ANULACION DE SOLUCIONES PARA OPERADORES ACRETIVOS EN ESPACIOS DE BANACH. APLICACIONES A CIERTOS PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES

por

Jesús Ildefonso Díaz Díaz

(Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LXXIV, cuaderno 5.°)

MADRID
1980

ANULACION DE SOLUCIONES PARA OPERADORES ACRETIVOS EN ESPACIOS DE BANACH. APLICACIONES A CIERTOS PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES

Jesús Ildefonso Díaz Díaz

Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Recibido: 13 diciembre 1978

In this work the property of *vanishing of solutions* (also termed as *finite extinctions time*: $u(t) = 0 \ \forall t \geqslant T_0$, for some $T_0 \geqslant 0$) is considered giving sufficient conditions to have it for the abstract Cauchy problem for accretive operators on Banach Spaces when they are assumed multivalued at 0. The abstract result extends a previous one by H. Brézis. Some applications to multivalued operators on $X = L^\infty$ are given. This paper develops the results of the author previously annunciated in Rev. Real Acad. Cien. Exact., Fís. y Natur. Madrid, 72 (1978), pp. 613-616.

§ 1. Introducción

Es bien conocido que una gran cantidad de problemas en Ecuaciones en Derivadas Parciales admiten un cómodo tratamiento gracias a su formulación como Problemas de Cauchy abstractos sobre espacios de Banach. Tales problemas se pueden formular con precisión de la siguiente forma: dados X espacio de Banach,

$$A: D(A) \subset X \to \mathcal{P}(X)^{(1)}, \quad f \in L^1_{loc}((0, +\infty): X) \quad \text{y} \quad u_0 \in \overline{D(A)},$$

hallar

$$u \in C([0, +\infty): X)$$

(1) La posible multivocidad del operador A viene motivada, entre otras razones, por las aplicaciones. En este sentido véanse los ejemplos expuestos en § 3.

tal que satisfaga (en algún sentido a precisar) las condiciones

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \quad \text{c. p. t.} \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Condiciones suficientes para la resolución de (1) han sido obtenidas en atención a la diferente complejidad en que (1) era formulado. A modo de indicación se pueden citar los resultados de Hille, Yosida, Phillips ... (para A lineal y por tanto *unívoco*), Kato, Brezis, Pazy, ... (para X expacio de Hilbert) y más recientemente Crandall, Ligget, Benilan, ... (para X espacio de Banach cualquiera). (Una detallada bibliografía sobre el tema así como un gran número de aplicaciones se pueden encontrar en Crandall [9]). Aunque la gama de resultados es muy extensa, se puede decir que una gran parte de ellos se refieren al caso en que el operador es «acretivo».

DEFINICIÓN 1.—*Un operador* $A : D(A) \subset X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *(al que identificaremos con su grafo en* $X \times X$*) se dice* acretivo *si satisface una de las propiedades equivalentes:*

i) $\forall (x, y) \in A, \quad \forall (\hat{x}, \hat{y}) \in A, \quad \forall \lambda > 0 \; |x - \hat{x}| \leqslant |(x - \hat{x}) + \lambda (y - \hat{y})|$

ii) $\forall (x, y) \in A, \quad \forall (\hat{x}, \hat{y}) \in A,$ *se tiene* $\tau(x - \hat{x}, y - \hat{y}) \geqslant 0$

donde τ *es el producto semi-interior definido sobre* $X \times X$ *por*

$$\tau(x, y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{|x + \lambda y| - |x|}{\lambda}$$

Si $X = H$ es un espacio de Hilbert entonces el producto escalar coincide con $|x| \cdot \tau(x, y)$ y los operadores acretivos son denominados monótonos. En este caso un ejemplo usual (y de gran importancia en las aplicaciones) aparece con la derivada (subdiferencial) de un funcional convexo sobre H.

