Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones- Valldoreix, Mayo 1979.

RESULTADOS Y METODOS SOBRE LA PROPIEDAD DE EXTINCION EN TIEMPO FINITO PARA ECUACIONES DE EVOLUCION.

Por J. Ildefonso Díaz Díaz
Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad Complutense de Madrid.

§1. Introducción.

Dado el problema de evolución

$$P \equiv \begin{cases} \text{Ecuación diferencial de evolución (sobre } X \text{ espacio de Banach y } t \in (0,\infty)) \\ \\ + \text{ Condiciones iniciales,} \end{cases}$$

diremos que se satisface la propiedad de extinción en tiempo finito si la solución u de P es tal que existe $T_0 < +\infty$ tal que $u(t)=0$ (en X) para todo $t \geq T_0$.

Es natural que el lector desconfíe de la aparición de esta propiedad para una clase "amplia" de problemas, pues existen resultados tajantes (y bien conocidos) que impiden que se produzca la extinción en tiempo finito. Recordemos, esquemáticamente, algunos de estos criterios negativos:

* Conservación de alguna "energía". (p.e. $\|u(t)\|_{L^p} = \|u(0)\|_{L^p}$).

- Caso de las ecuaciones de Schrodinger y de Klein-Gordon.
- Caso de las ecuaciones hiperbólicas lineales simétricas. (Se obtiene a partir del Teorema de Stone de generación de grupos unitarios).

* Principio fuerte del mínimo de Nirenberg.

- Caso de ecuaciones lineales uniformemente parabólicas. (Aplíquese a datos ≥ 0).

* Propiedad de "forward and backward unique continuation".

- Caso de ecuaciones lineales gobernadas por un semi-grupo analítico. (Véanse los trabajos de Yosida, Mizohata, etc...)

Sin embargo, hurgando entre los problemas lineales, es posible encontrar algunos casos concretos donde aparece la extinción en t.f.:

Ejemplo 1. (Díaz [12]). Dado Ω abierto regular acotado de $\mathbb{R}^N$, consideremos el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)-a(t)\Delta u(t,x) = 0 & t>0, \quad x\in\Omega \\ u(t,x) = 0 & t>0, \quad x\in\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x\in\Omega. \end{cases}$$

Entonces, si se supone

$$\exists\, T_0 > 0 \ \text{tal que} \int_0^{T_\infty} a(s)ds = +\infty$$

$$\Delta u_0 + u_0 = 0 \ \text{en} \ \Omega \ \text{y} \ u_0 = 0 \ \text{en} \ \partial\Omega,$$

la función

$$u(t,x) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)\cdot u_0(x) & \text{si} \quad 0\leq t<T_0 \\ 0 & \text{si} \quad t\geq T_0 \end{cases}$$

es solución del anterior problema. #

Ejemplo 2. (Majda [21]). Dado Ω abierto regular de $\mathbb{R}^N$, el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + c(x)\cdot u_t = 0 & t>0, \quad x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \gamma(x)u_t + \sigma(x)u = 0 & t>0, \quad x\in\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x\in\Omega \\ u_t(0,x) = u_1(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

(supuestos c, σ y γ funciones ≥ 0 y c con soporte compacto) posee extinción en t. f. $\Longleftrightarrow \gamma(x)\geq 1$ c.p.t $x\in\partial\Omega$ #

La situación es diferente cuando el problema P es no lineal. Como expondremos a continuación, existe una "amplia" clase de estos problemas para los que tiene la citada propiedad. Algunos de ellos tienen una importante relevancia física (véase más tarde el problema (4) que aparece con la "difusión de una partícula a través de un campo magnético en un plasma toroidal multípolo".

En lo que sigue de exposición, se hará más hincapié en los métodos existentes para obtener la propiedad que en los resultados. (Un enfoque diferente puede encontrarse en Díaz [12]). En concreto, el plan será el siguiente:

§2. Métodos de comparación:

2.1. Vía desigualdades de Sobolev.

2.2. Vía construcción de super y subsoluciones "ad hoc".

§3. Métodos abstractos.

§4. Observaciones finales.

En esencia, §2 se refiere a diversas ecuaciones parabólicas no lineales de 2º orden y §3 a ecuaciones variacionales parabólicas formuladas en términos de operadores acretivos. A fin de una exposición más fluida apenas se hará alusión a la existencia y unicidad de la solución, lo que se supondrá (y de hecho se tiene) sobre espacios funcionales adecuados. El lector "ortodoxo" puede encontrar esos detalles en Díaz [12] y/o la bibliografía de dicho trabajo.

