ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Compacité du support des solutions d'équations quasi linéaires elliptiques ou paraboliques.* Note (*) de **J. Ildefonso Diaz** et **Laurent Véron,** présentée par Jacques-Louis Lions.

Par la méthode d'énergie locale [1] nous démontrons la compacité du support des solutions faibles de (EE) : $-\operatorname{div} A(x, u, Du)+B(x, u, Du)+C(x, u)=0$ et de (EP) : $\partial\psi(u)/\partial t-\operatorname{div} \mathscr{A}(t, x, u, Du)+\mathscr{B}(t, x, u, Du)+\mathscr{C}(t, x, u)=0$ sans hypothèse de monotonie sur les fonctions A, B, C, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Compactness of Support of Solutions of Parabolic or Elliptic Quasilinear Equations.

With the local energy method [1] *we prove the compactness of the support of the weak solutions of* (EE): $-\operatorname{div} A(x, u, Du)+B(x, u, Du)+C(x, u)=0$ *and of* (EP): $\partial\psi(u)/\partial t-\operatorname{div} \mathscr{A}(t, x, u, Du)+\mathscr{B}(t, x, u, Du)+\mathscr{C}(t, x, u)=0$ *without any assumption of monotonicity on the functions* A, B, C, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ *and* $\mathscr{C}$.

I. L'ÉQUATION ELLIPTIQUE. — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geqq 1$, et A, B (resp. C) des fonctions de Caratheodory définies sur $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ (resp. $\Omega\times\mathbb{R}$). On suppose que A est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, B et C à valeurs réelles et que pour des constantes C_i :

$$|A(x, r, p)| \leqq C_1 |p|^q, \quad \forall (x, r, p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \tag{1}$$

$$A(x, r, p).p \geqq C_2 |p|^{q+1}, \quad \forall (x, r, p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \tag{2}$$

$$|B(x, r, p)| \leqq C_3 |r|^\alpha |p|^\beta, \quad \forall (x, r, p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \tag{3}$$

$$C(x, r)r \geqq C_4 |r|^{\sigma+1}, \quad \forall (x, r)\in\Omega\times\mathbb{R}. \tag{4}$$

Une fonction u définie dans Ω est une solution faible de (EE) si u vérifie :

(i) $Du\in L^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q>0$; (ii) $B(., u, Du)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; (iii) $C(., u)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

et si pour tout $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ on a la relation suivante :

$$\int_\Omega \{A(x, u, Du).D\varphi+B(x, u, Du)\varphi+C(x, u)\varphi\}\,dx=0. \tag{5}$$

Si $x_0\in\Omega$ et $\rho<\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ on pose $B_\rho(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^N : |x-x_0|<\rho\}$ et :

$$E(\rho)=\int_{B_\rho(x_0)} A(x, u, Du).Du\,dx, \qquad b(\rho)=\int_{B_\rho(x_0)} |u|^{\sigma+1}\,dx. \tag{6}$$

Notre résultat essentiel concernant les solutions de (EE) est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons* $C_2>0$, $C_4>0$, $0\leqq\sigma<q$, $0\leqq\beta\leqq q+1$, $\alpha=\sigma-\beta(\sigma+1)/(q+1)$ *et* :

$$C_3<\left(C_4\frac{q+1}{q+1-\beta}\right)^{(q+1-\beta)/(q+1)}\left(C_2\frac{q+1}{\beta}\right)^{\beta/(q+1)}. \tag{7}$$

Il existe une constante structurelle C *telle que si u est une solution faible de* (EE) *dans* Ω, $x_0\in\Omega$ *et* $\rho_0<dist(x_0, \partial\Omega)$ *sont tels que :*

$$\rho_0^\nu>F(\rho_0)=C\min_{(\sigma+1)/(q+1)<\tau\leqq 1}\left\{\frac{E^\gamma(\rho_0)}{\tau(q+1)-\sigma-1}\max(1, \rho_0^{\nu-1})\max(b^\mu(\rho_0), b^\eta(\rho_0))\right\} \tag{8}$$

avec :

