C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 737-740, 1987

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Inégalité isopérimétrique dans un problème d'obstacle parabolique

J. Ildefonso Diaz et Jacqueline Mossino

Résumé — Nous établissons l'inégalité isopérimétrique $\int_0^s u_*(t, \sigma)\, d\sigma \leqq \int_0^s U_*(t, \sigma)\, d\sigma$ où u est la solution du problème d'obstacle parabolique, et U est la solution du problème « symétrisé » [u_* (resp. U_*) désigne le réarrangement décroissant de u (resp. U)]. Sous une hypothèse convenable simple, nous en déduisons que u s'annule en un temps fini.

Isoperimetric inequality for a parabolic obstacle problem

Abstract — *We establish the isoperimetric inequality* $\int_0^s u_*(t, \sigma)\, d\sigma \leqq \int_0^s U_*(t, \sigma)\, d\sigma$, *where u is the solution of the parabolic obstacle problem, and* U *is the solution of the "symmetrized" problem* [u_* *(resp.* U_**) denotes the decreasing rearrangement of u (resp.* U)]. *Under a suitable simple assumption, we deduce that u vanishes after a finite time.*

1. Introduction et notations. — Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqq 1)$ un domaine borné régulier, $Q=(0, T) \times \Omega$, $a_{ij} (1 \leqq i, j \leqq N)$ des fonctions de $L^\infty(Q)$ satisfaisant

$$(1.1)\qquad \sum_{i, j=1}^{N} a_{ij}(t, x)\, \xi_i \xi_j \geqq |\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p. p. } (t, x) \in Q.$$

Pour $c \in L^\infty(Q)$, $c \geqq 0$, $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_0 \geqq 0$, nous considérons u, solution du problème d'obstacle parabolique

$$(1.2)\qquad \left\{\begin{array}{l} u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),\ u \geqq 0,\ \partial u/\partial t \in L^2(Q),\ u|_{t=0}=u_0, \text{ et pour presque tout } t \\ \text{dans } (0, T), \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} + cu - f\right)(v-u)\, dx + \int_\Omega \sum_{i, j=1}^{N} a_{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (v-u)}{\partial x_j} dx \geqq 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ v \geqq 0. \end{array}\right.$$

Nous introduisons U, solution du problème d'obstacle dit « symétrisé », $(\widetilde{1.2})$, obtenu à partir de (1.2) en remplaçant

— Ω par $\tilde{\Omega}$, boule de $\mathbb{R}^N$, centrée à l'origine, de même mesure que Ω,

— c par 0, a_{ij} par δ_{ij} (=1 si $i=j$, 0 sinon), u_0 par $\underset{\sim}{u}_0$, f par $\underset{\sim}{f}$, où $\underset{\sim}{u}_0$ (resp. $\underset{\sim}{f}$ est le réarrangement de u_0 (resp. f), à symétrie sphérique, décroissant le long du rayon :

$$(1.3)\qquad \underset{\sim}{u}_0(x) = u_{0*}(\alpha_N |x|^N) \qquad (\alpha_N = \text{mesure de la boule unité de } \mathbb{R}^N),$$

$$(1.4)\qquad u_{0*}(s) = \operatorname{Inf}\{\theta \in \mathbb{R}, \text{ mes}\{u_0 > \theta\} \leqq s\}$$

(*voir* par exemple [9], [2], [6]), f est réarrangé par rapport à la variable spatiale :

$$(1.5)\qquad \underset{\sim}{f}(t, x) = f(t, .)_*(\alpha_N |x|^N). \quad \square$$

Pour le *problème d'obstacle elliptique*, avec obstacle nul (au moins sur $\partial\Omega$), la comparaison ponctuelle $\underset{\sim}{u}(x) \leqq U(x)$ dans $\tilde{\Omega}$ (ou $u_*(s) \leqq U_*(s)$ dans $\Omega^* = (0, |\Omega|)$, $|\Omega| = \text{mes}\, \Omega$) a été montrée par C. Bandle et J. Mossino [3], où l'on donne aussi une borne explicite

Note présentée par Jacques-Louis Lions.