Nuestro interés se centra en el comportamiento «en el infinito» de las soluciones de (1). Una posible montivación puede partir de los resultados de Friedman, Pazy, Brezis, Baillon, etc., que aseguran (bajo diversas hipótesis sobre A y f) que si

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = f_\infty$$

entonces existe el límite

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_\infty$$

y además se tiene que

$$Au_\infty \ni f_\infty .$$

Así en concreto si

$$f_\infty = 0 \quad \text{y} \quad A^{-1}(0) = 0$$

entonces

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = 0.$$

Pues bien, nuestro objetivo es el estudio de una propiedad más fuerte, que parece peculiar del caso no lineal:

DEFINICIÓN 2.—*Se dirá que (1) satisface la propiedad de* anulación de soluciones *(en abreviado (A.S)) si* $\exists\, T_0 > 0$ *tal que* $u(t) = 0$ *para todo* t, $t \geqslant T_0$.

La propiedad (A.S) admite un tratamiento muy diferente según que se presuponga el operador A unívoco o multívoco en 0. Sólo el segundo caso trataremos aquí [2].

El plan a seguir en el resto de este trabajo es el siguiente. En § 2 se obtendrán unos resultados abstractos sobre la aparición de (A.S) bajo ciertas hipótesis que son «casi» las necesarias. Con ellos se extiende y precisa el resultado anteriormente obtenido por Brezis [7]. Aplicaciones a problemas parabólicos no lineales concretos serán dadas en § 3.

§ 2. Resultados abstractos.

A fin de estudiar cuándo la propiedad (A.S) es satisfecha por el problema (1), observemos que una condición necesaria para que esto suceda es

$$f(t) \in A(0) \quad \text{para} \quad t \quad \text{suficientemente grande} \tag{2}$$

como se deduce de la ecuación diferencial.

(2) Sólo se conocen resultados particulares sobre la aparición de (A . S) (también denominada de *extinción en tiempo finito*) para operadores unívocos en O. Véase p. e. Kalashnikov [14], Evans-Knerr [12], Bamberger [2], Veron [16] y G. Díaz-J. I. Díaz [10] entre otros.

Veremos que (2) es «casi» suficiente si se supone A multívoco en 0, pero antes precisemos el concepto de solución que utilizaremos en lo que sigue:

DEFINICIÓN 3 (Benilán [3]).—*Una función* u $\in C([0, +\infty): X)$ *se dice* solución integral *de (1) si satisface que* $u(0) = u_0$ *y*

$$\forall (x, y) \in A, \ | u(t) - x | \leq | u(r) - x | + \\ + \int_r^t \tau(u(s) - x, f(s) - y)\, ds, \ 0 \leq r \leq t < +\infty . \tag{3}$$

Es bien conocido que si A es acretivo y u es solución fuerte de (1)

$$(\text{e. d. } u \in W^{1,1}_{loc}(0, +\infty : X)$$

y satisface la ecuación en c. p. t. $t \in (0, +\infty)$) entonces se debe satisfacer (3) (e. d. u es solución integral). Sin embargo el recíproco no es cierto en general, precisándose entonces ciertas hipótesis adicionales. Por otro lado, si v es solución integral de

$$\frac{dv}{dt}(t) + Av(t) \ni g(t)$$

se tiene una cierta dependencia continua entre v y u dada por

$$| u(t) - v(t) | \leq | u(r) - v(r) | + \int_r^t \tau(u(s) - v(s), f(s) - g(s))\, ds \quad \forall r \geq 0 \tag{3*}$$

(véase Benilán [3]).

Existen diversos resultados que aseguran la existencia y unicidad de soluciones integrales; citemos por ejemplo el de Crandall-Ligget (1971), referente al caso de A acretivo tal que $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)}$. Nuestro resultado, sin embargo, *sólo utilizará la acretividad de A*, una vez supuesta la existencia de una solución integral de (1).

TEOREMA 1.—*Sea A un operador acretivo de X. Supongamos*

$$A, u_0 \in \overline{D(A)} \quad y \quad f \in L^1_{loc}(0, +\infty : X)$$

tales que (1) posee una única solución integral u.