(9) $$\gamma=\frac{\tau(q+1)-\sigma-1}{N(q-\sigma)+(q+1)(\sigma+1)},\qquad \nu=\frac{(q+1)(\sigma+1)+N(q-\sigma)}{q(\sigma+1)},$$

(10) $$\mu=\frac{(1-\tau)(q+1)}{N(q-\sigma)+(q+1)(\sigma+1)},\qquad \eta=\frac{q-\sigma}{q(\sigma+1)}-\frac{\sigma+1-\tau(q+1)}{N(q-\sigma)+(q+1)(\sigma+1)},$$

alors $u(x)=0$ *pour presque tout* $x\in B_{\rho_1}(x_0)$ *où* $\rho_1^\nu=\rho_0^\nu-F(\rho_0)$.

De ce résultat on déduit en particulier :

Corollaire 1. — *Supposons* $\Omega=\mathbb{R}^N$, $C_2>0$, $C_4>0$, $0\leqq\sigma<q$, $0\leqq\beta\leqq q+1$, $\alpha=\sigma-\beta(\sigma+1)/(q+1)$ *et* (7). *Si* $u\in W^{1,q+1}(\mathbb{R}^N)\cap L^{\sigma+1}(\mathbb{R}^N)$ *est une solution faible de* :

(11) $$-\operatorname{div}A(x,u,Du)+B(x,u,Du)+C(x,u)=f(x),$$

où $f\in L^{(\sigma+1)/\sigma}(\mathbb{R}^N)$ *s'annule pour* $|x|\geqq R_0$, *il existe* $R_1>R_0$ *dépendant des constantes structurelles, de* R_0 *et de* $\|f\|_{L^{(\sigma+1)/\sigma}(\mathbb{R}^N)}$ *tel que u soit nulle pour presque tout* $|x|\geqq R_1$.

Principe de la démonstration du théorème 1. — Pour presque tout $\rho\in[0,\rho_0]$ on a :

(12) $$\int_{B_\rho(x_0)}A(x,u,Du).Du\,dx+C_4\int_{B_\rho(x_0)}|u|^{\sigma+1}dx+\int_{B_\rho(x_0)}B(x,u,Du)\,u\,dx\leqq\int_{S_\rho(x_0)}A(x,u,Du).\mathbf{v}\,u\,d\sigma,$$

où $S_\rho(x_0)=\partial B_\rho(x_0)$ et $\mathbf{v}$ est le vecteur normal sortant unitaire à $S_\rho(x_0)$, d'où :

(13) $$C_5(E(\rho)+b(\rho))\leqq C_1\left(\int_{S_\rho(x_0)}|Du|^{q+1}d\sigma\right)^{q/(q+1)}\left(\int_{S_\rho(x_0)}|u|^{q+1}d\sigma\right)^{1/(q+1)},$$

où C_5 ne dépend que des constantes structurelles. Mais pour presque tout $\rho\in[0,\rho_0]$ on a :

$$\frac{dE}{d\rho}(\rho)=\int_{S_\rho(x_0)}A(x,u,Du).Du\,d\sigma\geqq C_2\int_{S_\rho(x_0)}|Du|^{q+1}d\sigma.$$

L'estimation de $\left(\int_{S_\rho(x_0)}|u|^{q+1}d\sigma\right)^{1/(q+1)}$ se fait grâce au résultat suivant :

Lemme 1. — *Il existe une constante* $C=C(N,\sigma,q)$ *telle que :*

(14) $$\|u\|_{L^{q+1}(S_\rho(x_0))}\leqq C(\|Du\|_{L^{q+1}(B_\rho(x_0))}+\rho^\delta\|u\|_{L^{\sigma+1}(B_\rho(x_0))})^\theta\|u\|^{1-\theta}_{L^{\sigma+1}(B_\rho(x_0))},$$

où : $$\theta=\frac{N(q-\sigma)+\sigma+1}{N(q-\sigma)+(\sigma+1)(q+1)}\quad et\quad \delta=-\frac{N(q-\sigma)+(\sigma+1)(q+1)}{(q+1)(\sigma+1)}.$$

