ANULACION DE SOLUCIONES PARA CIERTOS PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES

por

Ildefonso Díaz Díaz

(Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LXXII, cuaderno 4.º)

MADRID
1978

ANULACION DE SOLUCIONES PARA CIERTOS PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES (*)

Ildefonso Díaz Díaz

Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense, Madrid

In this note the abstract Cauchy problem: $\frac{du}{dt}(t) + A\,u(t) \ni f(t)$ a. e. $t \in (0, \infty)$ and $u(0) = u_0$ on a Banach space X is considered. The operator A is assumed *accretive* on X and $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)}$, $\forall \lambda > 0$, which implies that if $u_0 \in \overline{D(A)}$ and $f \in L^1_{loc}(0, +\infty; X)$ one has existence and uniqueness of a *integral solution* by a result of Crandall and Liggett [1]. The property of *vanishing of solutions* ($u(t) = 0\ \forall t \geqslant T_0$, for some $T_0 \geqslant 0$) is considered, giving sufficient conditions to have it, when A is assumed multivalued at 0. The result obtained in the Teorema 1 extends a previous one by Brezis [2]. Some applications to multivalued operators on $X = L^\infty$ are given. One of then extends some results previously obtained by several authors (Brezis, Friedman, Lions, ...) and makes clear the independence between the above property and that of *finite speed of propagation*. The mentioned authors obtained simultaneously both properties by using a particular case of the hypothesis (6) presented here. A detailed version of this note will appear in [3].

§ 1. Introducción

Es bien conocido que la resolución de una gran cantidad de problemas en Ecuaciones en Derivadas Parciales se obtienen mediante su formulación como problemas de Cauchy abstractos del tipo

$$\frac{du}{dt}(t) + A\,u(t) \ni f(t) \quad c.\,p.\,t.\ t \in (0, +\infty),\ u(t) \in X, \quad u(0) = u_0 \qquad (1)$$

siendo X un espacio de Banach,

$$A\colon D(A)\,(\subseteq X) \to \mathcal{P}(X),\ f \in L^1_{loc}((0, +\infty), X) \quad \text{y} \quad u_0 \in \overline{D(A)}.$$

(*) Conferencia tenida en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales el 13 de diciembre de 1978.

La existencia de soluciones («integrales») de (1) se tiene asegurada si por ejemplo A es «acretivo»

$$(\,|x-\hat{x}| \leq |(x-\hat{x})+\lambda(y-\hat{y})| \;\forall x, \hat{x} \in D(A), \forall y \in Ax, \forall \hat{y} \in A\hat{x}, \forall \lambda > 0)$$

y verifica que $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)}$ $\forall \lambda > 0$, como ha sido mostrado por Crandall-Ligget [1].

El motivo de esta nota es poner de manifiesto cómo en ciertos casos el problema (1) satisface la propiedad de «anulación de soluciones» (A. S.), e. d. la solución de (1) u es tal que $u(t) = 0$ (en X) $\forall\, t \geqslant T_0$, para algún $T_0 \geqslant 0$. Una versión más detallada de los resultados de esta nota será el objeto de [3].

§ 2. Un resultado abstracto

Es fácil observar que si (A. S.) es satisfecha se debe tener necesariamente que $f(t) \in A\,0$ para t suficientemente grande. Si $A(0) = 0$ esto obliga a que $f(t)$ sea nula para t suficientemente grande y sólo se conocen casos particulares satisfaciendo (A. S.) (véase p. e. las referencias de [3]). Cuando A es multívoco en 0 se tiene una respuesta general:

TEOREMA 1.—*Sea A un operador acretivo de X tal que*

$$R(I+\lambda A) \supseteq D(A) \quad \forall \lambda > 0.$$

Supongamos además que existe $\rho : (t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *para algún* t_0, *tal que se tiene*

$$B(f(t), \rho(t)) \subset A\,0 \quad \textit{casi para todo} \quad t \geq t_0 \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \rho(t)\, dt = +\infty \tag{3}$$

Entonces el problema (1) posee la propiedad (A. S.)

Es de notar que la demostración del Teorema 1 no utiliza más hipótesis sobre A que la acretividad (una vez supuesta la existencia de soluciones de (1)).

La propiedad (A. S.) había sido tratada anteriormente por Brezís [2] para el caso de X espacio de Hilbert, por lo que las hipótesis (2) y (3) ofrecían una difícil comprobación salvo para $X = \mathbb{R}^n$ (caso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias).

§ 3. Aplicación a problemas parabólicos no lineales

Dado Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, la consideración de ciertos operadores acretivos sobre $X = L^\infty(\Omega)$ permite la obtención de (A. S.) para los problemas (1) correspondientes. Así p. e. si β es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \beta(0)$ y $\beta^-(0)$ $(= \inf \beta(0)) < \beta^+(0)$ $(= \sup \beta(0))$, los problemas

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \beta(\mathrm{C}u(t)) \ni f(t) \quad \text{c. p. t.} \quad t \in (0, +\infty), \quad \text{en} \quad L^\infty(\Omega), \quad u(0) = u_0 \\ [\mathrm{C} \text{ operador acretivo sobre } L^\infty(\Omega) \text{ con } 0 = \mathrm{C}(0) \quad \text{y} \quad \beta(\mathrm{C}) \text{ acretivo en } L^\infty(\Omega) \\ \qquad \text{tal que } R(I + \lambda\beta(\mathrm{C})) = L^\infty(\Omega)] \end{cases} \tag{4}$$

y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \beta(u) \ni f \text{ en } (0, +\infty) \times \Omega, \ u \equiv 0 \text{ en} \\ \qquad \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{en} \quad \Omega \quad (p \geq 2) \end{cases} \tag{5}$$

admiten la propiedad (A. S.) si f satisface

$$\begin{cases} \exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{y} \quad \exists\, t_0 \geq 0 \quad \text{tales que} \quad \beta^-(0) + \varepsilon \leq f(t, x) \leq \beta^+(0) - \varepsilon \quad \text{c. p. t.} \\ \qquad (t, x) \in (t_0, +\infty) \times \Omega \end{cases} \tag{6}$$

La propiedad (A. S.) había sido obtenida anteriormente para (5) por varios autores (Brezís, Friedman, Lions, Bensoussan...) con $p = 2$, β cierto grafo concreto y $\Omega = \mathbb{R}^N$, obteniendo también la «propagación finita de señales» bajo la hipótesis (6) correspondiente con $t_0 = 0$. Nuestro resultado esclarece la independencia entre estos dos fenómenos y de hecho con las técnicas de Díaz-Herrero [4] permite considerar también el caso de Ω no acotado, extendiendo así el resultado citado para $p = 2$.

4. Referencias

[1] CRANDALL, M. y LIGGETT, T. 1971. *Amer. J. Math.*, **93**, pp 265-298.
[2] BREZIS, H. 1974. *Proc. Int. Congress*. Vancouver.
[3] DÍAZ, I. Anulación de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Aplicaciones a ciertos problemas parabólicos no lineales. (Aparecerá en *Rev. Acad. de Ciencias Exactas, F. y N.*, Madrid.)
[4] — — y HERRERO, M. 1978. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **286**, serie A, pp. 815-817.