Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

RESULTADOS DE COMPARACIÓN PARA ECUACIONES DE EVOLUCION NO LINEALES.

J. Ildefonso Díaz Díaz

Universidad Complutense de Madrid
Universidad de Santander

ABSTRACT. We survey some results of comparison of solutions for nonlinear evolution equations. We consider the comparison of solutions satisfying the same differential equation and different initial data as well as the case of solutions of distinct differential equations. This last situation has been firstly considered in a systematic way in a work of Ph. Benilan jointly the author which is here shortly presented. In both cases we begin considering the nonlinear problems under a concrete formulation (in terms of partial differential equations) and later, under its formulation as an abstract Cauchy problem on a Banach space.

AMS Subject classification scheme 1979: 35OK20, 34G20, 47M06.

1. Comparación de soluciones correspondientes a distintos datos iniciales.

Una propiedad típica de las ecuaciones parabólicas de segundo orden es el principio del máximo. Así por ejemplo es bien conocido que si se considera el problema mixto

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 & \text{en} \quad (0,T) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Supuestos $0 < T \leq +\infty$, Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ y $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, entonces $u_0 \;\; 0$ implica que u (solución clásica de (1)) es tal que $u(t,x) \geq 0$ $\forall (t,x) \in [0,T) \times \bar{\Omega}$. Como una consecuencia inmediata de tal principio podemos asegurar que si u y $\hat{u}$ son las soluciones (clásicas) de (1) correspondientes a los datos iniciales u_0 y $\hat{u}_0$ entonces

$u_0 \leq \hat{u}_0$ implica que $u(t,x) \leq \hat{u}(t,x)$ $\forall (t,x) \leq [0,T) \times \bar{\Omega}$.

El anterior resultado de comparación de soluciones es de una gran utilidad en el estudio de (1) (por ejemplo permite asegurar la unicidad de soluciones clásicas) y de hecho es también válido para muchos otros problemas: otras condiciones de contorno, otras ecuaciones parabólicas lineales de segundo orden, dominios no acotados etc. (Véase p.e. Protter-Weimberger [10]).

También se tienen resultados de comparación de soluciones (clásicas) para el caso de ecuaciones parabólicas cuasi-lineales de segundo orden. Tal formulación aparece, por ejemplo, en fenómenos de difusión del calor en las que el coeficiente de conductividad térmica k depende (continuamente) de los valores de la temperatura $u(t,x)$. Supuestos constantes ρ (densidad) así como c (calor específico), una simple renormalización conduce a la ecuación.

(2) $$u_t - \operatorname{div}\,(k(u) \cdot \operatorname{grad}\, u) = 0 \quad \text{en} \quad (0,T) \times \Omega .$$

La estricta positividad de la función k permite asegurar la existencia de soluciones clásicas para el problema mixto de Dirichlet asociado a (2) y entonces basta aplicar el teorema del valor medio a la diferencia de dos soluciones para reducirse a una nueva ecuación lineal y obtener de esta forma resultados de comparación. (Véanse los detalles en Ladyzenskaya-Solonnikov-Uraltceva [8]).

La ecuación (2) también aparece en otros importantes problemas físicos (véase p.e. el "survey" Díaz [6]) incluso bajo la hipótesis más general de $k(r) \geq 0$ $\forall r \in \mathbb{R}$ (como por ejemplo $k(r) = r^m$, $m \geq 1$). La ecuación (2) es ahora una ecuación parabólica cuasilineal degenerada en el sentido de que pierde su caracter parabólico en los puntos $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ en los que $u(x,t) = 0$. Introduciendo la función

$$\beta(s) = \int_0^s k(r)dr$$

el problema mixto de Dirichlet para la ecuación (2) se formula mediante

(3) $$\begin{cases} u_t - \Delta\beta(u) = 0 & \text{en} \quad (0,T) \times \Omega \\ \beta(u) = 0 & \text{en} \quad (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Bajo la sola hipótesis $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ y $\beta' \geq 0$ en general no existen soluciones clásicas y entonces (3) es "resuelto" en términos de soluciones generalizadas e.d. funciones: $u \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ satisfaciendo que $\beta(u) \in L^1(0,T: W_0^{1,1}(\Omega))$ así como

$$\int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} u - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \beta(u)\right] dx\, dt + \\ + \int_\Omega \zeta(0,x)\, u_0(x) dx = 0$$

para toda función test $\zeta \in C^1([0,T] \times \Omega)$ con $\zeta = 0$ sobre $(\{T\} \times \Omega) \cup$ $\cup\ (\partial\Omega \times [0,T])$. La existencia de tales soluciones generalizadas es establecida mediante paso al límite de soluciones de problemas cuasilineales no degenerados y de esta forma de nuevo se tienen la comparación de soluciones ahora en casi-para-todo punto. (Véase p.e. Oleinik [9]).