§2. Métodos de comparación.

Como ya se ha dicho, tales métodos utilizan de forma esencial el hecho de que las ecuaciones en derivadas parciales de P sean de tipo parabólico y además de segundo orden. Esto permite que se tengan propiedades del estilo "principio del máximo y comparación de soluciones", al igual que el caso de la ecuación lineal del calor. La diferente utilización de estas propiedades conduce a la subclasificación siguiente:

2.1. Vía desigualdades de Sobolev.

Consideremos, por ejemplo, el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u^m = 0 & \text{en} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \quad (u_0 \geq 0) \end{cases}$$

Siguiendo a Benilan y Crandall [4], multipliquemos por $\frac{1}{\alpha+1} u^\alpha$ en la ecuación e integremos sobre $\mathbb{R}^N$. Tras utilizar la fórmula de Green se tendrá (formalmente) que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^m \, \nabla u^\alpha = 0$$

Tras cálculos, es fácil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^m \, \nabla u^\alpha = \frac{4m\alpha}{(m+\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u^{\frac{m+\alpha}{2}} \right|^2$$

Utilizando ahora la desigualdad de Sobolev $(H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $2^* = \frac{2N}{N-2})$ e.d.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2)^{1/2} \geq C(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi^{2^*}|)^{1/2^*}$$

se obtiene entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^m \, \nabla u^\alpha \geq C(\int_{\mathbb{R}^N} u^{(m+\alpha)\frac{2^*}{2}})^{2/2^*}$$

(por comodidad las constantes se representan uniformemente por C). Tomando α de forma que $(m+\alpha)2^*/2 = \alpha+1$ (e.d. $\alpha = \frac{(2-m2)}{2^*-2}$) y exigiendo que sea positiva (e.d. $0 < m < \frac{N-2}{N}$), se obtiene finalmente que

$$\frac{d}{dt} (\int_{\mathbb{R}^N} u^{\alpha+1}) + c(\int_{\mathbb{R}^N} u^{\alpha+1})^{2/2^*} \leq 0$$

Ahora bien, toda función f verificando la desigualdad

$$f' + cf^\gamma \leq 0 \quad (f: [0,\infty) \to [0,\infty),\ c > 0,\ \underline{0 < \gamma < 1})$$

tiene la propiedad de que $\exists\, T_0 > 0$ tal que $f(t) = 0$ para $t \geq T_0$, pues basta comparar f con la función

$$g(t) = \begin{cases} a(T_0-t)^{\frac{1}{1-\gamma}} & \text{si} \quad t \leq T_0, \quad a = ((1-\gamma)C)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ 0 & \text{si} \quad t \geq T_0. \end{cases}$$

En efecto, es claro que g satisface

$$g' + Cg = 0$$

y como $g(0) = a\,T_0^{\frac{1}{1-\gamma}}$, basta tomar T_0 suficientemente grande para que $g(0) \geq f(0)$ y entonces se obtendría que $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

Los argumentos anteriores pueden justificarse rigurosamente obteniéndose:

Teorema 1. (Benilan-Crandall [4]).

Sean $N \geq 3$, $0 < m < \frac{N-2}{N}$, $\alpha = \frac{2-m2^*}{2^*-2}$ y $u_0 \in L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces el problema

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta(|u|^m \cdot \text{sign } u) = 0 & \text{en} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

posee una única solución $u \in C([0,\infty): L^1(\Omega))$, extinguiéndose en tiempo finito. #

En el anterior trabajo se muestra que si $\frac{N-2}{N} < m \leq 1$ se tiene conservación de la norma L^1, por lo que no puede haber extinción en t.f. Sin embargo, se verá en 2.2 que si se estudia la ecuación de (1) sobre un abierto Ω acotado de $\mathbb{R}^N$ y con condiciones de Dirichlet, la extinción aparece cuando $0 < m < 1$. (1)

El método anterior ha sido también aplicado a otras ecuaciones no lineales. Así por ejemplo Bamberger [1] ha mostrado la propiedad en cuestión para la ecuación

$$u_t - \Delta_p u = 0 \quad \text{en} \quad (0,\infty) \times \Omega$$

donde

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

Ω es un abierto acotado y $\frac{2N}{N+2} < p < 2$. El caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ ha sido tratado por Herrero-Vázquez [19] mostrando que $\forall p > 1$ se conserva una cierta norma.

