

# SOBRE FLUJOS SUBSONICOS ALREDEDOR DE UN OBSTACULO SIMETRICO\*

por

J. ILDEFONSO DIAZ y ALBERT DOU

## ABSTRACT.

We consider the problem of a plane, subsonic, steady and irrotational flow of an ideal and compressible fluid. We assume that the obstacle is symmetric and convex and that the velocity of the fluid at infinity is uniform and parallel to the symmetry axis of the obstacle.

In this paper we follow the formulation of the problem as set up by Brézis-Stampacchia [3] and Brézis [2]. We generalize for compressible fluids a result of the mentioned authors [4] obtained for the incompressible case; and also, through a technique introduced by J.I. Díaz [5], we contribute to the study of the geometry and location of the curve  $\sigma = \ell(\Theta)$ , which determines the boundary of the domain of the flow in the hodograph plane.

## RESUMEN.

Consideramos el problema de un flujo plano, subsónico, estacionario e irrotacional de un fluido perfecto y compresible. El obstáculo o perfil se supone simétrico y convexo, y la velocidad del fluido en el infinito se supone uniforme y paralela al eje de simetría del obstáculo.

En el trabajo se sigue la formulación presentada ya en Brézis-Stampacchia [3] y Brézis [2]. Generalizamos al caso de fluidos compresibles un resultado de comparación, que los mencionados autores [4] obtienen para el caso de fluidos compresibles; y contribuimos, mediante la aplicación de una técnica introducida por J.I. Díaz en [5], a estimar la geometría y localización de la curva  $\sigma = \ell(\Theta)$

\* Este artículo fue expuesto por el segundo autor en el IV CEDYA (Congreso Ec. Dif. y Apl.), Sevilla, 1981. Un resumen del mismo se publicó en las Actas del Congreso.

que determina la frontera (desconocida "a priori") del dominio del flujo en el plano del hodógrafo.

### § 1. Planteamiento del problema.

El flujo se supone plano, estacionario e irrotacional. El fluido se supone perfecto y compresible, y en ninguno de sus puntos alcanza la velocidad local del sonido. El obstáculo se supone simétrico y convexo.

El plano del flujo está referido a un sistema cartesiano  $O; x, y$ , y representamos por  $\vec{q}(x, y)$  la velocidad del fluido en cualquier punto del plano exterior al obstáculo. Ponemos  $\vec{q} = (q_1, q_2)$ , siendo  $q_1$  y  $q_2$  las componentes según los ejes, y  $q = |\vec{q}|$ . Se da una constante positiva  $q_\infty$  que representa la velocidad del fluido, paralela al eje  $x$ , para  $x = -\infty$ , o sea  $\vec{q}(-\infty, y) = (q_\infty, 0)$  para todo  $-\infty < y < \infty$ .

Introducimos la función  $h$  que determina la densidad en función de la velocidad,  $\rho = h(q)$ , siendo

$$h: q \in [0, \infty) \rightarrow h(q) \in (0, 1]. \quad (1.1)$$

Suponemos que  $h$  es regular,  $h(0) = 1$ , y que  $h$  es estrictamente decreciente.

Supondremos que el obstáculo viene determinado mediante la siguiente función  $f$ : sean  $a, b$  tales que  $a < 0 < b$ ,

$$f: x \in [a, b] \rightarrow f(x) \in [0, H], \quad f(a) = f(b) = 0 \quad (1.2)$$

$$f(0) = H = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad f \in C^{2,1}[a, b], \quad f'' < 0,$$

de modo que suponemos que la derivada segunda de  $f$  es lipschiciana y  $f$  es cóncava. Poniendo

$$\Lambda = \{(x, y): x \in (a, b), |y| < f(x)\}, \quad G = \mathbb{R}^2 - \bar{\Lambda}, \quad (1.3)$$

tenemos que  $\Lambda$  representa un obstáculo simétrico y convexo y  $G$  es el dominio ocupado por el fluido. Sea finalmente  $\vec{\nu}$  la normal a  $\partial\Lambda$  exterior a  $\Lambda$ , excepto quizás en los puntos  $A = (a, 0)$  y  $B = (b, 0)$  donde puede que no exista.

El problema  $\Pi$  que estudiamos es el siguiente: Hallar una función  $\vec{q}: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\vec{q} \in C^1(G) \cap C(\bar{G}). \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{q}) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\rho q_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho q_2) = 0 \quad \text{en } G \quad (1.5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{q} = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0 \quad \text{en } G \quad (1.6)$$

$$\langle \vec{q}, \vec{\nu} \rangle = 0 \quad \text{en } \partial G \quad (1.7)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \vec{q}(x,y) = (q_\infty, 0). \quad (1.8)$$

Se sigue por simetría que

$$q_1(x,y) = q_1(x,-y), \quad q_2(x,y) = -q_2(x,-y). \quad (1.9)$$

La propiedad (1.9) permite reducir el dominio  $G$  al  $G^+ = \{(x,y) \in G: y > 0\}$ . La (1.6), que expresa que el flujo es irrotacional, permitiría introducir el potencial de velocidades, pero no vamos a emplearlo. En cambio, la (1.5) permite introducir la función de líneas de corriente,  $\psi: \bar{G}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\begin{aligned} \psi_x &= -\rho q_2, & \psi_y &= \rho q_1 & \text{en } \bar{G}^+ \\ \psi(x,y) &= 0 & & & \text{en } \partial G^+. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Señalemos que una cuestión de particular interés a la hora de abordar el problema  $\Pi$  es (supuesta la existencia y unicidad de solución), la obtención de estimaciones numéricas sobre los valores de  $q$  en  $\partial\Lambda$  así como sobre la localización del punto  $\partial\Lambda$  en que  $q$  es máximo. En los años cincuenta M. Schiffmann y L. Bers demostraron la existencia y unicidad de solución del problema  $\Pi$ .