Supongamos además que existe ρ: $[t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *integrable para algún* $t_0 \geqslant 0$, *tal que:*

$$B(f(t), \rho(t)) \subset A(0) \quad \textit{casi para todo} \quad t \geq t_0 \tag{4}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \rho(t)\, dt = +\infty \tag{5}$$

Entonces (1) satisface la propiedad (A.S) (e. d., $\forall\, u_0 \in \overline{D(A)}$, *la solución correspondiente* $u(t)$ *es tal que* $\exists\, T_0 \geqslant 0$ *tal que* $u(t) = 0$ $\forall\, t \geqslant T_0$*).*

Demostración.—Dado $u_0 \in \overline{D(A)}$, supondremos que $u(t) \neq 0$ para todo $t > 0$, pues si existiera t_1 tal que $u(t_1) = 0$ entonces la función

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad t < t_1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq t_1 \end{cases}$$

sería también solución integral de (1) y por la unicidad se obtendría el resultado deseado.

Observemos que de (4) se deduce que

$$f(s) + \rho(s) \cdot h(s) \in A(0) \quad \text{para todo} \quad h(s) \quad \text{con}$$
$$|h(s)|_X \leq 1 \quad \text{y c. p. t.} \quad s \in (t_0, +\infty)$$

Eligiendo entonces

$$v = 0, \quad g(s) = f(s) + \rho(s) \cdot h(s) \quad \text{y} \quad r = t_0$$

en (3*) se obtiene

$$|u(t)| \leq |u(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \tau(u(s),\ f(s) - f(s) - \rho(s) \cdot h(s))\, ds =$$
$$= |u(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \tau(u(s), -\rho(s)\, h(s))\, ds.$$

Ahora bien, como

$$\tau(x, \lambda y) = \lambda\, \tau(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall x,\ y \in X,$$

se obtiene

$$| u(t) | \leq | u(t_0) | + \int_{t_0}^{t} \rho(s) \tau(u(s), -h(s)) \, ds .$$

Tomando entonces

$$h(s) = \frac{u(s)}{| u(s) |}$$

y observando que

$$\tau(x, x) = | x | , \quad \forall x \in X$$

se obtiene finalmente

$$| u(t) | \leq | u(t_0) | - \int_{t_0}^{t} \rho(s) \, ds .$$

Basta entonces hacer t suficientemente grande para que gracias a la hipótesis (5) se llegue a que $u(t) = 0$, lo que es una contradicción.

NOTA 1.—La propiedad (A.S) había sido estudiada anteriormente en Brezis [7] bajo las hipótesis (4) y (5) para el caso de X espacio de Hilbert, A maximal monótono (e. d., R (I + A) = X) y u solución fuerte de (1).

La hipótesis (4) obliga a que A (0) sea topológicamente grande en X. Este es el caso de algunos operadores unidimensionales (3) y también el de algunos operadores acretivos sobre $L^\infty(\Omega)$.

NOTA 2.—El teorema 1 es fácilmente extensible al caso de sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A_1 u(t) + B_1 v(t) \ni f_1(t) & \text{c. p. t.} \quad t \in (0, +\infty) \\ \dfrac{dv}{dt}(t) + A_2 u(t) + B_2 v(t) \ni f_2(t) & \text{c. p. t.} \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

(3) Véase p. e. en Brezis [7] un problema de persecución formulado como una ecuación ordinaria multívoca.

siendo A_1 y A_2 operadores de X_1 y B_1 y B_2 operadores de X_2 tales que A_1 y B_2 son multívocos en 0 y el operador matricial

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$$

es acretivo sobre $X = X_1 \times X_2$.

NOTA 3.—Otro resultado abstracto, afirmando el cumplimiento de la propiedad (A.S) para operadores maximales monótonos multívocos en 0, ha sido obtenido en Barbu [2] para *problemas de contorno* del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u}{d t^2}(t) \in A\, u(t) \quad \text{c. p. t.} \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \\ \sup\limits_{t \geq 0} |u(t)| < +\infty \end{cases}$$

y por tanto de una naturaleza muy distinta a (1).