2.2. Vía construcción de super y subsoluciones "ad hoc".

En esencia, se trata de construir super y subsoluciones $\bar{u}$ y $\underline{u}$ extinguiéndose en t.f. Así, los "teoremas de comparación" aseguran que

$$\underline{u}(t,\cdot) \leq u(t,\cdot) \leq \bar{u}(t;\cdot) \text{ para todo } t \in [0,\infty)$$

(supuesta u solución del problema en consideración) y de aquí la conclusión. Tales resultados de comparación son característicos de las ecuaciones de 2ª orden, y en los problemas no lineales la dificultad mayor para su obtención reside en la poca regularidad de la solución (Para un resultado tipo véase p.e., G. Díaz-I. Díaz [9]).

---

(1) Esto también puede obtenerse mediante una utilización de la desigualdad de Sobolev diferente a la aquí indicada. (Berriman-Holland [5]).

A modo de ilustración, construyamos $\bar{u}$ para el problema

$$(2)\quad \begin{cases} u_t - \Delta(|u|^m \cdot \text{sign } u) = 0 & \text{en } (0,\infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

cuando se supone: Ω acotado, $0 < m < 1$ y $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer además que $u_0 \geq 0$. Sea $g(x)$ tal que

$$\exists\ \lambda > 0 \text{ tal que } g + \lambda\Delta g = 0 \text{ en } \Omega$$
y
$$\exists\ \theta > 0 \text{ tal que } 0 < \theta \leq g(x) \leq 1 \text{ en } \bar{\Omega}.$$

(tal función puede obtenerse entre los valores propios de Δ para el problema de Dirichlet sobre $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} \supset\supset \Omega$). Consideremos $f_0 > 0$ suficientemente grande para que

$$f_0 \cdot \theta^{1/m} \geq \|u_0\|_{L^\infty}$$

sea entonces $f(t)$ la solución de la ec. ordinaria $f'(t) + \frac{1}{\lambda} f(t)^m = 0$ con $f(0) = f_0$ (gracias a que $0<m<1$ se sabe que f se extingue a partir de un $T_0 < \infty$). Consideremos finalmente $\bar{u}(t,x) = f(t) \cdot (g(x))^{1/m}$. Se tiene que

a) $\bar{u}(t,x) = 0$ para $t \geq T_0$

b) $\bar{u}(0,x) \geq f_0 \cdot \theta^{1/m} \geq \|u_0\|_{L^\infty} \geq u_0(x)$ en Ω

c) $\bar{u}(t,x) \geq 0$ en $(0,\infty) \times \bar{\Omega}$

d) $\bar{u}_t - \Delta\bar{u}^m = f'(t) g(x)^{1/m} - f(t)^m \Delta g(x) \geq f'(t) g(x) + f(t)^m \frac{g(x)}{\lambda} = g(x)(f'(t) + \frac{f(t)^m}{\lambda}) = 0$ en $(0,\infty) \times \Omega$

por lo que $\bar{u}$ es efectivamente una supersolución adecuada a nuestro fin.

Los razonamientos anteriores pueden ser fácilmente extendidos a la ecuación más general

$$(3)\quad u_t - \Delta\beta(u) = 0 \quad \text{en } (0,\infty) \times \Omega$$

cuando se supone $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $\beta(0) = 0; \beta' > 0$, $\beta'' < 0$ y tal que

$$(4)\quad \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty,$$

supuesto $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ (Evans [16]). El siguiente resultado prescinde de toda hipótesis de derivabilidad sobre β, es válido para datos u_0 no necesariamente acotados y además establece la necesidad de (4):

Teorema 2. (G. Díaz - I. Díaz [9]).

Sea Ω acotado y u_0 (p.e.) tal que $u_0 \in L^p(\Omega)$, con $p > \max\{\frac{2N}{N+2}, N/2\}$. Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (p.e.), continua no decreciente tal que $\beta(0) = 0$ y sea $u \in C([0,\infty) : L^1(\Omega))$ la solución de

$$(5)\quad \begin{cases} u_t - \Delta\beta(u) = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \beta(u) = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Entonces la condición necesaria y suficiente para que u se extinga en t.f., es que β satisfaga (4). ∎

La demostración del Teorema 2 se basa en el establecimiento inicial de la misma conclusión para las soluciones del problema

(6) $$\begin{cases} v_t + \beta(-\Delta v) = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega \\ v = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases}$$

cuando $v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Por otro lado se muestra que si $u_0 = -\Delta v_0$ entonces $u(t,x) = -\Delta v(t,x)$ y ésto junto a ciertos resultados sobre la regularidad de u concluye la prueba. Es de señalar que el Teorema 2 es establecido incluso para β grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ verificando $0 \in \beta(0)$ y $D(\beta) = R(\beta) = \mathbb{R}$ (2).