## § 2. Equivalencia con una inecuación variacional.

En [3], Brézis y Stampacchia redujeron el problema  $\Pi$  al de una inecuación variacional. Se toma la función  $\psi$  como incógnita y se hace el cambio de variables independientes

$$(x,y) \rightarrow (\Theta, q), \quad \text{siendo} \quad \operatorname{tg} \Theta = \frac{q_2}{q_1}; \quad (2.1)$$

y luego se cambia la  $q$  por la  $\sigma$ , siendo

$$\sigma = \int_q^{q_c} h(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (2.2)$$

donde  $q_c$  es aquella velocidad del fluido en un punto que coincide con la velocidad del sonido en el mismo punto, o sea

$$q_c = a(q_c), \quad a^2(q) = -\frac{q \cdot h'(q)}{h(q)} \quad (2.3)$$

donde  $a$  es la velocidad local del sonido.

El plano cartesiano  $\{0; \Theta, \sigma\}$  es substancialmente el plano del hodógrafo. La figura 1 ilustra la relación de este plano con el plano físico. La curva  $\Gamma$ , de ecuación  $\sigma = \ell(\Theta)$ , es la transformada del perfil  $\partial\Lambda^+(*)$  del obstáculo. El dominio  $G^+$  del plano físico se transforma en el  $\mathbb{D}$ , siendo

$$\mathbb{D} = \{(\Theta, \sigma): \Theta \in (\Theta_1, 0) \cup (0, \Theta_0), \sigma > \ell(\Theta)\} \cup \{(\Theta, \sigma): \Theta = 0, \ell(0) < \sigma < \sigma_\infty\}, \quad (2.4)$$

donde  $\Theta_1$  y  $\Theta_0$  son los valores conocidos de  $\Theta$  en los puntos B y A respectivamente, y

$$\sigma_\infty = \int_{q_\infty}^{q_c} h(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (2.5)$$

de modo que  $(0, \sigma_\infty)$  son las coordenadas en el plano del hodógrafo del punto  $P_\infty$  que corresponde al punto del infinito del plano físico compactificado. La transformación compuesta de (2.1) por (2.2) es biyectiva de  $G^+$  sobre  $\mathbb{D}$ , pero no es biunívoca de  $\bar{G}^+$  sobre  $\bar{\mathbb{D}}$ . En el paso de  $\partial\Lambda^+$  a  $\Gamma$  se supone que cuando  $(x, y)$  tiende hacia A o hacia B se tiene que  $q \rightarrow \infty$ ; lo cual se justifica por una razón de tipo físico, a saber que el flujo en un entorno suficientemente pequeño de A o de B se comporta como si fuera el flujo dentro de un ángulo.

$$(*) \partial\Lambda^+ = \partial\Lambda \cap \{y > 0\}$$

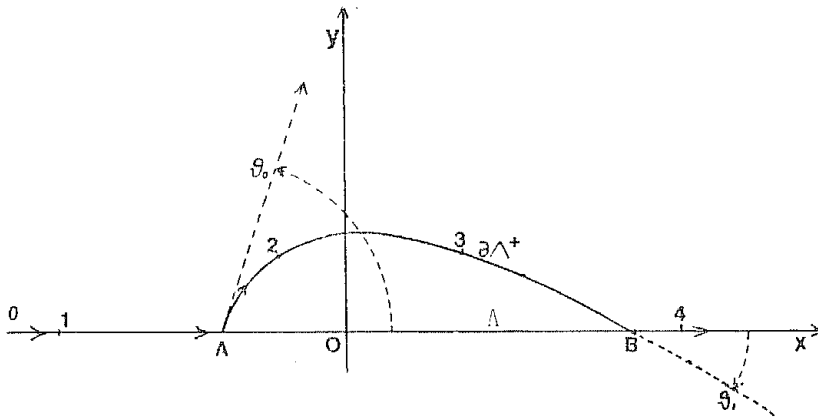
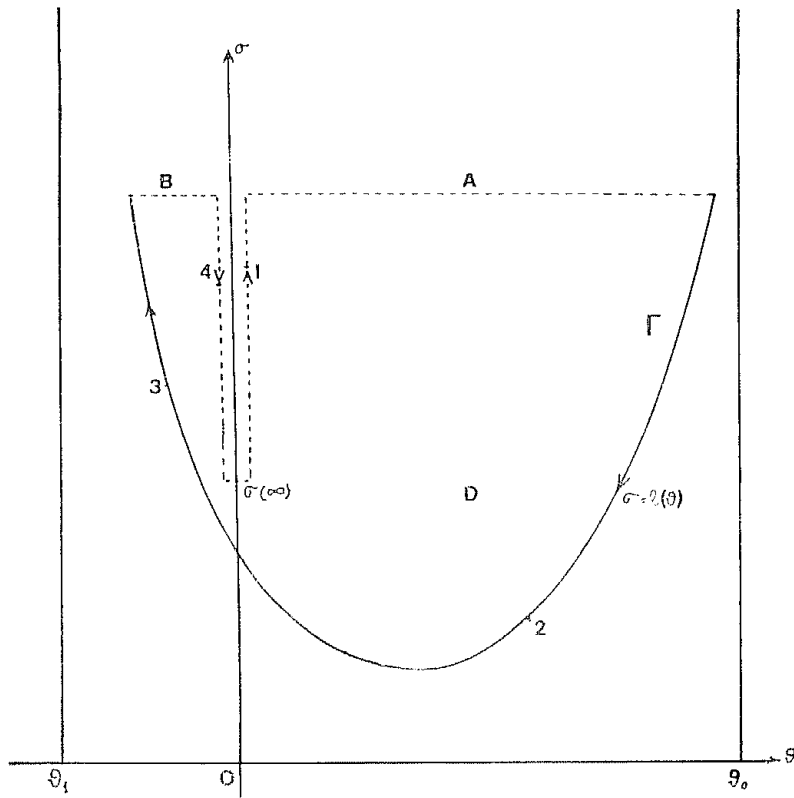


