SEMINARIO MATEMATICO DE BARCELONA

J. ILDEFONSO DIAZ DIAZ

Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineales

Memoria publicada en COLLECTANEA MATHEMATICA
(Vol. XXX - Fasc. 2.º - Año 1979)

GRAFICA ELZEVIRIANA, S. A.
Calle Nápoles, 249
BARCELONA

SOLUCIONES CON SOPORTE COMPACTO PARA CIERTOS PROBLEMAS SEMILINEALES

por

J. Ildefonso Díaz Díaz

(Universidad Complutense de Madrid)

Abstract. In this paper we prove that certain class of semilineal elliptic problems, formulated in very generals terms by using the theory of maximal monotone graphs, admit a finite propagation speed. More concretely we show that if the data of these problems have compact supports, then the same happens to theirs solutions. These same techniques will also be applied to some evolution problems. The first results in this direction are due to H. Brézis and to O. Oleinik & A. S. Kalashikov & C. Yuilin, respectively.

§1. Introducción.

En el estudio de ciertos problemas de minimización de funcionales convexos no diferenciables, Auchmuty-Beals [2], Berkovitz-Pollard [8] y Redheffer [23] pusieron de manifiesto que las soluciones de dichos problemas, así como de sus ecuaciones de Euler correspondientes, poseían soportes compactos.

Tales resultados condujeron de forma natural al estudio de la siguiente cuestión general (propuesta en Lions [22]): ¿Bajo qué hipótesis la solución de una Inecuación Variacional posee soporte compacto?

En este sentido, Brézis [11] mostró que, a efectos de abordar tal cuestión era de gran interés utilizar la conocida formulación equivalente de las Inecuaciones Variacionales como ciertos problemas no lineales de la forma

$$(1.1.) \equiv P_{\alpha,f,g,}(\Omega) \begin{cases} -\Delta u + \alpha(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

siendo

Ω abierto regular no acotado de $\mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$ de frontera $\Gamma = \partial\Omega$

α grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \alpha(0)$. (1)

f, g, datos conocidos sobre adecuados espacios funcionales (2)

La compacidad del soporte de la solución de (1.1.) ha sido establecida primeramente en Brézis [11] y [12] (para el caso en que $0 \in \operatorname{Int} \alpha(0)$) y más tarde en Bénilan-Brézis-Crandall [6] (para α en una más amplia clase de grafos y $\Omega = \mathbb{R}^N$).

La importancia del conocimiento de dicha propiedad reside en las posibles interpretaciones físicas, puestas ya de manifiesto en Brézis [13] y Brézis-Stampacchia [15], así como en la posibilidad de extender resultados de existencia y unicidad tenidos sólo para el caso de Ω abierto acotado.

El objeto del presente trabajo consiste en la extensión de los resultados mencionados en [11] y [6] a situaciones no contempladas en ellos, por una parte, y a problemas con condiciones de contorno más generales que las de (1.1.), por otra. En concreto, se estudiará la compacidad del soporte de la solución del problema de Neumann no lineal

$$(1.2.) \equiv P_{\alpha,f,\gamma,}(\Omega) \begin{cases} -\Delta u + \alpha(u) \in f & \text{en } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

---

(1) Dado $\alpha : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ se dice «operador (o grafo en $\mathbb{R}^2$) maximal monótono» si verifica

i) $(x - y)(a - b) \geqslant 0 \quad \forall x \in \alpha(a) \quad , \quad \forall y \in \alpha(b)$

ii) no existe otra $\alpha^* : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ satisfaciendo (i) y tal que $\alpha(a) \subset \alpha^*(a) \forall a \in \mathbb{R}$.

Para un desarrollo exhaustivo de la teoría de estos operadores, véase Brezis [10].

(2) En lo que sigue se supondrá conocida la teoría de espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. (Véase Adams [1]).

(siendo n vector unitario normal exterior a Γ y γ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \gamma(0)$).

También se mostrará como las presentes técnicas pueden ser aplicadas a problemas no lineales de evolución, tales como:

$$(1.3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta |u|^{m-1} \cdot u = f & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega \ \ (T < +\infty, m > 1) \\ |u|^{m-1} \cdot u = g & \text{en } \Sigma = (0, T) \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

obteniéndose la compacidad del soporte de la función $u(t, \cdot)$ $\forall t \in [0, T]$ (3).

El problema (1.3.) aparece en fenómenos de filtración de líquidos y gases a través de medios porosos y ha sido considerado por numerosos autores (véase por ejemplo la exposición de Díaz [19]), siendo Zeldovich-Kompaneetz [26], Barenblat [3] y Barenblat-Vishik [4], los primeros en observar la compacidad del soporte para dicho problema para el caso de $\Omega = (0, +\infty)$ y $f = 0$.

Los conceptos de soluciones para los problemas (1.1.), (1.2.) y (1.3.) que aquí se adoptan, vendrán motivados por los resultados de existencia ya tenidos (sólo para el caso de Ω acotado) y que enunciamos a continuación.

Teorema 1. (Brézis [11]).

Supuestos

Ω abierto regular acotado de $\mathbb{R}^N$.

$f \in L^\infty(\Omega)$.

$g \in C^2(\Gamma)$ con $\alpha^0(g) \in L^\infty(\Gamma)$ (4)

entonces existe una única $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $\forall p < +\infty$ tal que

---

(3) De hecho, es posible mostrar la compacidad del soporte de la solución de una más amplia clase de problemas. (Véase Díaz [19]).

(4) Al grafo α se le pueden asociar diversas funciones reales, tales como $\alpha+(r) = \text{Max } \alpha(r)$, $\alpha-(r) = \text{Min } \alpha(r)$, $\alpha^0(r) = \alpha+(r)$ si $r < 0$, $\alpha^0(0) = 0$ $\alpha^0(r) = \alpha-(r)$ si $r > 0$.

(1.4.) $\exists\, w \in L^\infty(\Omega)$ con $w(x) \in \alpha(u(x))$ c. t. p. de Ω verificado

$$(1.5.)\quad \begin{cases} -\Delta u + w = f & \text{en } \Omega \text{ (en sentido de distribuciones).} \\ u = g & \text{en } \Gamma . \end{cases}$$

Teorema 2. (Bénilan [5]).

Supuestos

Ω abierto regular acotado de $\mathbf{R}^N$.

(1.6.) $R(\alpha) + R(\gamma) = \mathbf{R}$.

$f \in L^\infty(\Omega)$

entonces existe una única $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que

(1.7.) $\exists\, w \in C(\overline{\Omega})$ con $w(x) \in \alpha(u(x))$ c. t. $x \in \Omega$ y

(1.8.) $\exists\, z \in H^{1/2}(\Gamma)$ con $z(x) \in \gamma(u(x))$ c. t. $x \in \Gamma$ verificado

$$(1.9.)\quad \begin{cases} -\Delta u + w = f & \text{en } \Omega \text{ (en sentido de distribuciones).} \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} = z & \text{en } \Gamma . \end{cases}$$

Teorema 3. (Damlamian [16]).

Supuestos

Ω abierto regular acotado de $\mathbf{R}^N$

$f \in L^2(0, T : H^{-1}(\Omega))$

$u_0 \in H^{-1}(\Omega)$

$g \in W^{1,1}(0, T : L^\infty(\Omega)) \cap L^2(0. T : H^1(\Omega))$

entonces existe una única función $u \in C([0, T] : H^{-1}(\Omega))$ y con $u(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$ verificando

(1.10.) $w(t, \cdot) = |u(t, \cdot)|^{m-1} \cdot u(t, \cdot) \in H^1(\Omega)$ c. t. $t \in (0, T)$

$$
(1.11.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) - \Delta w(t,\cdot) = f(t,\cdot) \text{ en } H^{-1}(\Omega) & \text{c. t. } t \in (0,T) \\ w(t,x) = g(t,x) & \text{c. t. } (t,x) \in \sum \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{c. t. } x \in \Omega \end{cases}
$$

Las correspondientes nociones de solución a adoptar pueden ser ahora precisadas, independientemente de Ω, en la siguiente forma:

Definición 1. Una función $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $\forall p < +\infty$ se dirá «*solución de* (1.1.) (*en* $W^{2,p}(\Omega)$)» si verifica (1.4.) y (1.5.).

Definición 2. Una función $u \in H^2(\Omega) \cap \dot{W}^{1,\infty}(\Omega)$ se dirá «*solución de* (1.2.) (*en* $H^2(\Omega) \cap \dot{W}^{1,\infty}(\Omega)$)» si verifica (1.7.), (1.8.) y (1.9.).

Definición 3. Una función $u \in C([0,T] : H^{-1}(\Omega))$ y con $u(t,\cdot) \in L^1(\Omega)$ se dirá «*solución de* (1.3.) (*en* $H^{-1}(\Omega)$)» si verifica (1.10.) y (1.11.).

La estructuración del presente trabajo viene motivada por el método general que se empleará en la obtención de la compacidad del soporte de las soluciones de los problemas en consideración. Tal método, utilizado ya en Brézis [11], Bénilan-Brézis-Crandall [6], Brézis-Friedman [14] y Tartar [25], consta de dos etapas. Primeramente se establecerá la acotación «a priori» del soporte de las soluciones mediante el empleo de adecuados resultados de comparación (que se obtendrán en §2) aplicados a ciertas "super" y "subsoluciones" con soportes compactos que se construirán en §3 (caso estacionario) y §4 (caso de evolución)). Posteriomente, un sencillo argumento permitirá extender los Teoremas 1, 2, y 3 al caso de Ω no acotado. (5)

De la descripción del método empleado se desprende que los resultados que se obtendrán en §3 y §4 admitirán numerosas variantes con sólo cambiar el marco funcional de resolución o considerar nociones de soluciones diferentes a las aquí tomadas.