Relativo al problema (2) es de destacar el trabajo de Berryman-Holland [5] en el que se estudia minuciosamente el comportamiento de la solución para $t \to T_0$ cuando $0 < m < 1$.

Finalizaremos esta sección con dos resultados abstractos aplicables bajo la hipótesis de comparación de soluciones ($\Longleftrightarrow$ T-acretividad):

Teorema 3.

a) (Veron [22]). Sean A un operador T-acretivo en $L^1(\Omega)$, β grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $\beta(0) \ni 0$ y $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Entonces toda solución del problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) + \beta(u(t)) \ni 0 & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

se extingue en t. f. si β satisface (4).

---

(2) Un resultado para (6) relativo a β dependiendo de x y para operadores elípticos de 2º orden más generales que $-\Delta$ se debe a G. Díaz [8].

b) (I. Díaz [13]). Sea A un operador T-acretivo en $L^1(\Omega)$ y q-homogéneo (e.d. $A(\lambda u) = |\lambda|^{q-1}\lambda A(u)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall u \in D(A)$). Entonces supuesto que $\rho \equiv m \cdot q - 1$ es $\rho > 0$, toda solución del problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(|u|^m \cdot \operatorname{sign} u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

satisface

$$u(t) \geq u(s)\left(\frac{s}{t}\right)^{1/\rho} \quad \forall t \geq s > 0 \quad (\text{supuesto } u_0 \in L^1(\Omega),\ u_0 \geq 0)$$

y por tanto no puede haber extinción en t.f. //

Otros criterios positivos para diferentes problemas perturbados, y negativos para otros operadores homogéneos, pueden encontrarse en los trabajos antes reseñados.

§3. Métodos abstractos.

El problema P de §1 puede ser formulado con más precisión como

$$P \equiv \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) \ni f(t), & t \in (0,\infty),\ u(t) \in X, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

siendo X espacio de Banach, $A: D(A)\ (\subset X) \to \mathcal{P}(X)$, $f \in L^1_{loc}(0,\infty:X)$ y $u_0 \in X$. En estas circunstancias es posible dar algunos criterios sobre A y sobre f para que la solución u se extinga en t.f.

Este es el caso de operadores A que son multívocos en el orígen, situación a la que se llega en el estudio de las Inecuaciones Variacionales de Evolución (El lector puede encontrar en Duvaut--Lions [15] una formulación concreta de estos problemas así como, algunos fenómenos físicos en los que aparecen).

Antes que nada, observemos que una condición de compatibilidad con la aparición de la citada propiedad es que se tenga

$$A(0) \ni f(t), \quad \text{en } X \text{ y c.p.t. } t \text{ suficientemente grande}$$

El siguiente resultado muestra que la anterior condición es "casi suficiente" cuando se supone A multívoco en el origen.

Teorema 4. (I. Díaz [11]).

Sea A un operador acretivo ([3]) en X y f y u_0 tales que existe una única solución de P. Supongamos que existen t_0 y $\rho: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ integrable, tales que

(7) $$B(f(t)), \rho(t)) \subset A(0) \quad \text{c.p.t. } t \geq t_0$$

(8) $$\int_{t_0}^{\infty} \rho(s)ds = +\infty$$

Entonces la solución (integral) de P se extingue en tiempo finito.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u(t) \neq 0$ para todo $t > 0$, pues si $\exists t_1$ tal que $u(t_1) = 0$ entonces la función

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t < t_1 \\ 0 & \text{si } t \geq t_1 \end{cases}$$

sería otra solución de P lo que contradice la unicidad. Gracias a (7) se tiene que $f(s) + \rho(s) \cdot h(s) \in A(0)$ para todo $h(s)$ con $\|h(s)\|_X \leq 1$ c.p.t. $s \in (t_0, \infty)$. Es claro entonces que la función $\hat{u}(t) \equiv 0$ es una solución de P correspondiente a los datos $\hat{f}(t) = f(t) + \rho(t) \cdot h(t)$ y $\hat{u}_0 = 0$. Recordando ahora que por la acretividad de A se sabe que (Benilan [2])