Fig. 1

Cambiamos ahora la función incógnita  $\psi$  por la  $u$ , mediante

$$u(\Theta, \sigma) = \int_{\ell(\Theta)}^{\sigma} \frac{k(s)}{q(s)} \psi(\Theta, s) ds, \quad \Theta_1 < \Theta < \Theta_0, \quad \sigma > \ell(\Theta), \quad (2.6)$$

donde  $q(\sigma)$  es la función definida por (2.2) y

$$k(s) = \frac{1}{h^2(q(s))} \left( 1 - \frac{q^2(s)}{a^2(q(s))} \right) \quad (2.7)$$

Entonces el problema  $\Pi$  es equivalente a otro  $\Pi'$  de frontera libre, es decir se sabe que existe  $\Gamma$  pero se desconoce su situación. He aquí la formulación del problema  $\Pi'$ :

Hallar  $u \in C^2(\mathbb{D})$  y continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ , excepto en  $(0, \sigma_\infty)$  donde es discontinua, y tal que

$$Lu \equiv \frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{q^2(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + u = -R(\Theta) \text{ en } \mathbb{D}, \quad (2.8)$$

donde  $R(\Theta)$ ,  $R(\Theta) < 0$ , es el radio de curvatura de la curva  $y = f(x)$  en el punto donde la tangente forma con la dirección positiva del eje  $x$  el ángulo

$$\Theta, \quad \frac{\pi}{2} \geq \Theta \geq -\frac{\pi}{2};$$

además ha de ser

$$u = \text{grad } u = 0 \text{ en } \Gamma, \quad u > 0 \text{ en } \mathbb{D} \quad (2.9a)$$

$$u(0, \sigma) = H \text{ para } \sigma > \sigma_\infty. \quad (2.9b)$$

Planteado así el problema  $\Pi'$  en el plano del hodógrafo, los autores citados ([3]) establecen su equivalencia con un problema  $\Pi^*$  de una inecuación variacional.

Para ello prolongan  $u(\Theta, \sigma)$  a todo el dominio  $\Omega$ ,

$$\Omega = (\Theta_1, \Theta_2) \times (0, \infty), \quad (2.10)$$

poniendo

$$u(\Theta, \sigma) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < \sigma \leq \ell(\Theta); \quad (2.11)$$

y demuestran que el problema  $\Pi'$ , o sea el de la ecuación (2.8) con las condiciones (2.9), es equivalente al siguiente problema  $\Pi^*$ :

Hallar  $u$ ,

$$u \in K \subset V, \quad (2.12)$$

donde  $K$  es un convexo y cerrado del espacio de Hilbert  $V$ , tal que satisfaga la inecuación variacional

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} R(\Theta) (v - u) q^2 d\Theta d\sigma, \quad \forall v \in K, \quad (2.13)$$

siendo

$$V = \{ v(\Theta, \sigma): q(\sigma) \cdot v(\Theta, \sigma) \in L^2(\Omega), q(\sigma) \cdot v_{\Theta}(\Theta, \sigma) \in L^2(\Omega), \quad (2.14)$$

$$\frac{q(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} v_{\sigma}(\Theta, \sigma) \in L^2(\Omega), v = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \}$$

con la norma canónica, y siendo

$$K = \{ v \in V: v \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega, v(0, \sigma) = H \quad \text{para} \quad \sigma > \sigma_{\infty} \}, \quad (2.15)$$

$$a(u, v) = \langle -q^2(\sigma) \cdot Lu, v \rangle = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{k(\sigma)} u_{\sigma} u_{\sigma} + u_{\Theta} v_{\Theta} - uv \right) q^2(\sigma) d\Theta d\sigma. \quad (2.16)$$

Puesto que la forma bilineal  $a(u, v)$  es coerciva, gracias a la condición  $0 < \Theta_0 - \Theta_1 \leq \pi$ , el problema  $\Pi^*$  tiene una única solución  $u$ , demostrando así nuevamente la existencia de una única solución  $\psi(x, y)$  del problema  $\Pi$ . Esta puede obtenerse a partir de  $u(\Theta, \sigma)$  deshaciendo los cambios (2.6), (2.2) y (2.1).

### §3. Teorema de comparación.

Para el estudio numérico del problema  $\Pi^*$  es conveniente introducir el dominio  $\Omega_T$ ,

$$\Omega_T = (\Theta_1, \Theta_2) \times (0, T).$$

(Véanse por ejemplo Bourgat-Duvaut [1], y Díaz [5] para el caso de fluidos incompresibles).

El teorema de comparación que buscamos se obtendrá analizando cómo el tipo de condición de contorno que se imponga en la frontera artificial

$$(\Theta_1, \Theta_0) \times \{T\}$$

repercute en la solución.

Antes necesitamos el siguiente resultado:

*Lema 1.* Cuando  $\sigma \uparrow +\infty$  se tiene que  $u(\Theta, \sigma) \uparrow w(\Theta)$ , siendo  $w(\Theta)$  tal que:

$$w''(\Theta) + w(\Theta) = -R(\Theta) \text{ en } (\Theta_1, 0) \cup (0, \Theta_0) \quad (3.1a)$$

$$w(\Theta_1) = w(\Theta_0) = 0, \quad w(0) = H, \quad w \text{ continua en } [\Theta_1, \Theta_0] \quad (3.1b)$$

$$w'(\Theta_1) = w'(\Theta_0) = 0 \quad (3.1c)$$

$$w(\Theta) = \begin{cases} (b - x(\Theta)) \sin \Theta + y(\Theta) \cos \Theta & \text{para } \Theta_1 \leq \Theta \leq 0 \\ (a - x(\Theta)) \sin \Theta + y(\Theta) \cos \Theta & \text{para } 0 \leq \Theta \leq \Theta_0, \end{cases} \quad (3.1d)$$

donde  $(x(\Theta), y(\Theta))$  son las coordenadas del punto de  $\partial\Lambda^+$ , cuya tangente forma un ángulo  $\Theta$  con el eje  $x$ .

