ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Propriétés de support compact pour certaines équations elliptiques et paraboliques non linéaires.* Note (*) de **Jesús Ildefonso Diaz Diaz** et **Miguel Angel Herrero García,** présentée par M. Jacques-Louis Lions.

On présente quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions à support compact pour certains problèmes elliptiques et paraboliques relatifs à l'opérateur modèle

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

pour $p>2$, sur un ouvert régulier non borné dans $\mathbf{R}^N$.

We prove some results of existence and uniqueness for solutions with compact support for elliptic and parabolic problems related to the basic operator

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

for $p>2$ on an unbounded open set of $\mathbf{R}^N$ with smooth boundary.

0. Introduction et notations. — Il est bien connu que certains problèmes elliptiques et paraboliques avec des non-linéarités sur la fonction inconnue ont des solutions à support compact, les données étant aussi à support compact [*cf.* (1), (2), (3) et (4)]. Néanmoins, pour les problèmes avec des non-linéarités sur les dérivées de la fonction inconnue, on ne connaît pas de résultats similaires dans la littérature. Dans cette Note on considère certaines situations représentées par les problèmes

$$(\mathrm{P}) \equiv \mathrm{P}(f, g) \begin{cases} u - \Delta_p u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(\mathrm{P}^*) \equiv \mathrm{P}(\mathrm{F}, \mathrm{G}, u_0) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = \mathrm{F} & \text{dans } \Omega \times (0, \mathrm{T}), \\ u = \mathrm{G} & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \mathrm{T}], \\ u(0, .) = u_0(.) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

$p>2$, Ω est un ouvert régulier non borné de $\mathbf{R}^N$ et $0<\mathrm{T}<+\infty$. Dans la suite on utilisera la notation

$$\Omega_{\mathrm{R}} = \{ x \in \overline{\Omega} : |x| \leqq \mathrm{R} \} \qquad \text{et} \qquad \Omega^{\mathrm{R}} = \{ x \in \overline{\Omega} : |x| \geqq \mathrm{R} \}.$$

1. Le problème elliptique. — Le résultat princiapal est le suivant :

Théorème 1. — *Soient $p>2$, $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ à support compact, et $g \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega) \cap \mathrm{W}^{1-1/p, p}(\partial\Omega)$ à support compact. Alors il existe u unique, $u \in \mathrm{W}^{1, p}(\Omega)$, solution de* (P)*; de plus, u est à support compact et si* ($\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g) \subset \Omega_{\mathrm{R}}$, *alors* $\operatorname{supp} u \subset \Omega_{\overline{\mathrm{R}}}$ *avec*

$$\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{N}}{p-2}[\max(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty)^{(p-2)/p}[2\,p^{(p-1)}(p-1)]^{1/p}.$$

On utilisera dans la démonstration le résultat suivant :

LEMME 1. — *Soient* f, f_1, f_2 *dans* $L^\infty(\Omega)$ *telles que* $f_1 \leqq f \leqq f_2$ *p.p. dans* Ω *et soient* g, g_1, g_2, *dans* $L^\infty(\partial\Omega) \cap W^{1-1/p, p}(\partial\Omega)$ *telle que* $g_1 \leqq g \leqq g_2$ *p. p. sur* $\partial\Omega$. *Alors, étant données* $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$ *solutions de* $P(f_i, g_i)$ $(i=1, 2)$ *à support compact, il existe* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *unique solution de* $P(f, g)$ *telle que* $u_1 \leqq u \leqq u_2$ *p. p. dans* Ω.

Démonstration. — On obtient l'existence et l'unicité de u grâce aux résultats connus dans le cas $\hat{\Omega}$ borné [*cf.* ([5])], avec $\hat{\Omega}$ contenant les supports des fonctions u_1 et u_2, et en prolongeant u par 0 dans $\Omega - \hat{\Omega}$. Le résultat de comparaison est obtenu en multipliant par une fonction convenable et en intégrant par parties selon la technique habituelle.

Démonstration du théorème 1. — Soit $R^* > \overline{R} > R$ et soient $\Omega^* = \{ x \in \Omega : |x| < R^* \}$ et u^* la solution de $P(f|_{\Omega^*}, g^*)$ dans Ω^*, ou g^* est égale à g sur $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega$ et égale à zéro sur $\partial\Omega^* \setminus (\partial\Omega^* \cap \partial\Omega)$.

Grâce au lemme 1, on arrive à la conclusion voulue en majorant u^* par une sursolution U de $P(f|_{\Omega^*}, g^*)$ à support dans $\Omega_{\overline{R}}$ et en prolongeant u^* par zéro dans $\Omega - \Omega^*$. La fonction U étant cherchée parmi les fonctions radiales, dans le calcul de $U - \Delta_p U$, des singularités à l'origine apparaîtront; c'est pourquoi on va faire la comparaison dans $\Omega_{\overline{R}} \setminus \Omega_R$, ce qui est suffisant. Enfin, on va construire $U \in W^{1,p}(\Omega^R)$ tel que :

(i) $U(x) \geqq \| u^* \|_\infty$ dans $\partial\Omega_R$;

(ii) $U(x) - \Delta_p U(x) \geqq 0$ dans $\Omega_{\overline{R}} - \Omega_R$;

(iii) $U(x) = 0$ si $|x| \geqq \bar{R}$.