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \|u(t_0) - \hat{u}(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \tau(u(s)-\hat{u}(s), f(s)-\hat{f}(s))ds$$

obtenemos finalmente que

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \tau(u(s), -\rho(s)h(s))ds$$

Pero es fácil comprobar que $\tau(x,\lambda y) = \lambda\tau(x,y)$ por lo que se tiene

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| - \int_{t_0}^{t} \rho(s) \cdot \tau(u(s), h(s))ds.$$

Tomando ahora $h(s) = \frac{u(s)}{\|u(s)\|}$ y observando que $\tau(x,x) = \|x\|$ se concluye que

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| - \int_{t_0}^{t} \rho(s)ds.$$

Haciendo t suficientemente grande y gracias a (8) se obtiene $u(t) = 0$ lo que es una contradicción.#

Las condiciones (7) y (8) obligan a que $A(0)$ sea topológicamente grande en X. Si se supone X e. de Hilbert el resultado (primeramente establecido en Brezis [6]) es de difícil aplicación salvo para el caso de $X = \mathbb{R}^N$ y entonces P es una ecuación ordina-

---

([3]) Definido el producto $\tau(x,y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$ $\forall (x,y) \in X \times X$, se dice que A es acretivo si $\tau(x-\hat{x}, y-\hat{y}) \geq 0$ $\forall y \in Ax$, $\forall \hat{y} \in A\hat{x}$, $\forall x, \hat{x} \in D(A)$.

ria multívoca. Sin embargo si se toma $X = L^\infty(\Omega)$ (Ω abierto de $\mathbb{R}^N$) son posibles múltiples aplicaciones a problemas en ecuaciones en derivadas parciales. A modo de ilustración expongamos dos ejemplos:

Corolario 1. (I. Díaz [11]).

Sea β un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ tal que $\beta(0) = [\beta^-, \beta^+]$ con $\beta^- < \beta^+$. Sean p.e., $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$ y $f \in L^1_{loc}(0,\infty: L^\infty(\Omega))$ verificando:

(9) $\exists \varepsilon > 0$ y $\exists t_0 \geq 0$ tales que $\beta^- + \varepsilon \leq f(t,x) \leq \beta^+ - \varepsilon$ c.p.t. $(t,x) \in [t_0, \infty) \times \Omega$. Entonces los siguiente problemas poseen la propiedad de extinción en t.f.:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u + \beta(u) \ni f & t > 0, \text{ en } L^\infty(\Omega) \\ u = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

y

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \beta(-\Delta u) \ni f & t > 0, \text{ en } L^\infty(\Omega) \\ u = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega. \# \end{cases}$$

El problema (10) había sido antes considerado por varios autores (Brezis-Friedman, Bensoussan-Lions, Evans-Knerr, etc...) para $p = 2$ y un caso concreto de β. Ellos obtenían la extinción en t.f. tomando en (9) $t_0 = 0$ y mostrando a la vez la propiedad de propagación finita de las señales. Esta conjunción de las dos propiedades aparece más en general para (10) cuando se toma $p \geq 2$ y (9) con $t_0 = 0$ (véase Díaz-Herrero [14]).

Mediante la relación establecida entre (6) (~(11)) y (5) en el curso de la demostración del teorema 2, es posible formular un resultado de extinción para

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) \ni f \qquad \text{en} \qquad (0,\infty) \times \Omega$$

Observemos que ahora la condición de compatibilidad a exigir es que se tenga $-\Delta\beta(0) \ni f(t,\cdot)$ para t suficientemente grande, o más correctamente

$$(12)\qquad \beta(0) \ni (-\Delta)^{-1} f(t,\cdot) \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande.}$$

Cuando $\beta(0) = 0$, (12) se reduce a exigir que $f(t,\cdot) = 0$ para $t \geq t_0$ y en dicho caso el Teorema 2 puede ser fácilmente modificado. Cuando β es multívoco en el origen, el Corolario 1 y la relación mencionada afirman que (12) es "casi suficiente", teniéndose la extinción en t.f. si

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ y } \ \exists t_0 \geq 0 \ \text{ tales que } \ \beta^- + \varepsilon \leq (-\Delta)^{-1} f(t,\cdot) \leq$$
$$\leq \beta^+ - \varepsilon \quad \text{c.p.t.} \quad t \in [t_0,\infty)$$

Como comentario final a esta sección, señalemos que aunque el Teorema 4 no exige la T-acretividad de A sin embargo hasta el momento no son conocidas más aplicaciones que las correspondientes a $X = L^\infty(\Omega)$ y entonces la condición de acretividad está ligada de manera implícita a propiedades de tipo principio del máximo (que caracterizan a los operadores de 2º orden). Sería interesante conocer algún resultado (por particular que éste sea) relativo a la extinción en t.f. para operadores de orden superior a dos.