On obtient alors l'inégalité suivante :

(15) $$E(\rho)+b(\rho)\leqq K\left(\frac{dE}{d\rho}\right)^{q/(q+1)}(E(\rho)^{1/(q+1)}+\rho^\delta b(\rho)^{1/(\sigma+1)})^\theta b(\rho)^{(1-\theta)/(\sigma+1)},$$

où K est une constante structurelle. Si $\tau\in[0,1]$ et K_0 est donné par :

(16) $$K_0=\max(b(\rho_0)^{(1-\tau)(1-\theta)/(\sigma+1)},\ b(\rho_0)^{(1-\tau(1-\theta))/(\sigma+1)-\theta/(q+1)}),$$

nous déduisons de l'inégalité de Young :

$$(17)\quad E(\rho)^{1/(q+1)}b(\rho)^{(1-\theta)/\theta(\sigma+1)}+\rho^{\delta}b(\rho)^{1/\theta(\sigma+1)} \leqq 2\rho^{\delta}K_0^{1/\theta}\max(1,\rho_0^{-\delta})(E(\rho)+b(\rho))^{1/(q+1)+\tau(1-\theta)/\theta(\sigma+1)},$$

d'où l'inégalité différentielle suivante dont l'intégration donne le résultat :

$$(18)\qquad E(\rho)^{1-\theta/(q+1)-\tau(1-\theta)/(\sigma+1)}\leqq 2K\rho^{\delta\theta}K_0\max(1,\rho_0^{-\delta\theta})\left(\frac{dE}{d\rho}\right)^{q/(q+1)}.$$

II. L'ÉQUATION PARABOLIQUE. — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N\geqq 1$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$) des fonctions de Caratheodory définies sur $\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ (resp. $\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}$), $\mathscr{A}$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ à valeurs réelles. On suppose que pour des constantes M_i :

$$(19)\qquad |\mathscr{A}(t,x,r,p)|\leqq M_1|p|^q,\qquad \forall(t,x,r,p)\in\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

$$(20)\qquad \mathscr{A}(t,x,r,p).p\geqq M_2|p|^{q+1},\qquad \forall(t,x,r,p)\in\mathbb{R}^+ +\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

$$(21)\qquad |\mathscr{B}(t,x,r,p)|\leqq M_3|r|^{\alpha}|p|^{\beta},\qquad \forall(t,x,r,p)\in\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

$$(22)\qquad \mathscr{C}(t,x,r)r\geqq M_4|r|^{\sigma+1},\qquad \forall(t,x,r)\in\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}.$$

Posons $\psi(r)=\operatorname{sign}(r)r^{1/m}$. Une fonction u définie dans $\mathbb{R}^+\times\Omega$ est une solution faible à donnée initiale u_0 de (EP) si u vérifie pour tout $T>0$ et tout ouvert G relativement compact dans Ω :

(i) $Du\in L^{q+1}(]0,T[\times G)$, $q>0$; (ii) $\mathscr{B}(.,.,u,Du)\in L^1(]0,T[\times G)$;
(iii) $\mathscr{C}(.,.,u)\in L^1(]0,T[\times G)$; (iv) $u\in L^{\infty}(0,T;L^{(m+1)/m}(G))$;
(v) $\lim_{t\downarrow 0}\operatorname{ess} u(t,.)=u_0(.)$ dans $L^{(m+1)/m}(G)$,

et si pour tout $\zeta\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^+\times\Omega)$ on a :

$$(23)\quad \int_0^{\infty}\int_{\Omega}\{\mathscr{A}(s,x,u,Du).D\zeta+\mathscr{B}(s,x,u,Du)\zeta+\mathscr{C}(s,x,u)\zeta\}\,dx\,ds = \int_0^{\infty}\int_{\Omega}\psi(u(s,x))\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,dx\,ds+\int_{\Omega}\psi(u_0(x))\zeta(0,x)\,dx.$$

