ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Non existence d'une des frontières libres dans une équation dégénérée en théorie de la filtration.* Note (*) de **Jesus Ildefonso Diaz** et **Robert Kersner**, présentée par Jacques-Louis Lions.

On étudie le comportement qualitatif des solutions de l'équation $u_t-(u^m)_{xx}+b.(u^\lambda)_x=0$ quand elle traduit des phénomènes d'évaporation, $\lambda<1\leqq m$. On montre des fortes différences par rapport à l'équation des milieux poreux : il n'existe pas de frontière libre à droite. On examine aussi le comportement de la frontière libre à gauche.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Non-Existence of One of the Free Boundaries in a Degenerated Equation in Filtration Theory.

We study the qualitative behaviour of solutions of the equation $u_t-(u^m)_{xx}+b.(u^\lambda)_x=0$ *when it models some evaporation phenomena,* $\lambda<1\leqq m$. *We show strong differences with respect to the porous media equation: there is no right free boundary. We also study the behaviour of the left free boundary.*

1. Dans cette Note nous considérons le problème de Cauchy :

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t-(u^m)_{xx}+b.(u^\lambda)_x=0 & \text{sur } Q=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

où $m\geqq 1$, $\lambda>0$, $b>0$ et u_0 est une fonction continue non négative et bornée. L'équation de (1) est quelquefois appelé équation non linéaire de Fokker-Planck et apparaît dans l'étude de la filtration d'un fluide à travers un milieu poreux. Le terme de convection représente l'effet de la gravité. Si $\lambda\geqq 1$ (1) modélise des filtrations descendantes et l'étude mathématique a été faite par de nombreux auteurs (*cf.* [1], [2] et ses références). Le cas $0<\lambda<1$ correspond aux phénomènes d'évaporation (*cf.* [3] et ses références). Le but de cette Note est l'étude du comportement qualitatif des solutions de (1) dans ce dernier cas. On montrera que sous l'hypothèse :

$$(2)\qquad \lambda<1\leqq m,$$

les solutions de (1) se comportent d'une manière fortement différente des solutions de l'équation des milieux poreux.

L'équation (1) est dégénérée si $m>1$ et il n'existe pas de solution classique. L'existence et unicité de solutions généralisées ont été données par différents auteurs ([1] à [4]). En particulier, si on suppose (2) et u_0 fonction continue non négative bornée telle que $u_0^{m-\lambda}$ est Lipschitzienne, il existe une unique $u\in\mathscr{C}(\mathrm{Q})$ solution généralisée de (1). En plus $u^{m-\lambda}$ est Lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$(3)\qquad |(u^{m-\lambda})_x|\leqq \mathrm{M},$$

pour un certain $\mathrm{M}>0$.

Soit u_0 *a* support compact et soit :

$$(4)\qquad \operatorname{supp} u_0=[a_1, a_2].$$

Définissons les fonctions ζ_i, $i=1, 2$, de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, par :

$$\zeta_1(t)=\inf\{x\in(-\infty,\infty) : u(x,t)>0\},$$
$$\zeta_2(t)=\sup\{x\in(-\infty,\infty) : u(x,t)>0\}.$$

Il est bien connu ([1], [5]) que si $\lambda > 1$ alors $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ sont finies pour tout $t > 0$ si et seulement si $m > 1$. Dans ce cas on a :

(i) $\zeta_1(t) \searrow -\infty$ quand $t \to \infty$ si $\lambda \geqq m$ et $\zeta_1(t) \searrow a_1 - \mathrm{K}$ quand $t \to \infty$ si $\lambda < m$, pour un certain $\mathrm{K} > 0$;

(ii) $\zeta_2(t) \nearrow +\infty$ quand $t \to \infty$;

(iii) si $u(x_0, t_0) > 0$ pour $(x_0, t_0) \in \mathrm{Q}$ alors $u(x_0, t) > 0$ pour tout $t \geqq t_0$.