§4. Observaciones finales.

4.1. Los anteriores métodos permiten el "bricolage" de nuevos resultados al aplicarlos a problemas diferentes. Ilustraremos ésto el estudio de una nueva condición de contorno y de otra ecuación no lineal:

4.1.1. Dado γ grafo maximale monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \gamma(0)$, $m > 0$ y Ω abierto regular acotado de $\mathbb{R}^N$, consideremos el problema

$$(13)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta(|u^m| \cdot \text{sign } u) = 0 & \text{en } (0,\infty) \times \Omega \\ -\dfrac{\partial(|u|^m \text{ sign } u)}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en } (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

La existencia de soluciones (integrales) en $L^1(\Omega)$ se tiene gracias a un resultado de Benilan [2] y varios criterios de comparación se pueden encontrar en I. Díaz [10].

A fin de estudiar la extinción en t.f. observemos que si suponemos $u_0 \geq 0$ y γ unívoco (por simplicidad), se tiene "formalmente" que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u = \int_\Omega \frac{du}{dt} = \int_\Omega \Delta u^m = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^m}{\partial n} = -\int_{\partial\Omega} \gamma(u)$$

por lo que si $\gamma^{-1}(0)$ es un cerrado que no se reduce al $\{0\}$, es posible obtener soluciones que conservan su $\| \ \|_{L^1}$ en el tiempo. Más concretamente se tiene que si $K \in \mathbb{R}^+$ es tal que $\gamma(K) = 0$ entonces la función $u(t,\cdot) \equiv K$ es la solución de (13) correspondiente a $u_0(x) \equiv K$ y está claro que u no se extingue.

El siguiente resultado muestra la extinción bajo una hipótesis más fuerte que la de compatibilidad $(\gamma^{-1}(0) = 0)$:

Teorema 5.

Supuestos $0 < m < 1$ γ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \gamma(0)$ y verificando:

(14) *existe $C > 0$ tal que $|\gamma^0(r)| \geq C|r|^m$ para todo $r \in D(\gamma)$*

entonces para todo $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, la solución $u \in C([0,\infty): L^1(\Omega))$ de (13) se extingue en tiempo finito.

Demostración.

Por los resultados de comparación, se puede suponer $u_0 \geq 0$ sin pérdida de generalidad. Como en 2.2, bastará construir una supersolución $\hat{u}$ extinguiéndose en t.f. Definamos como antes $\hat{u}(t,x) = f(t) \cdot (g(x))^{1/m}$ donde ahora $g(x)$ se toma de forma que

$$\exists \lambda > 0 \quad \text{tal que} \quad g + \lambda\Delta g = 0 \quad \text{en } \Omega \text{ y}$$

$$-\frac{\partial g}{\partial n} = C.g \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

Gracias a un teorema debido a Krein-Rutman (véase p.e. Courant-Hilbert [7]), se sabe que $\exists \Theta > 0$ tal que $0 < \Theta \leq g(x) \leq 1$ en $\overline{\Omega}$.

Finalmente escojamos $f(t)$ como en 2.2. Las propiedades a), b), c) y d) de allí siguen siendo válidas para nuestra supersolución $\hat{u}$, pero la condición c) (e.d. la información en $(0,\infty) \times \partial\Omega$) no basta para poder aplicar los resultados de comparación. Una relación suficiente para ésto (véase Díaz [10])

$$-\frac{\partial \hat{u}^m}{\partial n}(t,x) \leq \gamma^0(\hat{u}) \quad \text{en } (0,\infty) \times \partial\Omega$$

siendo $\gamma^0(s)$ elemento de norma mínima del conjunto $\gamma(s)$. Ahora bien, es claro que

$$-\frac{\partial \hat{u}^m}{\partial n}(t,x) = -f(t)^m \cdot \frac{\partial g}{\partial n}(x) = f^m(t)\cdot C\cdot g(x) \le C\cdot(\hat{u}(t,x))^m \le$$

$$\le \gamma^0(\hat{u}(t,x)) \quad \text{en} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega$$

con lo que concluye la demostración ([4]). #

Es fácil ver que la hipótesis (14) no puede ser mejorada (sustancialmente) si se utiliza una supersolución de variables separables. Sería interesante entonces emplear otros métodos o conocer si (14) es también necesaria.