Finalmente indiquemos que los resultados de §3 y §4 admiten expresiones equivalentes en términos de minimización de funcionales o resoluciones de Inecuaciones Variacionales (véase Díaz [9]) obteniéndose así una «unificación» con los resultados pioneros en la materia.

---

(5) En la literatura existente sobre soportes compactos para problemas no lineales, se tienen otros métodos distintos al aquí citado, tales como los empleados en Auchmuty-Breals [2], Berkovitz-Pollard [8], Bensoussan-Lions [7] y Redheffer [24].

§2. Resultados de comparación.

Los resultados que presentamos en esta sección tienen una naturaleza técnica en el sentido de que nos proporcionan una herramienta indispensable para las restantes secciones del trabajo. Salvo los resultados referentes al problema (1.2.), los demás son adaptaciones al caso en consideración de técnicas bien conocidas en la literatura por lo que prescindiremos de su demostración, enviando al lector a Díaz [19] para una íntegra exposición.

Se tiene:

Lema 1. Sean

$$f_1, f \text{ y } f_2 \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega) \text{ tales que } f_1 \leqslant f \leqslant f_2 \text{ c. t. p. de } \Omega$$

(2.1.) g_1, g y $g_2 \in C^2(\Gamma)$ con $\alpha^0(g_1)$, $\alpha^0(g)$ y $\alpha^0(g_2) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ tales que $g_1 \leqslant g \leqslant g_2$ en Γ

Entonces si P_{α,f_i,g_i} tiene una solución $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$ $(\forall p < \infty)$ con soporte compacto $(i = 1, 2)$, el problema $P_{\alpha,f,g}$ tiene también una solución con soporte compacto, $u \in W^{p,2}(\Omega)$ $(\forall p < \infty)$ verificando además

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \text{ c. t. p. de } \Omega_{***}.$$

Nota 1. El caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ había sido tratado anteriormente en Bénilan-Brézis-Crandall [6].

Como se verá más tarde, en la sección §3, el problema $P_{\beta,f,\gamma}$ requerirá introducir una notable variación con respecto a los resultados existentes hasta el momento para este tipo de problemas. En concreto, construiremos funciones que verificaran la ecuación no lineal en Ω pero de las que no podremos asegurar, en general, que su derivada respecto a la normal varíe monótonamente respecto sus valores en la frontera. Esto motiva la introducción de un orden entre la clase de grafos de $\mathbb{R}^2$ (no necesariamente monótonos) dado ya en Díaz [17]:

Definición 4.

Dados γ y $\tilde{\gamma}$ grafos (eventualmente multívocos) de $\mathbb{R}^2$ se dirá que $\gamma \lesssim \tilde{\gamma}$ si

(2.2.) $\gamma^+(r) \leqslant \tilde{\gamma}^-(r)$ para $r \in D(\gamma)$ y $\tilde{r} \in D(\tilde{\gamma})$ tales que $r < \tilde{r}$
$\gamma^+(r) = \sup \gamma(r)$, $\tilde{\gamma}^-(\tilde{r}) = \inf \tilde{\gamma}(\tilde{r})$).

Nótese que si γ y $\tilde{\gamma}$ son grafos maximales monótonos de $\mathbf{R}^2$ tal relación es satisfecha cuando se verifica

$$\gamma^-(r) \leqslant \tilde{\gamma}^+(r) \qquad \forall r \in \mathbf{R}$$

condición ya utilizada en Brézis [9].

Lema 2.

Sean

f_1, f y $f_2 \in L^\infty(\Omega)$ tales que $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ c. t. p. en Ω

γ_1, γ y γ_2 grafos de $\mathbf{R}^2$, γ maximal monótono, con

$0 \in \gamma_1(0) \cap \gamma(0) \cap \gamma_2(0)$ y tales que

$$\gamma_1 \gtrsim \gamma \gtrsim \gamma_2$$

Entonces si $P_{\alpha, f_i, \gamma_i}$ tiene una solución $u_i \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, $(i = 1, 2,)$, toda solución $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ de $P_{\alpha,f,\gamma}$ verifica

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \qquad \text{c. t. p. de } \Omega.$$

Demostración. Sea $w \in L^2(\Omega)$ (respectivamente w_1, $w_2 \in L^2(\Omega)$ tal que $w(x) \in \alpha(u(x))$ (respect. $w_1(x) \in \alpha(u_1(x))$, $w_2(x) \in \alpha(u_2(x))$ c. t. p. de Ω

y

$-\Delta u + w = f$ (respect. $-\Delta u_1 + w_1 = f_1$, $-\Delta u_2 + w_2 = f_2$) en $L^2(\Omega)$

Restando las ecuaciones correspondientes a u y u_2 se tiene

$$-\Delta(u - u_2) + w - w_2 = f - f_2 \leqslant 0$$

Multiplicando ahora por $(u - u_2)^+ \in H^1(\Omega)$ y utilizando la Fórmula de Green obtendremos

$$\int_\Omega \operatorname{grad}(u - u_2) \cdot \operatorname{grad}(u - u_2)^+ \, dx - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (u - u_2)^+ \, d\Gamma \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega (w_2 - w)\,(u - u_2)^+ \, dx \leqslant 0$$

Luego por consiguiente

$$-\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) \cdot (u - u_2)^+ \, d\Gamma \leqslant 0$$

Pero si $u(x) > u_2(x)$, por la hipótesis hecha sobre γ y γ_i $(i = 1, 2)$ concluiremos

$$\gamma_2^+(u_2(x)) \leqslant \gamma^-(u(x))$$

luego se tendrá

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \frac{\partial u_2}{\partial n}(x)\right) \cdot (u(x) - u_2(x))^+ \geqslant (\gamma^-(u(x)) - \gamma_2^+(u_2(x))) \cdot$$
$$\cdot\ (u(x) - u_2(x)) \geqslant 0 \qquad \text{c. t. p. de } \Gamma$$

y por tanto ha de ser

$$(u(x) - u_2(x))^+ = 0 \quad \text{c. t. p. de } \Omega$$

lo que demuestra que $u_2 \geqslant u$ c. t. p. de Ω. De una forma totalmente análoga se obtendría que $u_1 \geqslant u$ c. t. p. de Ω_{***}

Nota 2. El lema anterior generaliza la Proposición I.15 de Brézis [9] referente a $\alpha(r) = r$ y γ y γ_i grafos maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$.

Los resultados siguientes nos permitirán suponer más tarde algunas hipótesis adicionales sobre el grafo α sin perder ninguna generalidad.

Lema 3.

Sean

$f \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$

$g \in C^2(\Gamma)$ con $\alpha^0(g) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Gamma)$

α y $\tilde{\alpha}$ grafos maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \alpha(0) \cap \tilde{\alpha}(0)$ y tales que

$$(2.3.) \quad \begin{cases} D(\alpha) \subset D(\tilde{\alpha}) \\ |\tilde{\alpha}^0(r)| \leqslant |\alpha^0(r)| \qquad \forall r \in D(\alpha) \end{cases}$$

Entonces si f y g no cambian de signo y $P_{\tilde{\alpha},f,g}$ tiene solución con soporte compacto, el problema $P_{\alpha,f,g}$ tiene también solución con soporte compacto$_{***}$

De forma análoga se obtendría:

Lema 4.

Sean

$f \in L^\infty(\Omega)$

α, $\tilde{\alpha}$ y γ grafos maximales monótonos de $\mathbf{R}^2$ con

$0 \in \tilde{\alpha}(0) \cap \alpha(0) \cap \gamma(0)$ y tales que

$D(\alpha) \subset D(\tilde{\alpha})$

y

$$|\tilde{\alpha}^0(r)| \leqslant |\alpha^0(r)| \ \forall r \in D(\alpha). \quad (^6)$$

Entonces si u y u^* son soluciones de $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$ y $P_{\tilde{\alpha},f,\gamma}(\Omega)$ respectivamente, se tiene:

i) si $f \geqslant 0$ entonces $0 \leqslant u \leqslant u^*$ c. t. p. de Ω

ii) si $f \leqslant 0$ entonces $0 \geqslant u \geqslant u^*$ $_{***}$

Nota 3.

El caso $\Omega = \mathbf{R}^N$ había sido tratado anteriormente en Bénilan-Brézis-Crandall [6]. También en Brézis [9] se obtiene este tipo de resultados para problemas distintos a los aquí considerados mediante adecuados teoremas del máximo.

Finalmente para el problema (1.3.) se necesitará el siguiente resultado:

---

(6) Nótese que en los dos lemas anteriores hubiese bastado exigir

$$\tilde{\alpha}^0(r) \leqslant \alpha^0(r) \ \text{si} \ r > 0$$

en el caso positivo y

$$\alpha^0(r) \leqslant \tilde{\alpha}^0(r) \ \text{si} \ r < 0$$

en el caso negativo.

Lema 5.