Nous définissons alors :

$$(24)\qquad E(t,\rho)=\int_0^t\int_{B_\rho(x_0)}\mathscr{A}(\tau,x,u,Du).Du\,dx\,d\tau,$$

$$(25)\qquad b(t,\rho)=\sup_{0<\tau<t}\operatorname{ess}\int_{B_\rho(x_0)}|u(\tau,x)|^{(m+1)/m}\,dx.$$

THÉORÈME 2. — *Supposons* $M_2>0$, $M_3\geqq 0$, $mq>1$, $0\leqq\beta\leqq q+1$ (*et* $M_3<M_2$ *si* $\beta=q+1$) *et* $\alpha=(q+1-\beta(m+1))/m(q+1)$. *Il existe des constantes structurelles* $T^*>0$, $C\geqq 0$ *telles que si* u *est une solution faible de* (EP) *dans* $\mathbb{R}^+\times\Omega$ *à donnée initiale* u_0, *si* $x_0\in\Omega$, $\rho_0<dist(x_0,\partial\Omega)$ *et* $t<T^*$ *sont tels que* $u_0=0$ *presque partout dans* $B_{\rho_0}(x_0)$ *et :*

$$(26)\quad \rho_0^{\nu}>F(t,\rho_0)=C\,t^{\lambda}\min_{(m+1)/m(q+1)<\tau\leqq 1}\left\{\frac{E^{\gamma}(t,\rho_0)}{m\tau(q+1)-m-1}\max(1,\rho_0^{\nu-1})\times\max(b^{\mu}(t,\rho_0),b^{\eta}(t,\rho_0))\right\}$$

où γ, ν, μ, η *sont donnés au théorème* 1 *avec* σ *remplacé par* $1/m$ *et où :*

$$\lambda=\frac{m+1}{N(mq-1)+(m+1)(q+1)}, \tag{27}$$

alors $u(\tau, x)=0$ *pour presque tout* $(\tau, x)\in]0, t[\times B_{\rho_1}(x_0)$ *où* $\rho_1^\nu=\rho_0^\nu-F(t, \rho_0)$. *En outre* $T^*=+\infty$ *si* $\mathscr{B}\equiv 0$ *ou si* $\beta=q+1$.

Le théorème 2 se démontre en suivant les idées du théorème 1. On en déduit :

COROLLAIRE 2. — *Supposons* $M_2>0$, $M_3\geqq 0$, $M_4\geqq 0$, $mq>1$, $0\leqq\beta\leqq q+1$ (*et* $M_3<M_2$ *si* $\beta=q+1$) *et* $\alpha=(q+1-\beta(m+1))/m(q+1)$. *Si* $u\in C^0(\mathbb{R}^+;\ L_{\text{loc}}^{(m+1)/m}(\mathbb{R}^N))$ *est une solution faible de* (EP) *dans* $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N$ *telle que, pour tous* (t, ρ), $E(t, \rho)$ *et* $b(t, \rho)$ *demeurent bornés indépendamment de* $x_0\in\mathbb{R}^N$ *et si la donnée initiale* u_0 *de* u *est à support compact alors pour tout* $t\geqq 0$, $u(t, .)$ *est à support compact. Si* $\mathscr{B}=0$ *ou* $\beta=q+1$ *et* $supp.u_0\subset B_R(0)$ *alors* $supp.u(t, .)\subset B_{R+C\max(t^\lambda,\ t^{1/q})}(0)$.