#### *Demostración:*

Este resultado es el mismo que Brézis-Stampacchia deducen en [4] para fluidos incompresibles; lo cual demuestra que, por lo que se refiere al significado de este lema, ambos fluidos, compresibles e incompresibles, se comportan igual en un entorno de los puntos A o B.

Las (2.6), (2.2), (1.10) y (1.8) muestran que para  $\Theta$  fija la  $u(\Theta, \sigma)$  es creciente con  $\sigma$ , y que  $u(\Theta, \sigma)$  se mantiene acotada en  $\mathbb{D}$  excepto en un entorno de  $(0, \sigma_\infty)$ . Por tanto  $w(\Theta)$  existe; y, dada la regularidad de  $u(\Theta, \sigma)$  como solución



del problema  $\Pi'$ , de la (2.8) se sigue la (3.1a), y las (3.1b) son consecuencia inmediata de las (2.9).

Ahora bien, de la (3.1a) se sigue

$$w(\Theta) = c_1 \cos \Theta + c_2 \operatorname{sen} \Theta + (\cos \Theta, \operatorname{sen} \Theta) \int_{\Theta^*}^{\Theta} \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\operatorname{sen} \Theta \\ \operatorname{sen} \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -R(\Theta) \end{bmatrix} d\Theta,$$

y haciendo

$$\Theta^* = \Theta_1 \quad \text{para } \Theta_1 \leq \Theta \leq 0, \quad \Theta^* = \Theta_0 \quad \text{para } 0 \leq \Theta \leq \Theta_0$$

de la (3.1b) se deduce  $c_1 = c_2 = 0$ . De donde se comprueban las (3.1c) y (3.1d) sin dificultad. #

Pasemos ahora al teorema de comparación. Para ello introducimos el siguiente problema  $\Pi_T$ , obviamente derivado del  $\Pi'$  o del  $\Pi^*$ , pero con dominio  $\Omega_T$ . Consideramos dos problemas  $\Pi_{T,N}$  y  $\Pi_{T,D}$  según que la condición de contorno en  $(\Theta_1, \Theta_0) \times \{T\}$  sea de tipo Neumann o Dirichlet, y llamaremos  $u_N$  y  $u_D$  las respectivas soluciones. El espacio de soluciones (débiles) por analogía con el  $V$  de (2.14), es

$$V_T = \left\{ v(\Theta, \sigma) : q \cdot v \in L^2(\Omega_T), q \cdot v_\Theta \in L^2(\Omega_T), \frac{c}{\sqrt{k}} v_\sigma \in L^2(\Omega_T) \right\} \quad (3.2)$$

Problema  $\Pi_{T,N}$ : Hallar  $u$  tal que

$$-L u + \beta(u) \ni R(\Theta) \quad \text{en } \Omega_T, \quad (3.3)$$

donde  $\beta$  es el grafo maximal monótono dado por  $\beta(r) = \phi$  si  $r < 0$ ,  $\beta(0) = (-\infty, 0]$ ,  $\beta(r) = 0$  si  $r > 0$ ; con las condiciones de contorno

$$u(0, \sigma) = H \quad \text{para } \sigma_\infty < \sigma \leq T \quad (3.4)$$

$$u(\Theta_1, \sigma) = u(\Theta_0, \sigma) = 0 \quad \text{para } 0 \leq \sigma \leq T \quad (3.5)$$

$$u(\Theta, 0) = 0 \quad \text{para } \Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u(\Theta, T)}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{para } \Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_0. \quad (3.7)$$

El problema  $\Pi_{T,D}$  es el mismo  $\Pi_{T,N}$  excepto que hay que cambiar la condición (3.7) por la

$$u(\Theta, T) = w(\Theta), \quad \text{para } \Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_0. \quad (3.8)$$

En términos de una inecuación variacional podemos formular el mismo problema  $\Pi_T$  así:

Hallar  $u_N$  y  $u_D$  tales que

$$u_N \in K_T^1 = \left\{ v \in V_T : v \geq 0 \text{ en } \Omega_T, v(0, \sigma) = H \text{ para } \sigma_\infty < \sigma < T, v = 0 \text{ en } \{\Theta_1, \Theta_0\} \times (0, T) \cup (\Theta_1, \Theta_0) \times \{0\} \right\}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_\infty < \sigma < T, v = 0 \text{ en } \{\Theta_1, \Theta_0\} \times (0, T) \cup (\Theta_1, \Theta_0) \times \{0\} \},$$

$$u_D \in K_T^2 = \left\{ v \in K_T^1 : v(\Theta, T) = w(\Theta) \text{ para } \Theta_1 < \Theta < \Theta_0 \right\} \quad (3.10)$$

y que satisfagan respectivamente las inecuaciones variacionales

$$a_T(u_N, v - u_N) \geq \int_{\Omega_T} q^2 \cdot R(\Theta) (v - u_N) d\Theta d\sigma, \quad v \in K_T^1, \quad (3.11)$$

$$a_T(u_D, v - u_D) \geq \int_{\Omega_T} q^2 \cdot R(\Theta) (v - u_D) d\Theta d\sigma, \quad v \in K_T^2, \quad (3.12)$$

siendo

$$a_T(u, v) = \int_{\Omega_T} \left( \frac{1}{k} u_\sigma \cdot v_\sigma + u_\Theta \cdot v_\Theta - u \cdot v \right) q^2 d\Theta d\sigma. \quad (3.13)$$

**Teorema 2.** *Se tiene*

$$u_N(\Theta, \sigma) \leq u(\Theta, \sigma) \leq u_D(\Theta, \sigma) \quad \text{para } (\Theta, \sigma) \in \Omega_T \quad (3.14)$$

**Demostración:**

Es obvio que la función  $v = \min \{u_N, u\}$  pertenece a  $K_T^1$ . Dado que  $v - u_N = -(u_N - u)^+$ , de la definición de  $u_N$  según (3.11) se sigue que

$$a_T(u_N, (u_N - u)^+) \leq \int_{\Omega_T} q^2 \cdot R (u_N - u)^+ d\Theta d\sigma. \quad (3.15)$$