Sean

$$\beta(r) = |r|^{m-1} \cdot r \qquad \forall r \in \mathbb{R},\ m > 1,$$
$$f_1, f_2 \in L^\infty(0, T : L^\infty(\Omega)) \text{ tales que } f_1(t, x) \leqslant f_2(t, x) \text{ c. t. } (t, x) \in Q,$$
$$g_1, g_2 \in L^2(0, T : H^{1/2}(\Gamma)) \text{ tales que } g_1(t, x) \leqslant g_2(t, x) \text{ c.t. } (t, x) \in \Sigma,$$
$$u_{01},\ u_{02} \in L^\infty(\Omega) \text{ tales que } u_{0,1}(x) \leqslant u_{0,2}(x) \text{ c. t. } x \in \Omega.$$

Entonces si $u_i \in C([0, T] : H^{-1}(\Omega))$ con $u_i(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$ c.t. $t \in (0, T)$, satisfacen

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t, \cdot) - \Delta\beta(u_i(t, \cdot)) \ni f_i(t, \cdot) \text{ c. t. } t \in (0, T) \text{ en } H^{-1}(\Omega)$$
$$\beta(u_i(t, x)) \ni g_i(t, x) \text{ c. t. } (t, x) \in \Sigma$$
$$u_i(0, x) = u_{0i}(x) \qquad \text{en } \Omega.$$

para $i = 1$ y 2, se tiene

$$u_1(t, x) \leqslant u_2(t, x) \text{ c. t. } (t, x) \in Q_{***}$$

Nota 4. El lema 5 generaliza resultados similares de Barenblat [3] y Baranblat-Vishik [4] establecidos para $\Omega = (0, +\infty)$ y $f = 0$.

§ 3. Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineales elípticos

A lo largo de esta sección mostraremos como los problemas $P_{\alpha,f,g}$ y $P_{\alpha,f,\gamma}$ admiten una única solución y con soporte compacto para cierta clase de grafos α y γ maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$. Tales resultados serán obtenidos con dos «tipos» de hipótesis diferentes, lo que motiva la siguiente estructuración:

3.1. *Datos con soporte compacto.*

En este apartado explotamos una idea debida a Bénilan-Brézis-Crandall [6] para la construcción de super y subsoluciones. A diferencia del citado trabajo (en el que $\Omega = \mathbb{R}^N$), ahora no se posee un teorema de existencia y unicidad sobre Ω (que se tendrá «a posteriori»), y tampoco son conocidos teoremas del máximo para $P_{\alpha,f,g}$ y $P_{\alpha,f,\gamma}$ sobre dominios no acotados, por lo que sus argumentos no puedan ser directamente aplicados a los problemas en cuestión.

Comencemos considerando $P_{\alpha,f,g}(\Omega)$. Se tiene:

Teorema I. Sean

$\alpha = \partial\phi$ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ tal que $\phi(0) = 0$ y

$$\text{(3.1.)} \quad \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{\phi(s)}} < \infty$$

$f \in L^\infty(\Omega)$, f con soporte compacto.

$g \in C^2(\Gamma)$, $\alpha^0(g) \in L^\infty(\Gamma)$, g con soporte compacto.

Entonces existe $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(\forall p < \infty)$ solución única del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

Además u tiene soporte compacto en Ω.

Demostración. Gracias a los Lemas 1 y 3 bastará suponer

$$f \geqslant 0 \text{ c.t.p. de } \Omega$$

$$g \geqslant 0 \text{ c.t.p. de } \Gamma$$

α grafo maximal monótono acotado de $\mathbb{R}^2$ verificando (3.1.), pues en otro caso bastaría tomar

$$f^+ = \max(f, 0) \text{ (respect. } -f^- = f - f^+)$$

$$g^+ = \max(g, 0) \text{ (respect. } -g^- = g - g^+)$$

$$\alpha_M \text{ tal que } \alpha_M(r) = \begin{cases} M & \text{si } \alpha^+(r) > M \\ \alpha(r) & \text{si } -M \leqslant \alpha^-(r) \leqslant \alpha^+(r) \leqslant M \\ -M & \text{si } \alpha^-(r) < -M \end{cases}$$

y entonces una vez demostrado que toda solución P_{α_M,f^+,g^+} (respect. P_{α_M,f^-,g^-}) tiene soporte compacto, se concluiría por los citados Lemas que toda solución de $P_{\alpha,f,g}$ debería tener también soporte compacto, En el caso simplificado por las consideraciones anteriores, una forma de acotar el soporte de toda solución de $P_{\alpha\, f,g}$ se tiene encontrando una supersolución $v \geqslant 0$ y con soporte compacto; es decir verificando

$$v \geqslant g \text{ en } \Gamma$$

y $\exists \tilde{f} \in L^\infty(\Omega)$ con $\tilde{f} \geqslant f$ tal que $-\Delta v + \alpha(v) \ni \tilde{f}$ en Ω, pues de nuevo por el Lema 1, se tendría que toda solución u de $P_{\alpha,f,g}$ verificaría

$$0 \leqslant u \leqslant v \quad \text{c. t. p. de } \Omega$$

y por consiguiente

$$\operatorname{sop} u \subset \operatorname{sop} v.$$

Para construir la deseada función v observemos que la función real

$$\Psi : \tau \to \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2\phi(s)}}$$

es no decreciente y sobreyectiva gracias a la acotación supuesta sobre α. Sea entonces

(3.2.) $$h = \Psi^{-1}$$

Se tendrá que

$$h'(r) = \sqrt{2\phi(h(r))} \text{ c. t. p. de } \mathbf{R}$$

y

$$h''(r) \in \alpha(h(r)) \text{ c. t. p. de } \mathbf{R}$$

Sea también $R_0 > 0$ tal que

$$\operatorname{sop} f \cup \operatorname{sop} g \subset \Omega_0 = \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leqslant R_0\}$$

Construyamos la citada supersolución de la forma $v(x) = G(|x|)$, siendo

$$(3.3.)\qquad G(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}C_1 r_2 + C_2 & \text{si } r \leqslant R_0 \\ h(R_1 - r) & \text{si } R_0 \leqslant r \leqslant R_1 \\ 0 & \text{si } r > R_1 \end{cases}$$

donde C_1, C_2 y R_1 representan unos parámetros que serán elegidos posteriormente.

Impongamos las condiciones siguientes:

a) $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$

Se deberá tener necesariamente que:

$$(3.4.)\qquad -\frac{1}{2}C_1 R_0{}^2 + C_2 = h(R_1 - R_0)$$

y

$$(3.5.)\qquad - C_1 R_0 = - \sqrt{2\phi(h(R_1 - R_0))}$$

b) $v \geqslant g$ en Γ.

Bastará exigir para ello que

$$(3.6.)\qquad h(R_1 - R_0) \geqslant K \text{ siendo } K = \max g$$

c) $-\Delta v + \alpha(v) \ni \bar{f}$ con $\bar{f} \geqslant f$ en Ω.

Con este fin distingamos en Ω las regiones

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : |x| \leqslant R_0\}$$
$$\Omega_1{}^0 = \{x \in \Omega : R_0 \leqslant |x| \leqslant R_1\}$$
$$\Omega^1 = \{x \in \Omega : |x| \geqslant R_1\}$$

En Ω_0 se tiene por construcción que $v > 0$, luego como $0 \in \alpha(0)$ se tendrá

$$\alpha^-(v) \geqslant 0$$

y por tanto bastará exigir

$$-\Delta v \geqslant B \text{ siendo } B = \sup_{\Omega} \text{ ess } f$$

Teniendo en cuenta que

$$\Delta v = G''(|x|) + G'(|x|) \frac{(N-1)}{|x|}$$

la condición a exigir en Ω_0 resulta

(3.7.) $C_1 \cdot N \geqslant B$

En $\Omega_1{}^0$ se tiene

$$-\Delta v = -h''(R_1 - |x|) + h'(R_1 - |x|) \frac{(N-1)}{|x|}$$

luego tomando

$$\tilde{f}(x) = \frac{(N-1)}{R_0} h'(R_1 - |x|) \text{ en } \Omega_1{}^0$$

se tendrá que

$$-\Delta v + \alpha(v) \ni \tilde{f} \text{ c. t. p. de } \Omega_1{}^0$$

y

$$\tilde{f} \geqslant f \text{ c. t. p. de } \Omega_1{}^0$$

Finalmente en Ω^1, $v = 0$ y $\Delta v = 0$ y por tanto basta tomar

$$\tilde{f}|_{\Omega_1} = 0$$

Una posible elección de los parámetros C_1 y C_2 es:

(3.8.) $$C_1 = \frac{B}{N}$$

(3.9.) $$C_2 = h(\Psi(K)) + \frac{1}{2}\frac{B}{N} R_0{}^2 = K + \frac{1}{2}\frac{B}{N} R_0{}^2$$

Para obtener la igualdad (3.5.) o equivalentemente

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B}{N}R_0\right)^2 = \phi(K)$$

bastará elegir adecuadamente la cota M supuesta sobre α, en concreto se puede tomar

$$M = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{B}{N}R_0\right)^2 - \phi(s)}{K-s} \tag{3.10}$$

siendo $s < K$ tal que

$$\phi(s) < \frac{1}{2}\left(\frac{B}{N}R_0\right)^2$$

(Nótese que $\phi(0) = 0$ y por tanto se tiene asegurada la existencia de tal s). Finalmente, una vez determinada ϕ y por tanto Ψ se tomaría

$$R_1 = \Psi(K) + R_0\,. \tag{3.11}$$

Establezcamos ahora la existencia y unicidad para $P_{\alpha,f,g}(\Omega)$ con α verificando (3.1.) pero ya no necesariamente acotado. Con este fin, sea $\tilde{\Omega}$ abierto regular acotado de frontera $\tilde{\Gamma}$ verificando:

$$\mathring{\Omega}_{R_1} \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega \qquad (\Omega_{R_1} = \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leqslant R_1\})$$

donde R_1 viene dada ahora por (3.11.). Por el Teorema 1, existirá $u \in W^{2,p}(\tilde{\Omega})$ $(\forall p < \infty)$ verificando

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} + \alpha(\tilde{u}) \ni \tilde{f} & \text{en } \tilde{\Omega} \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{en } \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

siendo

$$\tilde{f} = f|_{\tilde{\Omega}}$$

y

$$\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{en } \Gamma \cap \tilde{\Gamma} \\ 0 & \text{en el resto de } \tilde{\Gamma}. \end{cases}$$

considerando entonces la función u definida en Ω mediante

$$u = \begin{cases} \tilde{u} \text{ en } \tilde{\Omega} \\ 0 \text{ en } \Omega - \tilde{\Omega} \end{cases}$$

se obtiene que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(\forall p < \infty)$ y u es solución de $P_{\alpha,f,g}(\Omega)$. La obtención de (3.11.) muestra que toda posible solución w de $P_{\alpha,f,g}(\Omega)$ debe verificar

$$\text{sop } w \subset \Omega_{R_1}$$

y esto junto a la unicidad para $P_{\alpha,f,g}(\Omega)$ y la construcción de u demuestra la unicidad$_{***}$.

