

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Compacité du support des solutions d'équations quasi linéaires elliptiques ou paraboliques.* Note (*) de **J. Ildefonso Diaz** et **Laurent Véron**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Par la méthode d'énergie locale [1] nous démontrons la compacité du support des solutions faibles de (EE) : $-\operatorname{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du) + C(x, u) = 0$ et de (EP) : $\partial \psi(u) / \partial t - \operatorname{div} \mathcal{A}(t, x, u, Du) + \mathcal{B}(t, x, u, Du) + \mathcal{C}(t, x, u) = 0$ sans hypothèse de monotonie sur les fonctions $A, B, C, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ et \mathcal{C} .

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Compactness of Support of Solutions of Parabolic or Elliptic Quasilinear Equations.

With the local energy method [1] we prove the compactness of the support of the weak solutions of (EE) : $-\operatorname{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du) + C(x, u) = 0$ and of (EP) : $\partial \psi(u) / \partial t - \operatorname{div} \mathcal{A}(t, x, u, Du) + \mathcal{B}(t, x, u, Du) + \mathcal{C}(t, x, u) = 0$ without any assumption of monotonicity on the functions $A, B, C, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ and \mathcal{C} .

I. L'ÉQUATION ELLIPTIQUE. — Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et A, B (resp. C) des fonctions de Carathéodory définies sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ (resp. $\Omega \times \mathbb{R}$). On suppose que A est à valeurs dans \mathbb{R}^N , B et C à valeurs réelles et que pour des constantes C_i :

- (1) $|A(x, r, p)| \leq C_1 |p|^q, \quad \forall (x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$
- (2) $A(x, r, p) \cdot p \geq C_2 |p|^{q+1}, \quad \forall (x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$
- (3) $|B(x, r, p)| \leq C_3 |r|^\alpha |p|^\beta, \quad \forall (x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$
- (4) $C(x, r) r \geq C_4 |r|^{\sigma+1}, \quad \forall (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}.$

Une fonction u définie dans Ω est une solution faible de (EE) si u vérifie :

- (i) $Du \in L_{\text{loc}}^{q+1}(\Omega)$, $q > 0$; (ii) $B(\cdot, u, Du) \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$; (iii) $C(\cdot, u) \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$,

et si pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a la relation suivante :

$$(5) \quad \int_{\Omega} \{A(x, u, Du) \cdot D\varphi + B(x, u, Du) \varphi + C(x, u) \varphi\} dx = 0.$$

Si $x_0 \in \Omega$ et $\rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ on pose $B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < \rho\}$ et :

$$(6) \quad E(\rho) = \int_{B_\rho(x_0)} A(x, u, Du) \cdot Du \, dx, \quad b(\rho) = \int_{B_\rho(x_0)} |u|^{\sigma+1} \, dx.$$

Notre résultat essentiel concernant les solutions de (EE) est le suivant :

THÉORÈME 1. — Supposons $C_2 > 0$, $C_4 > 0$, $0 \leq \sigma < q$, $0 \leq \beta \leq q+1$, $\alpha = \sigma - \beta(\sigma+1)/(q+1)$ et :

$$(7) \quad C_3 < \left(C_4 \frac{q+1}{q+1-\beta} \right)^{(q+1-\beta)/(q+1)} \left(C_2 \frac{q+1}{\beta} \right)^{\beta/(q+1)}.$$

Il existe une constante structurelle C telle que si u est une solution faible de (EE) dans Ω , $x_0 \in \Omega$ et $\rho_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ sont tels que :

$$(8) \quad \rho_0^\nu > F(\rho_0) = C \min_{(\sigma+1)/(q+1) < \tau \leq 1} \left\{ \frac{E^\tau(\rho_0)}{\tau(q+1) - \sigma - 1} \max(1, \rho_0^{\nu-1}) \max(b^\mu(\rho_0), b^\eta(\rho_0)) \right\}$$

avec :

$$(9) \quad \gamma = \frac{\tau(q+1) - \sigma - 1}{N(q-\sigma) + (q+1)(\sigma+1)}, \quad \nu = \frac{(q+1)(\sigma+1) + N(q-\sigma)}{q(\sigma+1)},$$

$$(10) \quad \mu = \frac{(1-\tau)(q+1)}{N(q-\sigma) + (q+1)(\sigma+1)}, \quad \eta = \frac{q-\sigma}{q(\sigma+1)} - \frac{\sigma+1-\tau(q+1)}{N(q-\sigma) + (q+1)(\sigma+1)},$$

alors $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in B_{\rho_1}(x_0)$ où $\rho_1^\nu = \rho_0^\nu - F(\rho_0)$.