Otra manera diferente de "resolver" (3) radica en la teoría abstracta de ecuaciones de evolución sobre espacios de Banach. De entre las muchas ventajas de este nuevo enfoque aquí solo haremos incapié en dos de ellas: En primer lugar es posible tratar (3) bajo la única hipótesis de β función real continua no decreciente, lográndose así la consideración de nuevos e importantes problemas como p.e. el denominado problema de Stefan así como los surgidos de la física de plasmas, de la teoría de Control térmico etc. (véase Díaz [6]). Por otra parte la teoría abstracta conduce a resultados muy generales de comparación, explitando incluso estimaciones de la diferencia de soluciones.

En concreto, el problema (3) puede ser reescrito como un problema abstracto de Cauchy

$$\text{(PAC)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

siendo $u(t)$ $(= u(t,\cdot))$ función de $[0,T]$ a valores en el espacio de Banach $X = L^1(\Omega)$, una vez que se define el operador A mediante

$$D(A) = \{u \in L^1(\Omega) : \beta(u) \in W_0^{1,1}(\Omega) \text{ y } \Delta\beta(u) \in L^1(\Omega)\}$$

$$Au = -\Delta\beta(u) \quad \text{si} \quad u \in D(A).$$

(También (3) puede ser reescrito en forma de (PAC) sobre el espacio

$X = H^{-1}(\Omega)$. Brezis [3]).

Los resultados generales de la teoría abstracta ([1]) permiten la resolución de (PAC) en términos de soluciones débiles ("mild solutions") es decir de funciones $u \in C([0,T]:X)$ tales que $u(t) = \lim u^n(t)$ siendo $u^n(t) = x_k^n$ si $k\frac{T}{n} \leq t < (k+1)\frac{T}{n}$ con $\{x_k^n\} \subset L^1(\Omega)$ dadas por

$$(4)_n \qquad \begin{cases} \dfrac{x_k^n - x_{k-1}^n}{\frac{T}{n}} + A(x_k^n) = 0 & k = 1,2,\ldots \\ x_0^n = u_0 \end{cases}$$

Para la existencia de las funciones $u^n(t)$ es más que suficiente el suponer que $u_0 \in \overline{D(A)}$ así como

$$(5) \qquad R(I+\lambda A) = X, \qquad \forall\lambda > 0.$$

Por otra parte la convergencia de $\{u^n(t)\}$ cuando $n \to +\infty$ se tiene asegurada si $(I+\lambda A)^{-1}$ es una contracción (condición que sirve de definición a los operadores acretivos en X) e.d. si

$$(6) \qquad \|u_1-u_2\|_X \leq \|(u_1-u_2) + \lambda(Au_1-Au_2)\|_X \qquad \forall\lambda > 0.$$

Con frecuencia las soluciones débiles $u(t)$ son denotadas por $u(t) = S(t)u_0$ para indicar así a la familia de operadores $S(t)$ $(t \geq 0)$ que además tienen estructura de semigrupo de contracciones sobre X, e.d.

$$(7) \qquad \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_X \leq \|u_0-v_0\|_X \quad , \quad \forall t > 0.$$

La teoría abstracta también contempla resultados de comparación para las soluciones de (PAC) cuando el espacio X es un espacio de Banach reticulado (e.d. existe un cono cerrado convexo X^+ que define una relación de orden sobre X mediante $u_1 \leq u_2$ sii $u_2-u_1 \in X^+$). Es entonces fácil demostrar (véase Benilan [1]) que si A es un operador T-acretivo sobre X (en el sentido de que

$$(8) \qquad \|(u_1-u_2)^+\|_X \leq \|[(u_1-u_2) + \lambda(Au_1-Au_2)]^+\|_X \quad , \lambda > 0,$$

siendo $h^+ = \max(0,h)$) se tiene que

([1]) Véase p.e. el artículo panorámico de Evans [7].

(9) $\|(S(t)u_0 - S(t)v_0)^{+}\|_X \leq \|(u_0 - v_0)^{+}\|_X$ para todo $t > 0$.