El caso en el que las condiciones de contorno son de tipo Neumann no lineal es algo más delicado que el de condiciones de Dirichlet pues las acotaciones de los parámetros tendrán sentidos diferentes. Esto nos obliga a suponer una hipótesis adicional sobre el grafo γ que viene motivada por la construcción de adecuadas super y subsoluciones y como tales funciones no son únicas, la hipótesis es susceptible de mejorar. Sin embargo, consideramos que el resultado obtenido posee un notable interés dado que no se conocen, hasta el momento, ningún resultado de esta naturaleza para condiciones de Neumann no lineales.

Teorema II.

Sean

$\alpha = \partial\phi$ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $\gamma(0) = 0$ y verificando (3.1.)

γ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \gamma(0)$ y tal que

$$R(\alpha) + R(\gamma) = \mathbb{R}$$

(3.12.) $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $|\gamma^0(r)| \geqslant N\, |\sqrt{\phi(r)}\,|$ si $|r| < \varepsilon$

$$f \in L^\infty(\Omega),\ f \text{ con soporte compacto.}$$

Entonces existe $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ solución única del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

Además u tiene soporte compacto en Ω.

Demostración. Como en el teorema anterior y gracias ahora a los Lemas 2 y 4, bastará operar con

$$f \geqslant 0 \text{ c. t. p. de } \Omega$$

y α grafo maximal monótono acotado de $\mathbf{R}^2$ verificando (3.1.). Consideraremos como supersolución para $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$ la función v dada por (3.3.) donde ahora los parámetros C_1, C_2, R_1 y M serán determinados de forma que se satisfagan a) y c) del Teorema I así como,

$$b') \quad -\frac{\partial v}{\partial n} \in \tilde{\gamma}(v) \text{ en } \Gamma \text{ con } \tilde{\gamma} \lesssim \gamma$$

Observemos que en virtud de la definición de v se tendrá sobre

$$-\frac{\partial v}{\partial n}(x) = -\sum_{i=1}^{n} \cos(n, x_i) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = -\sum_{i=1}^{N} \cos(n, x_i)\, G'(|x|) \frac{x_i}{|x|}$$

luego

$$-\frac{\partial v}{\partial n}(x) \in [-N\,|G'(|x|)|\ ,\ N|G'(|x|)|] \quad \text{c. t. p.} \quad x \in \Gamma.$$

Distingamos

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x \in \Gamma : |x| \leqslant R_0\} \\ \Gamma_1{}^0 &= \{x \in \Gamma : R_0 \leqslant |x| \leqslant R_1\} \\ \Gamma^1 &= \{x \in \Gamma : R_1 \leqslant |x|\} \end{aligned}$$

En Γ_0 se tiene

$$G'(r) = -C_1 r$$

y por tanto se puede afirmar que

$$(3.13.) \quad «\text{Si } v(x) \geqslant -\frac{1}{2} C_1 R_0{}^2 + C_2 \text{ entonces} \left| \frac{\partial v}{\partial n}(x) \right| \leqslant N\, C_1\, R_0».$$

En $\Gamma_1{}^0$ se tiene

$$G'(r) = -h(R_1 - r) = -\sqrt{2\phi(h(R - r))}$$

y por tanto

(3.14.) «Si $0 \leqslant v(x) \leqslant -\frac{1}{2} C_1 R_0{}^2 + C_2$ entonces $\left|\frac{\partial v}{\partial n}(x)\right| \leqslant$

$$\leqslant N \sqrt{\phi(v(x))} \text{»}.$$

En Γ_1 $G'(r) = 0$ y por tanto $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$.

En virtud de (3.13.) y (3.14.) se tendrá la relación deseada entre γ y $\bar{\gamma}$ con sólo exigir

$$\varepsilon \leqslant -\frac{1}{2} C_1 R_0{}^2 + C_2$$

(lo que se logrará con sólo elegir R_0 suficientemente grande) y

(3.15.) $$\gamma^-(\varepsilon) \leqslant N \cdot C_1 R_0.$$

Para que la función v dada por (3.3.) satisfaga las propiedades deseadas, impondremos a los parámetros R_1, C_1, C_2 y M las mismas condiciones que en el Teorema I, salvo la condición (3.7.) pues ahora la expresión (3.15.) acota superiormente C_1. La condición

$$-\Delta v + \alpha(v) \geqslant f \text{ en } \Omega_0 \quad (\Omega_0 \text{ dado en el teorema I})$$

se satisface de una forma más fina a (3.7.) exigiendo

(3.16.) $$C_1 \cdot N + \alpha^0(h(R_1 - R_0)) \geqslant B.$$

Recordemos que el resto de las condiciones sobre los parámetros serán:

(3.4.) $$-\frac{1}{2} C_1 R_0{}^2 + C_2 = h(R_1 - R_0)$$

y

(3.5.) $$C_1 \; R_0 = \sqrt{2\phi(h(R_1 - R_0))}$$

Una posible elección de C_1 y C_2 será entonces

(3.17.) $$C_1 = \frac{\gamma^-(\varepsilon)}{N \cdot R_0}$$

(3.18.) $$C_2 = D + \frac{1}{2}\frac{\gamma^-(\varepsilon)}{N} R_0 \text{ siendo } D = h(R_1 - R_0)\,.$$

Para lograr (3.5.) acotemos adecuadamente α; en concreto basta tomar

$$\alpha_{M_D}(r) = \begin{cases} \alpha(r) & \text{si } r \leqslant s_0 \\ M_D & \text{si } r > s_0 \end{cases}$$

siendo

$$M_D = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^-(\varepsilon)}{N}\right)^2 - \phi(s_0)}{D - s_0}$$

y $s_0 > 0$ elegido de forma que

$$\phi(s_0) < \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^-(\varepsilon)}{N}\right)^2$$

Finalmente la condición (3.16.) se satisface eligiendo $D > s_0$ de forma que

$$\frac{\gamma^-(\varepsilon)}{N \cdot R_0} + M_D \geqslant B$$

es decir

$$(D - s_0)\left(\frac{B - \gamma^-(\varepsilon)}{N \cdot R_0}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^-(\varepsilon)}{N}\right) - \phi(s_0)$$

lo que se logra eligiendo R_0 tal que

(3.19.) $$R_1 = R_2 + \Psi\left[\frac{N \cdot R_0}{2(b - \gamma^-(\varepsilon))}\left(\frac{\gamma^-(\varepsilon)}{N} - \phi(s_0)\right)\right].$$

La existencia y unicidad para $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$ con α verificando (3.1.), pero ya no necesariamente acotado y γ satisfaciendo (3.12.) se va a obtener de una forma similar a como se hizo en el Teorema I. En concreto, sea $\tilde{\Omega}$ abierto regular acotado de frontera $\tilde{\Gamma}$ tal que

$$\mathring{\Omega}_{R_0} \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega$$

donde R_0 viene dado por (3.19). Por el Teorema 2. existirá una única función $\tilde{u} \in H^2(\tilde{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} + \alpha(\tilde{u}) \ni \tilde{f} \text{ en } \tilde{\Omega} \\ -\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial n} \in \gamma(\tilde{u}) \quad \text{ en } \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

siendo

$$\tilde{f} = f|_{\tilde{\Omega}}$$

la obtención de (3.19.) muestra que toda solución w de $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$ debe verificar

$$\text{sop } w \subset \Omega_R$$

pero además la función v dada por (3.3.) junto con (3.17.), (3.18.) y (3.19.) es también una supersolución (en el sentido indicado al principio de esta Demostración) para $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$ y por tanto se deberá tener que

$$\tilde{u}|_{\tilde{\Gamma}-(\tilde{\Gamma}\cap\Gamma)} = 0$$

Considerando entonces la función u definida en Ω por

$$u = \begin{cases} \tilde{u} \text{ en } \tilde{\Omega} \\ 0 \text{ en } \Omega - \tilde{\Omega} \end{cases}$$

se obtiene que $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ y u es la única solución de $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$***

Nota 5.

