Soluciones con soporte compacto de problemas unilaterales mixtos

por

Ildefonso Díaz Díaz

(Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LXIX, cuaderno 3.º)

MADRID

1975

Soluciones con soporte compacto de problemas unilaterales mixtos

por

Ildefonso Díaz Díaz

1. Introducción

El estudio del soporte de una solución de un problema de contorno sobre un dominio regular no acotado Ω de R^n, se presenta como una de las propiedades sorprendentes que son específicas de los problemas no lineales. Es bien conocido que en el proceso lineal de difusión del calor, aunque los datos tengan soporte compacto, la solución no posee esta propiedad debido al efecto regularizante de la ecuación (1). Tampoco se conocen hipótesis simples sobre los datos de un problema de contorno elíptico que permitan concluir que la un problema de contorno elíptico que permitan concluir que la solución tiene soporte compacto en $\overline{\Omega}$.

Resultados en esta materia sobre problemas de Dirichlet no lineales, en concreto para problemas unilaterales sobre Ω, han sido obtenidos por Brezis [3] (2).

Con el presente trabajo pretendemos mostrar cómo se pueden obtener los mismos resultados que en Brezis [3] para problemas unilaterales sobre $\partial\,\Omega$ y para problemas unilaterales mixtos (e. d. sobre Ω y $\partial\,\Omega$ a la vez) (2), (3).

2. Notaciones y enunciado de los resultados

Sea Ω abierto regular, no acotado de R^n.
Sea L un operador dado por

$$L = -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a, \tag{2.1}$$

sobre el que se va a suponer

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}).\ a_{jj},\ a \in L^\infty(\Omega) \tag{2.2}$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \alpha(v)\,|\,\xi\,|^2, \quad \forall\, x \in \Omega \tag{2.3}$$

tal que $|\,x\,| \leqslant v$, $\forall\, \xi \in R^n$ con $\alpha(v) > 0$, $\forall\, v$.

$$a(x) > \delta > 0, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Sean β y γ grafos maximales monótonos de R^2 tales que (4)

$$0 \in \beta(0) = [\beta^-(0), \beta^+(0)] \tag{2.5}$$

$$0 \in \gamma(0) = [\gamma^-(0), \gamma^+(0)]. \tag{2.6}$$

Se trata de resolver:

Problema.—¿Bajo qué hipótesis en f y γ, el problema

$$\begin{cases} L\,u + \beta(u) \ni f \text{ en } \Omega \\ \dfrac{-\partial u}{\partial \nu} \in \gamma(u) \text{ en } \partial\Omega \ (5) \end{cases} \tag{2.7}$$

admite una solución con soporte compacto?

Evidentemente, condiciones necesarias para la eventual solución de (2.7) con soporte compacto son

$$f(x) \in [\beta^-(0), \beta^+(0)] \text{ para } |\,x\,| \text{ suficientemente grande} \tag{2.8}$$

$$0 \in \gamma(0) \tag{2.9}$$

Los resultados siguientes mostrarán cómo estas condiciones necesarias son «casi suficientes».

TEOREMA 1.—Si se supone

$$\gamma^{-1}(0) = \{0\} \tag{2.10}$$

$$f \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \tag{2.11}$$

verificando

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \text{y} \quad \exists\, v_0 > 0$$

tales que

$$f(x) \in [\beta^-(0) + \epsilon,\ \beta^+(0) - \epsilon] \quad \text{para} \quad |x| \geqslant v_0.$$

Entonces existe una única solución u de (2.7) con soporte compacto, verificando

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \quad \forall\, p < +\infty \quad (6).$$

TEOREMA 2.—Si se supone (2.10) y se sustituye (2.11) por

$$f \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{2.12}$$

verificando

$$\forall\, \omega > 0 \quad \lim_{|x| \to \infty} e^{\omega|x|}(f(x) - \beta^+(0)) = -\infty$$

$$\forall\, \omega > 0 \quad \lim\ e^{\omega|x|}(f(x) - \beta^-(0)) = +\infty$$

la conclusión del teorema 1 sigue siendo cierta.

Finalmente, para el caso $a(x) = 0$ se tiene:

TEOREMA 3.—Si se supone (2.10) y también

$$f \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \tag{2.13}$$

verificando

$$\begin{cases} \overline{\lim\limits_{|x| \to \infty}} \; |x|^n (f(x) - \beta^+(0)) < 0 \\ \underline{\lim\limits_{|x| \to \infty}} \; |x|^n (f(x) - \beta^-(0)) > 0 \end{cases}$$

entonces existe u solución única del problema (2.7) para $L = -\Delta$, verificando $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall\, p < +\infty$.