La noción de operador T-acretivo fué primeramente introducido por Brezis-Stampacchia [4] y más tarde desarrollada por numerosos autores (Calvert, Kenmochi, Picard, Benilan, etc), obteniéndo una generalización al cuadro no lineal de ciertos aspectos de la teoría del potencial. La clase de los operadores T-acretivos sobre el espacio $L^1(\Omega)$ contiene a una gran variedad de operadores no lineales de segundo orden entre los que se encuentra el operador $A(\cdot) = -\Delta\beta(\cdot)$. (Véase p.e. Benilan 1).

En consecuencia bajo la hipótesis de β función real continua no decreciente no sólo se tiene la comparación de soluciones sino incluso la estimación

(10) $$\int_\Omega (u(t,x)-v(t,x))^{+}dx \leq \int_\Omega (u_0(x)-v_0(x))^{+}$$

como traducción literal de (9).

Frente a las obvias ventajas del enfoque abstracto, es justo señalar que no siempre es sencillo reformular el problema en ecuaciones en derivadas parciales en términos de (PAC). Este es el caso p.e., de cuando las condiciones de contorno son no homogéneas. Aun en estas circunstancias es posible "inspirarse" en la teoría abstracta para obtener estimaciones de una naturaleza semejante a (10). Así por ejemplo en Díaz [5] es obtenida la comparación de soluciones para el problema

$$P(f,u_0,g) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta\beta(u) = f & \text{en } (0,T)\times\Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) + g & \text{en } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Supuestos β y γ grafos maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \beta(0) \cap \cap\, \gamma(0)$ y cuando se varían a la vez los datos f, g y u_0.

2. Comparación de soluciones correspondientes a distintos operadores.

A veces resulta de una gran utilidad la comparación de soluciones correspondientes a problemas dados mediante diferentes operadores. Cuando la diferencia entre los dos operadores no afecta al término de difusión no es dificil obtener la comparación de soluciones a partir de resultados del tipo de la sección anterior. A modo de ejemplo citaremos el siguiente resultado:

Proposición 1. *Sea A un operador T-acretivo sobre $L^1(\Omega)$ y sean α y $\hat{\alpha}$ dos grafos maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$ tales que $0 \in \alpha(0) \cap \hat{\alpha}(0)$*[2]. *Sean u y $\hat{u}$ soluciones débiles de los problemas*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \alpha(u) \ni 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + A\hat{u} + \hat{\alpha}(\hat{u}) \ni 0 \\ \hat{u}(0) = \hat{u}_0 \end{cases}$$

siendo $u_0 \in \overline{D(A+\alpha)}$, $\hat{u}_0 \in \overline{D(A+\hat{\alpha})}$. Supongamos finalmente que u_0 y $\hat{u}_0$ no cambian de signo en Ω, siendo $u_0 \leq \hat{u}_0$. Entonces si

$$|\hat{\alpha}_0(r)| \leq |\alpha_0(r)| \qquad \forall r \in D(\alpha)$$[3]

se tiene que $u(t) \leq \hat{u}(t)$ $\forall t \in [0,T]$, c.p.t. punto de Ω.

(La demostración se reduce a la consideración de los problemas estacionarios $v + Av + \alpha(v) \ni u_0$ y $\hat{v} + A\hat{v} + \hat{\alpha}(\hat{v}) \ni \hat{u}_0$ mostrándose entonces que $v \leq \hat{v}$ c.p.t. punto de Ω).

La situación es bastante más compleja si los operadores tienen diferente término de difusión. Incluso bajo las condiciones más cómodas de regularidad sobre los datos resulta problemático el encontrar hipótesis sencillas que impliquen la comparación de soluciones. A modo de ilustración nos referiremos al problema (3) que ahora resultará cómodo reescribir como

$$P^*(\psi, w_0) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi(w) - \Delta w = 0 & \text{en} \quad (0,T) \times \Omega \\ w = 0 & \text{en} \quad (0,T) \times \partial\Omega \\ w(0,\cdot) = w_0 \end{cases}$$

siendo $\psi = \beta^{-1}$, $w_0 = \beta(u_0)$ y $w(t,x) = \beta(u(t,x))$.

---

(2) Este es el caso de α y $\hat{\alpha}$ funciones reales no decrecientes tales que $\alpha(0) = \hat{\alpha}(0) = 0$

(3) $\alpha_0(r)$ y $\hat{\alpha}_0(r)$ designan a los elementos de los conjuntos $\alpha(r)$ y $\hat{\alpha}(r)$ de norma mínima.