4.1.2. Otro problema motivo de la atención de varios autores es el dado por

$$(15)\quad \begin{cases} u_t - \Delta_p |u|^m \cdot \text{sign } u = 0 & \text{en} \quad (0,\infty)\times\Omega \ (\Omega \text{ acotado}) \\ & \qquad m>0,\ p>1 \\ u = 0 & \text{en} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Diferentes teoremas de existencia han sido dados por Bamberger [1] Kalahsnikov [20] Benilan [3]... . En concreto se puede asegurar la existencia de una única solución (integral) $u \in C([0,\infty):L^1(\Omega))$ supuesto $u_0 \in L^1(\Omega)$. Varios criterios de comparación pueden encontrarse en Benilan [3], Herrero [18],... y en lo que sigue, los supondremos válidos para nuestras condiciones $(m>0 \ \text{ y } \ p>1)$.

([4]) El autor agradece la sugerencia de J. Hernández sobre la consideración del problema (13) mediante las técnicas 2.2.

Una primera observación en el estudio de la extinción para (15) es que el Teorema 3,b) puede ser aplicado a $q = p-1$ por lo que si

$$m\cdot(p-1) > 1$$

no puede verificarse la propiedad. Por otra parte es fácil buscar contraejemplos para el caso $m\cdot(p-1) = 1$ (tómese p.e. $m=1$, $p=2$ y se obtendrá la ecuación lineal del calor). Veamos a continuación un resultado positivo:

Teorema 6.

Dado Ω acotado y $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, la solución $u \in C([0,\infty):L^1(\Omega))$ de (15) se extingue en tiempo finito en los siguientes casos

a) $p \ge 2$ y $m\cdot(p-1) < 1$

b) $m\cdot(p-1) < 1 < (p^*-1)m$ (siendo p^* dado por $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $\frac{1}{p} - \frac{1}{N} > 0$ y $p^* = +\infty$ en otro caso).

Demostración.

De nuevo basta suponer $u_0 \ge 0$ y explicitar la supersolución $\tilde{u}(t,x)$. Sea $\tilde{m} = m(p-1)$. Para el caso a) se define $\tilde{u}(t,x) = \tilde{f}(t)(\tilde{g}(x))^{1/m}$, siendo ahora elegida $\tilde{g}$ de forma que

$$\exists\lambda > 0 \quad \text{tal que} \quad \tilde{g}(x) + \lambda\Delta_p\tilde{g}(x) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Gracias a que la inclusión de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, se puede aplicar un resultado de Bamberger [1] asegurando la existencia de una tal función $\tilde{g}$, verificando además que

$$\exists\Theta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < \Theta \le \tilde{g}(x) \le 1 \quad \text{en} \quad \bar{\Omega}.$$

La función $\tilde{f}$ es escogida como solución del problema

$$\begin{cases} \tilde{f}'(t) + \dfrac{(\tilde{f}(t))^{\tilde{m}}}{\lambda} = 0 \\ \tilde{f}(0) = f_0 \qquad\qquad (f_0 \cdot \theta^{1/m} \geq \|u_0\|_{L^\infty}) \end{cases}$$

Es claro entonces que $\tilde{u}$ se extingue en t.f. y además verifica que

$$\tilde{u}_t - \Delta_p \tilde{u}^m = \tilde{f}'(t)(\tilde{g}(s))^{1/m} - \tilde{f}(t)^{\tilde{m}} \Delta_p g(x) \geq f'(t)\ g(x) + \frac{f(t)^{\tilde{m}}}{\lambda}\ g(x) = 0$$

El resto de las condiciones son igualmente satisfecha al igual que en 2.2. Para el caso b) se define $\tilde{u}(t,x) = \tilde{f}(t).\ \tilde{g}(x)$ donde ahora g debe satisfacer

$$\exists\, \lambda > 0 \quad \text{tal que} \quad \tilde{g}(x) + \lambda \Delta_p \tilde{g}(x)^m = 0 \quad \text{en} \quad \Omega$$

En este caso la hipótesis $1 < (p^*-1)m$ asegura la aplicabilidad del resultado de Bamberger [1], siendo el resto de los detalles similares al caso a). $\#$

El apartado b) había sido demostrado por Bamberger [1] mediante técnicas similares a 2.1. Estos métodos son también aplicables a $\Omega = \mathbb{R}^N$ (véase Herrero-Vázquez [19]).