De ce résultat on déduit en particulier :

COROLLAIRE 1. — Supposons $\Omega = \mathbb{R}^N$, $C_2 > 0$, $C_4 > 0$, $0 \leq \sigma < q$, $0 \leq \beta \leq q+1$, $\alpha = \sigma - \beta(\sigma+1)/(q+1)$ et (7). Si $u \in W^{1, q+1}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\sigma+1}(\mathbb{R}^N)$ est une solution faible de :

$$(11) \quad -\operatorname{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du) + C(x, u) = f(x),$$

où $f \in L^{(\sigma+1)/\sigma}(\mathbb{R}^N)$ s'annule pour $|x| \geq R_0$, il existe $R_1 > R_0$ dépendant des constantes structurelles, de R_0 et de $\|f\|_{L^{(\sigma+1)/\sigma}(\mathbb{R}^N)}$ tel que u soit nulle pour presque tout $|x| \geq R_1$.

Principe de la démonstration du théorème 1. — Pour presque tout $\rho \in [0, \rho_0]$ on a :

$$(12) \quad \int_{B_\rho(x_0)} A(x, u, Du) \cdot Du \, dx + C_4 \int_{B_\rho(x_0)} |u|^{\sigma+1} \, dx \\ + \int_{S_\rho(x_0)} B(x, u, Du) u \, dx \leq \int_{S_\rho(x_0)} A(x, u, Du) \cdot \nu \, d\sigma,$$

où $S_\rho(x_0) = \partial B_\rho(x_0)$ et ν est le vecteur normal sortant unitaire à $S_\rho(x_0)$, d'où :

$$(13) \quad C_5(E(\rho) + b(\rho)) \leq C_1 \left(\int_{S_\rho(x_0)} |Du|^{q+1} \, d\sigma \right)^{q/(q+1)} \left(\int_{S_\rho(x_0)} |u|^{q+1} \, d\sigma \right)^{1/(q+1)},$$

où C_5 ne dépend que des constantes structurelles. Mais pour presque tout $\rho \in [0, \rho_0]$ on a :

$$\frac{dE}{d\rho}(\rho) = \int_{S_\rho(x_0)} A(x, u, Du) \cdot Du \, d\sigma \geq C_2 \int_{S_\rho(x_0)} |Du|^{q+1} \, d\sigma.$$

L'estimation de $\left(\int_{S_\rho(x_0)} |u|^{q+1} \, d\sigma \right)^{1/(q+1)}$ se fait grâce au résultat suivant :

LEMME 1. — Il existe une constante $C = C(N, \sigma, q)$ telle que :

$$(14) \quad \|u\|_{L^{q+1}(S_\rho(x_0))} \leq C \left(\|Du\|_{L^{q+1}(B_\rho(x_0))} + \rho^\delta \|u\|_{L^{\sigma+1}(B_\rho(x_0))} \right)^\theta \|u\|_{L^{\sigma+1}(B_\rho(x_0))}^{1-\theta},$$

$$\text{où : } \theta = \frac{N(q-\sigma) + \sigma + 1}{N(q-\sigma) + (\sigma+1)(q+1)} \quad \text{et} \quad \delta = -\frac{N(q-\sigma) + (\sigma+1)(q+1)}{(q+1)(\sigma+1)}.$$

On obtient alors l'inégalité suivante :

$$(15) \quad E(\rho) + b(\rho) \leq K \left(\frac{dE}{d\rho} \right)^{q/(q+1)} (E(\rho))^{1/(q+1)} + \rho^\delta b(\rho)^{1/(\sigma+1)} b(\rho)^{(1-\theta)/(\sigma+1)},$$

où K est une constante structurelle. Si $\tau \in [0, 1]$ et K_0 est donné par :

$$(16) \quad K_0 = \max(b(\rho_0)^{(1-\tau)(1-\theta)/(\sigma+1)}, b(\rho_0)^{(1-\tau(1-\theta))/(\sigma+1) - \theta/(q+1)}),$$

nous déduisons de l'inégalité de Young :

$$(17) \quad E(\rho)^{1/(q+1)} b(\rho)^{(1-0)/0(\sigma+1)} + \rho^\delta b(\rho)^{1/0(\sigma+1)} \\ \leq 2 \rho^\delta K_0^{1/0} \max(1, \rho_0^{-\delta}) (E(\rho) + b(\rho))^{1/(q+1) + \tau(1-0)/0(\sigma+1)},$$

d'où l'inégalité différentielle suivante dont l'intégration donne le résultat :

$$(18) \quad E(\rho)^{1-0/(q+1) - \tau(1-0)/0(\sigma+1)} \leq 2 K \rho^{\delta 0} K_0 \max(1, \rho_0^{-\delta 0}) \left(\frac{dE}{d\rho} \right)^{q/(q+1)}.$$

