesariamente la exposición). Tomamos una «variación infinitesimal» de los ángulos de Euler (puntos de equilibrio de las ecuaciones de Euler) de la forma:

$$\theta(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right) - u(t), \quad \psi'(t) = \psi'_0 + v(t),$$

con  $u(t)$ ,  $\phi(t)$   $v(t)$  y sus derivadas supuestas «muy pequeñas» (es decir, en un entorno de la función nula en  $C^1(0, +\infty)^3$ ). La linealización ( $\cot\theta \approx u$ ,  $\cos\phi \approx 1$ ) de la condición de ligadura conduce a:

$$\begin{cases} x = (1/\Lambda)(Qu - R\phi) \\ y = \left(\frac{1}{\Lambda}\right)(-Pu + Q\phi), \end{cases}$$

y el vector velocidad angular relativa utilizando esa linealización se puede escribir (respecto de la base relativa  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  como:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \psi'_0\phi - u' \\ \psi'_0 + v \\ \phi' + \psi'_0u \end{pmatrix}.$$

El vector  $\vec{e}_z$  se puede aproximar (en ese orden de aproximación) por:

$$\vec{e}_z = \phi\vec{e}_x + \vec{e}_y + u\vec{e}_z$$

con lo que el momento de la fuerza (el peso) se convierte en:

$$I(\vec{t})G(t) \times (-mg\vec{e}_z) = mg\left\{\left((P/\Lambda) - a\right)u - (Q/\Lambda)\phi\right\}\vec{e}_x + mg\left\{(Q/\Lambda)u + \left(a - (R/\Lambda)\right)\phi\right\}u\vec{e}_z.$$

Finalmente, recordando que  $a > 0$  es el parámetro utilizado para definir  $I_0 := (0, -a, 0)$ , y definiendo:

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 + ma^2, \quad \bar{\lambda}_3 = \lambda_3 + ma^2,$$

al escribir la versión linealizada de  $J_I\vec{\omega}(t)$  y de  $\vec{\omega}(t) \times (J_I\vec{\omega}(t))$  respecto de la base relativa  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  las ecuaciones de Euler conducen al **sistema lineal** de segundo grado en  $u$  y  $\phi$ :

$$(\bar{\lambda}_1 u'' - \psi'_0(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - ma(R/\Lambda))\phi' - ma\psi'_0(Q/\Lambda)u'' + (\psi'_0)^2(\lambda_2 - \lambda_3)u - m(a(\psi'_0)^2 + g)(au - (P/\Lambda)u + (Q/\Lambda)\phi) = 0,$$

$$(\bar{\lambda}_3\phi'' + \psi'_0(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - ma(P/\Lambda))u' + ma\psi'_0(Q/\Lambda)\phi' + (\psi'_0)^2(\lambda_2 - \lambda_1)\phi - m(a(\psi'_0)^2 + g)(a\phi - (R/\Lambda)\phi) + (Q/\Lambda)u = 0.$$

La ecuación característica para el cálculo de los autovalores de la matriz de coeficientes se obtiene anulando el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

de la matriz de elementos:

$$a_{11} = \bar{\lambda}_1 s^2 - ma\psi'_0(Q/\Lambda)s - m(a(\psi'_0)^2 + g)(a - (P/\Lambda)) + (\psi'_0)^2(\lambda_2 - \lambda_3)$$

$$a_{12} = -\psi'_0(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - ma(R/\Lambda))s - m(a(\psi'_0)^2 + g)(Q/\Lambda)$$

$$a_{21} = \psi'_0(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - ma(R/\Lambda))s - m(a(\psi'_0)^2 + g)(Q/\Lambda)$$

$$a_{22} = \bar{\lambda}_3 s^2 + ma\psi'_0(Q/\Lambda)s - m(a(\psi'_0)^2 + g)(a - (P/\Lambda)) + (\psi'_0)^2(\lambda_2 - \lambda_1).$$

El criterio de Routh-Hurwitz<sup>41</sup> muestra que para que las partes reales de las raíces de un polinomio de cuarto grado (en  $s$ ) sean negativas es necesario que los

<sup>39</sup> Obsérvese que el que sea  $\theta_{\infty}(t) = \pi/2$  se debe a la peculiar definición del sólido con el eje de la coordenada  $y$  en la vertical.

<sup>40</sup> Teorema de Ph. Hartman-D. M. Grobman (o teorema de linealización).

<sup>41</sup> E. J. Routh: A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion. Macmillan and co, 1877; A. Hurwitz: «On The Conditions Under Which An Equation Has Only Roots With Negative Real Parts». Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory, 1964.



concentrada en el borde o bien  $k = 1/4$  en el caso de un disco uniforme. Se muestra que las ecuaciones del movimiento pasan a ser:

$$\begin{cases} (2k+1)\omega_3' + \alpha' \Omega \text{sen} \theta \alpha = 0 \\ k\Omega^2 \text{sen} \alpha \cos \alpha + (2k+1)\omega_3 \Omega \text{sen} \alpha - (k+1)\alpha'' = \frac{g}{a} \cos \alpha \\ \Omega' \text{sen} \alpha + 2\alpha' \Omega \cos \alpha + 2\omega_3 \alpha' = 0, \end{cases}$$

siendo  $\omega_3$  la componente del vector velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  respecto de  $\vec{e}_z$ . La energía total viene dada por:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}(t) \cdot J_I \vec{\omega}(t) + mgz \\ &= \frac{m a^2}{2} \left[ (2k+1)\omega_3^2 + (k+1)(\alpha')^2 + k\Omega^2 \text{sen}^2 \alpha + \frac{2g}{a} \text{sen} \alpha \right]. \end{aligned}$$