Teorema 1. (Benilan - Díaz [2]). *Sean* $\psi_i \in C^2(\mathbb{R})$ *con* $\psi_i(0) = 0$ *y* $\psi_i' > 0$ *así como* $w_0^i \in C^2(\Omega)$ *tales que* $w_0^i(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$, $i = 1,2$. *Supongamos finalmente que las siguientes hipótesis son satisfecha:*

(11) $\qquad w_0^1 \leq w_0^2$ *en* Ω

(12) $\qquad \psi_2'(r) \geq \psi_1'(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$

(13) $\qquad \Delta w_2^0 \leq 0$ *en* Ω

Entonces si w_i *es la solución (clásica) de* $P(\psi_i, w_0^i)$, $i = 1,2$, *se tiene*

$$w_1(t,x) \leq w_2(t,x)$$

para todo $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$

Idea de la demostración (4). Si $v = w_1 - w_2$ se tiene que

$$\Delta v = \psi_1'(w_1)\frac{\partial w_1}{\partial t} - \psi_2'(w_2)\frac{\partial w_2}{\partial t}$$

y por tanto

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\psi_1'(w_1)} \cdot \Delta v + F(t,x,v) = h(t,x)$$

siendo

$$F(t,x,v) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} w_2(t,x)}{\psi_1'(v+w_2(t,x))}\left(\psi_1'(v+w_2(t,x)-\psi_1'(w_2(t,x))\right)$$

y

$$h(t,x) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} w_2(t,x)}{\psi_1'(w_1(t,x))}\left(\psi_2'(w_2(t,x))-\psi_1'(w_2(t,x))\right).$$

De la monotonía de ψ_1 y la hipótesis (12) se concluye que si $\frac{\partial}{\partial t} w_2(t,x) \leq 0$ entonces $h(t,x) \leq 0$ y por tanto

$$\begin{cases} v_t - \dfrac{1}{\psi_1'(w_1)}\Delta v + F(t,x,v) \leq 0 & \text{en } (0,T) \times \Omega \\ v \leq 0 & \text{en } (\{0\}\times\Omega) \cup (0,T)\times\partial\Omega \end{cases}$$

con lo que en dicho caso el principio del máximo es satisfecho por v

---

(4) La demostración detallada, de hecho referente a un enunciado más general, se encuentra en el artículo citado.

(véase el Teorema 2.9 de [8]) entonces se concluiría que $v(t,x) \leq 0$ $\forall(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}$ y equivalentemente la conclusión deseada. Ahora bien llamando $z = \frac{\partial}{\partial t} w_2$ se tiene que

$$\psi_2'(w_2)z_t = \Delta w_2$$

y derivando respecto de t

$$\psi_2'(w_2)z_t + \psi_2''(w_2) \cdot z^2 = \Delta z$$

y por tanto z satisface

$$\begin{cases} z_t - \dfrac{1}{\psi_2'(w_2)} \Delta z + \dfrac{\psi_2''(w_2)}{\psi_2'(w_2)} \cdot z^2 = 0 & \text{en } (0,T) \times \Omega \\ z = 0 & \text{en } (0,T) \times \partial\Omega \\ z(0,\cdot) = \dfrac{\Delta w_0^2}{\psi_2'(w_2)} \leq 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y entonces el Teorema 2.9 de [8] permite asegurar que $z \leq 0$ en $[0,T] \times \bar{\Omega}$. #

La hipótesis (13) parece caprichosa, sin embargo el siguiente contraejemplo muestra la necesidad de su imposición:

Contraejemplo:

Sean $\Omega = (0,2\pi)$ y $u_{0,k} = \dfrac{\text{sen } 2x}{k}$. Es fácil comprobar que si $k > 0$ el problema

$$P_k \equiv \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & \text{en } (0,T) \times \Omega \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 & \\ u(0,x) = u_{0,k}(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

tiene como solución de la función $u_k(t,x) = \frac{1}{k}$ sen $2x \cdot e^{-4tk}$. Entonces si $k > 1$ se tiene que $u_1(t,x) \leq ku_k(t,x)$ $\forall t \in [0,T]$ si $x \in [\pi,2\pi]$ y sin embargo $u_1(t,x) \geq k \cdot u_k(t,x)$ $\forall t \in [0,T]$ si $x \in [0, \pi]$. (Nótese que P_k coincide con (3) haciendo $\beta(s) = k \cdot s$).

Al igual que en la sección anterior, es posible obtener una versión abstracta del Teorema 1 que permita debilitar las hipótesis de regularidad y que a la vez explicita ciertas estimaciones.