§ 3. Aplicaciones a operadores acretivos sobre L^∞

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$. En Benilán-Ha [4] y Ha [14] se ha estudiado de una manera sistemática la acretividad en $L^\infty(\Omega)$ de operadores de la forma $\beta(C)$, siendo β un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ (4) y C acretivo en $L^\infty(\Omega)$. En concreto, se pueden encontrar allí diversas condiciones sobre β y/o sobre C para que el operador $A = \beta(C)$ satisfaga que $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)}$.

Una consecuencia inmediata del teorema 1 es el siguiente resultado:

---

(4) Es cómodo recordar que tales grafos vienen caracterizados por ser el grafo de alguna función real Θ creciente, al que debe añadírsele los segmentos verticales

$$(-\infty,\ \theta(r+)] \quad \text{si} \quad \theta(r-) = -\infty,$$
$$[\theta(r-),\ \theta(r+)] \quad \text{y} \quad [\theta(r+),\ +\infty) \quad \text{si} \quad \theta(r+) = +\infty\,.$$

PROPOSICIÓN 1.—*Sea* β *un grafo maximal monótono de* $\mathbb{R}^2$ *con* $0 \in \beta(0)$ *tal que* $\beta^-(0) < \beta^+(0)$, *siendo*

$$\beta^-(0) = inf\, \beta(0) \quad y \quad \beta^+(0) = sup\, \beta(0).$$

Sean: C operador acretivo de $L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$C(0) = 0, \quad u_0 \in \overline{D(\beta C)} \quad y \quad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, +\infty : L^\infty(\Omega))$$

tales que existe una única solución integral en $L^\infty(\Omega)$ *del problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt}(t) + \beta(C\, u(t)) \ni f(t) \quad \text{c. p. t.} \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{7}$$

Supongamos finalmente que

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad y \quad \exists\, t_0 \geq 0 \quad \textit{tales que} \quad \beta^-(0) + \varepsilon \leq f(t, x) \leq \beta^+(0) - \varepsilon \quad c. p. t.$$
$$t \in [t_0, +\infty) \quad c. p. t. \quad x \in \Omega.$$

Entonces (1) posee la propiedad (A.S).

DEMOSTRACIÓN.—Por definición el operador A viene dado sobre $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ mediante el grafo siguiente:

$$A = \{[u, w] \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) : \exists\, v \in L^\infty(\Omega) \quad \text{tal que} \quad [u, v] \in C \quad y$$
$$w(x) \in \beta(v(x)) \quad \text{c. p. t.} \quad x \in \Omega\}.$$

luego

$$A(0) = \{w \in L^\infty(\Omega) \quad \text{tales que} \quad w(x) \in \beta(0) \quad \text{c. p. t.} \quad x \in \Omega\} =$$
$$= \{w \in L^\infty(\Omega) \quad \text{tales que} \quad \beta^-(0) \leq w(x) \leq \beta^+(0) \quad \text{c. p. t.} \quad x \in \Omega\}.$$

Por tanto, se tiene que

$$B_{L^\infty}(f(t), \varepsilon) \subset A(0) \quad \text{c. p. t.} \quad t \in [t_0, +\infty)$$

pues fijado

$$t \in [t_0, +\infty), \quad \text{si} \quad g \in B_{L^\infty}(f(t), \varepsilon)$$

es claro que

$$\beta^-(0) \leq f(t, x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(t, x) + \varepsilon \leq \beta^+(0).$$

Finalmente se tiene que

$$\int_{t_0}^{+\infty} \varepsilon \cdot dt = +\infty$$

y por tanto se satisfacen las hipótesis del teorema 1.