0249-6291/87/03050737 $ 2.00 © Académie des Sciences

de la mesure de l'ensemble de coïncidence. Dans le cas des *équations paraboliques*, il est bien connu que les comparaisons ponctuelles $\underset{\sim}{u}(t, x) \leqq \mathrm{U}(t, x)$ ne sont pas vraies en général. La comparaison intégrale

$$\int_0^s u_*(t, \sigma)\, d\sigma \leqq \int_0^s \mathrm{U}_*(t, \sigma)\, d\sigma \qquad \left(\text{ou} \int_{\mathrm{B}_r(0)} \underset{\sim}{u}(t, x)\, dx \leqq \int_{\mathrm{B}_r(0)} \mathrm{U}(t, x)\, dx\right)$$

a été montrée d'abord par C. Bandle [2], puis par J. L. Vazquez [10], pour l'équation des milieux poreux, et ensuite par J. Mossino, J. M. Rakotoson [7], qui ont utilisé la notion de réarrangement relatif introduite en [8]. Les résultats de [7] nécessitent moins d'hypothèses de régularité que ceux de [2], et la preuve n'utilise pas l'approche elliptique faite dans [10]. Une approche différente, plus récente, des équations paraboliques, est due à A. Alvino, P.-L. Lions, G. Trombetti [1].

Le principal résultat présenté ici est le

THÉORÈME. — *Si u (resp.* U) *sont les solutions de* (1.2) [*resp.* $(\widetilde{1.2})$], U *décroît le long du rayon* ($\underset{\sim}{\mathrm{U}} = \mathrm{U}$) *et*

$$(1.6) \quad k(t, s) = \int_0^s u_*(t, \sigma)\, d\sigma \leqq \int_0^s \mathrm{U}_*(t, \sigma)\, d\sigma = \mathrm{K}(t, s), \qquad \forall\, 0 \leqq t \leqq \mathrm{T}, \quad \forall\, 0 = s \leqq |\Omega|. \blacksquare$$

Bien sûr, la comparaison des normes L^p (en espace) de u et U en découle immédiatement. Nous en déduisons également des informations sur l'ensemble de coïncidence. Par exemple (comparer avec [4] et les références dans [4]) :

COROLLAIRE. — *S'il existe un temps fini* $t_0 \geqq 0$, *et une fonction* $\varepsilon(t) \geqq 0$, *telle que* $\int_{t_0}^{+\infty} \varepsilon(t)\, dt = +\infty$, *satisfaisant* $f(x, t) \leqq -\varepsilon(t)$, p. p. $x \in \Omega$, p. p. $t > t_0$, *et si* U *est dans* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q})$, *alors il existe un temps fini* T_0 *tel que*

$$(1.7) \qquad u(t, .) \equiv \mathrm{U}(t, .) \equiv 0 \quad \textit{pour tout } t \geqq \mathrm{T}_0,$$

De plus

$$(1.8) \qquad \mathrm{T}_0 \leqq \overline{\mathrm{T}_0} \textit{ caractérisé par } \int_{t_0}^{\overline{\mathrm{T}}_0} \varepsilon(t)\, dt = \|\mathrm{U}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q})}.$$

[Évidemment, on a alors supposé la solution définie pour tout t dans $(0, \infty)$]. D'autres conséquences et compléments seront développés dans [5]. En particulier nous considérerons des obstacles plus généraux, et des solutions moins régulières.

2. IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. — La démonstration utilise, comme dans [7], la notion de réarrangement relatif (ou dérivée directionnelle de l'application réarrangement) introduite dans [8]. Elle repose d'autre part sur un principe de comparaison pour un système complémentaire parabolique [*cf.* (2.2) ci-dessous] où la diffusion n'est pas en forme divergentielle, et le coefficient $s^{2-(2/\mathrm{N})}$ dégénère. Ce principe de comparaison est établi par une technique de semi-groupes.