4.2. Es interesantes el estudio de aquellos problemas en los que se dan simultaneamente las propiedades de extinción finita y de propagación finita de las señales.

En el caso de modelos de difusión (sin términos de absorción) no son conocidos resultados sobre esta coincidencia, y sin embargo existen resultados concretos que aseguran la imposibilidad de

que se realicen a la vez. (Véase, por ejemplo el Teorema 2 junto con el Teorema 1 de I. Díaz [10]). Esto ha sido el punto de partida de la clasificación de los modelos de difusión del calor (en lentos, rápidos y de tipo lineal) introducida en I. Díaz [12].

Cuando el modelo incluye términos de absorción adecuados la situación es enteramente diferente produciéndose la simultaneidad de dichos fenómenos e incluso otra propiedad aún más fuerte que es conocida como propiedad de contracción instantanea del soporte. (Para más referencias véase p.e. Herrero [17] y la comunicación de este autor en el presente Congreso).

5. Referencias.

[1] A. Bamberger, "Etude d'une equation doublement non lineaire", J. Functional Analysis 24, 148-155. 1977

[2] Ph. Benilan, "Equations d'evolution dans un espace de Banach quelconque et applications". Tesis, Universidad de Orsay, 1972.

[3] Ph. Benilan, "Operateurs accretifs et semi-groups dans les espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$". Publications de L'Univ. de Besancon. 1977.

[4] Ph. Benilan y M.G. Crandall, "The continuous dependence on ϕ of solution of $u_t - \Delta\phi(u) = 0$". T.S.R. Mathematics Research Center. Univ. of Wisconsin-Madison (Aparecera)

[5] J.C. Berryman y C.J. Holland, "Stability of the separable solution for fast diffusion". Aparecerá en Arch. Rational Mech. Anal.

[6] H. Brezis, "Monotone operators, non linear semigroups and applications", Proc. Int. Congress Math. Vancouver. 1974.

[7] R. Courant y D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", New York. Interscience 1953.

[8] G. Díaz Díaz, "Extinción finita para ecuaciones parabólicas con no linealidades sobre operadores elípticos", (Aparecerá en las actas de las VI$^{\underline{a}}$ Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. Santander 1979.

[9] G. Díaz Díaz y J.I. Díaz Díaz, "Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations", Aparecerá en Comm. in Part. Diff. Equations.

[10] J.I. Díaz Díaz, "Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems", Aparecerá en J. of Non. Anal.

[11] J.I. Díaz Díaz, "Anulación de soluciones para ciertos problemas parabólicos no lineales", Rev. Real Acad. Ci. Exactas, Fis. y Nat. Madrid LXXII, 613-619, 1979 (y artículo detallado a aparecer en la misma revista).

[12] J.I. Díaz Díaz, "Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabólicos no lineales: Una clasificación para los modelos de difusión del calor", Aparecerá en Rev. Real Acad. Ci. Exactas, Fisicas y Nat. Madrid.

[13] J.I. Díaz Díaz, Trabajo en realización.

[14] J.I. Díaz Díaz y M.A. Herrero García, "Compact support properties for some elliptic and parabolic equations arising in the theory of Non Newtonian fluids", Aparecera.

[15] G. Duvaut y J.L. Lions, "Les inequations en Mecanique et en Physique", Dunod. Paris 1972.

[16] L.C. Evans, Resultado no publicado.

[17] M.A. Herrero García, "Sobre el comportamiento de las soluciones de algunos problemas parabólicos no lineales", Aparecerá en Rev. Real Acad. Ci. Exactas, Fis. y Nat. Madrid.

[18] M.A. Herrero García, "Comportamiento de las soluciones de ciertos problemas no lineales sobre dominios no acotados", Tesis, Univ. Complutense de Madrid. 1979.

[19] M.A. Herrero García y J.L. Vázquez Suárez, Trabajo en redacción

[20] A.S. Kalashnikov, "On a non-linear equation arising in the theory of non-stationary filtration", Actas del Seminario I. G. Petrowski. Vol. 4, 137-146. Izd. Moscovsk. Univ. 1978.

[21] A. Majda, "Disappearing solutions for the dissipative wave eqs.". Indiana Univ. Math. Jur. 24, 1119-1133, 1975.

[22] L. Veron, Coercivite et proprietes regularisantes des semi-groupes dans les espaces de Banach", Publ. Math. Fac. Sci. Besancon, n$^{\underline{o}}$ 3. 1977.