3. Principio de las demostraciones

En los tres teoremas la idea de la demostración consiste en construir una super-solución $\check{u}$ y una sub-solución $\hat{u}$ ambas con soporte compacto. Es decir, se ha de encontrar:

$\check{u} \geqslant 0$, solución con soporte compacto de

$$\begin{cases} L\,\check{u} + \beta(\check{u}) \ni \check{f} \ \text{ en } \Omega \\ \dfrac{-\partial \check{u}}{\partial \nu} \in \check{\gamma}(\check{u}) \ \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

$\hat{u} \leqslant 0$, solución con soporte compacto de

$$\begin{cases} L\,\hat{u} + \beta(\hat{u}) \ni \hat{f} \ \text{ en } \Omega \\ \dfrac{-\partial \hat{u}}{\partial \nu} \in \hat{\gamma}(\hat{u}) \ \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

siendo

$$\hat{f} \leqslant f \leqslant \check{f} \ \text{ en } \Omega \tag{3.3}$$

$$\check{\gamma} \gtrsim \gamma \gtrsim \hat{\gamma} \ (7). \tag{3.4}$$

Una vez encontradas $\check{u}$ y $\hat{u}$, los teoremas 1, 2 y 3 se deducen por un resultado de comparación entre las soluciones de (3.1), (2.7) y (3.2).

Debido a las peculiaridades de los grafos $\check{\gamma}$ y $\hat{\gamma}$, así como del sentido de $\gtrsim$ de (3.4), los resultados conocidos de comparación (véase Brezis [2]) no son aplicables; necesitamos entonces el siguiente lema:

Lema 1.—Sean u y $\check{u}$, respectivamente, soluciones de los problemas

$$\begin{cases} \mathrm{L}\,u + \beta(u) \ni f \quad \text{en } \Omega \\ \dfrac{-\partial u}{\partial \nu} \in \gamma(u) \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

siendo β y γ grafos maximales monótonos, verificando (2.5) y (2.6) y $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} \mathrm{L}\,\check{u} + \beta(\check{u}) \ni \check{f} \quad \text{en } \Omega \\ \dfrac{-\partial \check{u}}{\partial \nu} \in \check{\gamma}(\check{u}) \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

siendo $\check{\gamma}$ un grafo cualquiera de R^2, y $\check{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Si se supone

$$\check{f} \geqslant f \tag{3.7}$$

$$\forall\, v > v', \quad \gamma^-(v) \geqslant \check{\gamma}^+(v'), \tag{3.8}$$

siendo $v \in \mathrm{Dom}\,(\gamma)$, $v' \in \mathrm{Dom}\,\check{\gamma}$ y $\mathrm{Dom}\,\gamma \cap \mathrm{Dom}\,\check{\gamma} \neq \varnothing$, entonces $\check{u} \geqslant u$ en Ω.

4. Notas

(1) Véase, por ejemplo, Dou-Mendizábal [4].

(2) Para un conocimiento más exhaustivo de los problemas unilaterales (también llamados Inecuaciones Variacionales) enviamos a Brezis [2] y Lions [5], donde se encontrará amplias referencias sobre la materia.

(3) Muy recientemente R. Redheffer [6] ha estudiado una clase de problemas relacionados con (2.7) por métodos completamente diferentes.

(4) Dado $\beta : R \to \mathscr{P}(R)$ se dice «maximal monótono» si verifica:

(i) $(x - y, a - b) \geqslant 0, \ \forall x \in \beta(a), \ \forall y \in \beta(b)$.

(ii) No existe otra aplicación $\beta' : R \to \mathscr{P}(R)$ verificando (i) y tal que $\forall a \in R$, $\beta(a) \subset \beta'(a)$.

Amplias referencias sobre este tipo de operadores se pueden encontrar en Brezis [1].

(5) Se define

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}) = \sum_{i\,j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x}) \cos(n, x_j) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \partial \Omega.$$

(6) $W^{2,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)$ tales que $D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall \alpha \in R^n$ con $|\alpha| \leqslant 2\}$, donde las derivadas se toman en el sentido de distribuciones.

(7) El sentido del símbolo $\gtrsim$ es el que se precisa en (3.8).

Bibliografía

[1] H. Brezis: *Operateurs maximaux monotones et semi-grupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[2] — — Tesis. París, 1972.

[3] — — *Solutions with compact support of variational inequalities.* «Uspekhi Mat. Nauk.», vol. 129 (1974) (en ruso).

[4] A. Dou y A. Mendizábal: *Ecuaciones en derivadas parciales y su resolución numérica.* Publicaciones de E. T. S. de I. C. C. P. de Madrid, 1973.

[5] J. L. Lions: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, 1972.

[6] R. Redheffer: *Non linear differential inequalities and functions of compact support* (a aparecer en A. M. S.).