Siguiendo el artículo de Moffat, la disipación de energía (cuando se supone  $\alpha(t)$  muy pequeño) se puede escribir como:

$$P = \frac{dE}{dt} \approx \frac{5}{2} m a g \alpha'.$$

Si suponemos ahora que la fricción depende de la velocidad en la forma  $P = -\epsilon m a g \Omega^\beta$ , entonces el exponente  $\beta$  valdría 2, en el caso de una fricción lineal correspondiente a regimen laminar, y 3 si es la fricción por el aire que rodea al disco en regimen turbulento (de hecho se tiene  $\beta = 4$  si se supone viscoso el aire exterior). Se llega así a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\alpha' = -\frac{2\epsilon}{5} \Omega^\beta \approx -\frac{2\epsilon}{5} \left( \frac{g}{ak} \right)^{\frac{\beta}{2}} \frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{2}}},$$

pues se tiene que  $\Omega^2 \approx g/ak\alpha$ . La ecuación diferencial resultante, al sustituir  $\approx$  por  $=$ , es no lineal y singular. Si denominamos por  $t_0 > 0$  al instante en que  $\alpha(t_0) = 0$ , es sencillo mostrar (pues es una ecuación de variables separables) que para  $t \in [0, t_0)$ , se tiene la fórmula:

$$\alpha(t) = \left( \frac{\epsilon(\beta+2)}{5} \right)^{\frac{2}{\beta+2}} \left( \frac{g}{ak} \right)^{\frac{\beta}{\beta+2}} (t_0 - t)^{\frac{2}{\beta+2}}.$$

En ese caso, la velocidad angular de precesión vale:

$$\Omega(t) = \left( \frac{C}{t_0 - t} \right)^{\frac{1}{\beta+2}},$$

que expresa la singularidad de la rotación en el tiempo finito  $t_0$  (el disco gira cada vez más rápido a medida que va cayendo horizontalmente).

El desarrollo detallado es excesivamente técnico para la finalidad del presente trabajo. Ese estudio meticuloso permite justificar también algo que parece aparentemente cierto: en un determinado instante el disco deja de rodar y parece no tener ningún punto de apoyo sobre la vertical (se muestra que eso corresponde a cuando el ángulo  $\alpha(t)$  es muy pequeño y el centro de masa G cae con una aceleración resultante similar a la de la gravedad g, pese a los otros factores que intervienen en el problema).

Como se ha indicado anteriormente, la bibliografía sobre el tema crece a gran velocidad. En particular, una animación, basada en un modelo matemático similar (como si se tratase de una realidad virtual) se puede encontrar en <http://www.fpp.edu/~milanb/euler/>

## 6. ALGUNAS REFLEXIONES FINALES A MODO DE CONCLUSIÓN

Los anteriores ejemplos muestran que el proceso de modelización matemática, con su jerarquía de hipótesis simplificadoras, puede ser mucho más complejo de lo que uno espera inicialmente. Lograr justificar comportamientos peculiares, fácilmente observables en la experimentación, puede requerir desarrollos matemáticos complejos y nada banales. De hecho, la manera pausada en el tiempo que empleó Euler, abordando los movimientos del sólido rígido únicamente tras haber establecido la descripción más básica de la dinámica de los medios continuos, debe ponernos en guardia frente a presentaciones que apelando al parecido con la mecánica de un sistema finito de partículas parecen menospreciar las dificultades inherentes a esta clase de objetos mecánicos. El conocimiento profundo del tratamiento matemático del modelo permite tener acceso a un «mundo virtual» en el que se pueden abordar situaciones difícilmente simulables en la práctica

experimental, así como el estudio consecutivo de la optimalidad de ciertos datos en atención a conseguir unos fines concretos (es decir su control matemático).

Los argumentos necesarios para poder justificar con rigor comportamientos peculiares de esos sencillos objetos mecánicos no difieren mucho de las investigaciones necesarias para la modelización y tratamiento

de muy diversos problemas que nacen de la industria más innovadora. Por citar tan solo un ejemplo más a los citados anteriormente sobre problemas de tipo industrial, señalaremos aquí que la ecuación diferencial no lineal singular aparece en contextos de catálisis química<sup>46</sup> así como en el estudio de modelos matemáticos de sistemas micro-electro-mecánicos y nano-electro-mecánicos<sup>47</sup>.

---

<sup>46</sup> Véase por ejemplo el artículo J. I. Díaz, On the free boundary for quenching type parabolic problems via local energy methods. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 13, 2014, 1799–1814, y sus muchas referencias.

<sup>47</sup> Conocidos como MEMS y NEMS, respectivamente, por sus iniciales en inglés: véase, por ejemplo, J. A. Pelesko and D. H. Bernstein, *Modeling MEMS and NEMS*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2002.