Un exemple de fonction de ce type est le suivant :

$$U(|x|) = \begin{cases} k(\overline{R} - |x|)^{p/(p-2)} & \text{si } R \leqq |x| \leqq \overline{R}, \\ 0 & \text{si } |x| \geqq \overline{R}, \end{cases}$$

où k, $\overline{R}$ sont des constantes telles que

$$k = \left[\frac{(p-2)^p}{2\, p^{p-1} (p-1) N^p} \right]^{1/p-2}$$

et $\overline{R}$ apparaît dans l'énoncé. On déduit l'unicité à partir du lemme 1.

2. LE PROBLÈME PARABOLIQUE. — Le résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 2. — *Soient* $p > 2$, $F \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ *et* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Soit* $G \in L^\infty([0, T] \times \partial\Omega)$ *tel qu'il existe* w, $w \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ *avec* $w' \in L^p(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ *et* $w(t, x) = G(t, x)$ *sur* $[0, T] \times \partial\Omega$. *On suppose qu'il existe* $R < +\infty$ *tel que*

$$(\text{supp } u_0) \cup \Big(\bigcup_{t \in (0, T)} \text{supp } G(t, .) \Big) \cup \Big(\bigcup_{t \in (0, T)} \text{supp } F(t, .) \Big) \subset \Omega_R.$$

Alors il existe $u \in C([0, T]; W^{-1,p'}(\Omega)) \cap L^\infty((0, T) \times \Omega)$ *unique, solution du problème* (P^*). *De plus,* u *est à support compact et on a l'estimation*

$$\text{supp } u(t, .) \subset \Big\{ x \in \bar{\Omega} : |x| \leqq R + \frac{1}{c}(t + A) \Big\}, \qquad t \in [0, T]$$

où

$$c = \frac{1}{N} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{1/p'}$$

et

$$A=\frac{1}{N}\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{1/p'}R+(\max\{\|F\|_{\infty},\|G\|_{\infty},\|u_0\|_{\infty}\})^{(p-2)/(p-1)},$$

avec

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Démonstration du théorème 2. — On obtient d'abord un lemme de comparaison similaire à celui du cas elliptique. Ensuite il suffit d'employer un raisonnement comme dans le théorème 1, en comparant sur $\{x\in\Omega : R<|x|<\bar{R}\}$, pour chaque $t\in[0, T]$, avec $U(t, x)$ donné par

$$U(t, x)=\begin{cases}(t-c|x|+A)^{(p-1)/(p-2)} & \text{si } R\leqq|x|\leqq\dfrac{1}{c}(t+A),\\ 0 & \text{si } |x|>\dfrac{1}{c}(t+A),\end{cases}$$

avec c et A comme l'énoncé.

Remarque 1. — On a des contrexemples (en dimension $N=1$) qui montrent que la propriété de support compact pour les problèmes elliptiques et paraboliques relatifs à Δ_p n'est plus vérifiée si $1<p\leqq 2$.

Remarque 2. — Si $N=1$, on a existence et unicité de solutions à support compact pour les problèmes (P) et (P*) pour des opérateur plus généraux de la forme $d/dx(\beta(d/dx))$ sous les hypothèses

$$\int_{-1}^{1}\frac{ds}{\sqrt{j(s)}}<+\infty \qquad \text{si} \quad \partial j=\beta^{-1},$$

pour le cas stationnaire, et

$$\int_{-1}^{1}\frac{ds}{\beta^{-1}(s)}<+\infty,$$

pour le cas dévolution.

Des problèmes de ce type ont été abordés par Attouch-Damlamian [6].

Remarque 3. — On obtient aussi des résultats similaires à ceux des théorèmes 1 et 2 en changeant l'opérateur Δ_p par A, où

$$Au=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \qquad \text{avec} \quad |\nabla u|=\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Remarque 4. — Des questions liées à celles qu'on expose ici, telles que les problèmes de Neumann associés, la compacité du support en t, $t\in[0, \infty]$, les équations perturbées, etc., font l'objet d'un article qui apparaîtra prochainement [7].

(*) Séance du 6 mars 1978.

(1) H. Brézis, *Uspekhi Mat. Nauk.*, 29, 1974, p. 103-108.

(2) Ph. Benilan, H. Brézis et M. Crandall, *Annali Scuola Normale Sup. Pisa*, série IV, II, 1975, p. 523-555.

(3) H. Brézis et A. Friedman, *Illinois J. Math.*, 20, 1976, p. 82-97.

(4) I. Diaz, *Solutions With Compact Support for Some Degenerate Parabolic Problems* [*J. Nonlinear Anal.* (à paraître)].

(5) J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

(6) H. Attouch et A. Damlamian, *Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi linéaires* (à paraître).

(7) I. Diaz-M. Herrero (à paraître).

Departamento de Ecuaciones Funcionales,
Facultad de Ciencias Matematicas, Universidad Complutense, Madrid-3, Espagne.