En supposant en outre $\sigma<q$ on obtient la localisation uniforme du support de la solution de (EP). Définissons à partir de (24) et (25) :

$$\widetilde{E}(\rho)=E(+\infty, \rho), \qquad \widetilde{b}(\rho)=b(+\infty, \rho), \qquad \widetilde{c}(\rho)=\int_0^{+\infty}\int_{B_\rho(x_0)}|u(\tau, x)|^{(m+1)/m}\,dx\,d\tau. \tag{28}$$

THÉORÈME 3. — *Supposons* $M_2>0$, $M_4>0$, $\sigma\geqq 0$, $q>0$, $m>0$, $0\leqq\beta\leqq q+1$, $\alpha=\sigma-\beta(\sigma+1)/(q+1)$, $\max(\sigma, 1/m)<q$ *et* (7) *avec* C_i *remplacé par* M_i $(i=2, 3, 4)$. *Il existe une constante structurelle* C *telle que si* u *est une solution faible de* (EP) *dans* $\mathbb{R}^+\times\Omega$ *à donnée initiale* u_0, *si* $x_0\in\Omega$ *et* $\rho_0<\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ *sont tels que* $u_0=0$ *presque partout dans* $B_{\rho_0}(x_0)$ *et :*

$$\rho_0^\nu>\widetilde{F}(\rho_0)=C\min_{(\widetilde{\varepsilon}+1)/(q+1)<\tau\leqq 1}\left\{\frac{\widetilde{E}^\gamma(\rho_0)}{\tau(q+1)-\widetilde{\varepsilon}-1}\max((\widetilde{b}(\rho_0)+\widetilde{c}(\rho_0))^\mu,\ (\widetilde{b}(\rho_0)+\widetilde{c}(\rho_0))^\eta)\max(1, \rho_0^\varkappa)\right\}, \tag{29}$$

où $\widetilde{\varepsilon}=\max(\sigma, 1/m)$ *et où les exposants* γ, μ, ν, η *et* $\varkappa$ *sont positifs et dépendent* (*de façon rationnelle*) *de* σ, q, N, m *et* τ, *alors* $u(t, x)=0$ *pour presque tout* $(t, x)\in\mathbb{R}^+\times B_{\rho_1}(x_0)$ *où* $\rho_1^\nu=\rho_0^\nu-\widetilde{F}(\rho_0)$.

Si on explicite ν et $\varkappa$ on vérifie que $\nu-\varkappa>0$ et on démontre alors :

COROLLAIRE 3. — *Supposons* $M_2>0$, $M_4>0$, $\sigma\geqq 0$, $m>0$, $0\leqq\beta\leqq q+1$, $\alpha=\sigma-\beta(\sigma+1)/(q+1)$, $\max(\sigma, 1/m)<q$ *et* (7). *Si* $u\in C^0(\mathbb{R}^+;\ L_{\text{loc}}^{(m+1)/m}(\mathbb{R}^N))$ *est une solution de* (EP) *dans* $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N$ *telle que* $E(t, \rho)$ *et* $b(t, \rho)$ *demeurent bornés indépendamment de* $x_0\in\mathbb{R}^N$ *et si le support de la donnée initiale* u_0 *est dans* $B_R(0)$, *il existe* $R_1\geqq R$ *tel que pour tout* $t\geqq 0$ $supp.u(t, .)\subset B_{R_1}(0)$.

(*) Remise le 16 mai 1983, acceptée le 20 juin 1983.

[1] S. N. ANTONCEV, *Soviet Math. Dokl.*, 24, 1981, p. 420-424.

[2] J. I. DIAZ et M. A. HERRERO, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 89 A, 1981, p. 249-258.

[3] J. I. DIAZ et L. VÉRON, *Local Vanishing Properties of Solutions of Elliptic and Parabolic Quasilinear Equations*, à paraître.

[4] A. S. KALASHNIKOV, *Zh. Vychisl. Mat. Fiz.*, 14, 1974, p. 891-905.

[5] A. S. KALASHNIKOV, *Trud. Sem. I. G. Petrovski*, 4, 1978, p. 137-146.

J. I. D. : *Departamento de Ecuaciones Functionales, Facultad de Ciencias, U. Complutense, Madrid* 3.

L. V. : *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences*, 37200 *Tours*.