Por otra parte de (2.8) se deduce que

$$a_T(u, v) = \int_{\Theta_1}^{\Theta_0} \frac{q^2}{k} u_\sigma v \Big|_{\sigma=T} d\Theta + \int_{\Omega_T \cap \mathbb{D}} R q^2 v d\Theta d\sigma, v \in V. \quad (3.16)$$

En particular

$$a_T(u, (u_N - u)^+) = \int_{\Theta_1}^{\Theta_0} \frac{q^2}{k} u_\sigma (u_N - u)^+ \Big|_{\sigma=T} d\Theta + \int_{\Omega_T \cap \mathbb{D}} R q^2 (u_N - u)^+ d\Theta d\sigma.$$

Ahora bien, de la definición (2.6) de  $u$  se deduce que  $u_\sigma \geq 0$  y por tanto

$$\begin{aligned} a_T(u, (u_N - u)^+) &\geq \int_{\Omega_T \cap \mathbb{D}} R q^2 (u_N - u)^+ d\Theta d\sigma \geq \\ &\geq \int_{\Omega_T} R q^2 (u_N - u)^+ d\Theta d\sigma. \end{aligned} \quad (3.17)$$

De (3.15) y (3.17) deducimos que

$$a_T(u_N - u, (u_N - u)^+) \leq 0$$

y entonces por la coercividad de  $a_T$  (Cf. el lema 3 de Brézis [2]) se concluye  $u_N \leq u$ .

Similarmente, sea  $v = \max\{u_D, u\}$ . Gracias al Lema 1 se tiene que  $v \in K_T^2$ . Dado que  $v - u_D = (u - u_D)^+$ , se obtiene de (3.12) que

$$a_T(u_D, (u - u_D)^+) \geq \int_{\Omega_T} R q^2 (u - u_D)^+ d\Theta d\sigma.$$

Por otra parte de (3.16) se deduce que

$$\begin{aligned} a_T(u, (u - u_D)^+) &= \int_{\Omega_T \cap \mathbb{D}} R q^2 (u - u_D)^+ d\Theta d\sigma \geq \\ &\geq \int_{\Omega_T} R q^2 (u - u_D)^+ d\Theta d\sigma. \end{aligned}$$

Entonces  $a_T(u - u_D, (u - u_D)^+) \leq 0$ , y de la coercividad obtenemos que  $u \leq u_D$  en  $\Omega_T$ . #

**Observación:**

El resultado anterior generaliza el Teorema 5.2 de Brézis-Stampacchia [4] que se refiere al caso de flúidos incompresibles. Es de señalar que en ese caso  $h$  y  $k$  son constantes y que modificando adecuadamente la definición de  $u$  dada por (2.6) se logra que la ecuación satisfecha por  $u$  en ese caso sea  $\Delta u = R(\Theta) \cdot e^{-\sigma}$ , con lo que el "espacio de energía"  $V$  es en ese caso el espacio de Sobolev  $V = H_0^1(\Omega)$ . La condición de contorno similar a la dada en (3.7) resulta ser, en ese caso, una condición *no homogénea*.

§4. *La geometría y localización de  $\Gamma$ :  $\sigma = \ell(\Theta)$ .*

La estimación de la frontera libre  $\Gamma$  es importante, tanto para comprobar o asegurarse de que el flujo es subsónico como para acotar la velocidad del flujo en el perfil  $\partial \Lambda$ . Esta estimación es el objeto de esta sección.

Empezamos con un teorema que puede ayudar al análisis de  $\Gamma$ .

**Teorema 3.** *Si  $\alpha = \ell(\Theta)$  es la ecuación de  $\Gamma$  en el plano del hodógrafo, entonces*

$$\frac{d\ell}{d\Theta} = -R \cdot \cos \Theta \cdot h(q) \cdot \frac{d(\log q)}{dx}, \quad \Theta_1 < \Theta < \Theta_0, \quad (4.1)$$

donde las  $\Theta$ ,  $R$ ,  $q$ ,  $x$  corresponden al mismo punto de  $\partial \Lambda^+$ .

**Observación:**

La  $R$ , la  $\Theta$  y la función  $h$  son conocidas, pero  $q$  es desconocida para una  $x$  o una  $\Theta$  dada;  $(-R)$ ,  $\cos \Theta$  y  $h(q)$  son siempre positivas.

Si se supone que, sobre  $\Lambda^+$  en el plano físico, la velocidad  $q$  considerada como función de  $x$ ,  $a < x < b$ , tiene un único máximo relativo (y por tanto ningún mínimo relativo); entonces  $\Gamma$  tiene un único mínimo relativo, pero nada puede decirse de la convexidad de  $\Gamma$ . Más aún, puesto que se puede hacer que  $R$  oscile fuertemente al mismo tiempo que se mantienen relativamente constantes los otros tres factores, se concluye que es fácil construir perfiles  $\partial \Lambda^+$  en los cuales  $d \ell / d \Theta$  alcance máximos y mínimos relativos y para los cuales  $\Gamma$  no será convexa.