Si $\lambda = 1$ on a la solution explicite suivante qui est une modification de l'exemple bien connu de Barenblatt-Pattle [1] :

$$u(x, t) = \left[\frac{m-1}{2m(m+1)}\right]^{1/(m+1)} (t+1)^{-1/(m+1)} \left\{[\mathrm{A} - (x-bt)^2 (t+1)^{-2/(m+1)}]^+\right\}^{1/(m-1)},$$

pour tout $\mathrm{A} > 0$, ($h^+ = \max\{h, 0\}$). Il est clair que dans ce cas (i) et (iii) ne sont pas satisfaits et que pour tout $x_0 > a_2$ il existe $0 < \mathrm{T}_1 < \mathrm{T}_2$ (dépendents de x_0) tels que $u(x_0, t) = 0$ si $t \in [0, \mathrm{T}_1] \cup [\mathrm{T}_2, +\infty)$ et $u(x_0, t) > 0$ si $t \in (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$.

Comme conséquence de notre théorème principal on va montrer que si on suppose (2) alors (ii) n'a pas lieu et $\zeta_2(t) = +\infty$ pour tout $t > 0$. Donc, dans ce cas, il n'existe pas de frontière libre à droite. D'autre part, ζ_1 existe ($\zeta_1(t) < +\infty\ \forall\, t > 0$) et on a $\zeta_1(t) \nearrow +\infty$ quand $t \to +\infty$ (on donnera même quelques estimations sur ζ_1).

Théorème 1.* — *Supposons* (2), (3) *et* (4). *Soit u la solution de* (1) *et $v = u^{m-\lambda}$. On pose :*

(5) $$\mathrm{K}_0 = \frac{b\lambda(1-\lambda)}{\mathrm{M}\, m(m+2\lambda-1)},$$

où M *est donné par* (3). *Alors :*

(*a*) *Si* $\mathrm{K}_0 > 1$ *on a l'estimation :*

(6) $$v_x \geqq -\frac{(m-\lambda)v}{(x+x_0)^\gamma}$$

pour tout $0 < \gamma < 1$ et x_0 assez grand.

(*b*) *Si* $\mathrm{K}_0 < 1/(1-\varepsilon)$ *pour* ε *avec* $0 < \varepsilon < 1$, *on a l'estimation :*

(7) $$v_x \geqq -\frac{v^{(1-\varepsilon)\mathrm{K}_0}}{(x+x_0)^\gamma}$$

pour tout $0 < \gamma < 1$ et x_0 assez grand [6].

Corollaire.* — *Sous les hypothèses du théorème 1, si $u(\bar{x}, \bar{t}) > 0$ alors $u(x, \bar{t}) > 0$ pour tout $x \geqq \bar{x}$. En particulier il n'existe pas de frontière libre à droite.*

Remarque. — Les estimations (6) et (7) permettent d'étudier le domaine de dépendance par rapport aux données initiales (quand il n'est pas borné) pour des équations quasi linéaires du premier ordre [7].

Théorème 2. — *Sous les hypothèses du théorème 1, il existe $\mathrm{K} \geqq 0$ et $\mathrm{C} > 0$ telles qu'on ait :*

(8) $$\mathrm{C}t - \mathrm{K} \leqq \zeta_1(t) < +\infty.$$

pour tout $t \geqq 0$. De plus $\zeta_1(t) \nearrow +\infty$ quand $t \to +\infty$.

II. Idées de la démonstration du théorème 1. — En approchant u_0 par des conditions initiales strictement positives et régulières on peut supposer, sans perte de généralité que u est une fonction régulière. Posons $\alpha = 1/(m-\lambda)$ et $u = v^\alpha$. Alors de (1) on obtient l'équation pour v :

(9) $$-v_t + m(\alpha m-1) v^{\alpha(m-1)-1} v_x^2 + m v^{\alpha(m-1)} v_{xx} - b\lambda v^{-\alpha(1-\lambda)} v_x = 0.$$

Soit $p = v_x$. De (9) on a :

(10) $$\begin{aligned}\mathscr{L} p \equiv -p_t &+ m(\alpha m-1)[\alpha(m-1)-1] v^{\alpha(m-1)-2} p^3 \\ &+ m[2(\alpha m-1)+\alpha(m-1)] v^{\alpha(m-1)-1} p p_x + m v^{\alpha(m-1)} p_{xx} \\ &+ b\alpha\lambda(1-\lambda) v^{-\alpha(1-\lambda)-1} p^2 - b\lambda v^{-\alpha(1-\lambda)} p_x = 0.\end{aligned}$$