NOTA 4.—La proposición 1 podría formularse con mayor generalidad considerando familias de grafos $\beta(x, \cdot)$, medibles en $x \in \Omega$ y maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$ supuesto x fijo. La demostración no sufrirá ningún cambio importante.

Ilustremos mediante dos ejemplos el tipo de problemas que pueden ser formulados como (7):

EJEMPLO 1.—Sean β y γ grafos maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$0 \in \beta(0) \cap \gamma(0) \quad \text{y} \quad R(\beta) = \mathbb{R}.$$

Sea

$$D(\beta, \gamma) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma(u) \ni 0 \quad \text{c. p. t. p. de} \quad \partial\Omega \right.$$
$$\left. \text{y existe} \quad w \in L^\infty(\Omega) \quad \text{tal que} \quad w \in \beta(-\Delta u) \quad \text{c. p. t. p. de} \quad \Omega \right\}$$

siendo n el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. Se tiene entonces:

COROLARIO 1.—*Sean*

$$u_0 \in \overline{D(\beta, \gamma)}^{L^\infty} \quad y \quad f \in L^1_{loc}(0, +\infty : L^\infty(\Omega))$$

verificando (8). Entonces la solución integral

$$u \in C([0, +\infty) : L^\infty(\Omega))$$

del problema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \beta(-\Delta u(t,x)) \ni f(t,x) && c.p.t. \quad t \in (0,+\infty), \quad en \quad L^\infty(\Omega), \\ &-\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) \in \gamma(u(t,x)) && c.p.t. \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \partial\Omega \\ &u(0,x) = u_0(x) && c.p.t. \quad x \in \Omega \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

satisface que $u(t,x) = 0 \ \forall t \geqslant T_0$ *(en c. p. t.* $x \in \Omega$*) para algún* $T_0 \geqslant t_0$.

DEMOSTRACIÓN.—La existencia y unicidad han sido demostrados en [4]. La propiedad (A.S) se obtiene de la proposición 1.

NOTA 5.—El problema (9) aparece p. e. como problema «cuasi-estático» asociado a ciertos problemas hiperbólicos relativos a fenómenos de elasticidad con frotamiento. La propiedad (A.S) también puede obtenerse para algunos grafos tales que $\beta(0) = 0$. (Véase G. Díaz-J. I. Díaz [10].)

EJEMPLO 2.—Sea $\Psi : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty]$ convexa, continua y coerciva con $\Psi(0) = 0$ y sea β $g \cdot m \cdot m$ con $0 \in \beta(0)$ tal que $R(\beta) = \mathbb{R}$. Definamos el conjunto

$$\begin{aligned} D(\beta, \partial\Psi) = \{ u \in W_0^{1,\infty}(\Omega) : &\ \text{existe} \quad w \in (L^\infty(\Omega))^N \quad \text{tal que} \\ &w \in \partial\Psi(\operatorname{grad} u) \quad \text{c. p. t. p. de} \quad \Omega \quad \text{y} \quad \exists\, v \in L^\infty(\Omega) \quad \text{tal que} \\ &v = -\operatorname{div} w \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{y} \quad \int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega w \cdot \operatorname{grad} u \}. \end{aligned}$$

Se tiene entonces:

COROLARIO 2.—*Sean*

$$u_0 \in \overline{D(\beta, \partial\Psi)}^{L^\infty} \quad y \quad f \in L^1_{loc}(0, +\infty : L^\infty(\Omega))$$

verificando (8). Supongamos además que $\partial\Psi(0) = 0$. *Entonces la solución integral*

$$u \in C([0, +\infty) : L^\infty(\Omega))$$

del problema

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\beta(div\,\partial\Psi(grad\,u))\ni f(t,x) & c.p.t. & t\in(0,+\infty),\quad en\quad L^{\infty}(\Omega),\\ u(t,x)=0 & c.p.t. & (t,x)\in(0,+\infty)\times\partial\Omega\\ u(0,x)=u_0(x) & c.p.t. & x\in\Omega\end{array}\right\}(10)$$

Satisface que u (t, x) = 0 $\forall\, t \geq T_0$ *(en c. p. t.* $x \in \Omega$*) para algún* $T_0 \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN.—La existencia y unicidad es dada en [4] y la propiedad (A.S) se deduce de la proposición 1.