II. L'ÉQUATION PARABOLIQUE. — Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, \mathcal{A} , \mathcal{B} (resp. \mathcal{C}) des fonctions de Caratheodory définies sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ (resp. $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}$), \mathcal{A} étant à valeurs dans \mathbb{R}^N et \mathcal{B} et \mathcal{C} à valeurs réelles. On suppose que pour des constantes M_i :

$$(19) \quad |\mathcal{A}(t, x, r, p)| \leq M_1 |p|^q, \quad \forall (t, x, r, p) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

$$(20) \quad \mathcal{A}(t, x, r, p) \cdot p \geq M_2 |p|^{q+1}, \quad \forall (t, x, r, p) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

$$(21) \quad |\mathcal{B}(t, x, r, p)| \leq M_3 |r|^\alpha |p|^\beta, \quad \forall (t, x, r, p) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

$$(22) \quad \mathcal{C}(t, x, r) r \geq M_4 |r|^{\sigma+1}, \quad \forall (t, x, r) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}.$$

Posons $\psi(r) = \text{sign}(r) r^{1/m}$. Une fonction u définie dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ est une solution faible à donnée initiale u_0 de (EP) si u vérifie pour tout $T > 0$ et tout ouvert G relativement compact dans Ω :

$$(i) \quad Du \in L^{q+1}([0, T[\times G), \quad q > 0; \quad (ii) \quad \mathcal{B}(\cdot, \cdot, u, Du) \in L^1([0, T[\times G);$$

$$(iii) \quad \mathcal{C}(\cdot, \cdot, u) \in L^1([0, T[\times G); \quad (iv) \quad u \in L^\infty(0, T; L^{(m+1)/m}(G));$$

$$(v) \quad \lim_{t \downarrow 0} \text{ess } u(t, \cdot) = u_0(\cdot) \text{ dans } L^{(m+1)/m}(G),$$

et si pour tout $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ on a :

$$(23) \quad \int_0^\infty \int_\Omega \{ \mathcal{A}(s, x, u, Du) \cdot D\zeta + \mathcal{B}(s, x, u, Du) \zeta + \mathcal{C}(s, x, u) \zeta \} dx ds \\ = \int_0^\infty \int_\Omega \psi(u(s, x)) \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx ds + \int_\Omega \psi(u_0(x)) \zeta(0, x) dx.$$

Nous définissons alors :

$$(24) \quad E(t, \rho) = \int_0^t \int_{B_\rho(x_0)} \mathcal{A}(\tau, x, u, Du) \cdot Du dx d\tau,$$

$$(25) \quad b(t, \rho) = \sup_{0 < \tau < t} \text{ess} \int_{B_\rho(x_0)} |u(\tau, x)|^{(m+1)/m} dx.$$

THÉORÈME 2. — Supposons $M_2 > 0$, $M_3 \geq 0$, $m q > 1$, $0 \leq \beta \leq q + 1$ (et $M_3 < M_2$ si $\beta = q + 1$) et $\alpha = (q + 1 - \beta(m + 1))/m(q + 1)$. Il existe des constantes structurelles $T^* > 0$, $C \geq 0$ telles que si u est une solution faible de (EP) dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ à donnée initiale u_0 , si $x_0 \in \Omega$, $\rho_0 < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ et $t < T^*$ sont tels que $u_0 = 0$ presque partout dans $B_{\rho_0}(x_0)$ et :

$$(26) \quad \rho_0^\nu > F(t, \rho_0) = C t^\lambda \min_{(m+1)/m(q+1) < \tau \leq 1} \left\{ \frac{E^\gamma(t, \rho_0)}{m \tau (q + 1) - m - 1} \max(1, \rho_0^{\nu-1}) \right. \\ \left. \times \max(b^\mu(t, \rho_0), b^\eta(t, \rho_0)) \right\}$$

où γ, ν, μ, η sont donnés au théorème 1 avec σ remplacé par $1/m$ et où :

$$(27) \quad \lambda = \frac{m+1}{N(mq-1) + (m+1)(q+1)},$$

alors $u(\tau, x) = 0$ pour presque tout $(\tau, x) \in]0, t[\times B_{\rho_1}(x_0)$ où $\rho_1^\nu = \rho_0^\nu - F(t, \rho_0)$. En outre $T^* = +\infty$ si $\mathcal{B} \equiv 0$ ou si $\beta = q+1$.