**Demostración:**

Derivando  $\psi(\Theta, \sigma)$  en el plano del hodógrafo a lo largo de  $\Gamma: \sigma = \ell(\Theta)$ , y teniendo en cuenta (2.2), se tiene

$$\frac{\partial \psi(\Theta, \ell(\Theta))}{\partial \Theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} - \frac{q}{h(q)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} \cdot \frac{d \ell}{d \Theta} = 0. \quad (4.2)$$

En esta fórmula podemos eliminar al  $\psi$  apelando a las (1.10) y aplicando para ello las fórmulas del cambio de variables,

$$\begin{bmatrix} x_\Theta & x_q \\ y_\Theta & y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_x & \Theta_y \\ q_x & q_y \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} q_y & -\Theta_y \\ -q_x & \Theta_x \end{bmatrix}, \quad \Delta = \Theta_x q_y - \Theta_y q_x. \quad (4.3)$$

Con ello la (4.2) arroja

$$\begin{aligned} \frac{d \ell}{d \Theta} &= \frac{q_2 \cdot q_y + q_1 \cdot q_x}{q_2 \cdot \Theta_y + q_1 \cdot \Theta_x} \cdot \frac{-h(q)}{q} = \frac{-h(q)}{q} \cdot \frac{q_y \operatorname{tg} \Theta + q_x}{\Theta_y \operatorname{tg} \Theta + \Theta_x} = \\ &= \frac{-h(q)}{q} \cdot \frac{\frac{d}{d x} q(x, y(x))}{\frac{d}{d x} \Theta(x, y(x))} = -R \cdot \cos \Theta \cdot h(q) \cdot \frac{d(\log q)}{d x} = \\ &= -R \operatorname{sen} \Theta \cdot h(q) \cdot \frac{d(\log q)}{d y}, \quad \text{para } \Theta \in (\Theta_1, \Theta_2). \# \end{aligned}$$

Una aproximación de la curva  $\Gamma$  puede consistir en obtener una cota superior o una inferior de  $\sigma = \ell(\Theta)$ , para  $\Theta_1 < \Theta < \Theta_0$ . Parece que una cota inferior

es más interesante, pues permite obtener inmediatamente una cota superior de  $q$  en  $\partial \Lambda^+$ . Siempre en el supuesto de que  $\Gamma$  no corte al eje  $\sigma = 0$ , pues si corta el flujo deja de ser subsónico, pues se hace transónico; esto sucede, para un perfil  $\partial \Lambda$  dado, cuando la velocidad  $q_\infty$  se hace suficientemente grande.

Brézis en [2] obtiene un resultado de este tipo, que transcribimos a continuación. Sea  $u = u(\Theta, \sigma)$  la solución del problema  $\Pi^*$ , sea

$$D' = \{ (\Theta, \sigma) \in \Omega : u(\Theta, \sigma) > 0 \}$$

sea

$$R_0 = \min_{\Theta_1 < \Theta < \Theta_0} |R(\Theta)|, \quad R_0 > 0, \quad (4.4)$$

y sean  $A$  y  $q(A)$  relacionados por

$$A = \int_{q(A)}^{q_c} \frac{h(s)}{s} ds \quad \text{para} \quad q_\infty < q(A) < q_c. \quad (4.5)$$

*Teorema 4.* (Brézis [2]). *Sea  $q(A) \geq q_\infty$ , la solución de la ecuación en  $q$*

$$\frac{H}{R_0} - 1 = \frac{q}{q_\infty} \left[ -1 + \frac{1}{h(q_\infty)} \int_{q_\infty}^q \frac{h(s)}{s} ds \right] \quad (4.6)$$

*y sea  $q(A) \leq q_c$ .*

*Entonces,*

$$D' \subset \{ (\Theta, \sigma) : \sigma > A \},$$

*o sea*

$$\max_{\partial \Lambda^+} q \leq q(A). \quad (4.7)$$

Para la demostración de este teorema su autor se basa en un teorema de comparación,  $0 \leq u(\Theta, \sigma) \leq \Phi(\sigma)$  para todo  $(\Theta, \sigma) \in \Omega$ , siendo  $\Phi$  una función auxiliar escogida de manera que

$$\Phi \geq 0, \quad \Phi(A) = 0, \quad \Phi(\sigma_\infty) = H, \quad (4.8)$$

$$L_\sigma(\sigma) \equiv \frac{1}{q^2} \left( \frac{q^2}{k} \Phi_\sigma \right)_\sigma + \Phi = R_0; \tag{4.9}$$

naturalmente el operador  $L_\sigma$  y el segundo miembro  $R_0$  están relacionados con los dos miembros de la inecuación variacional (2.13). El autor calcula explícitamente  $\Phi$  y obtiene

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} R_0 \cdot q(A) \int_A^\sigma \frac{k(s)}{q(s)} (s - A) ds, & A \leq \sigma \\ 0, & 0 \leq \sigma \leq A. \end{cases} \tag{4.10}$$

Nuestro resultado, teniendo en cuenta este teorema de Brézis, se basa en la aplicación de la técnica de las supersoluciones locales desarrollada por J.I. Díaz [5]; es decir, particionamos  $\Omega$  y buscamos supersoluciones en las partes  $\Omega_i$  de  $\Omega$ . Para cada parte  $\Omega_i$  se utiliza el hecho de que  $q(A)$  depende de  $R_0$  y de  $H$ . Naturalmente lo que buscamos es mejorar la cota inferior  $A$ , por otra mayor, o la cota superior  $q(A)$  por otra menor. Para ello obsérvese que  $q(A)$  viene determinada por (4.6), la cual expresa que  $\Phi(\sigma_\infty) = H$ ; de modo que, si  $H/R_0$  disminuye, entonces también disminuye  $q(A)$  y aumenta  $A$ .

La supersolución  $\Phi$  depende sólo de  $\sigma$ . Nuestras supersoluciones dependen también de  $\Theta$  mediante un sumando, con un parámetro  $\alpha_i$  fijo, pero que puede depender de la parte  $\Omega_i$  que se considere. También, en lugar de  $H$ , emplearemos  $H_i$  fijo, dependiente de  $\Omega_i$ . Supuestos ya fijados  $\alpha_i$  y  $H_i$ , para cada parte  $\Omega_i$  determinamos también  $R_i$  y llamamos  $q(\alpha_i R_i)$  la solución de la ecuación en  $q$  (4.6), donde en lugar de  $R_0$  y  $H$  ponemos respectivamente  $\alpha_i R_i$  y  $H_i$ , y llamamos  $A(\alpha_i R_i)$  al valor positivo que arroja la relación (4.5) cuando en lugar de  $q(A)$  ponemos  $q(\alpha_i R_i)$ .