Par le principe du maximum, pour montrer (*a*) il suffit de prouver que :

$$\mathscr{L}(w) \equiv \mathscr{L}\left(-\frac{v}{\alpha(x+x_0)^\gamma}\right) \geqq 0 \quad \text{sur Q.}$$

On a :

$$\begin{aligned}\alpha(x+x_0)^\gamma \mathscr{L}(w) = v_t &- m(\alpha m-1)[\alpha(m-1)-1]\alpha^{-2}(x+x_0)^{-2\gamma} v^{\alpha(m-1)+1} \\ &+ m[2(\alpha m-1)+\alpha(m-1)]\alpha^{-1}(x+x_0)^{-\gamma} v^{\alpha(m-1)}\{v_x - \gamma v(x+x_0)^{-1}\} \\ &+ m\{-v_{xx} + 2\gamma(x+x_0)^{-1} v_x - \gamma(\gamma+1)(x+x_0)^{-2} v\} v^{\alpha(m-1)} \\ &+ b\lambda(1-\lambda)(x+x_0)^{-\gamma} v^{1-\alpha(1-\lambda)} - b\lambda v^{-\alpha(1-\lambda)}\{-v_x + \gamma(x+x_0)^{-1} v\} = \mathrm{I}_1 + \ldots + \mathrm{I}_{10}.\end{aligned}$$

De (9) on déduit que $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_5 + \mathrm{I}_9 = m(\alpha m-1) v^{\alpha(m-1)-1} v_x^2 \geqq 0$. D'autre part de (3) on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_6 \geqq &-m[2(\alpha m-1)+\alpha(m-1)]\alpha^{-1}(x+x_0)^{-\gamma} v^{\alpha(m-1)}\mathrm{M} \\ &-2m\gamma(x+x_0)^{-1}\mathrm{M}\, v^{\alpha(m-1)} \equiv \mathrm{I}_{3,6}.\end{aligned}$$

De plus $\mathrm{I}_8 + \mathrm{I}_{3,6} > 0$ si $\mathrm{K}_0 > 1$, $0 < \gamma < 1$ et x_0 est assez grand puisque $\alpha(m-1) = 1 - \alpha(1-\lambda)$. Finalement $\mathrm{I}_6 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_4 + \mathrm{I}_7 + \mathrm{I}_{10} > 0$ si $0 < \gamma < 1$ et x_0 est assez grand.

L'idée de la démonstration de (*b*) est analogue. Dans ce cas on compare v avec une fonction du type $w = -f(v)/(x+x_0)^\gamma$ pour une f appropriée. En étudiant l'expression de $\mathscr{L}(w)$ il n'est pas difficile de voir que la plus importante condition pour avoir $\mathscr{L}(w) \geqq 0$ est :

$$\frac{f'}{f} v < \mathrm{K}_0.$$

Donc, il suffit de choisir $f(v) = v^{(1-\varepsilon)\mathrm{K}_0}$ et on obtient (7).

III. Idées de la démonstration du théorème 2. — On va montrer d'abord (6) par la construction d'une sursolution appropriée de (1). Dans ce but introduisons $\xi = x - ct + k$ et $v(t, x) = f(\xi)$. De (9) on a :

$$cf^{(1-\lambda)/(m-\lambda)} f' + \frac{m\lambda}{m-\lambda} f'^2 + mff'' - b\lambda f' = 0.$$

En faisant le changement standard $df/d\xi = p(f)$, pour $p \neq 0$ on obtient :

$$fp' + \frac{\lambda}{m-\lambda} p = \frac{b\lambda}{m} - \frac{c}{m} f^{(1-\lambda)/(m-\lambda)}.$$

On définit $y(f) = f^{\lambda/(m-\lambda)} p(f)$. Alors on a :

$$\frac{dy}{df} = \frac{b\lambda}{m} f^{(2\lambda-m)/(m-\lambda)} - \frac{c}{m} f^{(\lambda+1-m)/(m-\lambda)}.$$