NOTA 6.—El problema (10) aparece p. e. en fenómenos de conducción de calor en medios con coeficientes términos dependientes del flujo de calor.

El caso de $\beta(0) = 0$ y C multívoco en 0 puede ser también considerado como lo muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.—Sea α grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \alpha(0)$ y sea

$$j: \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$$

convexa, s. c. i. y $j \not\equiv +\infty$ tal que $\partial j = \alpha$. Sea $\beta(r) = r$. $\forall\, r \in \mathbb{R}$. Sean

$$\phi_1(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx & \text{si} \quad u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ +\infty & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$\phi_2(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega} j(u(x))\,dx & \text{si} \quad u\in L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad j(u)\in L^1(\Omega)\\ +\infty & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Es bien conocido que ambos funcionales son convexos, s. c. i. sobre $L^2(\Omega)$ y distintos de $+\infty$. Además si $u \in D(\partial\phi_1) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $v \in L^2(\Omega)$ es tal que $v \in \partial\phi_1(u)$ sii

$$v=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\quad \text{en} \quad \Omega.$$

Por otra parte si $u \in D(\partial \phi_2) \subset L^2(\Omega)$, entonces $v \in L^2(\Omega)$ es tal que $v \in \partial \phi_2(u)$ sii $v(x) \in \alpha(u(x))$ c. p. t. $x \in \Omega$. (Véase Barbu [2], págs. 61 y 204). Es claro entonces que

$$\partial \phi_1 + \partial \phi_2 = \partial(\phi_1 + \phi_2)$$

pues la inclusión

$$(\partial \phi_1 + \partial \phi_2) \subset \partial(\phi_1 + \phi_2)$$

se tiene siempre, y además el operador $\partial \phi_1 + \partial \phi_2$ (dado formalmente por

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \alpha(u))$$

es maximal monótono sobre $L^2(\Omega)$, como se obtiene por las técnicas variacionales (véase p. e. Brezis [6]). Veamos que la restricción de $\partial(\phi_1 + \phi_2)$ a $L^\infty(\Omega)$ es acretivo en $L^\infty(\Omega)$:

PROPOSICIÓN.—*El operador A_p dado por el grafo en $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ siguiente*

$$(A_p, \Omega) = \{[u, v] \in (W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times L^\infty(\Omega)$$

tales que $\exists\, w \in L^\infty(\Omega)$ *con* $w(x) \in \alpha(u(x))$ *c. p. t.* $x \in \Omega$ *y*

$$v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + w\}$$

es acretivo en $L^\infty(\Omega)$ y además $R(I + \lambda A_p) = L^\infty(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN.—Gracias al Lemme III de [13] basta comprobar que se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, u,\ \hat{u} \in L^2(\Omega)\ \ \text{y}\ \ \forall\, p \in C^1(\mathbb{R})\ \ \text{con}\ \ 0 \leqslant p' \leqslant 1,\ \ p(0 = 0 \\ \phi(u - p(u - \hat{u})) + \phi(\hat{u} + p(u - \hat{u})) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u}). \end{array}\right\} \quad (11)$$

siendo $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Ahora bien, si $\phi(u) + \phi(\hat{u}) = +\infty$ (11) es trivial. Si $\phi(u) + \phi(\hat{u}) < +\infty$, entonces es claro que $u - p(u - \hat{u})$

y $\hat{u} + p\,(u - \hat{u}) \in D\,(\phi)$ y de la convexidad de las funciones reales $|\cdot|^p$ y j se deduce que

$$\phi\,(u - p\,(u - \hat{u})) + \phi\,(\hat{u} + p\,(u - \hat{u})) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| (1 - p'\,(u - \hat{u}))\, \frac{\partial u}{\partial x_i} + p'\,(u - \hat{u})\, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right|^p d\,x +$$