Le théorème 2 se démontre en suivant les idées du théorème 1. On en déduit :

COROLLAIRE 2. — Supposons $M_2 > 0, M_3 \geq 0, M_4 \geq 0, mq > 1, 0 \leq \beta \leq q+1$ (et $M_3 < M_2$ si $\beta = q+1$) et $\alpha = (q+1 - \beta(m+1))/m(q+1)$. Si $u \in C^0(\mathbb{R}^+; L_{loc}^{(m+1)/m}(\mathbb{R}^N))$ est une solution faible de (EP) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ telle que, pour tous (t, ρ) , $E(t, \rho)$ et $b(t, \rho)$ demeurent bornés indépendamment de $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et si la donnée initiale u_0 de u est à support compact alors pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ est à support compact. Si $\mathcal{B} = 0$ ou $\beta = q+1$ et $\text{supp. } u_0 \subset B_R(0)$ alors $\text{supp. } u(t, \cdot) \subset B_{R+C\max(t^\lambda, t^{1/m})}(0)$.

En supposant en outre $\sigma < q$ on obtient la localisation uniforme du support de la solution de (EP). Définissons à partir de (24) et (25) :

$$(28) \quad \tilde{E}(\rho) = E(+\infty, \rho), \quad \tilde{b}(\rho) = b(+\infty, \rho), \quad \tilde{c}(\rho) = \int_0^{+\infty} \int_{B_\rho(x_0)} |u(\tau, x)|^{(m+1)/m} dx d\tau.$$

THÉORÈME 3. — Supposons $M_2 > 0, M_4 > 0, \sigma \geq 0, q > 0, m > 0, 0 \leq \beta \leq q+1, \alpha = \sigma - \beta(\sigma+1)/(q+1), \max(\sigma, 1/m) < q$ et (7) avec C_i remplacé par M_i ($i=2, 3, 4$).

Il existe une constante structurelle C telle que si u est une solution faible de (EP) dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ à donnée initiale u_0 , si $x_0 \in \Omega$ et $\rho_0 < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ sont tels que $u_0 = 0$ presque partout dans $B_{\rho_0}(x_0)$ et :

$$(29) \quad \rho_0^\nu > \tilde{F}(\rho_0) = C \min_{(\tilde{\varepsilon}+1)/(q+1) < \tau \leq 1} \left\{ \frac{\tilde{E}^\gamma(\rho_0)}{\tau(q+1) - \varepsilon - 1} \max(\tilde{b}(\rho_0) + \tilde{c}(\rho_0))^\mu, \right. \\ \left. (\tilde{b}(\rho_0) + \tilde{c}(\rho_0))^\eta \max(1, \rho_0^\nu) \right\},$$

où $\tilde{\varepsilon} = \max(\sigma, 1/m)$ et où les exposants γ, μ, ν, η et κ sont positifs et dépendent (de façon rationnelle) de σ, q, N, m et τ , alors $u(t, x) = 0$ pour presque tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times B_{\rho_1}(x_0)$ où $\rho_1^\nu = \rho_0^\nu - \tilde{F}(\rho_0)$.

Si on explicite ν et κ on vérifie que $\nu - \kappa > 0$ et on démontre alors :

COROLLAIRE 3. — Supposons $M_2 > 0, M_4 > 0, \sigma \geq 0, m > 0, 0 \leq \beta \leq q+1, \alpha = \sigma - \beta(\sigma+1)/(q+1), \max(\sigma, 1/m) < q$ et (7). Si $u \in C^0(\mathbb{R}^+; L_{loc}^{(m+1)/m}(\mathbb{R}^N))$ est une solution de (EP) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ telle que $E(t, \rho)$ et $b(t, \rho)$ demeurent bornés indépendamment de $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et si le support de la donnée initiale u_0 est dans $B_R(0)$, il existe $R_1 \geq R$ tel que pour tout $t \geq 0$ $\text{supp. } u(t, \cdot) \subset B_{R_1}(0)$.

(*) Remise le 16 mai 1983, acceptée le 20 juin 1983.

[1] S. N. ANTONCEV, *Soviet Math. Dokl.*, 24, 1981, p. 420-424.

[2] J. I. DIAZ et M. A. HERRERO, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 89A, 1981, p. 249-258.

[3] J. I. DIAZ et L. VÉRON, *Local Vanishing Properties of Solutions of Elliptic and Parabolic Quasilinear Equations*, à paraître.

[4] A. S. KALASHNIKOV, *Zh. Vychisl. Mat. Fiz.*, 14, 1974, p. 891-905.

[5] A. S. KALASHNIKOV, *Trud. Sem. I. G. Petrovski*, 4, 1978, p. 137-146.

J. I. D. : Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Ciencias, U. Complutense, Madrid 3.

L. V. : Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, 37200 Tours.