Consecuentemente definimos  $\Phi(\sigma; R)$  mediante

$$\Phi(\sigma; R) = \begin{cases} R q(R) \int_{A(R)}^\sigma \frac{k(s)}{q(s)} (s - A(R)) ds, & A(R) \leq \sigma \\ 0, & 0 \leq \sigma \leq A(R). \end{cases} \tag{4.11}$$

*Teorema 5.* Sea  $\Theta_1 < \Theta_2 < \dots < \Theta_{n+1} = \Theta_0$  una partición de  $[\Theta_1, \Theta_0]$ . Sean  $\hat{\Omega} = \Omega_T$  para  $T = \sigma_\infty$ ,

$$\bar{\bar{\Omega}} = \bar{\Omega}_1 \cup \dots \cup \bar{\Omega}_n, \quad \Omega_i = (\Theta_i, \Theta_{i+1}) \times (0, \sigma_\infty),$$

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \min_{\Theta_i \leq \Theta \leq \Theta_{i+1}} |R(\Theta)|, \\ H_i &= \max_{\Theta_i \leq \Theta \leq \Theta_{i+1}} \omega(\Theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$0 < \alpha_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$s: \gamma \in [0, 2] \rightarrow s = g(\gamma) \equiv \text{Arcos}(1 - \gamma) \in [0, \pi].$$

Entonces, la solución  $u = u(\Theta, \sigma)$  del problema  $\Pi^*$  se anula en los conjuntos  $\Sigma_1, \Sigma_{\alpha,1}, \Sigma_{\alpha,j}, j = 2, 3, \dots, n-1$ , y  $\Sigma_{\alpha,n}$  siendo

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(\Theta^*, \sigma^*) \in \Omega : \Theta_1 \leq \Theta^* \leq \Theta_0, 0 \leq \sigma \leq A(R_0)\} \\ \Sigma_{\alpha,1} &= \{(\Theta^*, \sigma^*) \in \Omega_1 : \Theta_1 \leq \Theta^* \leq \Theta_2 - s_1, A(R_0) \leq \sigma^* \leq A(\alpha_1 R_1)\} \\ \Sigma_{\alpha,j} &= \{(\Theta^*, \sigma^*) \in \Omega_j : \Theta_j + s_j \leq \Theta^* \leq \Theta_{j+1} - s_j, A(R_0) \leq \sigma^* \leq A(\alpha_j R_j)\} \\ \Sigma_{\alpha,n} &= \{(\Theta^*, \sigma^*) \in \Omega_n : \Theta_n + s_n \leq \Theta^* \leq \Theta_{n+1}, A(R_0) \leq \sigma^* \leq A(\alpha_n R_n)\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde

$$s_j = g\left(\frac{1}{(1 - \alpha_j) R_j} \max_{0 \leq \sigma \leq \sigma_\infty} (\Phi(\sigma; R_0) - \Phi(\sigma; \alpha_j R_j))\right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

La figura 2 ayuda a esclarecer el enunciado anterior.

**Demostración:**

Para  $\Omega_1$ , ya el Teorema 4 demuestra que  $u$  se anula en  $\Sigma_1$ .

Para los conjuntos  $\Omega_i$  aplicamos también, como en el Teorema 4, la técnica de la comparación de soluciones. Más concretamente, para cada  $\Omega_i$  mayoramos  $u$  ó la  $u_D$  definida en el Teorema 2, por una cierta supersolución  $u^i$ , definida en  $\Omega_i$  y dependiente de un parámetro  $\Theta_i^*$ , y puesto que  $u \leq u_D$  en  $\Omega_T$ , resultará que también  $u \leq u^i$  en  $\Omega_i$ . Si además conseguimos que para cada punto  $(\Theta, \sigma)$  de  $\Sigma_{\alpha,i}$  haya una  $\Theta_i^*$  que haga que la  $u^i$  se anule en ese punto  $(\Theta, \sigma)$ , entonces habremos demostrado el Teorema.



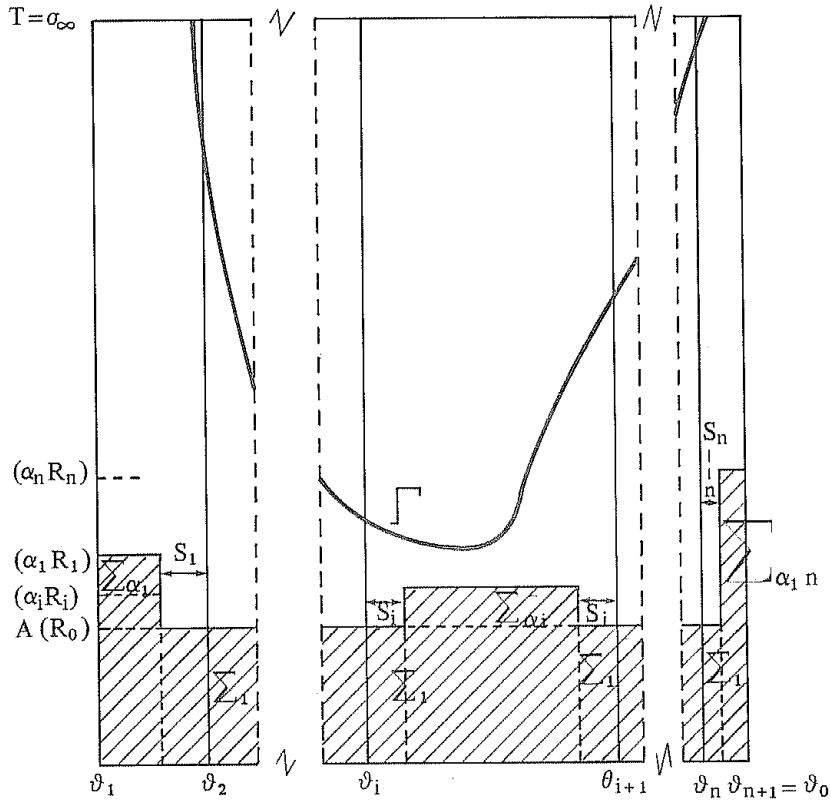


Fig. 2

Introduzcamos la función real auxiliar  $u^i$  definida en  $\Omega_i$ :

$$\begin{aligned} u^i(\Theta, \sigma; \Theta^*) &= (1 - \alpha_i) R_i g^{-1} (|\Theta - \Theta^*|) + \Phi(\sigma; \alpha_i R_i) = \\ &= (1 - \alpha_i) R_i (1 - \cos (|\Theta - \Theta^*|) + \Phi(\sigma; \alpha_i R_i), \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Aquí  $\Phi$  viene dada por (4.11) y el parámetro  $\Theta^*$  puede variar en el mismo intervalo que según (4.14) sirve para la definición de  $\Sigma_{\alpha_i}$ .