La hipótesis (3.1.) hecha sobre α en los Teoremas I y II es la mejor posible sobre α para concluir que las soluciones de $P_{\alpha,f,g}(\Omega)$ y $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$ tienen soporte compacto, pues basta tomar $\Omega = \mathbb{R}^N$ y aplicar el Teorema 6.1. de Bénilan-Brézis-Crandall [6] que asegura que dicha hipótesis es entonces necesaria y suficiente para este fin.

3.2. *Caso de* $0 \in Int\ \alpha(0)$.

La hipótesis (3.1.) es satisfecha por todo grafo α de $\mathbf{R}^2$ tal que $0 \in \mathrm{Int}\ \alpha(0)$. Sin embargo, los trabajos de Brézis [11], [12], Bénilan-Brézis-Crandall [6] muestran que la hipótesis de que f tenga soporte compacto puede ser mejorada en este caso. (Nótese que ahora la condición necesaria para la existencia de solución con soporte compacto para $P_{\alpha,f,g}(\Omega)$ es que

(3.20.) $f(x) \in [\alpha^-(0), \alpha^+(0)]$ para $|x|$ suficientemente grande).

La condición (3.20.) resulta ser casi suficiente, pues basta añadirle una hipótesis de convergencia de $f(x)$ hacia $\alpha^-(0)$ y $\alpha^+(0)$ cuando $|x| \to +\infty$. En concreto la hipótesis sobre f hecha en Brézis [11] y [12] es

$$(3.21.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{|x| \to +\infty} \text{ess. } |x|^N \,(f(x) - \alpha^+(0)) < 0 \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} \text{ess. } |x|^N \,(f(x) - \alpha^-(0)) > 0 \end{cases}$$

Veamos como (3.21.) es también suficiente para el problema $P_{\alpha,f,\gamma}(\Omega)$ con sólo hacer una hipótesis débil sobre γ.

Teorema III.

Sean

α grafo maximal monótono de $\mathbf{R}^2$ con $\alpha^-(0) < 0 < \alpha^+(0)$.

$f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ satisfaciendo (3.21.)

γ grafo maximal monótono de $\mathbf{R}^2$, y tal que

(3.22.) $\exists\ \delta > 0$ y $\exists\ m > 0$ tales que $|\gamma^0(r)| \geqslant m \cdot |r|$, si $|r| > \delta$

Entonces existe $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ solución única del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

Además u tiene soporte compacto.

Demostración. Gracias al Lema 2, bastará suponer

$$f \geqslant 0 \text{ c.t.p. de } \Omega$$

Por (3.21.) dado $\varepsilon > 0$ existirá $R_\varepsilon > 0$ (y todo lo grande que se quiera) tal que

$$|x|^N (f(x) - \alpha^+(0)) \leqslant -\varepsilon \text{ c.t.p. de } \Omega^{R_\varepsilon} = \{x \in \Omega : |x| > R_\varepsilon\}$$

Construyamos ahora una supersolución $v \geqslant 0$ y con soporte compacto. Más concretamente exigiremos

(3.23.) $$-\Delta v \geqslant B \text{ en } \Omega_{R_\varepsilon} \qquad B = \sup_{\Omega_{R_\varepsilon}} \text{ess } f$$

(3.24.) $$-\Delta v = \frac{-\varepsilon}{|x|^N} \geqslant f(x) - \alpha^+(0) \text{ en } {\Omega_R}^{R_\varepsilon} = \{x \in \Omega : R_\varepsilon \leqslant |x| \leqslant R\}$$

$$v = 0 \qquad \text{en } \Omega^R = \{x \in \Omega : R \leqslant |x|\}$$

y

(3.25.) $$-\frac{\partial v}{\partial n} \in \tilde{\gamma}(v) \lesssim \gamma(v) \text{ en } \Gamma.$$

Con este fin distingamos:

Caso I. $N > 2$.

Construyamos v mediante $v(x) = G(|x|)$, siendo

$$G(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} C_1 \cdot r_2 + C_2 \ , & \text{si } 0 \leqslant r \leqslant R \\ \dfrac{\varepsilon}{2-N} r^{2-N} \log r + C_3 r^{2-N} + C_4 \ , & \text{si } R_\varepsilon \leqslant r \leqslant R \\ 0 \ , & \text{si } R \leqslant r \end{cases}$$

La condición de que v $C^1(\overline{\Omega})$ nos lleva a obligar

$$(3.26.)\qquad -\frac{1}{2}C_1 \cdot R_\varepsilon^2 + C_2 = \frac{\varepsilon}{2-N} R^{2-N} \cdot \mathrm{Log}\, R_\varepsilon + C_3 \cdot R^{2-N} + C_4$$

$$-C_1 R_\varepsilon = \varepsilon R_\varepsilon^{1-N} \mathrm{Log}\, R_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2-N} R_\varepsilon^{1-N} + C_3(2-N) R_\varepsilon^{1-N}$$

o lo que es equivalente

$$(3.27.)\qquad -C_1 \cdot R_\varepsilon^N = \varepsilon \cdot \log R_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2-N} + C_3(2-N)$$

$$(3.28.)\qquad \frac{\varepsilon}{(2-N)} R^{2-N} \mathrm{Log}\, R + C_3 R^{2-N} + C_4 = 0$$

y

$$(3.29.)\qquad \mathrm{Log}\, R + \frac{\varepsilon}{2-N} + C_3(2-N) = 0$$

Ahora bien, restando a (3.28.) la expresión (3.29.) multiplicada por $\dfrac{R^{2-N}}{2-N}$ resulta

$$C_4 = \frac{\varepsilon \cdot R^{2-N}}{(2-N)^2}$$

y por tanto

$$C_3 = \frac{-\varepsilon \cdot \mathrm{Log}\, R}{2-N} - \frac{\varepsilon}{(2-N)^2}$$

De (3.27.) y (3.29.) resulta

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon^N} \log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right)$$

y por (3.26.)

$$C_2 = \frac{\varepsilon}{2-N} R_\varepsilon^{2-N} \log\left(\frac{R_\varepsilon}{R}\right) - \frac{\varepsilon}{(2-N)^2}(R^{2-N} - R_\varepsilon^{2-N}) +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2} R_\varepsilon^{2-N} \log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right).$$

La función G puede ser ahora escrita como

$$(3.30.)\quad G(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon}{R_\varepsilon^N}\log\left(\dfrac{R}{R_\varepsilon}\right)[r^2 - R_\varepsilon^2] + \dfrac{\varepsilon}{2-N}\log\left(\dfrac{R_\varepsilon}{R}\right)\cdot R^{2-N} + \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon}{(2-N)^2}(R^{2-N} - R_\varepsilon^{2-N}) \text{ si } 0 \leqslant r \leqslant R_\varepsilon \\ \dfrac{\varepsilon}{2-N} r^{2-N}\log\left(\dfrac{r}{R}\right) - \dfrac{\varepsilon}{(2-N)^2} r^{2-N} + \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon}{(2-N)^2} R^{2-N} \text{ si } R_\varepsilon \leqslant r \leqslant R \\ 0 \qquad\qquad \text{si } R \leqslant r \end{cases}$$

Por la construcción de G, la condición (3.24.) es siempre satisfecha. Además teniendo en cuenta que

$$\Delta v(x) = G''(|x|) + (N-1)\frac{G'(|x|)}{|x|}$$

la condición (3.22.) se tendrá exigiendo

$$(3.31.)\qquad N\frac{\varepsilon}{R_\varepsilon^N}\log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right) \geqslant B.$$

Estudiemos ahora el comportamiento de $\dfrac{\partial v}{\partial n}(x)$ en Γ. Como en el Teorema II se tendrá

$$-\frac{\partial v}{\partial n}(x) \in [-N\,|G'(|x|)|,\ N\,|G'(|x|)|] \text{ c. t. p. de } \Gamma$$

luego se puede afirmar que

$$\text{«si } v(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2-N} R^{2-N}\operatorname{Log}\left(\frac{R_\varepsilon}{R}\right) \text{ entonces } \left| -\frac{\partial v}{\partial n}(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant N\varepsilon\cdot\operatorname{Log}\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right)\cdot R^{2-N}\text{».}$$

Por otra parte si $R_\varepsilon \leqslant r < R$ se tendrá

$$\frac{N|G'(r)|}{G(r)} = \frac{N\varepsilon r^{1-N}\log(R/r)}{\dfrac{\varepsilon}{N-2}\, r^{2-N}\log\left(\dfrac{R}{r}\right) - \dfrac{\varepsilon}{(2-N)}\, r^{2-N} + \dfrac{\varepsilon}{(2-N)}\, R^{2-N}}$$

luego

$$\frac{|N|G'(r)|}{G(r)} \leqslant \frac{N\varepsilon r^{1-N}\log(R/r)}{\dfrac{1}{N}\, R_\varepsilon \cdot r^{2-N}\log\left(\dfrac{R}{r}\right) + \dfrac{1}{(2-N)^2}\, |R^{2-N} - R_\varepsilon{}^{2-N}|}$$

pero por la hipótesis (3.22.) se tendrá

$$\exists\, \delta > 0 \text{ y } \exists\, m > 0 \text{ tales que } \gamma^-(r) \geqslant m \cdot r \text{ si } 0 < r < \delta$$

por consiguiente la condición (3.25.) se conseguirá exigiendo

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{N-2}\, R^{2-N}\log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right) \tag{3.32.}$$

$$\frac{Nr^{-N}\log(R/r)}{\dfrac{1}{N}\, R \cdot r^{2-N}\log\left(\dfrac{R}{r}\right) + \dfrac{1}{(2-N)^2}\, [R^{2-N} - R_\varepsilon{}^{2-N}]} \leqslant m \text{ si } R_\varepsilon \leqslant r < R_1 \tag{3.33.}$$