Teorema 2. (Benilan-Díaz [2]). *Sean* A_i *operadores* T-*acretivos sobre* X *espacio de Banach reticulado. Sean* u_i *soluciones débiles de* (PAC) *correspondientes al operador* A_i *y al dato inicial* u_0^i, $i = 1,2$. *Supongamos que las siguientes hipótesis son satisfechas.*

(14) $\exists\, \Theta : \overline{D(A_2)} \to X$ *continua tal que* $A_2\phi \subseteq A_1\Theta(\phi)$ *para todo* $\phi \in D(A_2)$

(15) *La aplicación* $I-\Theta$ (*respec.* $(\Theta - I)$) *conserva el orden en* X.

(16) $R(I+\lambda A_2) \supseteq D^+(A_2)$, $(D^+(A_2) = \{u \in D(A) : A_2u \cap X^+ \neq \emptyset\})$.

(17) $u_0^2 \in \overline{D^+(A_2)}$

Entonces para todo $t \in [0,T]$ *se tiene*

(18) $\|(u_1(t) - \Theta u_2(t))^+\| \leq \|(u_0^1 - \Theta u_0^2)^+\|$

(*respec.* $\|(\Theta u_2(t) - u_1(t))^+\| \leq \|(\Theta u_0^2 - u_0^1)^+\|$).

El Teorema 2 puede ser ahora aplicado a una clase muy amplia de problemas no lineales en ecuaciones en derivadas parciales entre los que se encuentra el problema (3). Para poner ésto último de manifiesto supongamos por simplicidad $\beta_i \in C^1(\mathbb{R})$ con $\beta_i' > 0$, $i = 1,2$. Entonces definamos la aplicación $\Theta : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ dada por

$$\Theta(\phi) = (\psi_1 \circ \beta_2)\phi \quad \text{si} \quad \phi \in L^1(\Omega).$$

Supuesto entonces la hipótesis (12) se tiene que $(\psi_1 \circ \beta_2)' \leq 1$ y por tanto Θ conserva el orden sobre $L^1(\Omega)$. Por otra parte las hipótesis (14) y (16) son trivialmente satisfechas y (17) se tiene cuando (13) es también supuesta. La estimación (18) ahora implica de manera obvia la conclusión del Teorema 1.

Algunos problemas diferentes de (3) a los que el Teorema 2 puede ser aplicado se refieren a los casos de:

i) condiciones de contorno más generales que las de (3) tales como las de $P(f,u_0,0)$.

ii) Substitución en (3) del operador diferencial Δ por Δp siendo

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \quad 1 < p < \infty.$$

iii) Problemas cuasilineales de primer orden tal como

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \beta(u) = f & \text{en} \quad (0,T) \times (0,1) \\ \beta(u(\cdot,0)) = 0 & \text{en} \quad (0,T) \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{en} \quad (0,1). \end{cases}$$

Finalmente señalemos que el Teorema 2 y sus aplicaciones se presentan como una nueva y útil herramienta para el establecimiento de diferentes propiedades cualitativas de las soluciones de (PAC) que enriquecen las "escuetas" respuestas de existencia y unicidad establecidas hasta el momento.

3. BIBLIOGRAFIA.

[1] Ph. BENILAN: Equations d'evolution dans un espace de Banach quelconque et applications. These Université d'Orsey. 1972.

[2] Ph. BENILAN y J.I. DIAZ: "Comparison of solutions of nonlinear evolución problems with different nonlinear terms". Aparecerá.

[3] H. BREZIS: "Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear differential equations". En Contributions to Nonlinear Functional Analysis. Editor E. Zarantonello.

[4] H. BREZIS y G. STAMPACCHIA: "Sur la regularité de la solution d'inequations elliptiques". Bull. Soc. Math. France. 96 1968, pp. 153-180.

[5] J.I. DIAZ: "Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems". Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applic. 3, nº 6, 1979. pp. 831-847.

[6] J.I. DIAZ: "Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabólicos no lineales: Una clasifiación para los modelos de difusión del calor". Memoria XIV de la Real Academia de Ciencias. Madrid. 1980.

[7] L.C. EVANS: "Application of nonlinear Semigroup Theory to Certain Partial Differential Equations". En Nonlinear Evolutions Equations. Editor M.G. Crandall. Academic Press, 1978.

[8] O.A. LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV y N.N. URALTCEVA: "Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Transl. of Math. Monographs A.M.S. 1968.

[9] O.A. OLEINIK: "On some degenerate quasilinear parabolic equations". Semi. Inst. Naz. Alta Mat. Ediz. Cremonese. Roma 1965, pp. 335-371.

[10] M. PROTTER y H.F. WEIMBERGER. Maximum principles in Differential Equations. Prentice-Hall, 1967.