On commence par montrer que U décroît le long du rayon (U a évidemment la symétrie de révolution). On note

$$s(t) = \text{mes}\{u(t) > 0\}, \quad \mathrm{F}(t, s) = \int_0^s f_*(t, \sigma)\, d\sigma, \quad k_0(s) = \int_0^s u_{0*}(\sigma)\, d\sigma,\; d(s) = \mathrm{N}^2 \alpha_\mathrm{N}^{2/\mathrm{N}} s^{2-(2/\mathrm{N})}.$$

On montre que k et K appartiennent à $H^1(0, T; H^1(\Omega^*)) \bigcap_{\varepsilon>0} L^2(0, T; H^2(\varepsilon, |\Omega|))$ et satisfont

$$(2.1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial k}{\partial t} - d\dfrac{\partial^2 k}{\partial s^2} \leqq F \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial k}{\partial s} > 0 \text{ p. p. } (t, s) \in Q_u^* = \{(t, s), t \in (0, T), s \in (0, s(t))\}, \\ \dfrac{\partial k}{\partial s} \geqq 0, \qquad \forall t \in [0, T], \quad \forall s \in \bar{\Omega}^*, \\ k(t, 0) = 0 = \dfrac{\partial k}{\partial s}(t, s(t)) \left(= \dfrac{\partial k}{\partial s}(t, |\Omega|) \right), \qquad \forall t \in [0, T], \\ k(0, s) = k_0(s), \qquad \forall s \in \bar{\Omega}^*, \end{array}\right.$$

$$(2.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial K}{\partial t} - d\dfrac{\partial^2 K}{\partial s^2} \geqq F \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial K}{\partial s} \geqq 0 \\ \left(\dfrac{\partial K}{\partial t} - d\dfrac{\partial^2 K}{\partial s^2} - F\right)\dfrac{\partial K}{\partial s} = 0 \end{array}\right\} \text{ p. p. dans } Q^* = (0, T) \times \Omega^*, \\ K(t, 0) = 0 = \dfrac{\partial K}{\partial s}(t, |\Omega|), \qquad \forall t \in [0, T], \\ K(0, s) = k_0(s), \qquad \forall s \in \bar{\Omega}^*. \end{array}\right.$$

Pour établir (2.1), on utilise que, pour t fixé (p. p. θ)

$$\int_{u(t)>0} \frac{\partial u}{\partial t} dx = w(t, \mu(\theta)),$$

où

$$\mu(\theta) = \text{mes}\{u(t) > \theta\}, \qquad w(t, s) = \int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} d\sigma, \; \frac{\partial w}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{*u} = \frac{\partial u_*}{\partial t},$$

et v_{*_u} est le réarrangement de v par rapport à u (*cf.* [8]). Ensuite, on montre que $k \leqq K$. Pour cela, on introduit l'opérateur multivoque $M = X \to P(X)$ (ensemble des parties de X), sur l'espace de Banach $X = L^\infty(\Omega^*)$, défini par :

$$(2.3)\quad \left\{\begin{array}{l} D(M) = \{ w \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}^*) \bigcap_{\varepsilon>0} H^2(\varepsilon, |\Omega|);\ w(0) = w'(|\Omega|) = 0; \\ \qquad w'(s) \geqq 0, \forall s \in]0, |\Omega|]; \\ \qquad \exists b \in L^2(\Omega^*), b(s) \in \beta(w'(s)), \text{ p. p. } s \in \Omega^*, -dw'' + b \in X\}, \\ \qquad \text{avec } \beta(t) = (-\infty, 0] \text{ si } t = 0, \quad 0 \text{ si } t > 0, \\ M w = \{ -dw'' + b \in X \text{ tels que } b \in L^2(\Omega^*), b(s) \in \beta(w'(s)) \text{ p. p. } s \in \Omega^* \} \end{array}\right.$$

On montre que k et K sont des solutions fortes de problèmes de Cauchy associés à M :

$$\frac{dk}{dt} + M k \ni g, \qquad \frac{dK}{dt} + MK \ni G, \qquad \text{avec} \quad G = F, \qquad g = \text{Min}\left(\frac{\partial k}{\partial t} - d\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}, F\right) \leqq G.$$