$$+ \int_\Omega j\,(u - p\,(u - \hat{u}))\,d\,x + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| (1 - p'\,(u - \hat{u}))\, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} + p'\,(u - \hat{u})\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p d\,x +$$

$$+ \int_\Omega j\,(\hat{u} + p\,(u - \hat{u}))\,d\,x \leqslant \frac{1}{p} \int_\Omega \left[(1 - p'\,(u - \hat{u})) \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p + \right.$$

$$\left. + (p'\,(u - \hat{u})) \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right|^p \right] d\,x + \frac{1}{p} \int_\Omega \left[1 - p'\,(u - \hat{u}) \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right|^p + \right.$$

$$\left. + (p'\,(u - \hat{u})) \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right] d\,x + \int_\Omega j\,(u)\,d\,x + \int_\Omega j\,(\hat{u})\,d\,x = \phi\,(u) + \phi\,(\hat{u}).$$

La anulación de soluciones se tiene finalmente si α es multívoco en 0:

Proposición 3.—*Sean*

$$u_0 \in \overline{D\,(A_p)}^{L^\infty} \quad y \quad f \in L^1_{loc}(0, +\infty : L^\infty\,(\Omega))$$

verificando

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; y \;\; \exists\, t_0 \geq 0 \quad \textit{tales que} \quad \alpha^-\,(0) + \varepsilon \leq f\,(t, x) \leq \alpha^+\,(0) - \varepsilon$$
$$c.p.t. \quad t \in]\,t_0, +\infty)$$
$$c.p.t. \quad x \in \Omega. \qquad (12)$$

Entonces la solución integral $u \in C\,([0, +\infty) : L^\infty\,(\Omega))$ *del problema*

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \alpha\,(u) \ni f & c.p.t. \quad t \in (0, \infty), \quad en \quad L^\infty(\Omega) \\ u\,(t, x) = 0 & c.p.t. \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \partial\Omega \\ u\,(0, x) = u_0\,(x) & c.p.t. \quad x \in \Omega \end{array}\right\} \qquad (13)$$

satisface que $u\,(t, x) = 0 \;\; \forall\, t \geqslant T_0$ *(en c. p. t.* $x \in \Omega$*) para algún* $T_0 \geqslant t_0$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta observar que

$$A_p(0) = \{w \in L^\infty(\Omega) \quad \text{tales que} \quad \alpha^-(0) \leq w(x) \leq \alpha^+(0) \quad \text{c. p. t.} \quad x \in \Omega\}$$

y entonces

$$B_{L^\infty}(f(t), \varepsilon) \subset A_p(0) \quad \text{c. p. t.} \quad t \in]t_0, +\infty)$$

por la hipótesis (12).

NOTA 7.—El problema (13 aparece p. e. en fenómenos de conducción no lineal del calor con un término de absorción de calor que también puede representar alguna restricción sobre la temperatura tal como la no negatividad en todo punto e instante.

Por otra parte, el problema (13) ha sido considerado en varios trabajos anteriores tales como los de Brezis-Friedman [8], Bensoussan-Lions [5] y Evans-Knerr [12]. En ellos se trata el caso de $\Omega = \mathbb{R}^N$, $p = 2$ y $\tilde{a}$ dado por $\tilde{a}(r) = 0$ si $r > 0$ y $\tilde{a}(0) = (-\infty, 0]$. La propiedad (A.S) es allí mostrada bajo la hipótesis (12) formulada como

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad f(t, x) \leq -\varepsilon \quad \text{c. p. t.} \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \qquad (12^*)$$

junto con la condición de que u_0 sea con soporte compacto, obteniéndose además la compacidad del soporte de la solución, como función espacial, para cada $t \geq 0$ fijo (propiedad P. F.)). El hecho de que la hipótesis (12*) junto con la compacidad del soporte de u_0 baste para obtener la propiedad (P. F.) ( ) hace que en los trabajos mencionados anteriormente las propiedades (P. F.) y (A. S.) aparezcan casualmente ligadas. Nuestra proposición 3 esclarece la independencia entre estos dos comportamientos y junto con las técnicas de Díaz-Herrero [12] permite extender los resultados de los autores precedentes, teniéndose:

PROPOSICIÓN 4.—*Sea* $u_0 \in D\,\overline{(A_p \cdot \mathbb{R}^N)}^{L}$ *con soporte compacto y*

$$f \in L^1_{loc}(]0, +\infty) : L^\infty(\mathbb{R}^N))$$

(5) Esto puede ser demostrado incluso para todo p con $1 < p < \infty$. (Véase Díaz-Herrero [11].)

verificando

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \textit{tal que} \quad f(t, x) \leq -\varepsilon \quad \textit{c.p.t.} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \tag{14}$$

Entonces existe una única solución integral

$$u \in C([0, \infty) : L^\infty(\mathbb{R}^N))$$

del problema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \alpha(u) \ni f \quad && \textit{c.p.t.} \quad t \in (0, +\infty), \\ & && \textit{en} \quad L^\infty(\mathbb{R}^n), (p \geq 2), \\ &u(0, x) = u_0(x) && \textit{c.p.t.} \quad x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Además se tiene que $\forall\, t > 0$ *el soporte de* $u(t, \cdot)$ *es compacto y existe* $T_0 \geqslant 0$ *tal que*

$$u(t, \cdot) = 0 \quad (\textit{en c.p.t.} \quad x \in \mathbb{R}^N) \quad \forall\, t \geq T_0.$$

Bibliografía

[1] BAMBERGER, A. 1977. *Etude d'une equation doublement non linéaire*. «Journal of Functional Analysis», **24**, pp. 148-155.

[2] BARBU, V. 1976. *Nonlinear semigrupos and differential equation in Banach spaces*. Nordhoff Int. Publ.

[3] BÉNILAN, PH. 1972. *Equations d'evolutions dans un espace de Banach quelconque et applications*. These d'etat. Orsay.

[4] — — et HA, K. 1975. *Equation d'evolution du type* $+$ $+\ \beta(-\Delta(u) \ni 0$ *dans* $L^\infty(\Omega)$. «C. R. Acad. Scien. Paris», **281**, pp. 947-950.

[5] BENSOUSSAN, A.-LIONS, J. L. 1976. *On the support of the solution of some variational inequalities of evolution*. «J. Math. Soc. Japan», vol. **28**, núm. 1.

[6] BREZIS, H. 1968. *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*. «Ann. Inst. Fourier», **18**, pp. 115-175.

[7] — — 1974. *Monotone operators, non linear semigrupos and applications*. Proc. Int. Congress. Math., Vancouver.

[8] — — and FRIEDMAN, A. 1976. *Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities*. III. «Journal of Math.», **20**, pp. 82-99.

[9] CRANDALL, M. 1974. *An introduction to Evolution Governed by Accretive Operators.* «Dynamical Systems». Inst. Symposium Providence.

[10] DÍAZ, G. and DÍAZ, J. I. 1979. *Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations.* Comm. in Part. Diff. Equations, n.º 10 (November).

[11] DÍAZ, J. I. and HERRERO, M. A. *Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems.* Aparecerá.

[12] EVANS, L. C. and KNERR, B. 1979. *Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities.* «Illinois J. Math.», **23**, 153-166.

[13] HA, K. 1976. *Sur des semi-groupes non linéaires dans les espaces $L^\infty(\Omega)$.* Thése du 3.ᵉ Cycle. Université de Paris, VI, Jun.

[15] KNERR, B. F. *The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absortion in one dimensión.* (Aparecerá).

[16] VERON, L. 1977. *Coercivité et propietés regularisantes des semigroupes non linéaires dans les espaces de Banach.* Publications de L'Université de Tours.