Comprobemos en primer lugar que  $u^i$  es una solución de la ecuación (2.8), cuando en el segundo miembro se pone  $R_i$  en lugar de  $R_0$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} L[u^i] &\equiv \frac{1}{q} \left( \frac{q^2}{k} u_\sigma^i \right)_\sigma + u_{\Theta}^i + u^i = \\ &= L_\sigma[u_i] + (1 - \alpha_i) R_i \cos(|\Theta - \Theta^*|) + \\ &+ (1 - \alpha_i) R_i (1 - \cos(|\Theta - \Theta^*|)) = R_i \end{aligned}$$

Comprobemos ahora que los valores que toma  $u^i$  en  $\partial \Omega_i$  son iguales o mayores que los que toma  $u_D$ , o directamente iguales o mayores que los que toma  $u(\Theta, \sigma)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} u^i(\Theta, 0) &\geq 0 = u_D(\Theta, 0), \\ u^i(\Theta, \sigma_\infty) &\geq H_i \geq w(\Theta) \geq u_D(\Theta, \sigma_\infty), \quad \Theta \in [\Theta_i, \Theta_{i+1}], \\ u^i(\Theta_i, \sigma) &= (1 - \alpha_i) R_i (1 - \cos(|\Theta_i - \Theta^*|)) + \Phi(\sigma; \alpha_i R_i) \geq \\ &\geq (1 - \alpha_i) R_i (1 - \cos s_i) + \Phi(\sigma; \alpha_i R_i) = \\ &\geq \max_{\Theta \leq \Theta \leq \sigma_\infty} (\Phi(\sigma; R_0) - \Phi(\sigma; \alpha_i R_i)) + \Phi(\sigma; \alpha_i R_i) \\ &\geq \Phi(\sigma; R_0) \geq u(\Theta_i, \sigma), \quad \sigma \in [0, \sigma_\infty]. \end{aligned}$$

Este mismo razonamiento vale para  $u^i(\Theta_{i+1}, \sigma)$ .

Por tanto  $u^i(\Theta, \sigma; \Theta^*)$  es una supersolución respecto de la solución  $u(\sigma, \Theta)$  de la inecuación variacional (2.13), cualquiera que sea el valor del parámetro  $\Theta^*$  dentro de su intervalo de variabilidad.

Por otra parte, si particularizamos la supersolución  $u^i(\Theta, \sigma; \Theta^*)$  para un punto cualquiera  $(\hat{\Theta}, \hat{\sigma}) \in \Sigma_{\alpha, i}$ , y hacemos  $\Theta^* = \Theta$  obtenemos

$$u^i(\hat{\Theta}, \hat{\sigma}; \hat{\Theta}) = (1 - \alpha_i) R_i (1 - \cos 0) + \Phi(\hat{\sigma}; \alpha_i R_i) = 0,$$

puesto que

$\sigma \in \Sigma_{\alpha, i}$  implica  $\sigma \leq \alpha_i R_i$  y por tanto el segundo sumando también se anula.

Finalmente no estará de más demostrar que el contenido del Teorema no es vacío. Es decir, que al menos para ciertos perfiles convexos simétricos y para ciertas particiones  $\Theta_1 < \Theta_2 < \dots < \Theta_{n+1} = \Theta_0$ , se pueden elegir las  $\alpha_i$  de modo que  $A(\alpha_i R_i) > A(R_0)$  y que al menos para una  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se tenga  $\Theta_{i+1} - \Theta_i > 2 s_i$ . En efecto, para que  $A(\alpha_i R_i) > A(R_0)$  basta elegir  $\alpha_i$  de modo que  $\alpha_i R_i/H_i > R_0/H_0$ , lo que es siempre posible teniendo en cuenta (4.12). Para la segunda condición, puede hacerse  $n = 3$  y una partición  $\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3 < \Theta_4 = \Theta_0$  con un perfil adecuado de modo que  $R_2$  puede ser tan grande como se quiera y por tanto puede conseguirse que  $\Theta_3 - \Theta_2 > 2 s_2$ . #

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J.F. Bourgat et G. Duvaut, *Calcul numérique de l'écoulement avec ou sans sillage autour d'un profil bidimensionnel symétrique et sans incidence*, IRIA, Rapport de Recherche, n° 145 (1975).
- [2] H. Brézis, "A New Method in the Study of Subsonic Flows", *Partial Differential Equations and related Topics*. Lecture Notes in Math. 446 Springer 1975 (J. Goldstein, ed.), pp. 50-64.
- [3] H. Brézis et G. Stampacchia, "Une nouvelle méthode pour l'écoulements stationnaires", *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 276 (8-1-73), A 129-132.
- [4] H. Brézis and G. Stampacchia, "The Hodograph Method in Fluid Dynamics in the Light of Variational Inequalities", *Arch. for Rat. Mech. and An.* 61 (1976) 1-18.
- [5] J.I. Díaz, "Técnica de supersoluciones locales para problemas estacionarios no lineales. Aplicaciones al estudio de flujos subsónicos", *Memorias de la R. Acad. de Ciencias*, Madrid, 1982.

J. Ildelfonso Díaz y Albert Dou  
Universidad Complutense de Madrid