Determinemos finalmente R_ε y R de forma que se tengan (3.31.), (3.32.) y (3.33.). Se tendrá (3.32.) si

$$\frac{B \cdot R_\varepsilon}{(N-2)\cdot N} \geqslant \delta \tag{3.34.}$$

lo cual se satisfacerá tomando R_ε suficientemente grande. La condición (3.33.) se tendrá si

$$\frac{N}{R_\varepsilon{}^{N-1}}\log\left(\frac{R_\varepsilon}{R}\right) \leqslant \frac{\dfrac{m}{(2-N)^2}\, |R^{2-N} - R_\varepsilon{}^{2-N}|}{\dfrac{m \cdot R_\varepsilon}{N^2} - 1}$$

lo que en virtud de (3.31.) se satisfacerá si

$$R_\varepsilon \cdot B \leqslant \frac{\dfrac{m}{(2-N)^2}\,|R^{2-N} - R_\varepsilon{}^{2-N}|}{\dfrac{m \cdot R_\varepsilon}{N^2} - 1}$$

Luego fijado R_ε mediante (3.34.) bastará tomar R suficientemente grande de forma que se tenga (3.31.) y

$$\text{(3.35.)} \quad \frac{m}{(2-N)^2} R^{2-N} \leqslant \frac{B \cdot m \cdot R_\varepsilon}{N} - R_\varepsilon \cdot B - \frac{m}{(2-N)^2} R_\varepsilon{}^{2-N}.$$

Caso II. $N = 1$.

La expresión (3.30.) de G se concreta ahora en

$$G(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon}{R_\varepsilon}\log\left(\dfrac{R}{R_\varepsilon}\right)[r^2 - R_\varepsilon{}^2] + \dfrac{\varepsilon}{2}\log\left(\dfrac{R_\varepsilon}{R}\right)R_\varepsilon + \varepsilon(R - R_\varepsilon) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } 0 \leqslant r \geqslant R_\varepsilon \\ \varepsilon \cdot r \log\left(\dfrac{r}{R}\right) - \varepsilon \cdot r + \varepsilon R & \text{si } R_\varepsilon \leqslant r \leqslant R \\ 0 & \text{si } R \leqslant r \end{cases}$$

De una forma análoga al Caso I, ahora habrá que exigir

$$\frac{\varepsilon}{R_\varepsilon}\log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right) \geqslant B$$

$$\delta \leqslant \left(R - R_\varepsilon - R_\varepsilon \cdot \log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right)\right)$$

y como

$$\frac{|G'(r)|}{G(r)} \leqslant \frac{\varepsilon \log(r/R)}{\varepsilon r \cdot \log(r/R) - \varepsilon r + \varepsilon R} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\log(r/R)}{R_\varepsilon \log(r/R)} = \frac{1}{R_\varepsilon} \quad \text{si } R_\varepsilon \leqslant r \leqslant R$$

bastará

$$R_\varepsilon \geqslant \frac{1}{m}.$$

CASO III. $N = 2$.

Consideremos ahora

$$G(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2 & \text{si} \quad 0 \leqslant r \leqslant R_\varepsilon \\ \frac{1}{2} (\log r)^2 + C_3 \cdot \log r + C_4 & \text{si} \quad R_\varepsilon \leqslant r \leqslant R \\ 0 & \text{si} \quad r \leqslant R \end{cases}$$

De una forma similar al CASO I se obtendría

$$C_3 = - \varepsilon \cdot \log R$$

$$C_4 = \frac{\varepsilon}{2} (\log R)^2$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon^2} \log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right)$$

y

$$C_2 = \frac{\varepsilon}{2} (\log R_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} (\log R)^2 - \varepsilon \cdot \log R \cdot \log R_\varepsilon + \varepsilon \log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right)$$

R_ε y R serían elegidos de una forma completamente análiga al CASO I, de forma que

$$B \geqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon} \log\left(\frac{R}{R_\varepsilon}\right)$$

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2} (\log R_\varepsilon)^2 - \varepsilon \log R_\varepsilon$$

y

$$2\left(\frac{1}{R\varepsilon} \log R - \frac{1}{R} \log R\right) \leqslant m (\log R_\varepsilon - \log R)^2$$

Los detalles de la existencia y unicidad de soluciones se obtienen, en los tres casos, exactamente igual que en el Teorema II_{***}

Nota 6. La hipótesis (3.21.) es en alguna manera optimal como lo muestra el siguiente contraejemplo debido a Brézis [18]: Sean

$$\Omega = \mathbb{R}^N$$

$$\alpha(r) = 0 \text{ si } r > 0 \text{ y } \alpha(0) = (-\infty, 0]$$

entonces $\forall q > N$ existen K y R_0 tales que el problema

$$-\Delta u + \alpha(u) \ni f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N$$

con

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{si } |x| \leqslant R_0 \\ -\dfrac{1}{|x|^q} & \text{si } |x| > R \end{cases}$$

no admite solución con soporte compacto.

3.1.3. *Ejemplos.*

Entre la gran variedad de situaciones concretas en las que se satisfacen la hipótesis de los teoremas I, II y III, se pueden citar las siguientes:

Ejemplo 1.

El grafo

(3.36.) $\quad \alpha(r) = |r|^m \cdot \operatorname{sign} r = |r|^{m-1} \cdot r \quad \text{con} \quad 0 < m < 1.$

satisface obviamente la hipótesis (3.1.). De aquí que se tengan:

Corolario II.1.

Sean

$$f \in L^\infty(\Omega), \quad f \text{ con soporte compacto.}$$

$$g \in C^2(\Gamma), \quad g \text{ con soporte compacto.}$$

Entonces existe una única $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(\forall p < \infty)$ solución del problema

$$(3.37.)\quad \begin{cases} -\Delta u + |u|^{m-1} \cdot u = f & \text{en } \Omega, \quad 0 < m < 1 \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

y además u tiene soporte compacto en $\bar{\Omega}_{***}$

Corolario II.2.

Sea $f \in L^{\infty}(\Omega)$, f con soporte compacto en Ω. Entonces existe una única $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ solución del problema

$$(3.38.)\quad \begin{cases} -\Delta u + |u|^{m-1} \cdot u = f \text{ en } \Omega, \quad 0 < m < 1 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = 1 \quad \text{si } u(x) > 0, \quad x \in \Gamma \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = -1 \text{ si } u(x) < 0, \quad x \in \Gamma \\ -1 \leqslant \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) \leqslant 1 \quad \text{si } u(x) = 0, \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

y además u tiene soporte compacto en $\bar{\Omega}_{***}$

Nota 7. El problema (3.37), rige los procesos de filtración de gases a través de medios porosos, así como los de distribución de temperaturas en medios no isótropos, (ambos en regímenes estacionarios).

El problema (3.38.) junto con los que citamos a continuación son ejemplos típicos de la teoría de Problemas Unilaterales.

Ejemplo II.2. Como ilustración del caso $0 \in \text{Int}\, \alpha(0)$ se tiene por ejemplo:

Corolario II.3.

Sea $f \in L^{\infty}_{loc}(\bar{\Omega})$, f satisfaciendo (3.21.)

$g \in C^2(\Gamma)$, g con soporte compacto.

Entonces existe una única $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(\forall p < \infty)$ solución del problema

$$\text{(3.39)}\qquad \begin{cases} \Delta u(x) + f(x) = 1 & \text{si } u(x) > 0,\ x \in \Omega \\ \Delta u(x) + f(x) = -1 & \text{si } u(x) < 0,\ x \in \Omega \\ -1 \leqslant \Delta u(x) + f(x) \leqslant 1 & \text{si } u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

y además u tiene soporte compacto en $\overline{\Omega}_{***}$

Corolario II. 4.

Sea

$$f \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ f \text{ satisfaciendo (3.21.)}$$

Entonces existe una única $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfaciendo

$$\text{(3.40)}\qquad \begin{cases} \Delta u(x) + f(x) = 1 \text{ en } \Omega \text{ y } -\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = 1 & \text{en } \Gamma \text{ si } u(x) > 0,\ x \in \overline{\Omega} \\ \Delta u(x) + f(x) = -1 \text{ en } \Omega \text{ y } -\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = -1 & \text{en } \Gamma \text{ si } u(x) < 0,\ x \in \overline{\Omega} \\ -1 \leqslant \Delta u(x) + f(x) \leqslant 1 \text{ en } \Omega \text{ y } -1 \leqslant \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) \leqslant 1 & \text{en } \Gamma \text{ si } u(x) = 0,\ x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

y además u tiene soporte compacto en $\overline{\Omega}_{***}$

Nota 8. Problemas de una naturaleza similar a (3.39.) y (3.40), han sido extensamente tratados (en el caso de Ω acotado) en Duvaut-Lions [20].

§4. Aplicación a problemas de filtración.

Los resultados de §3 pueden ser aplicados a algunos problemas de evolución por medio de un argumento no muy lejano al de «separación de variables», usualmente empleado en la resolución de problemas de contorno para ecuaciones lineales de segundo orden. Como se verá, la linealidad puede ser ahora sustituida por una no linealidad potencial. Más concretamente se tiene:

Teorema IV.

Sea

$f \in L^\infty(0, T : L^\infty(\Omega))$, $f(t, \cdot)$ con soporte compacto en Ω, c. t. $t \in (0, T)$.