On montre ensuite que M est m-T accrétif sur X, c'est-à-dire

$$(2.4)\qquad R(I + M) = X,$$

$$(2.5)\qquad \|[(I + M)^{-1} h - (I + M)^{-1} \hat{h}]_+\|_X \leqq \|(h - \hat{h})_+\|_X.$$

Pour cela, on introduit β_λ, l'approximation Yosida de β, $d_\lambda = d+\lambda$ et w_λ solution de

$$-d_\lambda w_\lambda'' + \beta_\lambda(w_\lambda') + w_\lambda = h, \qquad w_\lambda(0) = w_\lambda'(|\Omega|) = 0. \tag{2.6}$$

On montre que

$$\|(w_\lambda - \hat{w}_\lambda)_+\|_X \leqq \|(h-\hat{h})_+\|_X. \tag{2.7}$$

Lorsque $\lambda \searrow 0$, $w_\lambda \to w$ en un sens convenable [$w_\lambda \to w$ dans $\mathscr{C}^0(\bar{\Omega}^*)$, $w_\lambda' \to w'$ dans un L^α faible, α convenable, $d_\lambda w_\lambda'' \to dw''$ dans L^2 faible], et w satisfait

$$w + \mathrm{M}\,w \ni h. \tag{2.8}$$

On a donc (2.4). Ensuite on montre que (2.8) admet une solution unique, car si z est la différence de deux solutions de (2.8), $\bar{z}(r) = z(s)$, $s = \alpha_N r^N$, $\bar{z}$ satisfait $(\bar{z} - \bar{z}'')\bar{z}' = (1/2)(\bar{z}^2 - \bar{z}'^2)' \leqq 0$ presque partout, puis (par diverses intégrations) $\bar{z}^2 - \bar{z}'^2 = 0$, et finalement $\bar{z} \equiv 0$. Enfin, (2.5) découle de (2.7) par passage à la limite. Le principe de comparaison ($k \leqq \mathrm{K}$) résulte enfin de la m-T accrétivité de M, par la théorie classique.

Note reçue et acceptée le 28 septembre 1987.

Références bibliographiques

[1] A. Alvino, P.-L. Lions et G. Trombetti, Comparaison des solutions d'équations paraboliques et elliptiques par symétrisation. Une méthode nouvelle, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 303, série I, 1986, p. 975-978.

[2] C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1980.

[3] C. Bandle et J. Mossino, Application du réarrangement à une inéquation variationnelle, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 296, série I, 1983, p. 501-504; Rearrangement in variational inequalities, *Ann. di Mat. Pura ed Appl.*, (IV), CXXXVIII, p1984, p. 1-14.

[4] J. I. Diaz, Anulacion de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach, *Revista de la Real Acad. Sc. Ex. Madrid*, 74, 1980, p. 865-880.

[5] J. I. Diaz et J. Mossino, *Isoperimetric inequalities in the parabolic obstacle problem*, en préparation.

[6] J. Mossino, *Inégalités isopérimétriques et applications en physique*, Hermann, 1984.

[7] J. Mossino et J. M. Rakotoson, Isoperimetric inequalities in parabolic equations, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, série IV, XIII, n° 1, 1986, p. 51-73.

[8] J. Mossino et R. Temam, Directional derivative of the increasing rearrangement mapping, and application to a queer differential equation in plasma physics, *Duke Math. J.*, 48, 1981, p. 475-495.

[9] G. Polya et C. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, 1951.

[10] J. L. Vazquez, Symétrisation pour $u_t = \Delta\varphi(u)$ et applications, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 295, série I, 1982, p. 71-74 et 296, série I, 1983, p. 455.

J. I. D. : *Matematicas Aplicadas, Univ. Complutense*, 28040 *Madrid, Espagne ;*

J. M. : *C.N.R.S. et Université Paris-Sud*,

Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex.*