Cette équation admet comme solution la fonction :

$$y = \frac{m-\lambda}{m} f^{\lambda/(m-\lambda)}(b - cf^{(1-\lambda)/(m-\lambda)}).$$

Donc, on obtient :

$$\frac{df}{d\xi}=\frac{m-\lambda}{m}\left(b-cf^{(1-\lambda)/(m-\lambda)}\right). \tag{11}$$

En définissant la fonction :

$$F(r)=\int_0^r \frac{ds}{b-cs(1-\lambda)/(m-\lambda)},$$

pour $r\in[0, b_0/c)$, la solution de (11) est donnée par :

$$f(\xi)=F^{-1}\left(\frac{m-\lambda}{m}\xi\right).$$

Finalement, soit :

$$z(x, t)=\begin{cases}[f(x-ct+k)]^{1/(m-\lambda)} & \text{si} \quad x\geqq ct-k,\\ 0 & \text{si} \quad x<ct-k.\end{cases}$$

Pour prouver que z est une solution généralisée de l'équation (1) il suffit de montrer que $(z^m)_x$ est continue pour $x=ct+k$. Mais :

$$(z^m)_x=(f^{m/(m-\lambda)})=([F^{-1}(.)]^{m/(m-\lambda)})=f^{\lambda/(m-\lambda)}[b-cf^{(1-\lambda)/(m-\lambda)}]=0 \qquad \text{si} \quad \xi=0.$$

Alors, étant donné u_0, on peut choisir $k\geqq 0$ et $c>0$ de telle manière que $z(x, 0)\geqq u_0(x)$. Alors par le principe de comparaison [3] on a $0\leqq u(x, t)\leqq z(x, t)$ sur Q. La dernière affirmation du théorème est conséquence de la propriété de conservation de la masse.

(*) Remise le 14 mars 1983.

[1] A. S. Kalashnikov, *Proceedings of Seminars Dedicated to I. G. Petrowsky*, Moscov, I, 1975, p. 135-144.

[2] B. H. Gilding et L. A. Peletier, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 61, 1976, p. 127-140.

[3] J. I. Diaz et R. Kersner, *On a Nonlinear Degenerate Parabolic Equation in Infiltration or Evaporation through a Porous Medium* (*Technical Summary Repport*, MRC. Univ. of Wisconsin-Madison, 1983).

[4] Ph. Benilan et H. Touré (article en préparation). *Voir aussi* H. Touré, *Thèse Université de Besançon*, 1982.

[5] B. H. Gilding, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 65, 1977, p. 203-225.

[6] Les estimations (6) et (7) ont toujours sens puisque $v\equiv 0$ sur $(-\infty, a_1-K)\times(0, \infty)$ pour quelque $K\geqq 0$. C'est une conséquence triviale du théorème 2.

[7] J. I. Diaz et R. Kersner, *On the Unboundedness of the Domain of Dependence on the Initial Data for some Conservation Laws Equations* (en préparation).

J. I. D. : *Dep. Ecuaciones Funcionales, Fac. Matematicas, Univ. Complutense de Madrid, Madrid-3, Espagne.*

R. K. : *Computer and Automation Inst. Hungarian Academy of Science, Budapest, P. O. Box 63, Hongrie 1502.*

ERRATUM

(*Comptes rendus* du 28 mars 1983)

Note de *Jesus Ildefonso Diaz et Robert Kersner*, Non existence d'une des frontières libres dans une équation dégènerées en théorie de la filtration:

Dans le Théorème 1 il faut substituer (3) par

(3*) les estimations (6) ou (7) ont lieu pour $t=0$.

(Cette erreur nous a étè signalé par Ph.Bénilan). D'autre part, sous les hypotheses du Théorème 1 on peut montrer (comme dans la Note) les estimations $v_x \geqslant -\rho v/t$ (resp. $v_x \geqslant -\rho v^{(1-\varepsilon)K_0}/t$) pour certain $\rho > 0$ si $K_0 > 1$ (resp. $K_0 < 1/(1-\varepsilon)$). Alors le Corollaire est une conséquence du fait que l'on peut toujour supposer $K_0 > 1$ puisque M tend vers 0 si $\|u_0\|_{L^\infty}$ tend vers 0 et donc il suffit d'utiliser un argument de comparaison.