(4.1.) $g \in W^{1,\infty}(0, T : L^\infty(\Omega)) \cap L^2(0, T : H^1_{loc}(\Omega))$, $g(t, \cdot)$ con soporte compacto c. t. $t \in (0, T)$.

$u_0 \in L^\infty(\Omega)$, u_0 con soporte compacto en Ω.

Entonces existe $u \in C([0, T] : H^{-1}(\Omega))$ solución única del problema

$$(4.2.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta |u|^{m-1} \cdot u = f \text{ en } Q, \quad m > 1 \\ |u(t, x)|^{m-1} \cdot u(t, x) = g(t, x) \quad \text{en } \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega \end{cases}$$

Además

$$u(t, \cdot) \in L^1(\Omega), \quad |u(t, \cdot)|^m \cdot u(t, \cdot) \in L^1(\Omega) \text{ y}$$
$$|u(t, \cdot)|^{m-1} \cdot u(t, \cdot) \in H_0{}^1(\Omega) \quad \text{c. t. } t \in (0, T)$$

y la función $u(t, \cdot)$ tiene soporte compacto en $\bar{\Omega}$ $\forall t \in [0, T]$.

Demostración.

Gracias al Lema 5 bastará suponer

$$f(t, x) \geqslant 0 \quad \text{c. t. p. de } \Omega \text{ y c. t. } (t, x) \in Q$$
$$g(t, x) \geqslant 0 \quad \text{c. t. p. de } \Sigma$$
$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{c. t. p. de } \Omega$$

pues en otro caso bastaría tomar

$f^+(t, \cdot) = \max(f(t, \cdot), 0)$ (respec. $-f^-(t, \cdot) = f(t, \cdot) - f^+(t, \cdot)$) c. t. $t \in (0, T)$

$g^+(t, \cdot) = \max(g(t, \cdot), 0)$ (respec. $-g^-(t, \cdot) = g(t, \cdot) - g^+(t, \cdot)$

$u_0{}^+ = \max(u_0, 0)$ (respec. $-u_0{}^- = u_0 - u_0{}^+$)

y como

$$-f^-(t,x) \leqslant f(t,x) \leqslant f^+(t,x) \text{ c.t. } x \text{ de } \Omega, \text{ c.t. } t \in (0,T)$$
$$-g^-(t,x) \leqslant g(t,x) \leqslant g^+(t,x) \text{ c.t. } x \text{ de } \Gamma, \text{ c.t. } t \in (0,T)$$
$$-u_0{}^- \leqslant u_0 \leqslant u_0{}^+ \qquad \text{c.t. p. de } \Omega$$

se tendría

$$u_1\,(t,\cdot) \leqslant u(t,\cdot) \leqslant u_2(t,\cdot) \text{ c.t. p de } \Omega, \text{ c.t. } t \in (0,T)$$

(si u_1, u_2 y u representan soluciones del problema (1.3.) correspondientes a los datos $(-f^-, -g^-, -u_0{}^-)$, $(f^+, g^+, u_0{}^+)$ y (f, g, u_0) respectivamente). Supuesto ya el problema simplificado por las consideraciones anteriores, una forma de acotar el soporte, en cada t, de toda posible solución de (1.3.) se tiene encontrando una supersolución $v(t,\cdot) \geqslant 0$ y con soporte compacto en c. t. $t \in (0,T)$. Construyamos tal función de la forma

$$v(t,x) = \tau(t) \cdot X(x)$$

donde τ y X serán elegidas adecuadamente.

Etapa I. (*Elección de* X).

Consideremos en Ω la función $X(x) = G^*(|x|)$ siendo

$$(4.4.)\quad G^*(r) = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2}C_1 r^2 + C_2\right)^{1/m} & \text{si } r \leqslant R_0 \\ (h_M(R_1 - r))^{1/m} & \text{si } R_0 \leqslant r \leqslant R_1 \\ 0 & \text{si } r > R_1 \end{cases}$$

donde

$R_0 > 0$ es elegido de forma que

$$\Big(\bigcup_{t\in(0,T)} \operatorname{sop} f(t,\cdot)\Big) \cup \Big(\bigcup_{t\in(0,T)} \operatorname{sop} g(t,\cdot)\Big) \cup \operatorname{sop} u_0 \subset \Omega_{R_0}$$

h_M viene dada por (3.2.) para el grafo α tal que

$$\alpha(r) = |r|^{1/m-1} \cdot r \qquad m > 1 \tag{4.5.}$$

R_1, C_1, C_2 y M son parámetros positivos a determinar.

(Nótese que al igual que en el Teorema I, se pueden determinar adecuadamente R_1, C_1 C_2 y M de forma que X^m represente una solución con soporte compacto para $P_{\alpha,f^*,g^*}(\Omega)$ con α dada por (4.5.) y f^* y g^* adecuadas). Impongamos de momento que $X \in C^1(\Omega)$ y dejemos para más tarde el resto de las condiciones sobre X. Se deberá tener

$$(4.6.) = (3.4.) \qquad -\frac{1}{2} C_1 R_0^2 + C_2 = h(R_1 - R_0)$$

$$(4.7.) = (3.5.) \qquad - C_1 R_0 = -\sqrt{2\phi_M(h_M(R_1 - R_0))}$$

Etapa II. (Elección de τ).

Dado $m > 1$, sea $\tau \in C([0, T])$ satisfaciendo

$$\begin{cases} \tau'(t) - |\tau(t)|^{m-1} \cdot \tau(t) = 0 \quad \text{en} \quad (0, T) \\ \tau(0) \geqslant c_0 \end{cases} \tag{4.8.}$$

para alguna constante $c_0 > 0$ (7). Nótese que se deberá tener

$$\tau'(t) \in [\tau(0)^m, \ \tau(T)^m] \ \text{ en c. t. } t \in (0, T) \tag{4.9.}$$

Etapa III. (Determinación de las constantes de X y τ).

Sea $v(t, x)$ dada por (4.3.) con X y τ definidas por (4.4.) y (4.8.) respectivamente. Impongamos a v las condiciones de supersolución:

i) Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \Delta |v(t, x)|^m \cdot v(t, x) &= \tau'(t) \cdot X(x) - \Delta(\tau(t)) \cdot X(x))^m = \\ = \tau'(t) \cdot X(x) - (\tau(t))^m \cdot \Delta(X(x))^m &= \tau'(t) \ |X(x) - \Delta(X(x))^m| = \\ = f^*(t, x). \end{aligned}$$

(7) Nótese que la ecuación (4.8.) es una ecuación de tipo Bernouilli y por tanto, integrable elementalmente.

En virtud de la elección de R y de la definición de X y de la estimación (4.9.), se tendrá:

$$f^*(t, \cdot) \geqslant f(t, \cdot) \text{ c.t.p de } \Omega, \text{ c.t. } t \in (0, T)$$

con sólo exigir,

$$(4.10.) \qquad C_0^m \cdot C_1 \cdot N \geqslant B^* \text{ con } B^* = \sup_{(t,x) \in Q} \text{ess } f(t, x)$$

ii) $v(t, x) = \tau(t) \cdot X(x) = g^*(t, x)$ sobre Σ. Luego para que

$$|g^*(t, x)|^{m-1} \cdot g^*(t, \cdot) \geqslant g(t, x) \text{ c.t. p de } \Sigma$$

bastará que se tenga

$$(4.11.) \qquad (C_0 \cdot (h(R_1 - R_0))^{m/1})^m \geqslant K^* \text{ siendo } K^* = \sup_{(t,x) \in \Sigma} \text{ess } g(t, x)$$

iii) $v(0, x) = \tau(0) \cdot X(x) X u^*(x)$ en Ω y por tanto se tendrá

$$u_0^* \geqslant u_0 \text{ c.t. p de } \Omega$$

exigiendo

$$(4.12.) \qquad C_0 \cdot (h(R_1 - R_0))^{1/m} \geqslant L, \text{ siendo } L = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \cdot u_0(x)$$

Con el fin de determinar los parámetros, observemos que (4.11.) y (4.12.) se tiene si

$$(4.13.) = (3.6.) \quad h(R_1 - R_0) \geqslant K, \text{ siendo ahora } K = \text{Max} = \left\{ \frac{K^*}{C_0^{2m}}, \frac{L^m}{C_0^m} \right\}$$

y además la condición (4.10.) se puede expresar como

$$(4.14.) = (3.7.) \qquad C_1 \cdot N \geqslant B \text{ siendo ahora } B = \frac{B^*}{C_0^m}.$$

