

ANULACION DE SOLUCIONES PARA CIERTOS  
PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES

por

Ildefonso Díaz Díaz

(PUBLICADO EN LA REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS  
FÍSICAS Y NATURALES, DE MADRID. TOMO LXXII, CUADERNO 4.º)



MADRID  
1 9 7 8

## ANULACION DE SOLUCIONES PARA CIERTOS PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES (\*)

Ildefonso Díaz Díaz

*Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Matemáticas  
Universidad Complutense, Madrid*

In this note the abstract Cauchy problem:  $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$  a. e.  $t \in (0, \infty)$  and  $u(0) = u_0$  on a Banach space  $X$  is considered. The operator  $A$  is assumed *accretive* on  $X$  and  $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)}$ ,  $\forall \lambda > 0$ , which implies that if  $u_0 \in \overline{D(A)}$  and  $f \in L^1_{loc}(0, +\infty; X)$  one has existence and uniqueness of a *integral solution* by a result of Crandall and Liggett [1]. The property of *vanishing of solutions* ( $u(t) = 0 \forall t \geq T_0$ , for some  $T_0 \geq 0$ ) is considered, giving sufficient conditions to have it, when  $A$  is assumed multivalued at 0. The result obtained in the Teorema 1 extends a previous one by Brezis [2]. Some applications to multivalued operators on  $X = L^\infty$  are given. One of them extends some results previously obtained by several authors (Brezis, Friedman, Lions, ...) and makes clear the independence between the above property and that of *finite speed of propagation*. The mentioned authors obtained simultaneously both properties by using a particular case of the hypothesis (6) presented here. A detailed version of this note will appear in [3].

### § 1. Introducción

Es bien conocido que la resolución de una gran cantidad de problemas en Ecuaciones en Derivadas Parciales se obtienen mediante su formulación como problemas de Cauchy abstractos del tipo

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \quad \text{c. p. t. } t \in (0, +\infty), u(t) \in X, \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

siendo  $X$  un espacio de Banach,

$$A: D(A) (\subseteq X) \rightarrow \mathcal{P}(X), f \in L^1_{loc}((0, +\infty), X) \quad \text{y} \quad u_0 \in \overline{D(A)}.$$

(\*) Conferencia tenida en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales el 13 de diciembre de 1978.

La existencia de soluciones («integrales») de (1) se tiene asegurada si por ejemplo  $A$  es «acretivo»

$$\langle |x - \hat{x}| \leq |x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})| \quad \forall x, \hat{x} \in D(A), \forall y \in Ax, \forall \hat{y} \in A\hat{x}, \forall \lambda > 0 \rangle$$

y verifica que  $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)} \quad \forall \lambda > 0$ , como ha sido mostrado por Crandall-Liggett [1].

El motivo de esta nota es poner de manifiesto cómo en ciertos casos el problema (1) satisface la propiedad de «anulación de soluciones» (A. S.), e. d. la solución de (1)  $u$  es tal que  $u(t) = 0$  (en  $X$ )  $\forall t \geq T_0$ , para algún  $T_0 \geq 0$ . Una versión más detallada de los resultados de esta nota será el objeto de [3].

## § 2. Un resultado abstracto

Es fácil observar que si (A. S.) es satisfecha se debe tener necesariamente que  $f(t) \in A0$  para  $t$  suficientemente grande. Si  $A(0) = 0$  esto obliga a que  $f(t)$  sea nula para  $t$  suficientemente grande y sólo se conocen casos particulares satisfaciendo (A. S.) (véase p. e. las referencias de [3]). Cuando  $A$  es multívoco en  $0$  se tiene una respuesta general:

TEOREMA 1.—Sea  $A$  un operador acretivo de  $X$  tal que

$$R(I + \lambda A) \supseteq D(A) \quad \forall \lambda > 0.$$

Supongamos además que existe  $\rho : (t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , para algún  $t_0$ , tal que se tiene

$$B(f(t), \rho(t)) \subset A0 \quad \text{casi para todo } t \geq t_0 \quad (2)$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \rho(t) dt = +\infty \quad (3)$$

Entonces el problema (1) posee la propiedad (A. S.)

Es de notar que la demostración del Teorema 1 no utiliza más hipótesis sobre  $A$  que la acretividad (una vez supuesta la existencia de soluciones de (1)).

La propiedad (A. S.) había sido tratada anteriormente por Brezis [2] para el caso de  $X$  espacio de Hilbert, por lo que las hipótesis (2) y (3) ofrecían una difícil comprobación salvo para  $X = \mathbb{R}^n$  (caso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias).

§ 3. Aplicación a problemas parabólicos no lineales

Dado  $\Omega$  abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , la consideración de ciertos operadores acretivos sobre  $X = L^\infty(\Omega)$  permite la obtención de (A. S.) para los problemas (1) correspondientes. Así p. e. si  $\beta$  es un grafo maximal monótono de  $\mathbb{R}^2$  con  $0 \in \beta(0)$  y  $\beta^-(0) (= \inf \beta(0)) < \beta^+(0) (= \sup \beta(0))$ , los problemas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t) + \beta(Cu(t)) \ni f(t) \text{ c. p. t. } t \in (0, +\infty), \text{ en } L^\infty(\Omega), \quad u(0) = u_0 \\ [C \text{ operador acretivo sobre } L^\infty(\Omega) \text{ con } 0 = C(0) \text{ y } \beta(C) \text{ acretivo en } L^\infty(\Omega) \\ \text{tal que } R(I + \lambda \beta(C)) = L^\infty(\Omega)] \end{array} \right. \quad (4)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \beta(u) \ni f \text{ en } (0, +\infty) \times \Omega, \quad u \equiv 0 \text{ en } \\ \partial \Omega \times (0, +\infty), \quad u(0, x) = u_0(x) \text{ en } \Omega \quad (p \geq 2) \end{array} \right. \quad (5)$$

admiten la propiedad (A. S.) si  $f$  satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \text{ y } \exists t_0 \geq 0 \text{ tales que } \beta^-(0) + \varepsilon \leq f(t, x) \leq \beta^+(0) - \varepsilon \text{ c. p. t.} \\ (t, x) \in (t_0, +\infty) \times \Omega \end{array} \right. \quad (6)$$

La propiedad (A. S.) había sido obtenida anteriormente para (5) por varios autores (Brezis, Friedman, Lions, Bensoussan...) con  $p = 2$ ,  $\beta$  cierto grafo concreto y  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , obteniendo también la «propagación finita de señales» bajo la hipótesis (6) correspondiente con  $t_0 = 0$ . Nuestro resultado esclarece la independencia entre estos dos fenómenos y de hecho con las técnicas de Díaz-Herrero [4] permite considerar también el caso de  $\Omega$  no acotado, extendiendo así el resultado citado para  $p = 2$ .

#### 4. Referencias

- [1] CRANDALL, M. y LIGGETT, T. 1971. *Amer. J. Math.*, **93**, pp 265-298.
- [2] BREZIS, H. 1974. *Proc. Int. Congress.* Vancouver.
- [3] DÍAZ, I. Anulación de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Aplicaciones a ciertos problemas parabólicos no lineales. (Aparecerá en *Rev. Acad. de Ciencias Exactas, F. y N.*, Madrid.)
- [4] — — y HERRERO, M. 1978. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **286**, serie A, pp. 815-817.