La elección de C_1, C_2, R y M de forma que se satisfagan (4.6.), (4.7.), (4.13.) y (4.14.) coinciden con la que se tiene al exigir (3.4.), (3.5.), (3.6.) y (3.7.), elección ya realizada en el Teorema I. En concreto bastará tomar

$$C_1 = \frac{B}{N}$$

$$C_2 = K + \frac{1}{2} \frac{B}{N} R_0{}^2$$

$$M \text{ dado por } (3.10.)$$

(4.15.) $$R_1 = \Psi(K) + R_0.$$

Para establecer la existencia y unicidad para el problema (4.2.) consideremos $\tilde{\Omega}$ abierto regular acotado de frontera $\tilde{\Gamma}$ verificando

$$\mathring{\Omega}_{R_1} \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega$$

con R_1 dado por (4.15.). Gracias a la hipótesis (4.1.) se tiene que

$$g \in W^{1,1}(0, T\,; L^\infty(\Omega)) \cap L^2(0, T : H^1(\Omega))$$

y por tanto el Teorema 3, nos asegura la existencia de una única

$$u \in C([0, T] : H^{-1}(\tilde{\Omega})) \text{ y con } u(t, \cdot) \in L^1(\tilde{\Omega})$$

verificando

(4.16.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta |\tilde{u}|^{m-1} \cdot \tilde{u} = \tilde{f} & \text{en } (Q, T) \times \tilde{\Omega} \\ |\tilde{u}(t, x)|^{m-1} \cdot \tilde{u}(t, x) = \tilde{g}(t, x) & \text{en } (0, T) \times \tilde{\Gamma} \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{u}_0(x) & \text{en } \tilde{\Omega} \end{cases}$$

siendo

$$\tilde{f}(t, \cdot) = f(t, \cdot)|_{\tilde{\Omega}}, \tilde{g}(t, \ ) = g(t, \ )|_{\tilde{\Omega}}, \tilde{u}_0 = u_0|_{\tilde{\Omega}}. \text{ c.t. } t \in (0, T)$$

además

$$|\tilde{u}(t, \cdot)|^m \cdot \tilde{u}(t, \cdot) \in L^1(\tilde{\Omega}) \text{ y } |\tilde{u}(t, \cdot)|^{m-1} \cdot \tilde{u}(t, \cdot) \in H_0{}^1(\tilde{\Omega}) \quad \text{c.t. } t \in (0, T)$$

Considerando entonces la función u definida en Q mediante

$$u(t, \ ) = \begin{cases} \tilde{u}(t, \cdot) & \text{en } \tilde{\Omega} \text{ c.t. } t \in (0, T) \\ 0 & \text{en } \Omega - \tilde{\Omega} \end{cases}$$

se obtiene así $u \in C([0, T] : H^{-1}(\Omega))$ con $u(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$ solución de (4.2.) verificando además

$$|u(t, \cdot)|^m \cdot u(t, \cdot) \in L^1(\Omega) \quad \text{y} \quad |u(t, \cdot)|^{m-1} \cdot u(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{c. t.} \quad t \in (0, T).$$

La obtención de la supersolución v muestra que toda posible solución w de (4.2.) debe verificar

$$\text{sop } w(t, \cdot) \subset \Omega_{R_1} \qquad \text{c. t.} \qquad t \in (0, T)$$

y esto junto a la unicidad para (4.16.) y la construcción de u demuestra la unicidad$_{***}$.

Nota 10. En Brézis-Friedman [14], se muestra como ciertos problemas de evolución (completamente distintos al (4.2), gozan de una propiedad aún más «fuerte» que la de compacidad del soporte de la solución, en el sentido de que basta suponer que

$$u_0(x) \to 0 \text{ cuando } |x| \to +\infty \quad x \in \Omega \ (\Omega = \mathbb{R}^N \text{ por simplicidad}),$$

para obtener la compacidad del soporte de la solución del problema en cuestión.

Tal propiedad no es satisfecha por el problema (4.2.) ya que en Kalashnikov [21] se muestra que si u es solución (4.2.) (con $\Omega = (0, +\infty)$ $f = 0$) y si $u(t_0, x_0) > 0$ para algún $(t_0, x_0) \in (0, T) \times (0, \infty)$, entonces $u(t, x_0) > 0$ $\forall t,\ t \geqslant t_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ADAMS: «*Sobolev Spaces*». Academic Press, 1975.

[2] J. AUCHMUTY - R. BEALS: «*Variational Solutions of some nonlinear free boundary problems*». Arch. Rat. Mech. Anal. *43* (1971) p. 255-271.

[3] G. I. BARANBLAT: «*On some monstationary motions of fluid and gas in porous media*». Prikl Mat. and Mech. *17* n.º 6 (1953), p. 739-732 (en ruso).

[4] G. I. BARENBLAT - M. I. VISHIK: «*Finite velocity of propagation in problems of nonstationary filtration of a liquid and a gas*». Prikl. Mat. and Mech. *20* n.º 3 (1956) p. 411-417 (en ruso).

[5] PH. BÉNILAN: *Curso del 3.º ciclo*. Univ. Paris VI, Paris. 1974-75.

[6] PH. BÉNILAN - H. BRÉZIS - M. G. CRANDALL: «*An semilinear equation in* $L^1(\mathbb{R}^N)$». Ann. Scuola Norm. Supe. Pisa *II* n.º 4 (1975), p. 523-555.

[7] A. BENSOUSSAN - J. L. LIONS: «*On the support of the solution of some variatonal inequalities of evolution*». J. Math. Soc. Japan *28* (1976) p. 1-17.

[8] L. BERKOVITZ - H. POLLARD: «*A non classical variational problem avising from an optimal filter problem*». Arch. Rat. Mech. Anal *26* (1967). p. 281-304.

[9] H. BRÉZIS: «*Problemes Unilateraux*», J. Math. Pures et Appl. *51* (1972) p. 1-168.

[10] H. BRÉZIS: «*Operateurs maximaux monotones et semigrupes de contractions dans les espaces de Hilbert*» Lecture Notes. North-Holland. (1973).

[11] H. BRÉZIS: «*Solutions of variational inequalities with compact support*» Uspekhi. Mat. Nauk *129* (1974), p. 103-108.

[12] H. BRÉZIS: «*Solutions a support compact d'Inequations Variationnelles Seminaire Leray*». College de France (1974).

[13] H. BRÉZIS: «*Monotone operators, non linear semi-groups and applications*». Proc. Int. Congress. Math. Vancouver 1974.

[14] H. BRÉZIS - A. FRIEDMAN: «*Estimates of the support of solutions of Parabolic Variational Inequalities*». Illinois J. Math. *20* (1976) p. 82-97.

[15] H. BRÉZIS - G. STAMPACCHIA: «*Une nouvelle méthode pour l'etude d'ecoulements stationnaires*». C. R. Acad. Sci. Paris *276* (1973) p. 129-132.

[16] A. DAMLAMIAN: «*Le probleme de Stefan avec contraintes au bord et les integrales convexes*». *Semin. n.º 166 les Semi-groupes et les equations d'evolution.* (Annés 1972-73, 1973-74). Public Math. d'Orsay.

[17] J. I. DÍAZ DÍAZ: *«Soluciones con soporte compacto de problemas unilaterales mixtos«*. R. Acad. de Cienc. Exactas F y N. de Madrid *LXIX* (1975), p. 611-616.

[18] J. I. DÍAZ DÍAZ: *«Comportamiento hiperbólico de algunos problemas no lineales degenerados»*. Actas XII Reunión Anual de Mat. España. Málaga. (1976) (a aparecer).

[19] J. I. DÍAZ DÍAZ: *«Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas no lineales»*. Tesis. Univ. Complutense de Madrid, (1976).

[20] G. DUVAUT - J. L. LIONS: *«Les Inéquations en Mécanique et en Physique»*. Dunod. Paris. (1972).

[21] A. S. KALASHNIKOV: *«The occurrence of singularities in solutions of the non-steady seepage equation»*. Zh. Vŷchisl. Mat. Fiz *7* n.º 2, (1967) p. 440-443 (en ruso).

[22] J. L. LIONS: *«On variational inequalities»*. (en ruso). Ouspechi Math. Nauk. *XXVI* (1971).

[23] R. REDHEFFER: *«On a nonlinear functional of Berkovitz and Pollard»*. Arch. Rational Mech. Anal *50* (1973), p. 1-9.

[24] R. REDHEFFER: *«Nonlinear differential inequalities anal functions of compact support»*. Trans Amer. Soc. *220* (1976), p. 133-157.

[25] L. TARTAR: *«Comunicación personal»*.

[26] Y. B. ZELDOVICH - A. S. KOMPANEETS: *«On the theory heat propagation where thermal condcutivity depends on temperature». Collection Published on the Occasion of the Seventieth Birthday of Academician A.F. Ioffe.* Izd. - vo. An, SSSR. Moscow. (1950).

Referencias añadidas en Enero de 1980

[27] A. BENSOUSSAN, H. BRÉZIS, A. FRIEDMAN, *«Estimates on the free boundary for quasivariational inequalities»*. Comm. in Part. Diff. Eq. 2, (1977), 297-321.

[28] G. DÍAZ DÍAZ *«Estimación del conjunto de coincidencia para ciertas inecuaciones variacionales»* Actas del 2.º Congreso sobre E. D. y A. Barcelona. (1979).

[29] J. I. DÍAZ DÍAZ *«Solutions with compact support of some degenerate parabolic problems»*. Nonlinear Analysis, Theory and Appl. *3*, n.º 6 (1979), 813-847.

[30] J. I. DÍAZ DÍAZ, M. A. HERRERO GARCÍA, *«Proprietés de support compact pour certaines equations elliptiques et paraboliques non lineaires»*. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. t 286 (1978), 815-817.

[31] J. I. Díaz Díaz, H. A. Herrero García, «*Estimates on the support of the solution of some nonlinear elliptic and parabolic problems*». Aparecerá.

[32] J. L. Vázquez Suárez, «*Some results on the equation* $-\Delta\mu + \beta(\mu) \ni f$ *on a unbounded domain*». Aparecerá.

[33] L. Veron, «*Equations d'evolution semilineares du second ordre dans* L^1». Aparecerá en Revue Roumaine de Math. Pures et Appliqués.

[34] N. Yamada, «*Estimates on the support of solutions of elliptic variational inequalities on bounded domains*». Hiroshima Math. J. 9, n.º 1, (1979), 7-16.

J. Ildefonso Díaz Díaz